گام به گام ریاضی

پایه: یازدهم تجربی

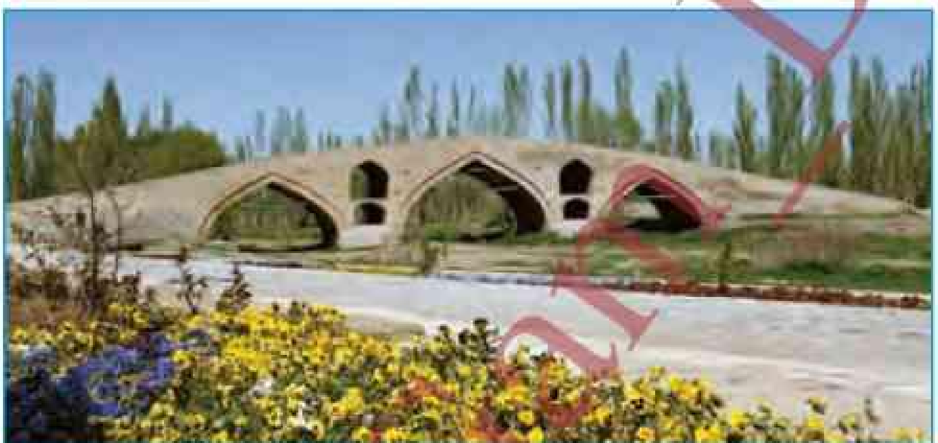
با تشکر از زحمات سرکار خانم عطیه تبریزی و
گروه ریاضی متوسطه دوم استان خوزستان

تهیه شده توسط کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

فصل ۱

هندسهٔ تحلیلی و جبر



منحنی مسیر حرکت بسیاری از اشیا را به کمک یک معادلهٔ درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این فصل نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ می‌دانیم از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات دو نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم نمود.

۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه محورهای مختصات مقابل رسم کنید :

ب) $L_2: y=2x-3$

x	۰	۲
y	-۳	۱

الف) $L_1: y=2x+1$

x	-۱	۰
y	-۱	۱

ت) $L_4: x=-2$

این خط خاص است محور طول ها را در نقطه ی (۰ ,۲-) قطع می کند و موازی محور y ها است.

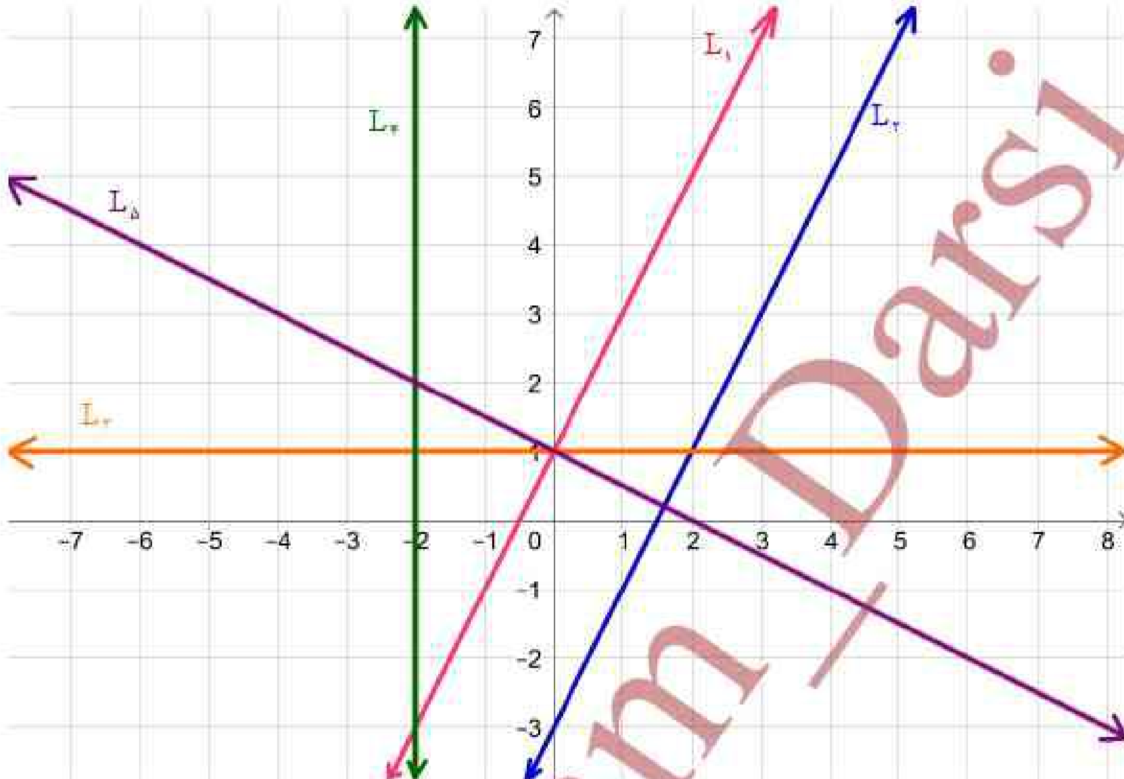
پ) $L_3: y=1$

این خط خاص است محور عرض ها را در نقطه ی (۱ ,۰) قطع می کند و موازی محور x ها است

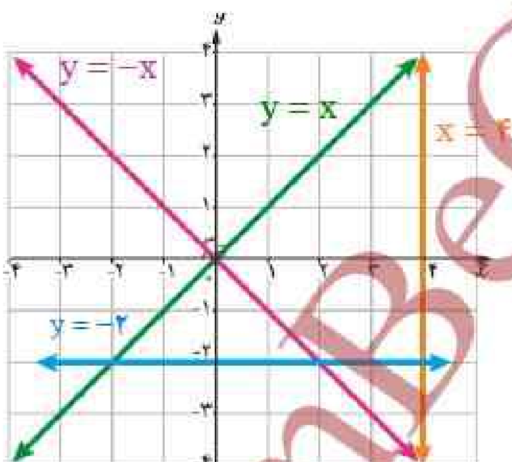
ث) $L_5: x+2y=2$

x	۰	۲
y	۱	۰

«رسم نمودار ها در صفحهٔ بعد»



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های مقابل را روی شکل بنویسید



۴ الف) توجه داریم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی افقی؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با $m_{AB}=\frac{y_B-x_A}{x_B-x_A}$.

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای شیب‌های برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، ... عرض از مبدأ ... خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

الف) $L_۱: y=۲x+۱$
$m=۲ \ , \ h=۱$

ب) $L_۲: y=۲x-۳$
$m=۲ \ , \ h=-۳$

پ) $L_۳: y=۱$
$m=۰ \ , \ h=۱$

ت) $L_۴: x=-۲$
شیب این خط تعریف نشده است و عرض از مبدأ هم ندارد.

ث) $L_۵: x+۲y=۲$

$$۲y=-x+۲ \Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}x+۱ \Rightarrow m=-\frac{۱}{۲} \ , \ h=۱$$

خط های $L_۱$ و $L_۲$ با هم موازی هستند.

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=mx+h$ دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط: $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط: $y=-۲x+h$

$B(۳,۱)$ روی خط L واقع است: $۱=-۲(۳)+h \Rightarrow h=۷$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس:

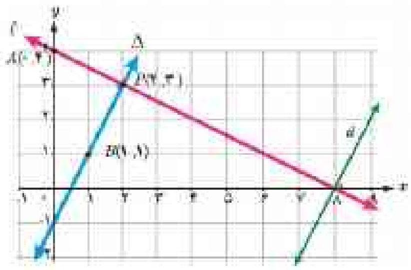
معادلهٔ خط L: $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P(۲,-۱)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

خط گذرنده از نقطه $P(۲,-۱)$ با خط $y=۳x-۴$ موازی است پس $m=۳$ همچنین $P(۲,-۱)$ روی خط است پس داریم:

$$-۱=۳\times۲+h \Rightarrow h=-۷ \Rightarrow y=۳x-۷$$

فعالیت کلاسی



۱ دو خط l و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. شیب آنها را مورد توجه قرار می‌دهیم.

P و A شیب خط l گذرا از نقاط : $m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{3-4}{2-0} = \frac{-1}{2}$

P و B شیب خط Δ گذرا از نقاط : $m' = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B} = \frac{3-1}{2-1} = 2$

۲ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم: $mm' = (\frac{-1}{2})(2) = -1$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوسِ یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ موازی است؛ پس شیب خط T برابر عدد ۲ خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر L برابر قرینهٔ معکوس شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[1]؛ یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (-1) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm' = -1$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

کار در کلاس ص ۴

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L: y = 5x - 2$ $\quad m = 5 \quad$ $T: y = \frac{-1}{5}x + 3$ $\quad m' = \frac{-1}{5} \Rightarrow mm' = -1$

ب) $L: y = \frac{1}{2}x + 7$ $\quad m = \frac{1}{2} \quad$ $T: x - 2y = 1$ $\quad x - 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m' = \frac{1}{2} \Rightarrow m = m'$

پ) $L: 2x - 3y + 3 = 0$ $\quad m = \frac{-a}{b} \Rightarrow m = \frac{2}{3} \quad$ $T: 3x + 2y = 0$ $\quad m' = \frac{-a}{b} \Rightarrow m' = \frac{-3}{2} \Rightarrow mm' = -1$

ت) $L: x = 1$ این خط عمودی است $\quad$ $T: y = -3$ خط d افقی است بنا براین دوخط بر هم عمود هستند.

ث) $L: y = 3x + 1$ $\quad m = 3 \quad$ $T: x = 3y - 1$ پس در قسمت (ث) دو خط فقط متقاطع هستند.

$x = 3y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m' = \frac{1}{3} \Rightarrow m \neq m',\ mm' \neq -1$

۲ خط L به معادلهٔ $۲y-۳x=۱$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+۵$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

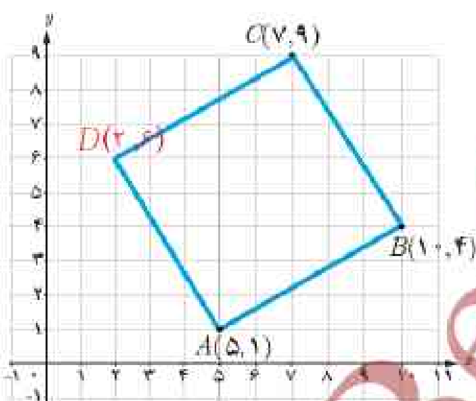
$$۲y-۳x=۱ \Rightarrow -۳x+۲y-۱=۰ \Rightarrow m'=\frac{-a}{b} \Rightarrow m'=\frac{۳}{۲}$$

$$y=mx+۵ \Rightarrow m=m'=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+۵$$

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

$$y=mx+۵ \Rightarrow mm'=-۱ \Rightarrow m=-\frac{۲}{۳} \Rightarrow y=\frac{-۲}{۳}x+۵$$

۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ دو رأس مجاور آن هستند.



الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

$$m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow m_{AB}=\frac{۳}{۵}$$

ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

می دانیم که ضلع **AB** بر ضلع **AD** عمود است پس : $m_{AD}=\frac{-۵}{۳}$

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(۷,۹)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

نقطهٔ **D** محل برخورد دوپاره خط **AD** و **CD** است اگر معادله ی خط ها گذرنده از این دو خط را به دست آوریم و نقطه ی برخورد آن ها را بیابیم مختصات **D** به دست می آید.

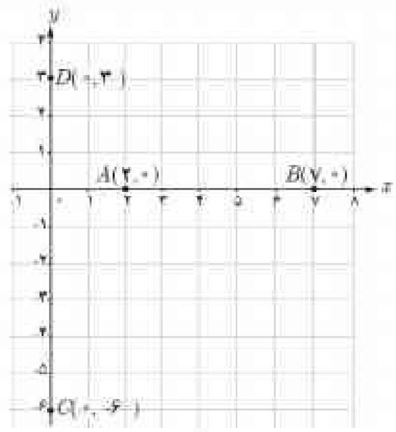
$$m_{CD}=\frac{۳}{۵}\ ,\ ۹=\frac{۳}{۵}\times ۷+h \xrightarrow{\times ۵} ۴۵=۲۱+۵h \Rightarrow h=\frac{۲۴}{۵} \Rightarrow y=\frac{۳}{۵}x+\frac{۲۴}{۵} \xrightarrow{\times ۵} ۳x-۵y=-۲۴$$

$$m_{AD}=\frac{-۵}{۳}\ ,\ ۱=\frac{-۵}{۳}\times ۵+h \xrightarrow{\times ۳} ۳=-۲۵+۳h \Rightarrow h=\frac{۲۸}{۳} \Rightarrow y=-\frac{۵}{۳}x+\frac{۲۸}{۳} \xrightarrow{\times ۳} ۵x+۳y=۲۸$$

$$\begin{cases} ۵x+۳y=۲۸ \\ ۳x-۵y=-۲۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۵x+۱۵y=۱۴۰ \\ ۹x-۱۵y=-۷۲ \end{cases} \Rightarrow ۳۴x=۶۸ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow ۵\times ۲+۳y=۲۸ \Rightarrow y=۶ \Rightarrow D(۲,۶)$$

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید.

الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

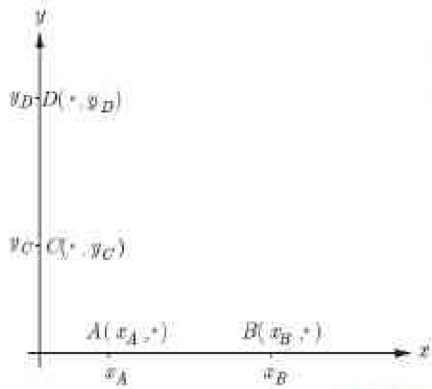
$AB = |x_B - x_A| = |۷ - ۲| = |۵| = ۵$

$BA = |x_A - x_B| = |۲ - ۷| = |-۵| = ۵$

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

$DC = |y_D - y_C| = |۳ - (-۶)| = |۹| = ۹$

$CD = |y_C - y_D| = |-۶ - ۳| = |-۹| = ۹$



پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.

$$AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|$$

$$CD = |y_D - y_C| = |y_C - y_D|$$

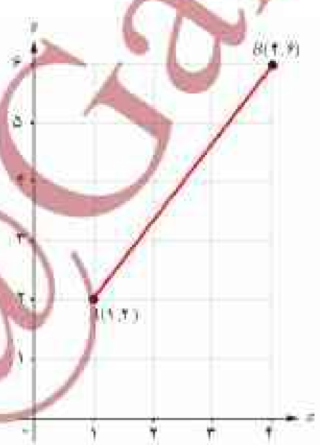
در حالت کلی می‌توان گفت:

۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

چون طول پاره خط AB با طول پاره خط BA برابر است و همواره عددی مثبت است پس باید از قدر مطلق استفاده کنیم (برای پاره خط CD هم همینطور)

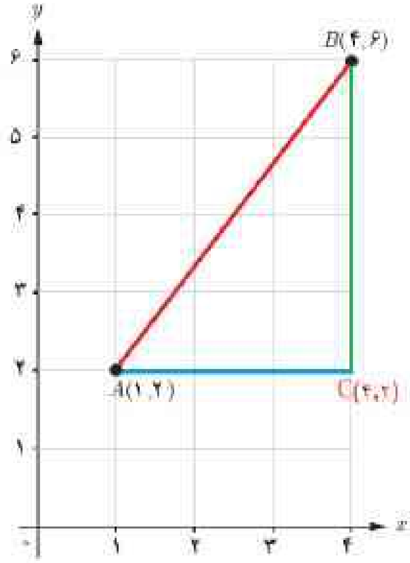
فعالیت کلاسی



۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.

طول پاره خط مساوی ۵ سانتی متر است.

۲ بدون استفاده از خط کش و تنها با محاسبه، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟



از نقطهٔ **B** بر محور **x** ها و از نقطهٔ **A** بر محور **y** ها عمود می کنیم تا نقطهٔ **C** به دست آید . سپس به کمک قضیه فیثاغورس داریم

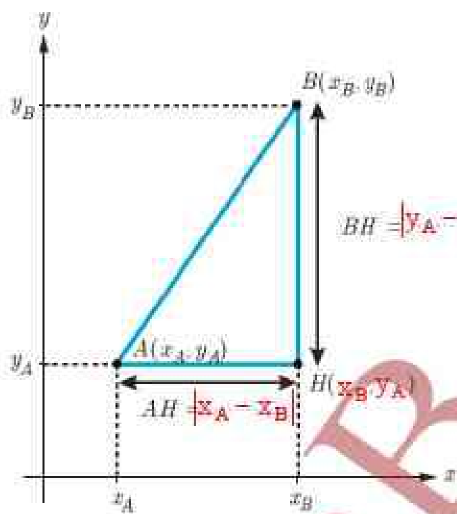
$$AB = \sqrt{۹ + ۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

۳ در شکل مقابل :

الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

$H(x_B , y_A)$

ب) طول پاره‌خط های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید. $BH = |y_A - y_B|$



پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.

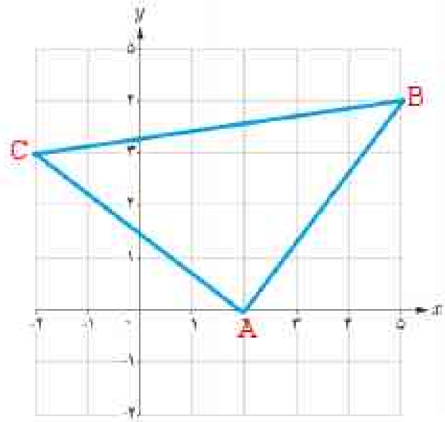
$$AB = \sqrt{AH^۲ + BH^۲} = \sqrt{|x_A - x_B|^۲ + |y_A - y_B|^۲} = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$.

کار در کلاس

۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.



الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$AC=\sqrt{(x_A-x_C)^۲+(y_A-y_C)^۲}=\sqrt{(۲+۲)^۲+(۰-۳)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

$$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^۲+(y_B-y_C)^۲}=\sqrt{(۵+۲)^۲+(۴-۳)^۲}=\sqrt{۴۹+۱}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

محیط: $P=۵+۵+۵\sqrt{۲}=۱۰+۵\sqrt{۲}$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

مثلث متساوی الساقین است.

پ) به دو روش نشان دهید $\overset{\Delta}{ABC}$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

الف) طول اضلاع مثلث در قضیه فیثاغورس صدق می کند: $۵^۲+۵^۲=۲۵ \Rightarrow AB^۲+AC^۲=BC^۲$

ب) دو خط گذرنده از پاره خط های **AB** و **AC** بر هم عمود هستند زیرا حاصل ضرب شیب این خط ها برابر با **۱-** است.

$$m_{AB}=\frac{۴-۰}{۵-۲}=\frac{۴}{۳},\ m_{AC}=\frac{۳-۰}{-۲-۲}=\frac{-۳}{۴}\Rightarrow m_{AB}\times m_{AC}=\frac{۴}{۳}\times\frac{-۳}{۴}=-۱$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times AC\times AB\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۵\times ۵=۱۲/۵$$

۲ در یکی از جاده‌های کشور تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف بر روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. نزدیک‌ترین پایگاه‌های امداد هوایی به محل تصادف در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگرد امداد به محل حادثه پیشنهاد می کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

$$\left.\begin{aligned}PA&=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۱۰)^۲+(۳۰-(-۲۰))^۲}=\sqrt{۱۶۰۰+۲۵۰۰}=\sqrt{۴۱۰۰}=۱۰\sqrt{۴۱}\\PB&=\sqrt{(x_B-x_P)^۲+(y_B-y_P)^۲}=\sqrt{(۵۰-۸۰)^۲+(۳۰-۹۰)^۲}=\sqrt{۹۰۰+۳۶۰۰}=\sqrt{۴۵۰۰}=۱۰\sqrt{۴۵}\end{aligned}\right\}\Rightarrow PB>PA$$

پایگاه **A** را پیشنهاد می دهم زیرا به محل نزدیک تر حادثه است.

۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-6,8)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

$$ON = \sqrt{(x_N - x_O)^2 + (y_N - y_O)^2} = \sqrt{(-6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E, y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

$$OE = \sqrt{(x_E - x_O)^2 + (y_E - y_O)^2} = \sqrt{(x_E - 0)^2 + (y_E - 0)^2} = \sqrt{x_E^2 + y_E^2} \Rightarrow OE = \sqrt{x_E^2 + y_E^2}$$

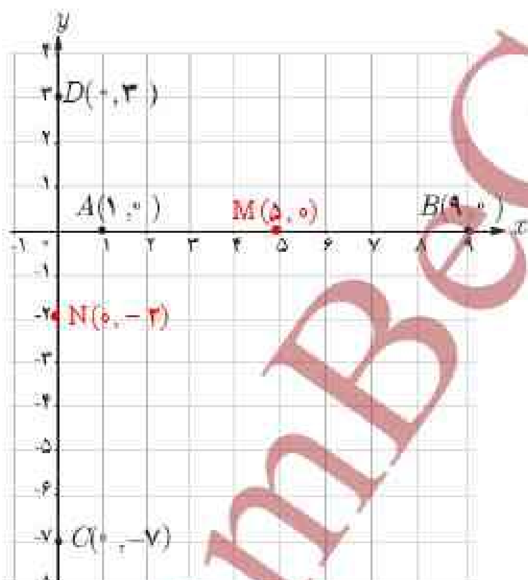
مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

فعالیت

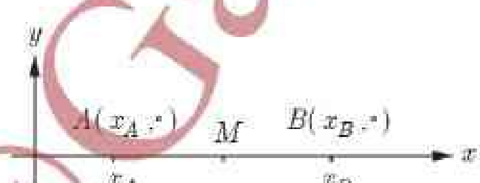
این شکل را در نظر بگیرید.

الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید. M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.



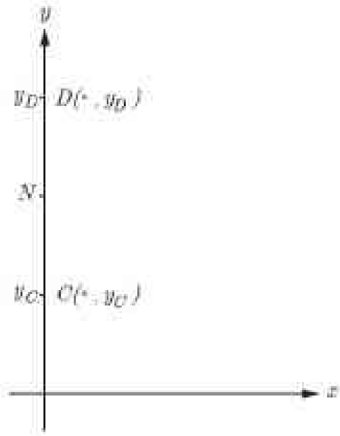
پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.



M وسط $AB \Rightarrow AM = MB$

$$\Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M$$

$$\Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

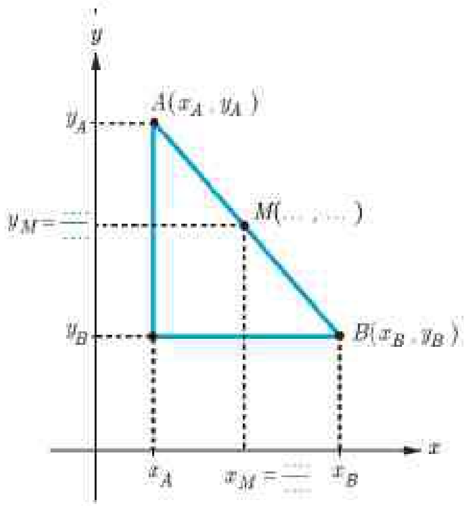


ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

N وسط CD $\Rightarrow$ $CN = ND$ ......

$$\Rightarrow y_N - y_C = y_D - y_N$$

$$\Rightarrow ۲y_N = y_C + y_D \Rightarrow y_N = \frac{y_C + y_D}{۲}$$



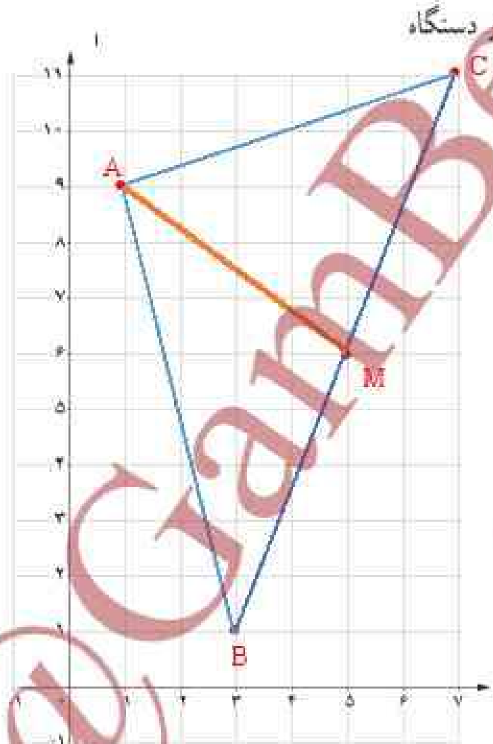
ت) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد:

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{۲}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow M(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲})$$

کار در کلاس

۱ مثلث با رئوس $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آنها را در دستگاه محورهای مختصات مقابل مشخص کنید.



الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

$$M = (\frac{۳ + ۷}{۲}, \frac{۱ + ۱۱}{۲}) = (۵, ۶)$$

ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

در این قسمت یاد آوری میانه مثلث ضروری به نظر می رسد.

(پاره خطی که وسط یک ضلع را به رأس مقابل آن ضلع وصل می کند.)

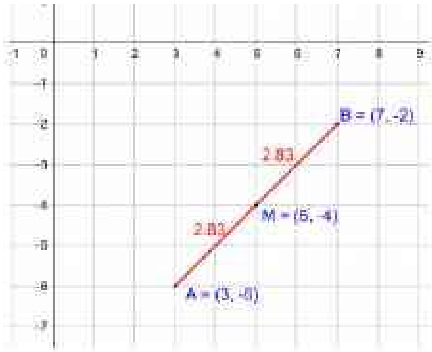
$$AM = \sqrt{(۵ - ۱)^۲ + (۶ - ۹)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$$

پ) معادلهٔ میانهٔ AM را به دست آورید.

$$m_{AM} = \frac{۹ - ۶}{۱ - ۵} = \frac{-۳}{۴} \Rightarrow y - ۶ = \frac{-۳}{۴}(x - ۵)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۳۹}{۴} \quad , \quad ۳x + ۴y = ۳۹$$

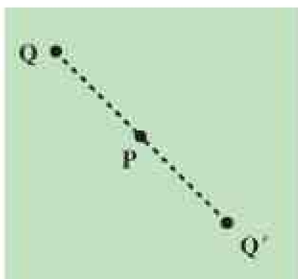
۲ الف) نقطهٔ $N(5,-4)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(7,-2)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.



چون **N** وسط پاره خط **AB** است پس داریم :

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\Rightarrow 5=\frac{x_A+7}{2}\Rightarrow x_A=3$$
$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow -4=\frac{y_A+(-2)}{2}\Rightarrow y_A=-6$$

ب) قرینهٔ نقطهٔ $A(1,2)$ نسبت به نقطهٔ $M(-1,2)$ را به دست آورید.



یاد آوری قرینه ی نقطه ای نسبت به یک نقطه ی دیگر در صفحه :

در شکل مقابل نقطه ی **Q'** قرینه ی نقطه ی **Q** نسبت به نقطه ی **P** است به شرطی که **PQ=PQ'** در نتیجه می بینیم که نقطه ی **P** وسط دو نقطه ی **Q** و **Q'** است .

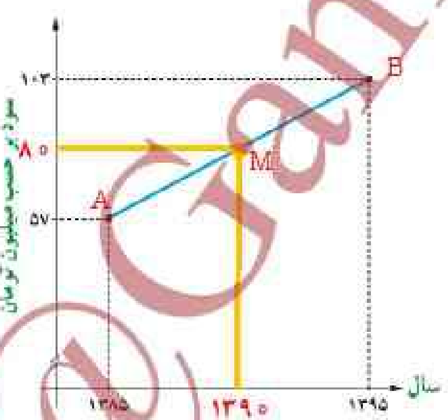
قرینه ی نقطه ی **A** را **A'** می نامیم و با توجه به مطالب فوق داریم :

AM=A'M پس **M** وسط **AA'** در نتیجه

$$x_M=\frac{x_A+x_{A'}}{2}\Rightarrow -1=\frac{x_A+1}{2}\Rightarrow x_A=-3$$
$$y_M=\frac{y_A+y_{A'}}{2}\Rightarrow 4=\frac{y_A+2}{2}\Rightarrow y_A=6$$

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha\,,\,\beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} x_O=\dfrac{x_P+x_{P'}}{2}\Rightarrow 0=\dfrac{\alpha+x_{P'}}{2}\Rightarrow x_{P'}=-\alpha \\ y_O=\dfrac{y_P+y_{P'}}{2}\Rightarrow 0=\dfrac{\beta+y_{P'}}{2}\Rightarrow y_{P'}=-\beta \end{array}\right\}\Rightarrow P'(-\alpha,-\beta)$$



۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

برای محاسبه ی میانگین سود سالانه باید مقدار عرض نقطه ی وسط پاره خط آبی رنگ را به دست آوریم

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow y_M=\frac{57+103}{2}\Rightarrow y_M=80$$

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

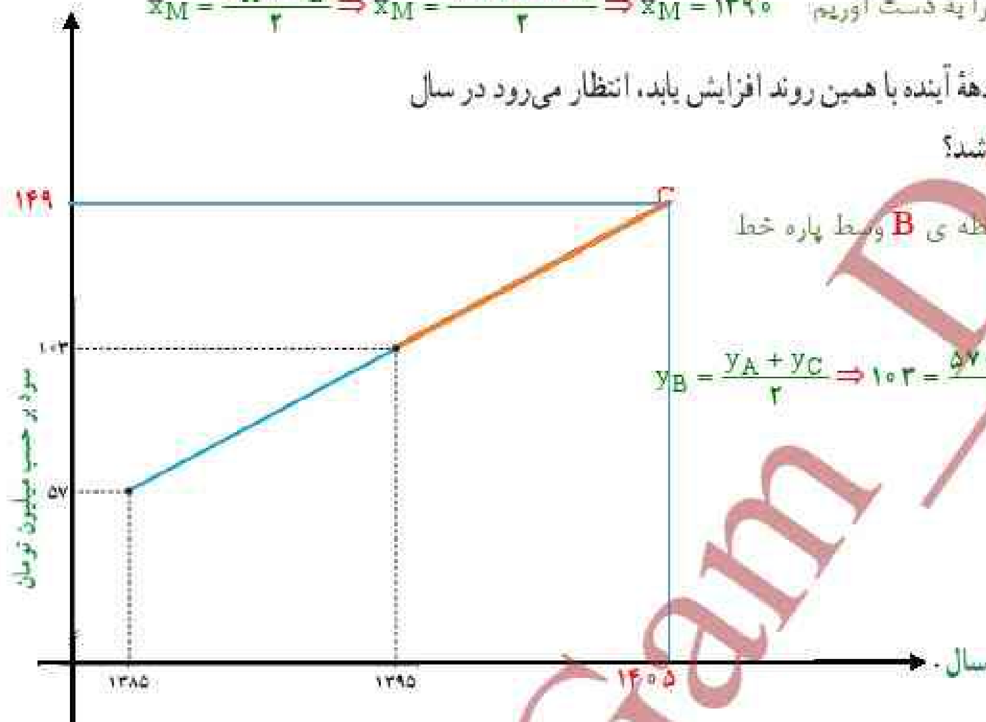
برای اینکه بفهمیم در کدام سال مقدار سود سالانه با این میانگین برابر بوده باید

طول نقطه ی وسط پاره خط آبی را به دست آوریم. $x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow x_M = \frac{۱۳۸۵ + ۱۳۹۵}{۲} \Rightarrow x_M = ۱۳۹۰$

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهۀ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

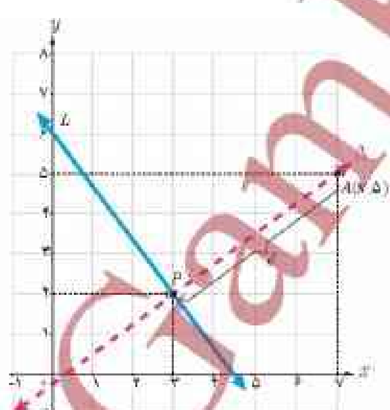
با توجه به شکل واضح است که نقطه ی **B** وسط پاره خط **AC** است.

$y_B = \frac{y_A + y_C}{۲} \Rightarrow ۱۰۳ = \frac{۵۷ + y_C}{۲} \Rightarrow y_C = ۲۰۶ - ۵۷ = ۱۴۹$



فاصلۀ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلۀ نقطۀ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطۀ A و معادلۀ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.



مثال : فاصلۀ نقطۀ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلۀ $۴x + ۳y = ۱۸$ به دست آورید.

حل : چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلۀ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.

$$\Delta : y = \frac{۳}{۴}x + h$$

$$\text{روی } \Delta \text{ است } A(۷,۵):\ ۵ = \frac{۳}{۴}(۷) + h \Rightarrow h = \frac{-۱}{۴}$$

$$\text{معادله } \Delta:\ y = \frac{۳}{۴}x - \frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta : ۳x - ۴y = ۱$$

اگر معادلۀ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطۀ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L: ۴x + ۳y = ۱۸ \\ \Delta: ۳x - ۴y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = ۳ \ , \ y = ۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

با به‌کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[1] :

فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=۰$ به دست می‌آوریم :

$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

کار در کلاس

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷,-۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x+y=۵$

$$۲x+y-۵=۰\Rightarrow a=۲\ ,\ b=۱\ ,\ c=-۵\ ,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$d=\frac{|۲(۷)+۱(-۴)-۵|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\Rightarrow d=\sqrt{۵}$$

ب) $T: x=۵$

$$x-۵=۰\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۰\ ,\ c=-۵\ ,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

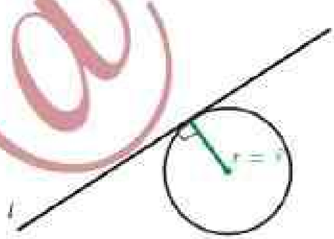
$$d=\frac{|۱(۷)+۰\times(-۴)-۵|}{\sqrt{۱+۰}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

پ) $\Delta: y=۰$

$$\Rightarrow a=۰\ ,\ b=۱\ ,\ c=۰\ ,\ d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

$$d=\frac{|۰\times(۷)+۱(-۴)+۰|}{\sqrt{۰+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۱}}=۴\Rightarrow d=۴$$

۲ خط $L: ۳x-۴y=۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است).



پس باید با توجه به راهنمایی که کرده فاصله ی نقطه ی مرکز را از خط l به دست آوریم.

$$r=\frac{|۳\times۲+(-۴)\times(-۱)+۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}\Rightarrow r=۲$$

حل تمرینات صفحه ی ۹

تمرین

① وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$L: 2x - y = 1 \quad m_L = 2$

$T: y = 2x - 3 \quad m_T = 2$

$\Delta: x + 2y = 0 \quad m_\Delta = -\frac{1}{2}$

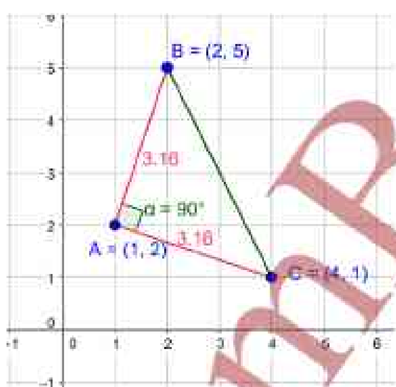
با توجه به شیب های خط ها : خط **L** موازی خط **T** است و خط **Δ** بر دو خط **L** و **T** عمود است.

② دو نقطهٔ $A(3, 14)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

اگر نقطه ی **M** وسط پاره خط **AB** باشد ، پس : $M(\frac{14+10}{2}, \frac{3-13}{2}) \Rightarrow M(12, -5)$

فاصله ی مبدأ از نقطه ی **M** : $OM = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$

③ نشان دهید مثلث با رئوس $A(1, 2)$، $B(2, 5)$ و $C(4, 1)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.



$$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \\ AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow AB = AC$$

راه اول :

$$m_{AB} = \frac{5-2}{2-1} = 3 \ , \ m_{AC} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{AB} \times m_{AC} = 3 \times -\frac{1}{3} = -1$$

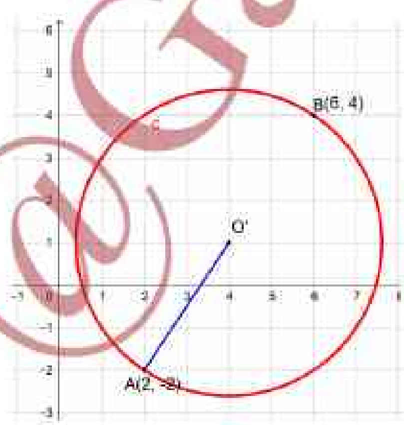
راه دوم :

$$BC = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 = (\sqrt{20})^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

④ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ هستند.

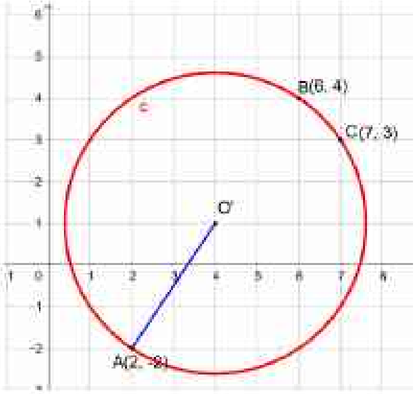
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.



مختصات مرکز دایره نقطه وسط قطر یعنی وسط پاره خط **AB** است :

$$O'(\frac{2+6}{2}, \frac{4-2}{2}) \Rightarrow O'(4, 1) \quad ,$$

$$O'A = \sqrt{(x_A - x_{O'})^2 + (y_A - y_{O'})^2} \Rightarrow O'A = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$



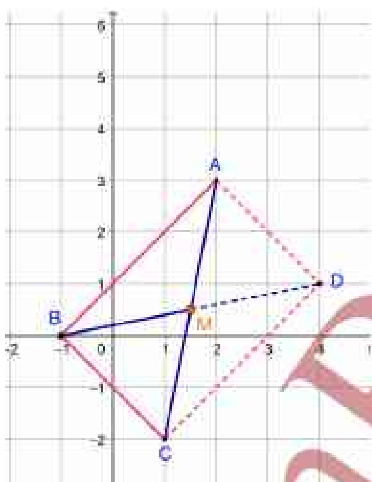
ب) آیا نقطهٔ $C(7\,,\,3)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

C روی دایره باشد باید OC نیز برابر با طول شعاع دایره باشد :

$$O'C = \sqrt{(4-7)^2+(1-3)^2} = \sqrt{13}$$

۵ نقاط $A(2\,,\,3)$، $B(-1\,,\,0)$ و $C(1\,,\,-2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

محل برخورد قطر ها را **M** می نامیم و مختصات آن را با داشتن مختصات دو سر پاره خط **AC** به دست می آوریم. حالا می دانیم که نقطه ی **M** وسط قطر دیگر هم هست پس به کمک فرمول می توانیم مختصات رأس چهارم **D** را بیابیم.



$$MA = MC \Rightarrow M\left(\frac{2+1}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

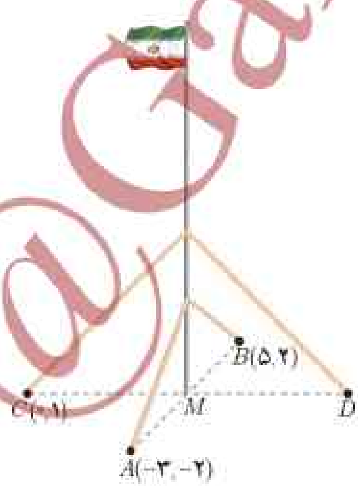
$$MB = MD \Rightarrow x_D = 2x_M - x_B \Rightarrow x_D = 2\times\frac{3}{2}-(-1) = 4$$

$$\Rightarrow y_D = 2y_M - y_B \Rightarrow y_D = 2\times\frac{1}{2} - 0 = 1 \Rightarrow D(4,1)$$

راه کوتاه تر :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 2 \Rightarrow x_D = 4 \\ y_D - 3 = -2 \Rightarrow y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4\,,\,1)$$

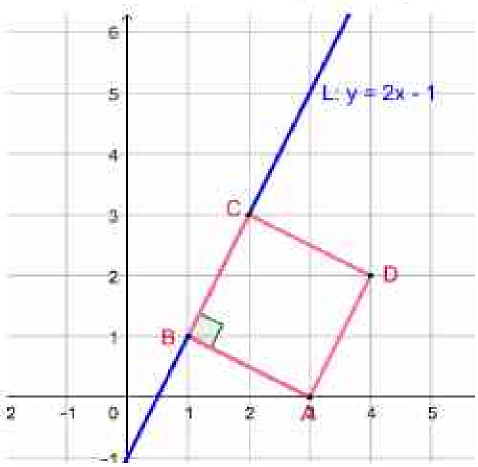
۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصلهٔ هر نقطه تا میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.



$$MA = MB \Rightarrow M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \Rightarrow M(1,0)$$

$$\left.\begin{aligned} MC = MD \Rightarrow x_D = 2x_M - x_C \Rightarrow x_D = 2 - 0 = 2 \\ MC = MD \Rightarrow y_D = 2y_M - y_C \Rightarrow y_D = 0 - 1 = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D(2,-1)$$

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳ , ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



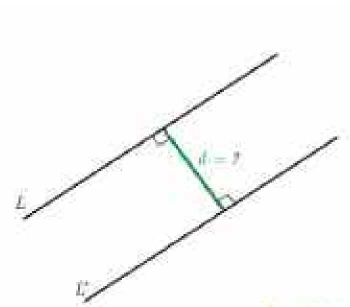
نقطه ی **A** روی خط قرار ندارد بنا براین از **A** بر خط **L** عمود می کنیم .

فاصله ی این نقطه از خط طول ضلع مربع است.

$A(۳,۰) = (x_۰, y_۰)$, $۲x - y - ۱ = ۰$

$$AB = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} \Rightarrow AB = \frac{|۲\times۳ + (-۱)\times۰ + (-۱)|}{\sqrt{۴+۱}} \Rightarrow d = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$S = AB^۲ \Rightarrow S = ۵$$



۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ با یکدیگر موازی‌اند.

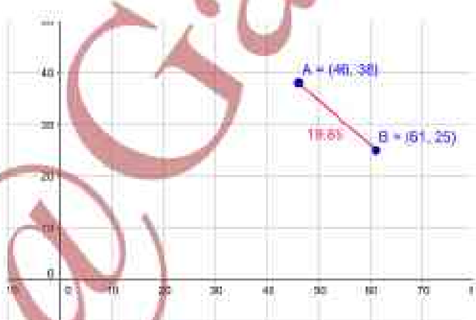
ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی: یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله آن را از خط دیگر به دست آورید.)

$$\left.\begin{array}{l} ۵x - ۱۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow -۱۲y = -۵x - ۸ \xrightarrow{\div -۱۲} y = \frac{۵}{۱۲}x + \frac{۸}{۱۲} \Rightarrow m = \frac{۵}{۱۲} \\ -۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow ۲۴y = ۱۰x - ۱۰ \xrightarrow{\div ۲۴} y = \frac{۱۰}{۲۴}x - \frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow m' = \frac{۵}{۱۲} \end{array}\right\} \Rightarrow m = m'$$

$$x = ۱ \Rightarrow -۱۰\times۱ + ۲۴y + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow A(۱,۰)$$

$$d = \frac{|۵(۱) - ۱۲(۰) + ۸|}{\sqrt{۱+۰}} = ۱$$

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



$$AB = \sqrt{(۶۱ - ۴۶)^۲ + (۲۵ - ۳۸)^۲} = \sqrt{۲۲۵ + ۱۶۹} = \sqrt{۳۹۴} = ۱۹/۸۵$$

$$۱۱۰ \times ۱۹/۸۵ = ۲۱۸۳/۵$$

$$AB = \sqrt{(۶۱\times۱۱۰ - ۴۶\times۱۱۰)^۲ + (۲۵\times۱۱۰ - ۳۸\times۱۱۰)^۲}$$

$$= \sqrt{(۱۱۰)^۲\times۲۲۵ + (۱۱۰)^۲\times۱۶۹} = ۱۱۰\times\sqrt{۳۹۴} = ۱۱۰\times۱۹/۸۵ = ۲۱۸۳/۵$$

درس دوم

تابع درجه ۲ و معادلهٔ درجه دوم

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصی از معادله‌ها[1] آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^4-10x^2+9=0$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجه ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت x^2، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$x^2=u \Rightarrow u^2-10u+9=0$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4(1)(9)=64$$

$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-1)(u-9)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u=1\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=-1\end{cases}\\ u=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-3\end{cases}\end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های مقابل را حل کنید.

الف) $2x^4-7x^2-4=0$

$2x^4-7x^2-4=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow 2u^2-7u-4=0$

$\Rightarrow \Delta=(-7)^2-4(2)(-4)=81 \Rightarrow u=\frac{-(-7)\pm 9}{4} \Rightarrow u_1=4\ ,\ u_2=\frac{-1}{2}$

$x^2=u \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \quad , \quad x^2\neq\frac{-1}{2}$

ب) $x^4+3x^2+2=0$

$x^4+3x^2+2=0 \Rightarrow x^2=u \Rightarrow u^2+3u+2=0$

$\Rightarrow (u+1)(u+2)=0 \Rightarrow u_1=-1\ ,\ u_2=-2$

$x^2=-1 \quad , \quad x^2=-2$ معادله ریشه ندارد

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[1]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند: $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است: $(1)\ ax^۲+bx+c=۰ \quad (a\neq ۰)$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟

چون **a** و **c** مختلف العلامه هستند بنا براین حاصل ضرب آن ها منفی است در نتیجه در فرمول دلتا مقدار ۴ac منفی است یعنی ۴ac− مثبت است و $b^۲$ هم که همواره مثبت است پس مجموع دو عبارت مثبت ، مثبت می شود ، در نتیجه Δ مثبت است.

$$ac<۰ \Rightarrow ۴ac<۰ \Rightarrow -۴ac>۰ \Rightarrow b^۲-۴ac>b^۲>۰ \Rightarrow \Delta>۰$$

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای ... دو ... ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم: $۳x^۲+۵x-۱=۰$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

$a=۳$ و $c=-۱$ پس با توجه به بند ۱ قسمت (ب) فعالیت Δ بزرگ تر از صفر است پس معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=۳۷$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶}\\[2mm] \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶}\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\frac{-۵+\sqrt{۳۷}}{۶}+\frac{-۵-\sqrt{۳۷}}{۶}=\frac{-۵}{۳}$$

ملاحظه می‌شود که: $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم :

$$3x^2 - 7x = 0 \Rightarrow x(3x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$S = \alpha + \beta = 0 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} = -\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد.

پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right\} \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید : $P = \alpha.\beta = \frac{c}{a}$

$$P = \alpha.\beta = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{4ac}{4a} = \frac{c}{a}$$

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

> اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a \neq 0)$ $\quad ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه :
>
> $\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a}$ و $\alpha.\beta = P = \frac{c}{a}$

کار در کلاس

در معادلهٔ $-2x^2+x+5=0$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

$a = -2 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 5$

$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{1}{-2} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲-Sx+P=۰$$

بنابراین نشان دادیم که :

> معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشند، به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ است.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-۱/۵$ و حاصل ضربشان -۷ باشد.

$P=-۱/۵ \ , \ P=-۷$

$\Rightarrow x^۲-Sx+P=۰ \Rightarrow x^۲+۱/۵x-۷=۰$

$\Delta=۲/۲۵+۲۸=۳۰/۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{-۱/۵\pm۵/۵}{۲} \Rightarrow x_۱=۲ \ , \ x_۲=-۳/۵$

۲ آیا مستطیلی با محیط $۱۱cm$ و مساحت $۶cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :

محیط $=۱۱ \Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۱ \Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{۱۱}{۲} \Rightarrow \beta=\dfrac{۱۱}{۲}-\alpha$

مساحت $=۶ \Rightarrow \alpha.\beta=۶ \Rightarrow \alpha(\dfrac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶$

الف) راه حل بالا را کامل کنید و α و β را بیابید.

$\alpha(\dfrac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶ \Rightarrow -\alpha^۲+\dfrac{۱۱}{۲}\alpha-۶=۰ \Rightarrow \Delta=\dfrac{۲۵}{۴} \Rightarrow \alpha=\dfrac{-\frac{۱۱}{۲}\pm\frac{۵}{۲}}{-۲}$

$\Rightarrow \alpha=۴ \Rightarrow \beta=\dfrac{۳}{۲} \quad , \quad \alpha=\dfrac{۳}{۲} \Rightarrow \beta=۴$

البته با توجه به شکل : $\alpha=۴ \Rightarrow \beta=\dfrac{۳}{۲}$

ب) با استفاده از S و P این مسئله را حل کنید.

$S=۵/۵ \quad , \quad P=۶ \Rightarrow x^۲-۵/۵x+۶=۰$

$\Delta=۳۰/۲۵-۲۴=۶/۲۵ \Rightarrow x=\dfrac{۵/۵\pm۲/۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=۴ \\ \beta=۱/۵\end{cases}$

۴ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

$$S=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=۳ \quad , \quad P=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}=\frac{۹-۵}{۴}=۱$$

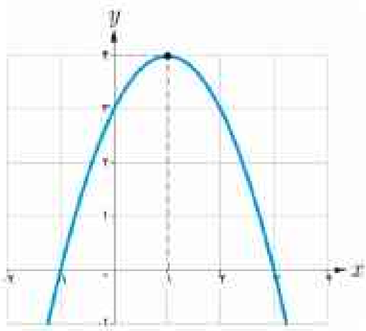
$$\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$$

ماکزیمم و مینیمم سهمی

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^۲+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{۲a}$ است.

الف) اگر $a>۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ کمترین (مینیمم) مقدار سهمی به‌دست می‌آید.

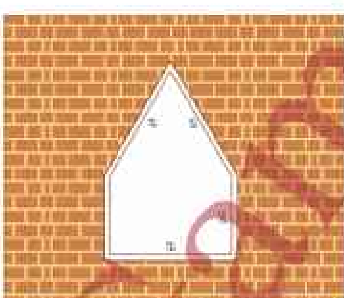
ب) اگر $a<۰$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{۲a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار سهمی حاصل می‌شود.



مثال : ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطه $f(x)=-x^۲+۲x+۳$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل : چون $a=-۱$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی روبه پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{۲a}=۱$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(۱)=۴$.

تذکر : همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(۱,۴)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.



مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $۴m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

حل : با توجه به شکل داریم : محیط پنجره $=۴ \Rightarrow ۳x+۲y=۴ \Rightarrow y=۲-\frac{۳}{۲}x$

از آنجا که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$ است (چرا؟)، می‌توان نوشت :

مساحت پنجره : $S=x.y+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(۲-\frac{۳}{۲}x)+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۲x-\frac{۳}{۲}x^۲+\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S=\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}x^۲+۲x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود.

$a=\frac{\sqrt{3}-6}{4}<0$ پس این تابع ماکزیمم دارد.

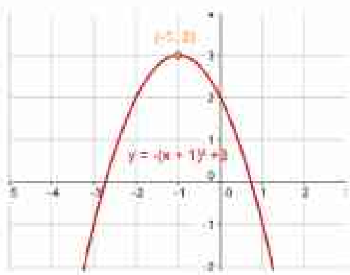
$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}=0/94(m)$$

$$y=2-\frac{3}{2}x\simeq 2-\frac{3}{2}(0/94)=0/59(m)$$

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x)=-(x+1)^2+3$



راه اول: این سهمی در $x=-1$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+1)^2+3 \Rightarrow -x^2-2x-1+3=0 \Rightarrow -x^2-2x+2=0$$

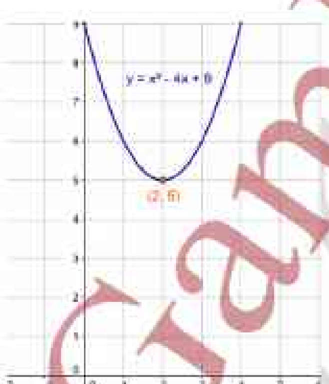
$$\Rightarrow a=-1<0\ ,\ x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-2)}{2\times(-1)}=-1 \Rightarrow y=g(-1)=3$$

راه دوم: این سهمی در $x=-1$ ماکزیمم دارد.

$$y=-(x+1)^2+3\ ,\ y=a(x-h)^2+k \Rightarrow a=-1<0\ ,\ (h,k)=(-1,3)$$

مقدار ماکزیمم ۳ است.

ب) $h(x)=x^2-4x+9$



این سهمی در $x=2$ مینیمم دارد.

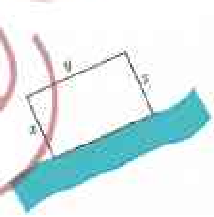
$$y=x^2-4x+9=0 \Rightarrow a=1>0\ ,\ x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=\frac{-(-4)}{2\times 1}=2 \Rightarrow y=h(2)=5$$

مقدار مینیمم ۵ است.

۲ یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(راهنمایی: $y+2x=100 \Rightarrow y=100-2x$

مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



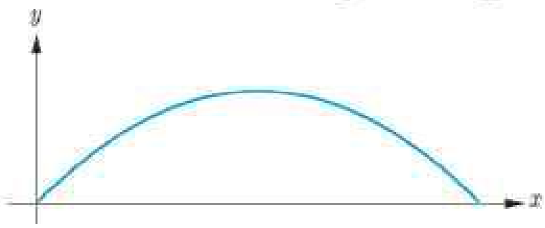
$$S_{\square}=xy \Rightarrow S_{\square}=x(100-2x)=-2x^2+100x$$

$$a=-2<0\ ,\ x=\frac{-b}{2a} \Rightarrow x=\frac{-100}{2\times(-2)}=25 \Rightarrow y=100-50=50$$

$$S=25\times 50=1250\ m^2$$

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ ۴۵° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $۲۰\ m/s$ شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-۱}{۴۰}x^۲+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

ارتفاع توپ $x=\frac{-b}{۲a} \Rightarrow x=-\frac{۱}{-\frac{۱}{۴۰}}=۴۰\ m$

ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=۰$.

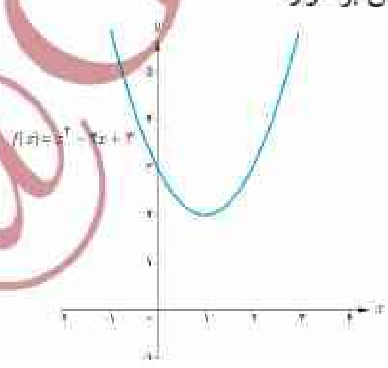
$$y=۰ \Rightarrow x(\frac{-۱}{۴۰}x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=۴۰ \end{cases}$$

این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند؟

طول نقطه ی (۰،۰) زمان شروع پرتاب و طول نقطه ی (۴۰،۰) زمان برخورد گلوله با زمین است.

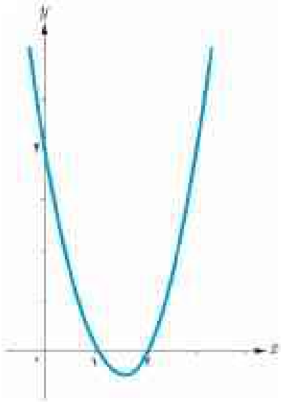
> نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط مقدار تابع برابر صفر است.

همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(۰)$ است. به‌عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^۲+bx+c$، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.



مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.

حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :



$$y = a\,(x-۱)(x-۲)$$

با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a=۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید[1].

a \ Δ	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x)=۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هر یک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

$\Delta=۱۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = ۵ > ۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها هم علامت‌اند

$S = -\frac{b}{a} = -۶ < ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند

ب) $y = x^۲+۴x-۵$

$\Delta = ۳۶ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = -۵ < ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت نیستند

$S = -\frac{b}{a} = -۴ < ۰ \Rightarrow$ قدر مطلق ریشه منفی بزرگ تر از ریشه مثبت است

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

$\Delta = ۳۷ > ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد

$P = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۳} > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\frac{b}{a} = \frac{۷}{۳} > ۰ \Rightarrow$ هر دو ریشه مثبت اند

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

$\Delta = ۴-۴(-۱)(-۱) = ۰ \Rightarrow$ معادلهٔ $y = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد

$P = \frac{c}{a} = ۱ > ۰ \Rightarrow$ ریشه ها هم علامت اند

$S = -\frac{b}{a} = ۲ > ۰ \Rightarrow$ هردو ریشه مثبت اند

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.

به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

ــ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.

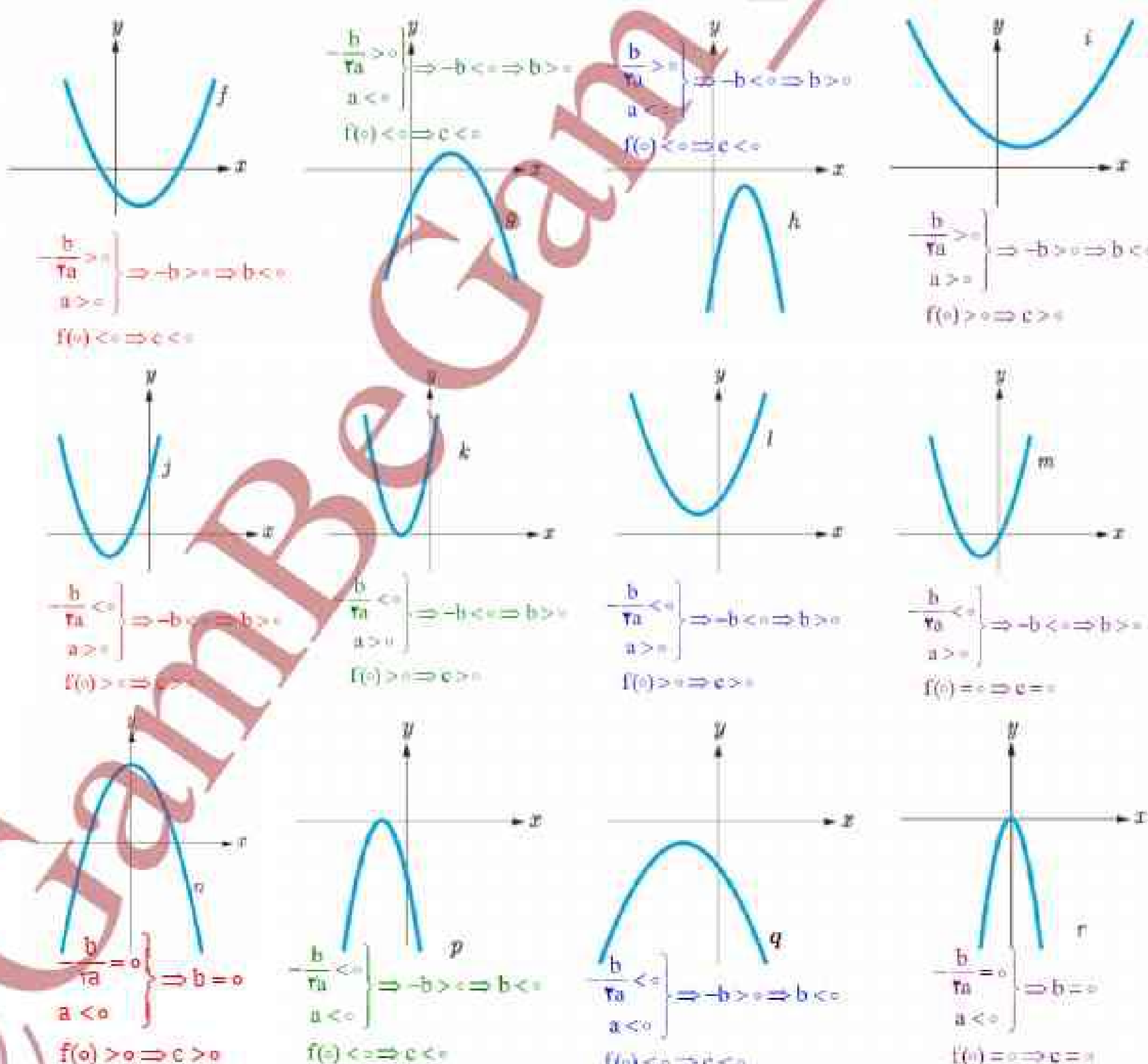
ــ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

ــ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow b<0$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

جواب چرا : زیرا فاصلهٔ ریشهٔ مثبت از مبدأ بیش تر از فاصلهٔ ریشهٔ منفی از مبدأ است به عبارتی قدر مطلق ریشه مثبت بزرگ تر از قدر مطلق ریشهٔ منفی است.

خلاصه این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



f: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}>0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b>0 \Rightarrow b<0$, $f(0)<0 \Rightarrow c<0$

g: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}>0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)<0 \Rightarrow c<0$

h: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}>0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)<0 \Rightarrow c<0$

i: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}>0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b>0 \Rightarrow b<0$, $f(0)>0 \Rightarrow c>0$

j: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)>0 \Rightarrow c>0$

k: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)>0 \Rightarrow c>0$

l: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)>0 \Rightarrow c>0$

m: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a>0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b<0 \Rightarrow b>0$, $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

n: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}=0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow b=0$, $f(0)>0 \Rightarrow c>0$

p: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b>0 \Rightarrow b<0$, $f(0)<0 \Rightarrow c<0$

q: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}<0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow -b>0 \Rightarrow b<0$, $f(0)<0 \Rightarrow c<0$

r: $\left.\begin{matrix}-\frac{b}{2a}=0\\ a<0\end{matrix}\right\} \Rightarrow b=0$, $f(0)=0 \Rightarrow c=0$

جدول در صفحه بعد

ویژگی / تابع	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−
b	−	+	+	−	+	+	+	+	۰	−	−	۰
c	−	−	−	+	+	+	+	۰	+	−	−	۰
تعداد ریشه‌ها	دو	دو	ندارد	ندارد	دو	یک	ندارد	دو	دو	یک	فاقد ریشه	یک
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت	دو تا مثبت	ریشه ندارد	ریشه ندارد	دو تا منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یکی منفی یکی صفر	یکی صفر یکی منفی	یک منفی	ریشه ندارد	یک صفر

تمرین

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^۴ - ۸x^۲ + ۸ = ۰$

$x^۲ = u \Rightarrow u^۲ - ۸u + ۸ = ۰$

$\Delta = ۳۲ \Rightarrow u = \dfrac{۸ \mp ۴\sqrt{۲}}{۲}$

$u = ۴ + ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$

$u = ۴ - ۲\sqrt{۲} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴ - ۲\sqrt{۲}}$

ب) $۴x^۶ + ۱ = ۵x^۳$

$x^۳ = u \Rightarrow ۴u^۲ - ۵u + ۱ = ۰$

$\Delta = ۹ \Rightarrow u = \dfrac{۵ \pm ۳}{۸}$

$u = ۱ \Rightarrow x^۳ = ۱ \Rightarrow x = ۱$

$u = \dfrac{۱}{۴} \Rightarrow x^۳ = \dfrac{۱}{۴} \Rightarrow x = \dfrac{۱}{\sqrt[۳]{۴}} = \dfrac{\sqrt[۳]{۲}}{۴}$

۲) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $۱-\sqrt{۲}$ و $۱+\sqrt{۲}$ باشند.

$\alpha = ۱ - \sqrt{۲}\ ,\ \beta = ۱ + \sqrt{۲}$

$s = \alpha + \beta \Rightarrow s = ۱ - \sqrt{۲} + ۱ + \sqrt{۲} = ۲\ ,\ \ p = \alpha\beta = (۱ - \sqrt{۲})(۱ + \sqrt{۲}) = -۱$

$x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$

۳) مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^۲ + ۸x - ۵$

$a = -۲ < ۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow x = ۲$

$f(۲) = -۲ \times ۴ + ۸ \times ۲ - ۵ = ۳ \Rightarrow f(۲) = ۳$

ب) $g(x) = ۳x^۲ + ۶x + ۵$

$a = ۳ > ۰$ دهانه سهمی رو به بالا و نقطهٔ مینیمم دارد

$x = -\dfrac{b}{۲a} \Rightarrow x = -۱$

$g(-۱) = ۳ \times ۱ + ۶(-۱) + ۵ = ۲ \Rightarrow f(-۱) = ۲$

۴ راکتی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t)=100t-5t^2 \quad (t\geq 0)$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

$h(t)=-5t^2+100t \Rightarrow a=-5<0$ دهانهٔ سهمی رو به پایین و نقطهٔ ماکزیمم دارد

$t=-\frac{b}{2a} \Rightarrow t=-\frac{100}{2(-5)} \Rightarrow t=10 \quad s$ پس از ۱۰ ثانیه به بالاترین ارتفاع می رسد.

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

$h(10)=-5\times 100+100\times 10=500 \quad m$ ارتفاع نقطهٔ اوج

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

$h(t)=0 \Rightarrow -5t^2+100t=0 \Rightarrow t(-5t+100)=0 \Rightarrow t=0\,s \;,\; t=20\,s$ پس از ۲۰ راکت به زمین بازمی گردد.

نکته: $t=0$ لحظهٔ شروع پرتاب است.

۵ استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است.
اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که :

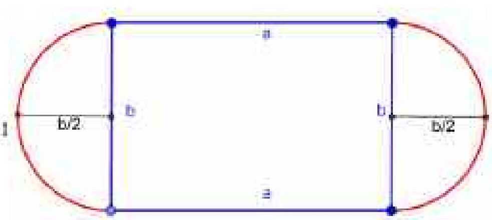
الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

$P=P_{\bigcirc}+2a \Rightarrow P=2\pi\times\frac{b}{2}+2a \Rightarrow \pi b+2a=1500 \Rightarrow a=750-\frac{\pi}{2}b$

$S_{\square}=ab \Rightarrow S_{\square}=(750-\frac{\pi}{2}b)b \Rightarrow S_{\square}=-\frac{\pi}{2}b^2+750b$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{2}<0$

$\Rightarrow b=-\frac{750}{2(\frac{\pi}{2})}=\frac{750}{\pi}\xrightarrow{\pi=3} b=250\ m \;,\quad a=750-\frac{\pi}{2}\times\frac{750}{\pi}=375 \quad m$

$S_{\square}=250\times 375=93750 \quad m^2,\ S=S_{\square}+S_{\bigcirc}=93750+3(125)^2=140625$



ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

$a=750-\frac{\pi}{2}b$

$S=S_{\square}+S_{\bigcirc} \Rightarrow S=-\frac{\pi}{2}b^2+750b+(\frac{b}{2})^2\pi \Rightarrow S=-\frac{\pi}{4}b^2+750b$ دهانهٔ سهمی روبه پایین است و نقطهٔ ماکزیمم دارد $-\frac{\pi}{4}<0$

$b=\frac{-750}{2(-\frac{\pi}{4})}=\frac{1500}{\pi} \Rightarrow a=750-\frac{\pi}{2}\times\frac{1500}{\pi}=0$

$S=3\times(250)^2=187500 \quad m^2$

۶ معادلهٔ سهمی‌های زیر را بنویسید.

راه اول:

$f(0)=c \Rightarrow c=0$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b=0$

$f(0)=0$

با توجه به این که دو نقطهٔ ۰ و ۲ دارای عرض های برابر هستند پس می توانیم طول راس سهمی را به صورت زیر به دست آوریم:

$\frac{1+0}{2}=1$

$f(1)=-4 \Rightarrow a+b=-4$

$\begin{cases} a+b=-4 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=8 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow 2a=8$

$\Rightarrow a=4 \Rightarrow b=-8$

$f(x)=4x^2-8x$

راه دوم:

$f(-\frac{b}{2a})=-4 \Rightarrow a(-\frac{b}{2a})^2+b(-\frac{b}{2a})=-4$

$\Rightarrow \frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=-4 \Rightarrow b^2=16a$

$\begin{cases} b^2=16a \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2=16a \\ 16a+8b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow b^2+8b=0 \Rightarrow b(b+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \Rightarrow a=0 \\ b=-8 \Rightarrow a=4 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$

راه سوم:

$y=f(x)=a(x-h)^2+k$

$k=-4$

$f(0)=0 \Rightarrow a(0-h)^2-4=0 \Rightarrow ah^2=4$

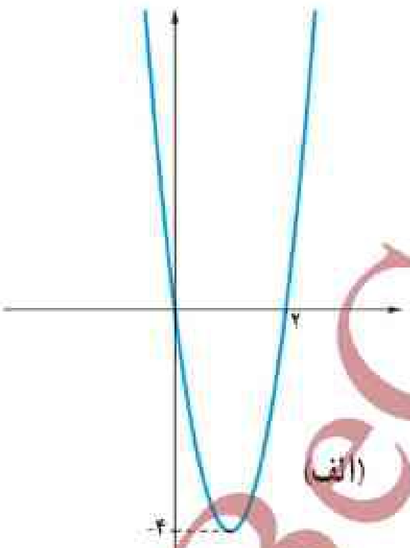
$f(2)=0 \Rightarrow a(2-h)^2-4=0$

$4a-4ah+ah^2-4=0 \xrightarrow{ah^2=4} 4a-4ah+4-4=0$

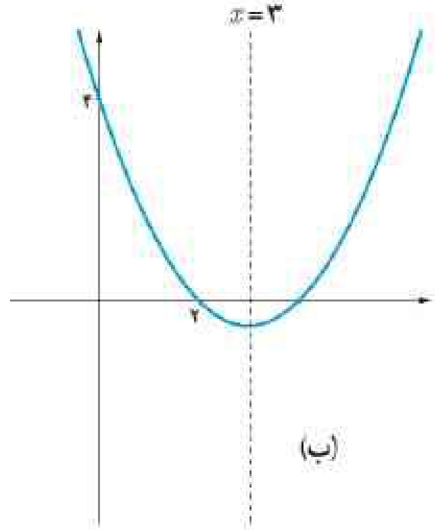
$4a-4ah=0 \Rightarrow 4a(1-h)=0 \xrightarrow{a\neq 0} 1-h=0 \Rightarrow h=1$

$ah^2=4 \xrightarrow{h=1} a=4 \Rightarrow y=f(x)=4(x-1)^2-4$

$\Rightarrow f(x)=4x^2-8x$



(الف)



(ب)

$x=3 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=3 \Rightarrow b=-6a$

$f(0)=4 \Rightarrow c=4$

$f(2)=0 \Rightarrow 4a+2b+4=0$

$\begin{cases} b=-6a \\ 4a+2b+4=0 \end{cases} \Rightarrow 4a-12a+4=0$

$\Rightarrow -8a+4=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-3$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$

$x = ۲ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = \Rightarrow b = -۴a$

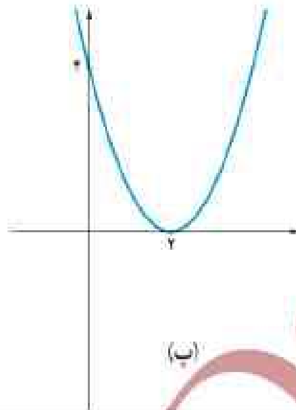
$f(۰) = ۴ \Rightarrow c = ۴$

$f(۲) = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b + ۴ = ۰$

$\begin{cases} b = -۴a \\ ۴a + ۲b + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow ۴a - ۸a + ۴ = ۰$

$\Rightarrow -۴a + ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = -۴$

$f(x) = x^۲ - ۴x + ۴$



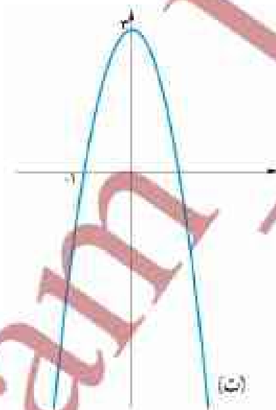
(پ)

$f(۰) = ۳ \Rightarrow c = ۳$

$x = ۰ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰$

$f(-۱) = ۰ \Rightarrow a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -۳$

$f(x) = -۳x^۲ + ۳$



(ت)

راه اول :

$y = f(x) = a(x-h)^۲ + k \;,\; s(۲,۱) \Rightarrow h = ۲ \;,\; k = ۱$

$f(۱) = ۰ \Rightarrow a(۱-۲)^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -۱$

$f(x) = -(x-۲)^۲ + ۱ = -x^۲ + ۴x - ۳$

راه دوم :

$x = ۲ \Rightarrow -\frac{b}{۲a} = \Rightarrow b = -۴a$

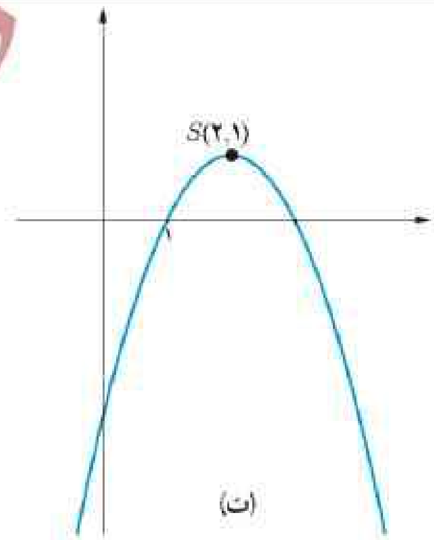
$f(۱) = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۰ \xrightarrow{b=-۴a} -۳a + c = ۰$

$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴a + ۲b + c = ۱ \xrightarrow{b=-۴a} -۴a + c = ۱$

$\begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ -۴a + c = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a + c = ۰ \\ ۴a - c = -۱ \end{cases} \Rightarrow a = -۱$

$\Rightarrow b = ۴ \;,\; c = -۳$

$f(x) = -x^۲ + ۴x - ۳$



(ت)

راه اول :

$S(1,-1)$

$f(0)=-2 \Rightarrow c=-2$

$f(1)=-1 \Rightarrow a+b-2=-1 \Rightarrow a+b=1$

$x=1 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a}=1 \Rightarrow b=-2a$

$\begin{cases} b=-2a \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a-2a=1 \Rightarrow a=-1 \, , \, b=2$

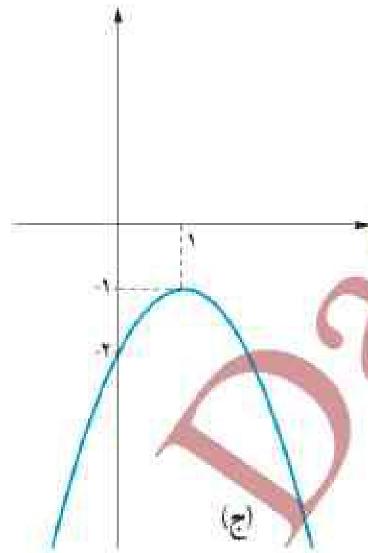
$f(x)=-x^2+2x-2$

راه دوم :

$= f(x)=a(x-h)^2+k \, , \, s(1,-1) \Rightarrow h=1 \, , \, k=-1$

$(0)=-2 \Rightarrow a(0-1)^2-1=-2 \Rightarrow a=-1$

$(x)=-(x-1)^2-1=-x^2+2x-2$

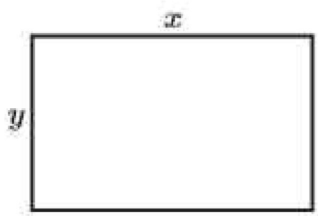


(ج)

درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا



مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می‌گویند.

مثال : عرض مستطیل را $y=۱$ در نظر می‌گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

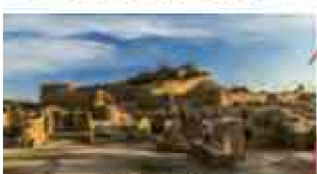
$$\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$$

با ضرب دو طرف این معادله در x می‌توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^۲=x+۱ \Longrightarrow x^۲-x-۱=۰$$

$$\Delta=b^۲-۴ac=۵ \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_۱=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}} \\ x_۲=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن‌را در کلاس ارائه کنید.



ارگ تاریخی بم

عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $۵=۲+\square$ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+۱}{x}=\frac{x}{۱}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

فعالیت

۱ معادلهٔ مقابل را حل کنید. (۱) $\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x}$

الف) ابتدا در صورت امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}=\frac{2-x}{x(x-1)} \qquad (2)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اول متمایز وجود دارد x، $(x+1)$ و $(x-1)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ۱ است؛ پس ک.م.م مخرج‌ها عبارت است از $x(x-1)(x+1)$

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می‌کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1)\left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}\right]=x(x-1)(x+1)\left[\frac{2-x}{x(x-1)}\right] \Longrightarrow 2x^2+2x(x-1)=(x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $5x^2-3x-2=0$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

$5x^2-3x-2=0 \Rightarrow \Delta=9+40=49 \Rightarrow x=\frac{3\pm7}{10} \Rightarrow x=\frac{-2}{5}$ قابل قبول ، $x=1$ غیر قابل قبول

اگر $x=1$ آنگاه مخرج کسر برابر صفر می شود و عبارت تعریف نشده خواهد بود.

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(ره) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت متوسط قطار $10\,km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{60}{v}$ به‌دست می‌آید؟

می دانیم مسافت طی شده برابر است با سرعت متوسط ضرب در زمان یعنی $x=v.t$ در نتیجه اگر زمان رفت را با t_1 نمایش دهیم داریم:

$$x=v.t_1 \Rightarrow t_1=\frac{x}{v} \Rightarrow t_1=\frac{60}{v}$$

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

زمان بازگشت را با t_2 نمایش می دهیم و می دانیم که از سرعت قطار $10\ km/h$ کاسته شده است پس داریم:

$$60=(v-10)\times t_2 \Rightarrow t_2=\frac{60}{v-10}$$

پ) معادلهٔ $\frac{60}{v-10}=\frac{60}{v}+\frac{1}{2}$ را توضیح دهید.

با توجه به این که زمان بازگشت نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت) طولانی تر بوده است پس داریم:

$$t_2=t_1+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{60}{v-10}=\frac{60}{v}+\frac{1}{2}$$

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ک م م مخرج ها $2v(v-10)$ است ، در نتیجه :

$$2v(v-10)\left(\frac{60}{v-10}\right)=2v(v-10)\times\frac{60}{v}+2v(v-10)\times\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 120v=120v-1200+v^2-10v$$

$$\Rightarrow v^2-10v-1200=0\Rightarrow \Delta=4900\Rightarrow v=\frac{10\pm 70}{2}$$

$v=40\ km/h\ ,\quad v=-30$

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن زمان رفت و برگشت قطار را به دست آورید.

سرعت قطار در مسیر شمال به جنوب رفت $40\ km/h$ است . (البته سرعت برگشت با توجه به علامت منفی $30\ km/h$ است .)

زمان رفت : $t_1=\frac{60}{40}=1/5\ h$ و زمان برگشت : $t_2=\frac{60}{40-10}=\frac{60}{30}=2\ h$

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{3}{x^2}-12=0$

$$x^2\times\frac{3}{x^2}-x^2\times 12=x^2\times 0$$

$$\Rightarrow 3-12x^2=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

ب) $\frac{2}{k}-\frac{3k}{k+2}=\frac{k}{k^2+2k}$

$$\frac{2}{k}-\frac{3k}{k+2}=\frac{k}{k(k+2)}$$

$$\Rightarrow k(k+2)\times\frac{2}{k}-k(k+2)\times\frac{3k}{(k+2)}=k(k+2)\times\frac{k}{k(k+2)}$$

$$2k+4-3k^2=k\Rightarrow -3k^2+k+4=0\Rightarrow \Delta=49\Rightarrow k=\frac{4}{3}\ ,\ k=-1$$

پ) $\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{9-x^2}$

$$\frac{3}{x}-\frac{2}{x-3}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}\Rightarrow\frac{3}{x}-\frac{2}{-(3-x)}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}\Rightarrow\frac{3}{x}+\frac{2}{(3-x)}=\frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$x(3-x)(3+x)\times\frac{3}{x}+x(3-x)(3+x)\times\frac{2}{(3-x)}=x(3-x)(3+x)\times\frac{12}{(3-x)(3+x)}$$

$$27-3x^2+6x+2x^2=12x\Rightarrow -x^2-6x+27=0\Rightarrow x^2+6x-27=0$$

$\Rightarrow (x-3)(x+9)=0\Rightarrow x=-9\quad ,\quad x=3$ غیر قابل قبول

همانطور می دانیم اگر مخرج کسری صفر شود آن کسر تعریف نمی شود بنابراین عدد ۳ نمی تواند جواب این معادله باشد زیرا مخرج کسر دوم را صفر می کند.

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود :

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

تعداد کل آزمون هایی که تا به حال داده است : $۵+n$ و تعداد کل امتیاز های به دست آمده : $۹n+۳۶$

$$\frac{۹n+۳۶}{۵+n}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

$$\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=۸ \Rightarrow (n+۵)\times\frac{۹n+۳۶}{n+۵}=(n+۵)\times ۸ \Rightarrow ۹n+۳۶=۸n+۴۰ \Rightarrow n=۴$$

$$\frac{۹\times ۴+۳۶}{۴+۵}=\frac{۷۲}{۹}=۸$$

مثال : اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل : ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

ماشین	زمان انجام کل کار	مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.
A	t	$\frac{۱}{t}$
B	$۲t$	$\frac{۱}{۲t}$
A و B با هم	۴	$\frac{۱}{۴}$

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{\times ۲}\frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۶ \quad \text{زمان ماشین } A$$

$$\Rightarrow ۲t=۱۲ \quad \text{زمان ماشین } B$$

معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲و۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصاتِ نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x و ۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \quad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

> برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت :

$$(x-2)^2+9=25$$

$$(x-2)^2=16 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)=4 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0) \\ (x-2)=-4 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow B(-2,0) \end{cases}$$

تذکر : عبارت رادیکالیِ معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصلِ زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty,+\infty)$.

مثال : در معادلهٔ $2\sqrt{x}=\sqrt{3x-3}$ ، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[1,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم :

$$4x=3x-3 \Rightarrow x=-3 \ \text{(غیر قابل قبول)}$$

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

الف) $2\sqrt{2t-1}-t=1$

$(2\sqrt{2t-1})^2=(t+1)^2 \Rightarrow 4(2t-1)=t^2+2t+1$

$\Rightarrow 8t-4=t^2+2t+1 \Rightarrow t^2-6t+5=0$

$\Rightarrow (t-1)(t-5)=0 \Rightarrow t=1 \ , \ t=5$

$t=5 \Rightarrow 2\sqrt{10-1}-5=1 \Rightarrow 6-5=1 \Rightarrow 1=1$

$t=1 \Rightarrow 2\sqrt{2-1}-1=1 \Rightarrow 2-1=1 \Rightarrow 1=1$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

ب) $2x=1-\sqrt{2-x}$

$(\sqrt{2-x})^2=(1-2x)^2 \Rightarrow 2-x=1-4x+4x^2$

$\Rightarrow 4x^2-3x-1=0 \Rightarrow \Delta=25 \Rightarrow x=1 \ , \ x=\frac{-1}{4}$

$x=\frac{-1}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2}=1-\sqrt{2+\frac{1}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{2}=1-\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$x=1 \Rightarrow 2=1-\sqrt{2-1} \Rightarrow 2=0$

واضح است که $x=1$ قابل قبول نیست.

(پ) $\sqrt{x+7}=\sqrt{x}+1$

$(\sqrt{x+7})^2=(\sqrt{x}+1)^2 \Rightarrow x+7=x+2\sqrt{x}+1$

$\Rightarrow 6=2\sqrt{x}\Rightarrow (\sqrt{x})^2=3^2\Rightarrow x=9$

$x=9\Rightarrow \sqrt{9+7}=\sqrt{9}+1\Rightarrow 4=4$

(ت) $\frac{1}{\sqrt{u-3}}-\frac{2}{\sqrt{u}}=0$

$\frac{1}{\sqrt{u-3}}=\frac{2}{\sqrt{u}}\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{u-3}})^2=(\frac{2}{\sqrt{u}})^2$

$\Rightarrow \frac{1}{u-3}=\frac{4}{u}\Rightarrow u(u-3)\times\frac{1}{(u-3)}=u(u-3)\times\frac{4}{u}$

$\Rightarrow u=4u-12\Rightarrow 12=3u\Rightarrow u=4$

$u=4\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}=0\Rightarrow 1-1=0\Rightarrow 0=0$

(ث) $2+\sqrt{2x^2-5x+2}=x$

$\sqrt{2x^2-5x+2}=x-2\Rightarrow (\sqrt{2x^2-5x+2})^2=(x-2)^2\Rightarrow 2x^2-5x+2=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0\Rightarrow x=2\ ,\ x=-1$

$x=2\Rightarrow 2+\sqrt{8-10+2}=2\Rightarrow 2+0=2\Rightarrow 2=2$, $x=-1\Rightarrow 2+\sqrt{2-5+2}=-1\Rightarrow 2+\sqrt{-1}=-1$

واضح است که $x=-1$ قابل قبول نیست

۲ بدون حل معادله، توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند؟

الف) $\sqrt{t}+2=0$

در مجموعه ی اعداد حقیقی $\sqrt{t}$ با فرض با معنی بودن همیشه بزرگ تر یا مساوی صفر است . و وقتی این رادیکال با ۲ جمع شود هرگز صفر نمی شود.

ب) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}+1=0$

در مجموعه ی عدد های حقیقی (با فرض با معنی بودن) هر کدام از رادیکال ها عددی بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و وقتی با عدد ۱ جمع شوند هرگز صفر نمی شوند.

پ) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=0$

روش اول : در مجموعه ی اعداد حقیقی (بافرض با معنی بودن) هر یک از رادیکال ها بزرگ تر یا مساوی صفر هستند و زمانی جمع آن ها صفر است که هردو همزمان صفر باشند ولی این اتفاق نمی افتد.

روش دوم : $\sqrt{1-x}=-\sqrt{x-2}$ ، طرف چپ تساوی عبارت بزرگ تر یا مساوی صفر است و لی طرف دیگر کوچکتریامساوی صفر است و این تساوی فقط زمانی برقرار است که دو طرف صفرباشند.واضح است نمی توانیم عددی مشترک پیدا کنیم که همزمان دو رادیکال را صفر کند. پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

به عبارت دیگر جواب مشترک دو معادله ی زیر در صورت وجود جواب معادله است.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-x}=0\Rightarrow x=1\\ \sqrt{x-2}=0\Rightarrow x=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{جواب مشترک ندارد}$$

پس این معادله در مجموعه ی اعداد حقیقی جواب ندارد.

تمرین های درس دوم

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=5$

$x(x-2)\times\frac{1}{x}+x(x-2)\times\frac{1}{(x-2)}=x(x-2)\times 5$

$x-2+x=5x^2-10x \Rightarrow 5x^2-12x+2=0$

$\Delta=104 \Rightarrow x=\frac{12\pm 2\sqrt{26}}{10}$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا هیچ یک مخرج را صفر نمی کنند.

(ب) $\frac{10}{r}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3r}-5$

$6r\times\frac{10}{r}-6r\times\frac{15}{2}=6r\times\frac{20}{3r}-6r\times 5$

$60-45r=40-30r \Rightarrow 20=15r \Rightarrow r=\frac{4}{3}$

$\frac{10}{\frac{4}{3}}-\frac{15}{2}=\frac{20}{3\times\frac{4}{3}}-5 \Rightarrow \frac{30}{4}-\frac{30}{4}=5-5 \Rightarrow 0=0$

(پ) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$

$(x-3)(x+4)\times\frac{2x}{(x-3)}+(x-3)(x+4)\times\frac{(x+1)}{(x+4)}=(x-3)(x+4)\times\frac{(x-1)}{(x-3)}$

$2x^2+8x+x^2-2x-3=x^2+3x-4 \Rightarrow 2x^2+3x+1=0$

$\Delta=1 \Rightarrow x=-1\ ,\ x=-\frac{1}{2}$

هر دو ریشه قابل قبول است زیرا هیچ یک باعث صفر شدن مخرج ها نمی شوند.

(ت) $\sqrt{t+4}=3$

$(\sqrt{t+4})^2=3^2$

$\Rightarrow t+4=9$

$\Rightarrow t=5$

$\Rightarrow \sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

(ث) $k=\sqrt{6k-8}$

$k^2=(\sqrt{6k-8})^2 \Rightarrow k^2=6k-8$

$\Rightarrow k^2-6k+8=0 \Rightarrow (k-4)(k-2)=0$

$\Rightarrow k=4\ ,\ k=2$

$k=4 \Rightarrow 4=\sqrt{24-8} \Rightarrow 4=4$

$k=2 \Rightarrow 2=\sqrt{12-8} \Rightarrow 2=2$

هر دو ریشه قابل قبول هستند.

(ج) $x+\sqrt{x}=6$

$\sqrt{x}=6-x \Rightarrow (\sqrt{x})^2=(6-x)^2 \Rightarrow x=36-12x+x^2$

$\Rightarrow x^2-13x+36=0 \Rightarrow (x-4)(x-9)=0$

$\Rightarrow x=4\quad x=9$

$x=4 \Rightarrow 4+\sqrt{4}=6 \Rightarrow 6=6$

$x=9 \Rightarrow 9+\sqrt{9}=6 \Rightarrow 12=6\ ,\ 12\neq 6$

همانطور که دیده می شود $x=9$ قابل قبول نیست.

(چ) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$

$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{2x-5} \Rightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2=(\sqrt{2x-5})^2$

$\Rightarrow x+1-2\sqrt{x+1}+1=2x-5 \Rightarrow -2\sqrt{x+1}=x-7$

$\Rightarrow (-2\sqrt{x+1})^2=(x-7)^2 \Rightarrow 4x+4=x^2-14x+49$

$\Rightarrow x^2-18x+45=0 \Rightarrow (x-3)(x-15)=0$

$\Rightarrow x=3\ ,\ x=15$

$x=3 \Rightarrow \sqrt{4}-\sqrt{1}=1 \Rightarrow 1=1$

$x=15 \Rightarrow \sqrt{16}-\sqrt{25}=1 \Rightarrow -1=1\ ,\ -1\neq 1$

همانطور که دیده می شود $x=15$ قابل قبول نیست.

(ح) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

$\sqrt{m}\times\sqrt{m}+\sqrt{m}\times\frac{1}{\sqrt{m}}=\sqrt{m}\times 2 \Rightarrow m+1=2\sqrt{m}$

$\Rightarrow (m+1)^2=(2\sqrt{m})^2 \Rightarrow m^2+2m+1=4m$

$\Rightarrow m^2-2m+1=0 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$

$m=1 \Rightarrow \sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{1}}=2 \Rightarrow 2=2$

همانطور که ملاحظه می شود معادله یک جواب قابل قبول دارد.

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

زمانی که علی برای ۱۶ صفحه صرف می کند : ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه $\frac{16}{120}$ صفحه ویرایش می کند.

زمانی که علی و رضا باهم صرف ویرایش ۱۶ صفحه می کنند : ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه یعنی ۸۰ دقیقه پس در ۱ دقیقه باهم $\frac{16}{80}$ صفحه ویرایش می کنند.

اگر زمانی را که رضا صرف ویرایش ۱۶ صفحه به تنهایی می کند x در نظر بگیریم پس در یک دقیقه $\frac{16}{x}$ صفحه ویرایش می کند.پس داریم :

$$\frac{16}{120}+\frac{16}{x}=\frac{16}{80}\Rightarrow\frac{1}{120}+\frac{1}{x}=\frac{1}{80}\Rightarrow 240x\times\frac{1}{120}+240x\times\frac{1}{x}=240x\times\frac{1}{80}$$

$$2x+240=3x\Rightarrow x=240$$

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$.

این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

$$t=1\Rightarrow 1=\sqrt{10-\frac{h}{5}}\Rightarrow 1^2=\left(\sqrt{10-\frac{h}{5}}\right)^2\Rightarrow 1=10-\frac{h}{5}\Rightarrow\frac{h}{5}=9\Rightarrow h=45\ \text{m}$$

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$\sqrt{x}-x=\frac{x}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x}-2x=x\Rightarrow 2\sqrt{x}=3x\Rightarrow(2\sqrt{x})^2=(3x)^2\Rightarrow 4x=9x^2\Rightarrow 9x^2-4x=0$$

$$\Rightarrow x(9x-4)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=\frac{4}{9}$$

با توجه به این که عدد باید صحیح باشد بنا براین فقط $x=0$ قابل قبول است

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

$$x-\sqrt{x}=\frac{x}{2}\Rightarrow 2x-2\sqrt{x}=x\Rightarrow x=2\sqrt{x}\Rightarrow x^2=(2\sqrt{x})^2\Rightarrow x^2=4x\Rightarrow x^2-4x=0$$

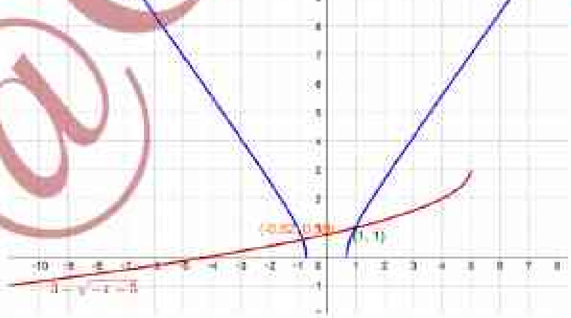
$$\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0\ ,\ x=4$$

این مسئله دو جواب دارد.

۵ معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه‌های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

۱) $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{-x+5}=3$ ، ۲) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3$

جواب های ۱ با نمودار بررسی شده است.



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

فصل ۲

هندسه

سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ شکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان است.

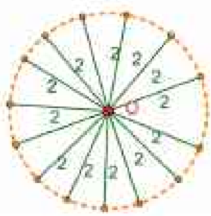
درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

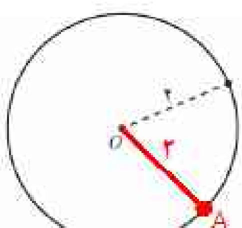
می توانیم ثابت کنیم که میانه ی هر مثلث آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می کند . کافی است وسط یکی از ضلع های زمین را پیدا کنیم و به رأس مقابل آن با یک دیوار مستقیم وصل کنیم.

فعالیت



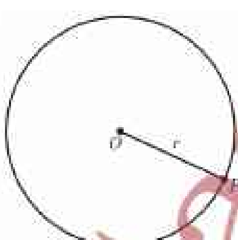
۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

این نقاط به شکل یک دایره هستند.



۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی این دایره درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

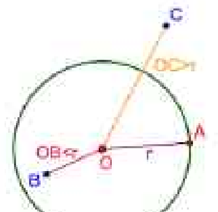
فاصله ی این نقطه تا مرکز دایره ۲ سانتی متر است.



نتیجه : دایره $C(O,r)$ (بخوانید دایره C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد ...روی.. دایره قرار دارد و هر نقطه که ...روی.. دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

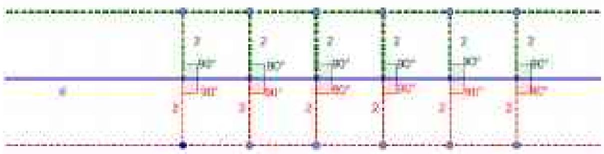
۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

یک دایره به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز O در صفحه داریم اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر باشد بی شمار دایره به مرکز O داریم که درون دایرهٔ مفروض قرار دارندو در واقع تمام نقاطی که درون دایره هستند فاصله شان از مرکز دایره کمتر از ۲ سانتی متر است . اگر نقاطی در صفحه را به دست آوریم که فاصلهٔ آن ها از مرکز این دایره بیش از ۲ سانتی متر باشد باز بی شمار دایره به مرکز O داریم که شعاع آن ها بیشتر از ۲ خواهد بود و این نقاط بیرون دایره قرار دارند.



در حالت کلی اگر فاصله ی هر نقطه در صفحه ی دایره $C(O,r)$ از مرکز دایره کمتر از r باشد نقطه درون دایره است و اگر این فاصله بیشتر از r باشد این نقطه بیرون دایره است.

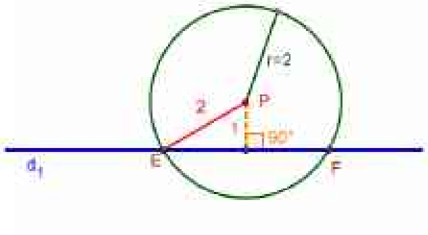
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص نمایید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟



این نقاط به صورت دو خط موازی در دو طرف خط d قرار دارند.

۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

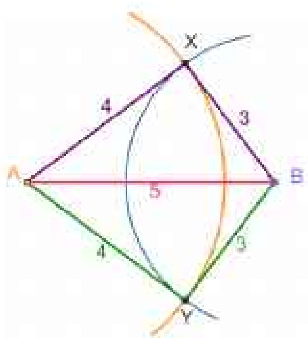
الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.



برای مشخص کردن این نقاط با توجه به نتیجه ی بند ۲ این فعالیت کافی است دایره ای به شعاع ۲ سانتی متر به مرکز P رسم کنیم.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

محل برخورد این دایره با خط d_1 یعنی نقاط E و F جواب این مسئله هستند.

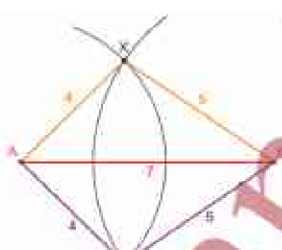


۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کنند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

اضلاع مثلث روی شکل نمایش داده شده اند.

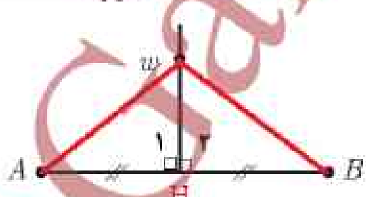
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۷ و ۵ و ۴ رسم کنید.



ابتدا پاره خطی به طول ۷ سانتی متر به نام AB رسم می کنیم . سپس به مرکز A (B) دایره ای به شعاع ۴ سانتی متر و دایره ای به مرکز B(A) به شعاع ۵ سانتی متر رسم می کنیم. این دو دایره یکدیگر را در نقاط X و Y قطع می کنند . از این دو نقطه به دو سر پاره خط AB وصل می کنیم مثلث های AXB و AYB جواب مسئله هستند.

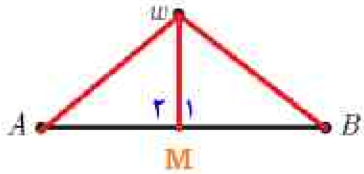
برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{l} AH = BH \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \\ WH = WH \end{array}\right\} \Rightarrow A\overset{\Delta}{W}H \cong B\overset{\Delta}{W}H \Rightarrow AW = BW$$

نتیجه۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.



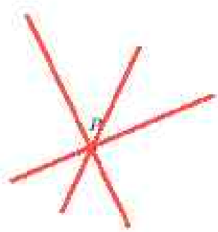
۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی **عمودمنصف** AB قرار دارد.
(**راهنمایی**: از W به A و B و به وسط AB وصل نمایید و با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

دو مثلث AMW و BMW به حالت (ض ض ض) با هم همنهشت هستند. پس بنا بر اجزای متناظر $M_1 = M_2 = 90^\circ$ بنا براین W روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

نتیجهٔ ۲: هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد روی عمود منصف آن پاره خط است.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد ازدوسر آن پاره خط به یک فاصله و هر نقطه که از دوسر پاره خط به یک فاصله باشد روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت کلاسی



۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید بکشید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

بی شمار خط از نقطه ی P می توان رسم کرد.

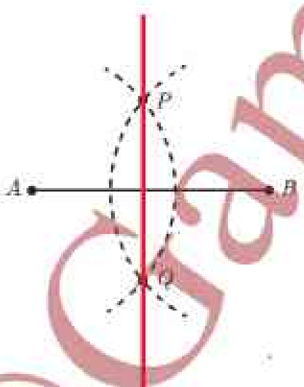
۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید بکشید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند.

بی شمار خط می توان رسم کرد که بر هم منطبق می شوند و ما آن ها را یکی در نظر می گیریم.

۳ به‌نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن را باید داشته باشیم؟

برای مشخص شدن یک خط کافی است دو نقطه از آن خط را داشته باشیم.

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.
۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.
۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

بله فاصله ی این دو نقطه از دو سر پاره خط یکسان است (شعاع های دایره اند) پس نتیجه می گیریم AB قرار دارند.

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

بله اگر دو نقطه از خطی معلوم باشد می توان آن خط را مشخص کرد.

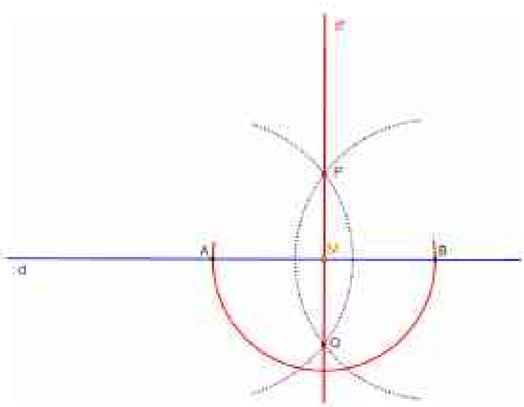
۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم نمایید.

خط PO همان عمود منصف پاره خط AB است .

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید به‌طوری که نقطهٔ M وسط A و B باشد.



برای این منظور کافی است به مرکز M و شعاع دلخواه کمانی رسم کنیم طوری

این کمان خط d رادر دو نقطه قطع می کند. این دو نقطه را A و B می نامیم .

چون A و B روی دایره به مرکز M هستند پس M وسط آن ها است .

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

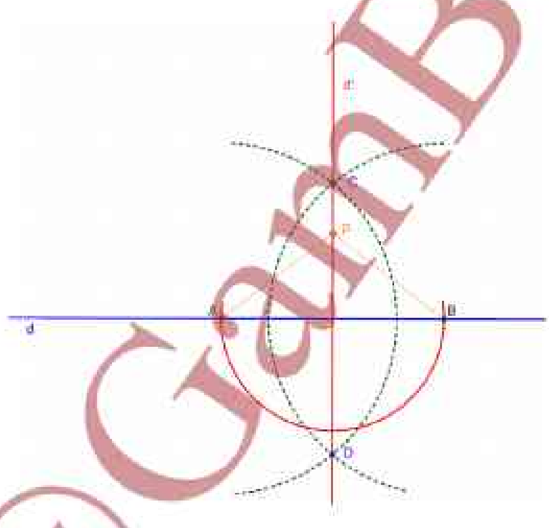
با استفاده از روش رسم عمود منصف که قبلا توضیح داده شده است رسم می کنیم.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d ..عمود است و از نقطهٔ .M می‌گذرد.

رسم خط عمود بر یک خط، از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن

خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.



برای این کار دایره ای به مرکز P و شعاع بیش از فاصله ی P از خط d رسم می کنیم تا خط رادر دونقطه ی A و B قطع کند . واضح است که فاصلهٔP که مرکز دایره است از A و B به یک اندازه است.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم نمایید.

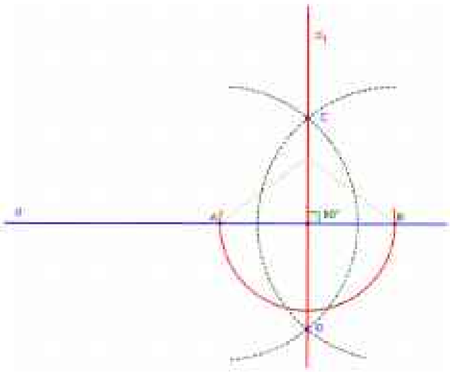
عمود منصف AB را به روشی که قبلا توضیح داده شده رسم می کنیم.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

بله زیرا هر نقطه که روی عمود منصف AB باشد از دو سر این پاره خط به یک فاصله است و بالعکس و چون فاصله ی نقطه ی P از دو نقطه ی A و B به یک فاصله است پس P نیز روی عمود منصف AB قرار دارد.

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d ..عمود است. و از نقطهٔ .P. .می‌گذرد .

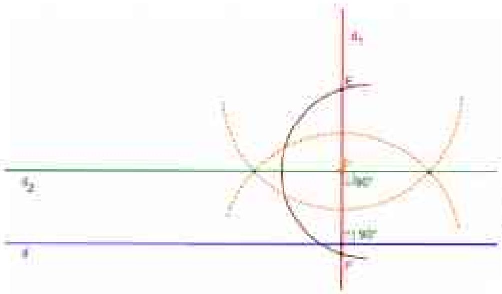
رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطهٔ غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ـ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

به روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه ی خارج آن از نقطه ی P خط d_1 را عمود بر خط d رسم می کنیم.



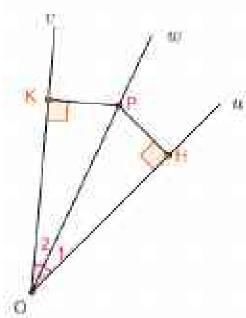
۲ـ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

به روش رسم خطی عمود بریک خط را نقطه ای روی خط خط d_2 را عمود بر خط d_1 رسم می کنیم .

۳ـ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

خط d_2 موازی خط d است . دو خط عمود بر یک خط باهم موازی هستند.

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

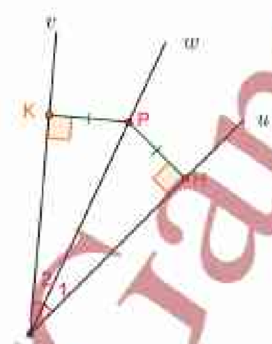


۱ـ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

دو مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ و $\overset{\Delta}{OKP}$ به حالت وتر ویک زاویه حاده با هم همنهشت هستند.

پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می گیریم که $PH = PK$.

نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه **به یک فاصله است**



۲ـ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی :** پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOvاست.)

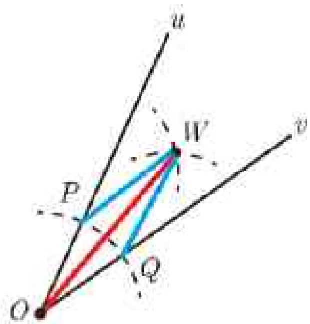
دو مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ و $\overset{\Delta}{OKP}$ به حالت وتر ویک ضلع زاویه قائمه با هم همنهشت هستند.

پس بنا بر اجزای متناظر نتیجه می گیریم که $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ پس نقطه ی P روی نیمساز زاویه است .

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دوضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

۳ــ رسم نیمساز یک زاویه



الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

با هم برابرند زیرا شعاع های دایره هستند.

ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کرده و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند.

باهم برابرند زیرا شعاع های دایره اند.

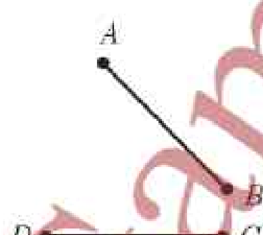
پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم نمایید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم همنهشت هستند به حالت (ض ض ض)

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

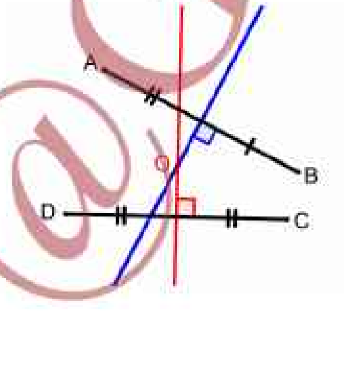
این دو زاویه بنا بر اجزای متناظر باهم برابر می شوند.

ــ پاره‌خط OW ...... نیمساز... زاویهٔ uOv است.

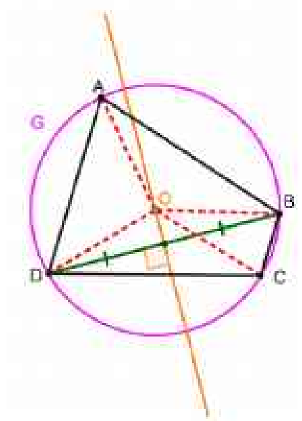


تمرین

۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.



بنا بر خاصیت عمود منصف نقطه ای اکه از دو نقطه ی A و B به یک فاصله باشد روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد و همچنین نقطه ای که از دو نقطه ی D و C فاصله ثابت دارد روی عمود منصف پاره خط CD قرار دارد.بنا براین جواب مسئله محل برخورد این دو عمود منصف است .



ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصف پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رئوس چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

با توجه به بند (الف) :

نقطهٔ O روی عمود منصف AB است بنابراین : OA=OB (۱)

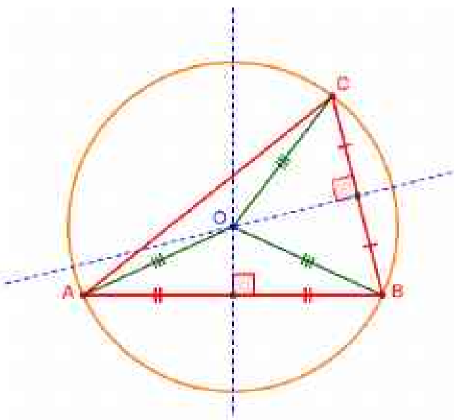
نقطهٔ O روی عمود منصف CD است بنابراین : OC=OD (۲)

و با توجه به فرض قسمت (ب) نقطهٔ O روی عمود منصف BC است بنابراین : OC=OB (۳)

از رابطه های (۱) و (۳) نتیجه می گیریم که : OA=OC (۴)

از رابطه ی (۴) و رابطهٔ (۲) نتیجه می گیریم که OA=OB=OC=OD

بنا براین فاصله ی نقاط B ، C و D از نقطه ی O برابر شعاع دایره OA است پس این نقاط روی دایره قرار دارند.



۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

نقاط B و C روی این دایره اند زیرا :

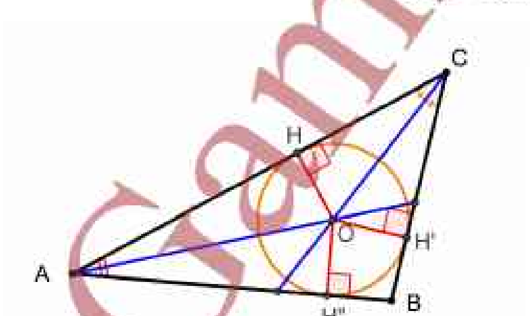
نقطه ی O روی عمود منصف ضلع BC است بنا براین OB=OC (۱)

نقطه ی O روی عمود منصف ضلع AB است بنا براین OA=OB (۲)

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : OA=OC=OB پس نقاط B و C نیز باید روی دایره به شعاع OA باشند.

نکته: این دایره ،دایرهٔ **محیطی** مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایره ی محیطی دارد.مرکز این دایره محل برخورد عمود منصف های مثلث است و شعاع آن فاصله ی این نقطه از رأس های مثلث است.

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آنرا ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟



اضلاع مثلث در پای عمود ها بر دایره مماس هستند.

نقطه ی O روی نیمساز زاویه A است پس "OH=OH (۱)

نقطه ی O روی نیمساز زاویه C است پس 'OH=OH (۲)

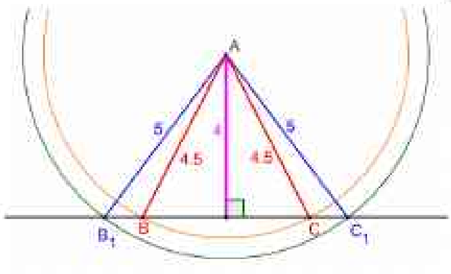
از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که : "OH'=OH

بنا براین OH'=OH"=OH پس نقاط "H و 'H هم روی این دایره قرار دارند و اگر شعاع در نقطه ی تماس با خطی ، بر آن عمود باشد با آن مماس است. پس اضلاع مثلث در این نقاط بر دایره مماس هستند.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

نکته : این دایره ، دایرهٔ **محاطی** مثلث نام دارد و با توجه به مطالب فوق هر مثلث حتما یک دایرهٔ محاطی داخل دارد.که مرکز آن نقطه برخورد نیمساز های داخلی است. و شعاع آن برابر با فاصله ی این نقطه از اضلاع مثلث است.

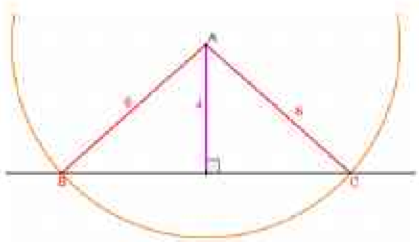
۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.



الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعده آن بر خط d منطبق باشد.

چون می خواهیم مثلث ABC متساوی الساقین باشد به طوری که AB=AC و ضلع BC روی خط d باشد ، پس باید نقاط B و C به فاصله ای مساوی از A و روی خط d باشند.

اگر بخواهیم این نقاط از نقطه ی A به یک فاصله باشند باید به مرکز A و شعاع دلخواه دایره رسم کنیم ولی چون می خواهیم که این نقاط روی خط d هم باشند بنا براین شعاع این دایره باید بزرگ تر از ۴ سانتی متر باشد زیرا در غیر اینصورت این دایره خط d را در دو نقطه قطع نمی کند.

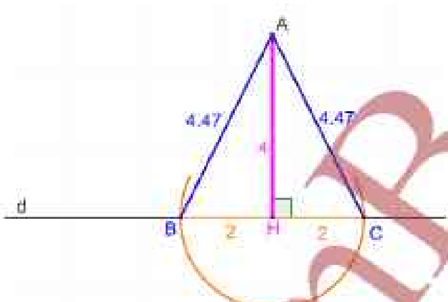


نکته : می توان بی شمار مثلث متساوی الساقین با این روش رسم کرد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

برای این منظور کافی است به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر که از ۴ بزرگ تر است دایره ای رسم کنیم این دایره خط d را در نقاط B و C قطع می کند و مثلث ABC جواب مسئله است .

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $۸cm^2$ باشد.



طول ارتفاع ۴ سانتی متر است پس طول قاعده نظیر را می توان حساب کرد .

$$s = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times BC \Rightarrow BC = ۴$$

می دانیم در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه بر هم منطبق هستند.بنا براین پای ارتفاع یعنی نقطهٔ H وسط BC است. پس به مرکز H و شعاع نصف BC (۲ سانتی متر) کمان می زنیم تا نقاط B و C به دست آیند سپس از A به این دو نقطه وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسئله است .

درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می‌دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج‌ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$ (طرفین وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\xrightarrow[bd\neq 0]{\times bd}\cancel{b}d\times\frac{a}{\cancel{b}}=b\cancel{d}\times\frac{c}{\cancel{d}}\Rightarrow ad=bc$$

ب) $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (تبدیل حاصل‌ضرب به تناسب)

$$ad=bc\xrightarrow[bd\neq 0]{\div bd}\frac{a\cancel{d}}{b\cancel{d}}=\frac{\cancel{b}c}{\cancel{b}d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (معکوس کردن تناسب)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\xrightarrow[ac\neq 0]{\div ac}\frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}c}=\frac{b\cancel{c}}{a\cancel{c}}\Rightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$ (تعویض جای طرفین یا وسطین)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc\begin{cases}\xrightarrow[ab\neq 0]{\div ab}\frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}b}=\frac{\cancel{b}c}{a\cancel{b}}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \xrightarrow[cd\neq 0]{\div cd}\frac{a\cancel{d}}{c\cancel{d}}=\frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$$

ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$ (ترکیب نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{a+d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1\Rightarrow\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}\Rightarrow\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$$

ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$ (تفضیل نسبت در صورت یا مخرج)

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{a-d}{d}\\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}\Rightarrow\frac{b}{a}-1=\frac{d}{c}-1\Rightarrow\frac{b-a}{a}=\frac{c-d}{c}\Rightarrow\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$$

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{5}{14}=\frac{15}{42}\Rightarrow 5\times 42=15\times 14$

ب) $3\times 40=12\times 10\Rightarrow\frac{3}{10}=\frac{12}{40}$

پ) $\frac{7}{10}=\frac{21}{30}\Rightarrow\frac{10}{7}=\frac{30}{21}$

ت) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}\Rightarrow\frac{6}{18}=\frac{11}{33}\quad,\quad\frac{33}{11}=\frac{18}{6}$

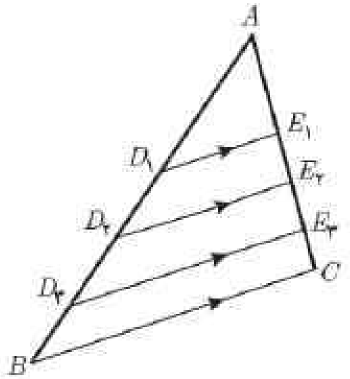
ث) $\frac{4}{14}=\frac{10}{35}\Rightarrow\frac{18}{14}=\frac{45}{35}\quad,\quad\frac{4}{18}=\frac{10}{45}$

ج) $\frac{5}{12}=\frac{10}{24}\Rightarrow\frac{-7}{12}=\frac{-14}{24}\quad,\quad\frac{5}{-7}=\frac{10}{-14}$

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن

در شکل مقابل داریم: $D_1E_1 \| BC$ و $D_2E_2 \| BC$ و $D_3E_3 \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $1 \le i \le 3$

ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

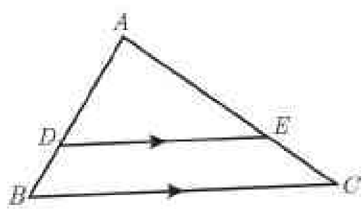


$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{۱/۶}{۲/۴}$ $\qquad$ $\frac{AE_1}{E_1C} = \frac{۱}{۱/۵}$

$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{۲/۴}{۱/۶}$ $\qquad$ $\frac{AE_3}{E_3C} = \frac{۲}{۰/۵}$

$\frac{AD_3}{D_3B} = \frac{۳/۲}{۰/۸}$ $\qquad$ $\frac{AE_2}{E_2C} = \frac{۱/۵}{۱}$

ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟



$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{DC}$

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

خیر نمی توان به طور قطع نتیجه گرفت .

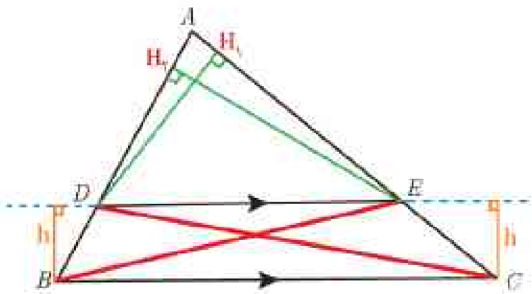
در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

استدلال استنتاجی، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ تالس



فعالیت

فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

ارتفاع های نظیر قاعدهٔ DE را در دو مثلث DEC و DEB رسم می کنیم . با توجه به شکل می دانیم که فاصلهٔ بین دو خط موازی مقداری ثابت است پس طول ارتفاع ها باهم برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} S_{DEC}=\frac{1}{2}h.DE \\ S_{DEB}=\frac{1}{2}h.DE \end{array}\right\} \Rightarrow S_{DEC}=S_{DEB}$$

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را H_1 بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را H_2 بنامید.

۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{1}{2}EH_1\times AD}{\frac{1}{2}EH_1\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{1}{2}DH_2\times AE}{\frac{1}{2}DH_2\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

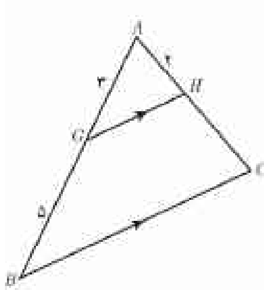
۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$. چرا؟

$$\left.\begin{array}{l} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{AE}{EC} \end{array}\right\} \xrightarrow{S_{DEB}=S_{DEC}} \left.\begin{array}{l} \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{AE}{EC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.
نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[1] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

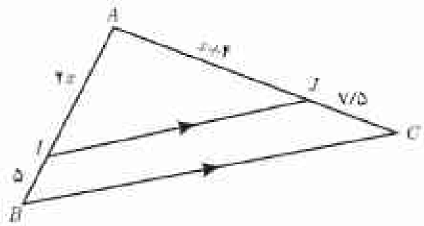
۱ــ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۴ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.

کار در کلاس



۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

$$\frac{AG}{GB}=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{HC}\Rightarrow HC=\frac{۱۰}{۳}$$

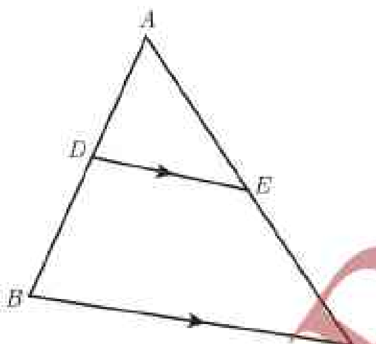


۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.

$$\frac{AI}{IB}=\frac{AJ}{JC}\Rightarrow\frac{۲x}{۵}=\frac{x+۴}{۷/۵}\Rightarrow ۱۵x=۵x+۲۰\Rightarrow ۱۰x=۲۰\Rightarrow x=۲$$

تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت



۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.

الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

$$DE\parallel BC\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

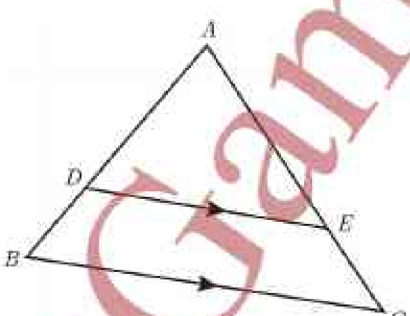
ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\frac{AD}{DB+AD}=\frac{AE}{EC+AE}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\Rightarrow\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AE-AC}{AC}\Rightarrow\frac{-DB}{AB}=\frac{-EC}{AC}\Rightarrow\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

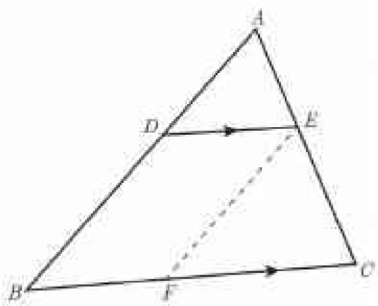
توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند.



۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}\Rightarrow\begin{cases}\frac{DB}{DA}=\frac{EC}{AE} & \frac{BD}{BA}=\frac{EC}{CA} \quad \frac{AB}{BD}=\frac{CA}{CE}\\ \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} & \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم : $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم : $\dfrac{BF}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم : $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BF}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

بنابه فرض $DE \parallel BF$ و $DB \parallel EF$ پس بنا به تعریف چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع است.

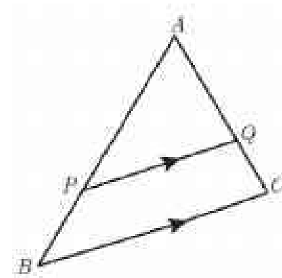
پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF = DE$

ث) با توجه به قسمت‌های (ج) و (د) داریم : $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{PQ}{BC}$ ☒

ب) $\dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{PQ}{BC}$ ☑

پ) $\dfrac{PB}{AP}=\dfrac{QC}{AC}$ ☒

ت) $\dfrac{PB}{AB}=\dfrac{QC}{AC}=\dfrac{PQ}{BC}$ ☒

ث) $\dfrac{PB}{AB}=\dfrac{QC}{AC}$ ☑

ج) $\dfrac{AB}{AP}=\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{BC}{PQ}$ ☑

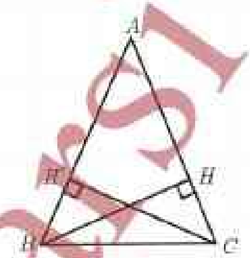
اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



مثال ۲ :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

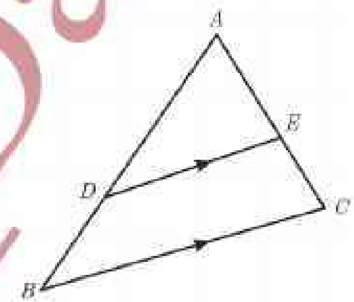
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض: $DE \parallel BC$

حکم: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. در برهان خلف به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: B (حکم) $\Rightarrow A$ (فرض)

اثبات به روش برهان خلف:

$$\left.\begin{array}{r} A \text{ درست} \\ \text{و} \\ B \text{ نادرست}\end{array}\right\} \underbrace{\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$$

① A درست نیست

② تناقض منطقی

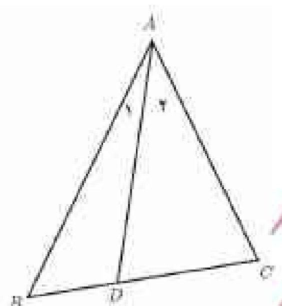
پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

مثال: اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل:

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان نوشت $n=2k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^2=4k^2=2(2k^2)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.



مثال: فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.

حل:

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

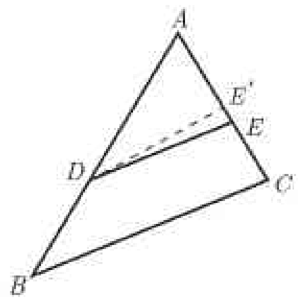
بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

پاسخ چرا:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC \text{ (فرض خلف)} \\ \widehat{A_1} = \widehat{A_2} \\ AD = AD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} A\overset{\Delta}{B}D \cong A\overset{\Delta}{C}D$$

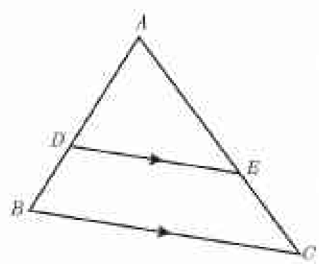
حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.



اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AE'}{E'C}=\frac{AD}{DB}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$. حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE=AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی



همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :

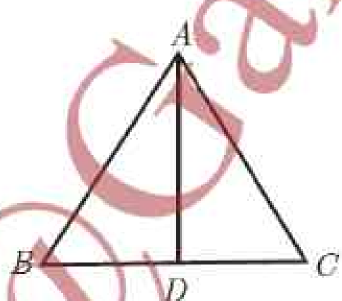
اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[1] (که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

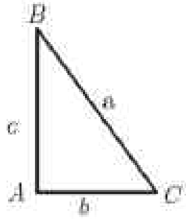


مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.

مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

کار در کلاس



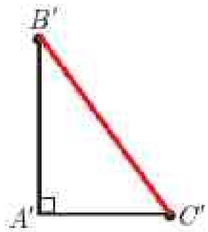
با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلث ABC، $a^2 = b^2 + c^2$ آنگاه مثلث در رأس A قائمه است.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ـ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ـ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}' = 90^\circ$ و $A'C' = AC$ و $A'B' = AB$ است.

۳ـ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازهٔ پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C' = BC$.

$$\left.\begin{array}{r} B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2 \xrightarrow[A'C'=b]{A'B'=c} B'C'^2 = b^2 + c^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow B'C'^2 = a^2 \Rightarrow B'C' = a$$

۴ـ توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A} = 90^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l} A'B' = AB \\ A'C' = AC \\ B'C' = BC \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'} \xrightarrow{\text{اجزای تظیر}} \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ$$

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

فرض کنیم ABC یک مثلث باشد در اینصورت : $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow A = 90^\circ$

مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.
به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[1] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت $n^۲+n+۴۱$ عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم**».

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر فرض کنیم که $n = ۴۱$ آنگاه داریم $n = ۴۱ \Rightarrow ۴۱^۲ + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱(۴۱ + ۲) = ۴۱ \times ۴۳$

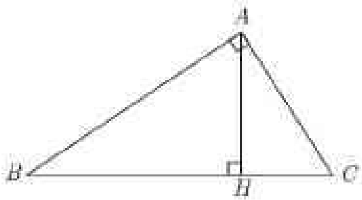
که حاصل دیگر عدد اول نیست پس $n = ۴۱$ یک مثال نقض برای رد این حکم کلی است.

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یکبار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

تمرین

۱ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست آورید.



$$\left.\begin{array}{l} S_{ABC}=\frac{1}{2}AH.BC \\ S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}AB.AC \Rightarrow AH.BC=AB.AC \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}$$

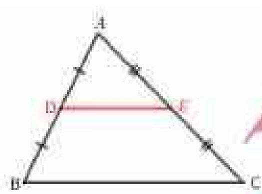
۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

الف) $$\frac{a}{10+a}=\frac{b}{8+b} \Rightarrow \frac{a}{10+a-a}=\frac{b}{8+b-b} \Rightarrow \frac{a}{10}=\frac{b}{8} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{10}{8}$$

نکته : می توان ثابت کرد :
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a\pm nb}{b}=\frac{c\pm nd}{d} \\ \frac{a}{b\pm na}=\frac{c}{d\pm nc} \end{cases}$$

ب) $$\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b} \Rightarrow \frac{3a+10-(10+2a)}{10+2a}=\frac{3b+7-(7+2b)}{7+2b} \Rightarrow \frac{a}{10+2a}=\frac{b}{7+2b}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{10+2a-2a}=\frac{b}{7+2b-2b} \Rightarrow \frac{a}{10}=\frac{b}{7} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{10}{7}$$

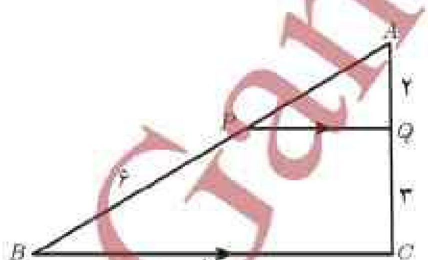
۳ ثابت کنید در هر مثلث پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



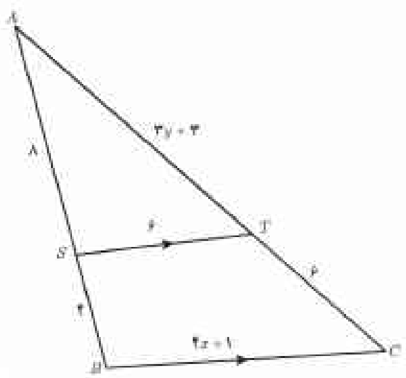
$$\left.\begin{array}{l} AD=DB \Rightarrow \frac{AD}{DB}=1 \\ AE=EC \Rightarrow \frac{AE}{EC}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE\parallel BC$$

$$DE\parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیه تالس}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC} \xrightarrow[AC=2AE]{AB=2AD} \frac{DE}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow DE=\frac{1}{2}BC$$

۴ در شکل مقابل $PQ\parallel BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.



$$PQ\parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow AP=4 \\ \frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{PQ}{9}=\frac{2}{5} \Rightarrow PQ=\frac{18}{5} \end{cases}$$

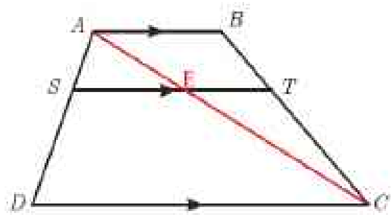


۵ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.

$$ST \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AS}{SB} = \dfrac{AT}{TC} \Rightarrow \dfrac{8}{4} = \dfrac{3y+3}{6} \Rightarrow 2 = \dfrac{y+1}{2} \Rightarrow y+1 = 4 \Rightarrow y = 3 \\ \dfrac{AS}{AB} = \dfrac{ST}{BC} \Rightarrow \dfrac{8}{12} = \dfrac{6}{4x+1} \Rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{4x+1} \Rightarrow 8x+2 = 18 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

۶ در ذوزنقه مقابل $AB \parallel ST \parallel DC$ است. ثابت کنید: $\dfrac{AS}{SD} = \dfrac{BT}{TC}$

(**راهنمایی**: یکی از قطرها را رسم کنید.)



$$\left.\begin{aligned} A\overset{\triangle}{C}D: SE \parallel DC \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{AE}{EC} \\ A\overset{\triangle}{B}C: TE \parallel AB \Rightarrow \frac{BT}{TC} = \frac{AE}{EC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{AS}{SD} = \frac{BT}{TC}$$

۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

اگر در مثلثی سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

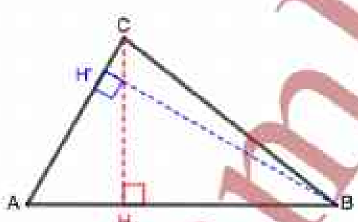
اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل باهم برابر باشند، در این صورت اضلاع مقابل موازی هستند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل یکدیگر باشند، در این صورت رأس های چهارضلعی روی یک دایره قرار دارند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

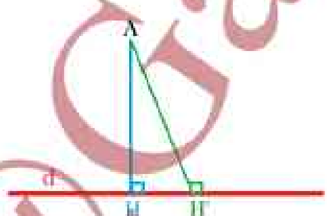
(**راهنمایی**: شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)



در مثلث ABC، اگر $AB > AC$ آنگاه $CH < BH'$

به عبارتی: $AB > AC \Rightarrow CH < BH'$

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.



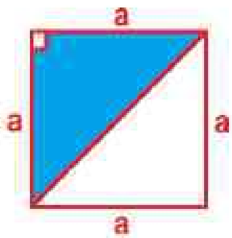
خط d و نقطهٔ A خارج آن را در نظر می گیریم. از نقطهٔ A عمود AH را رسم می کنیم.
با استفاده از برهان خلف، فرض می کنیم که از نقطهٔ A می توانیم خط دیگری مانند AH' را برخط d عمود کنیم (فرض خلف). بنا براین در مثلث AHH'، $\widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ$ ؛ولی با توجه به این که مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است، به تناقض می رسیم، پس از ابتدا فرض غلط بودن حکم نادرست بوده و حکم نمی تواند غلط باشد. به عبارتی فرض خلف باطل و حکم مسئله ثابت می شود.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

عدد ۱۳۱ ، اول است و از ۱۲۷ بزرگ‌تر است. پس این حکم کلی با این مثال نقض رد می شود.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.



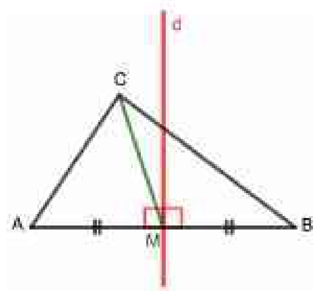
مساحت مربع در شکل مقابل a^2 است اما مساحت مثلث قائم الزاویه رنگی $\frac{a^2}{2}$ است .

$\frac{a^2}{2} < a^2$ پس با این مثال نقض حکم کلی فوق رد می شود.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

در مثلث قائم الزاویه ارتفاع با طول ضلع مثلث برابر است. با این مثال نقض این حکم کلی رد می شود.

ت) در هر مثلث میانه و عمود منصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.



در مثلث ABC شکل مقابل خط d عمود منصف ضلع AB و CM میانهٔ ضلع AB است ولی

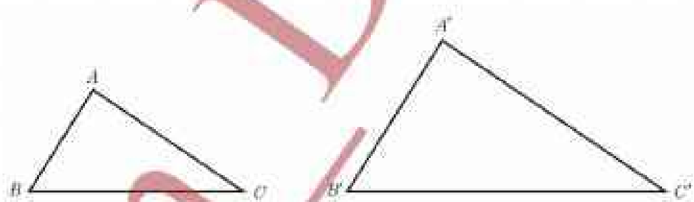
بر هم منطبق نیستند.

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی

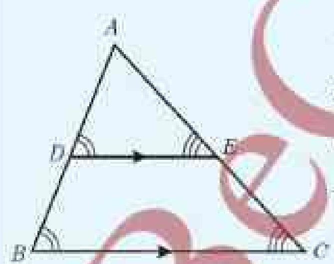
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A'} \text{ و } \hat{B}=\hat{B'} \text{ و } \hat{C}=\hat{C'} \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\frac{AB}{A'B'}=\frac{۲}{۳}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۲}{۳}$، متشابه است. در این‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\frac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{D}=\hat{B}$ و $\hat{E}=\hat{C}$ (چرا؟)

$$DE \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} AB \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{D}=\hat{B} \\ AC \text{ مورب} \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{E}=\hat{C} \end{cases}$$

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

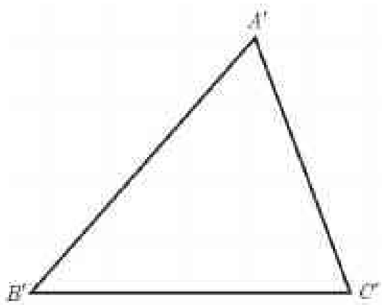
۲ــ با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

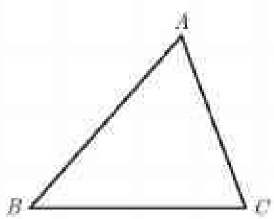
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعد را که **حالت‌های تشابه دو مثلث** را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.



قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C')$$



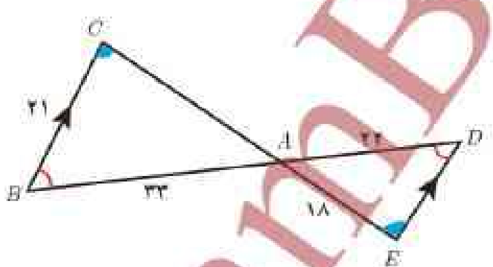
قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'\right)$$

قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$$

کار در کلاس



۱ در شکل مقابل $BC \parallel DE$.

اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.

بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و BD مورب پس $\hat{B}=\hat{D}$

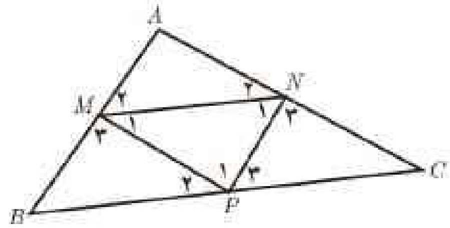
بنا بر قضیه خطوط موازی $BC \parallel DE$ و CE مورب پس $\hat{C}=\hat{E}$

پس بنا بر قضیهٔ (۱) تشابه دو مثلث ABC و ADE به حالت برابر بودن دو زاویه با هم متشابه اند.در نتیجه می توانیم برای آن ها نسبت تشابه بنویسیم:

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{AC}{۱۸}=\frac{۳۳}{۲۲}=\frac{۲۱}{DE} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AC}{۱۸}=\frac{۳۳}{۲۲} \Rightarrow AC=۲۷ \\ \frac{۳۳}{۲۲}=\frac{۲۱}{DE} \Rightarrow DE=۱۴ \end{cases}$$

۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :



الف) $MN \parallel BC$ و $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$ چرا؟

قبلا ثابت کرده ایم که هر گاه پاره خطی وسط دوضلع مثلث را به هم وصل کند با ضلع سوم موازی و نصف آن است

ب) بنابراین $\hat{M}_۱ = \hat{P}_۲ = \hat{C}$ و $\hat{N}_۱ = \hat{P}_۳ = \hat{B}$ (چرا؟)

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و NP مورب پس $\widehat{N_1} = \widehat{P_3}$ (۱)

همچنین $MN \parallel BP$ و $MB \parallel NP$ پس چهارضلعی MNPB متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{N_1} = \hat{B}$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $\widehat{N_1} = \widehat{P_3} = \hat{B}$

بنا بر قضیه خطوط موازی $MN \parallel BC$ و MP مورب پس $\widehat{M_1} = \widehat{P_2}$ (۳)

همچنین $MN \parallel PC$ و $MP \parallel NC$ پس چهارضلعی MNCP متوازی الاضلاع است در نتیجه: $\widehat{M_1} = \hat{C}$ (۴)

از (۳) و (۴) نتیجه می گیریم : $\widehat{M_1} = \widehat{P_2} = \hat{C}$

از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$\widehat{N_1} = \hat{B}$ و $\widehat{M_1} = \hat{C}$ پس بنا بر قضیهٔ ۱ تشابه این دو مثلث متشابه اند.

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

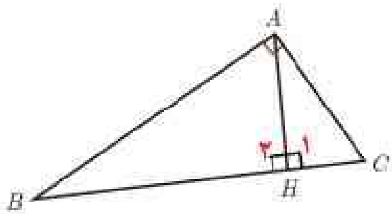
اگر $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند : $\hat{A} = \widehat{A'}$ ، $\hat{B} = \widehat{B'}$ و $\hat{C} = \widehat{C'}$ (۱)

اگر $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$ پس بنا به تعریف تشابه دو مثلث زوایای نظیر باهم برابرند : $\widehat{A'} = \widehat{A''}$ ، $\widehat{B'} = \widehat{B''}$ و $\widehat{C'} = \widehat{C''}$ (۲)

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم : $\hat{A} = \widehat{A''}$ ، $\hat{B} = \widehat{B''}$ پس بنا بر قضیه (۱) تشابه داریم : $A\overset{\Delta}{B}C \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$.

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت



فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.

۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید :

$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHC}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_1=90^\circ\\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AHC}$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید :

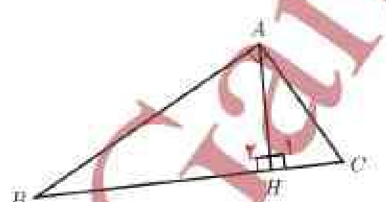
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AHB}$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{H}_2=90^\circ\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{قضیه (۱) تشابه}} \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AHB}$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه ای می گیرید؟

با توجه به کار در کلاس قبلی نتیجه می شود که $\overset{\Delta}{AHB}\sim\overset{\Delta}{AHC}$

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.



۴ $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{AB}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2=HC\times BC$

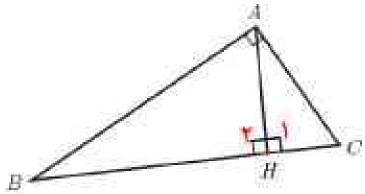
۵ $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AHB} \Rightarrow \dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2=HB\times BC$

۶ $\overset{\Delta}{AHB}\sim\overset{\Delta}{AHC} \Rightarrow \dfrac{AH}{HB}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2=HB\times HC$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

$$AC^2+AB^2=HC\times BC+HB\times BC=BC(\underbrace{HC+HB}_{BC})=BC\times BC \Rightarrow AC^2+AB^2=BC^2$$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

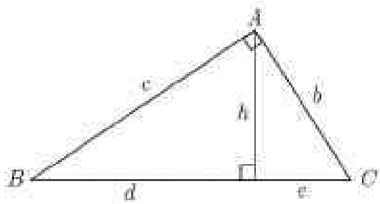


$$\left.\begin{aligned} S_{ABC} &= \tfrac{۱}{۲} AH.BC \\ S_{ABC} &= \tfrac{۱}{۲} AB.AC \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tfrac{۱}{۲} AH.BC = \tfrac{۱}{۲} AB.AC \Rightarrow AH.BC = AB.AC$$

$AB \times AC = AH \times BC$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱ $h=۵$ $d=۷$ $e=?$

$h^۲ = de \Rightarrow ۲۵ = ۷e \Rightarrow e = \frac{۲۵}{۷}$

۲ $d=۵$ $e=۳$ $b=?$ $c=?$

$c^۲ = d(d+e) \Rightarrow c^۲ = ۵(۵+۳) = ۴۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۱۰}$

$b^۲ = e(d+e) \Rightarrow b^۲ = ۳(۵+۳) = ۲۴ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۶}$

۳ $c=۸$ $b=۶$ $h=?$

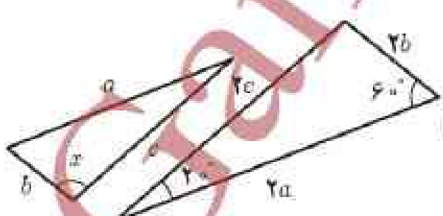
$BC = \sqrt{۳۶+۶۴} = ۱۰$

$bc = h.BC \Rightarrow ۶\times۸ = ۱۰h \Rightarrow h = \frac{۴۸}{۱۰}$

تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

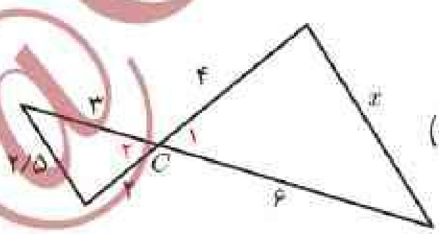
الف)



$\frac{۲a}{a} = \frac{۲b}{b} = \frac{۲c}{c} = ۲$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۳) تشابه ، متشابه اند.

اندازهٔ زاویهٔ سوم در مثلث بزرگ تر با توجه به مجموع زوایای داخلی ، ۱۰۰° است ، پس $x = ۱۰۰^\circ$

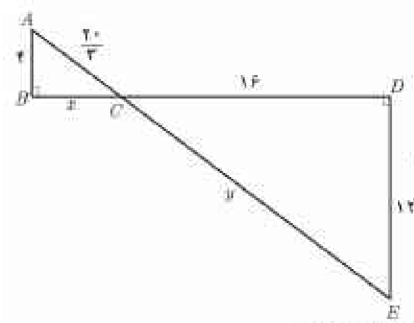
ب)



$\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ ، $\frac{۶}{۳} = \frac{۴}{۲} = ۲$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۲) تشابه ، متشابه اند.

$\frac{x}{۲/۵} = ۲ \Rightarrow x = ۵$

پ)



$\widehat{C_1}=\widehat{C_2}$ و $\hat{B}=\hat{D}=90^\circ$ بنا براین دو مثلث بنا بر قضیه (۱) تشابه ، متشابه اند.

$$\frac{16}{x}=\frac{y}{\frac{20}{3}}=\frac{12}{4}=3\Rightarrow\begin{cases}\frac{16}{x}=3\Rightarrow x=\frac{16}{3}\\ \frac{y}{\frac{20}{3}}=3\Rightarrow y=20\end{cases}$$

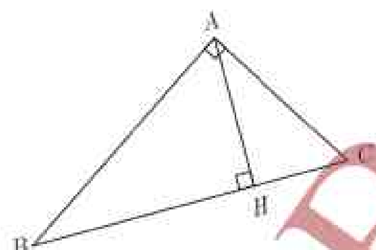
۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $BC=10$ و $BH=9$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

$$AB^2=BH\times BC\Rightarrow AB^2=9\times10=90\Rightarrow AB=3\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}\Rightarrow AC=\sqrt{100-90}\Rightarrow AC=\sqrt{10}$$
$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow 3\sqrt{10}\times\sqrt{10}=AH\times10\Rightarrow AH=3$$

ب) $AC=5$ و $CH=2$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

$$AC^2=CH\times BC\Rightarrow 25=2\times BC\Rightarrow BC=\frac{25}{2}$$
$$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{625}{4}-25}\Rightarrow AB=\sqrt{\frac{525}{4}}=\frac{5\sqrt{21}}{2}$$
$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow\frac{5\sqrt{21}}{2}\times5=AH\times\frac{25}{2}\Rightarrow AH=\sqrt{21}$$

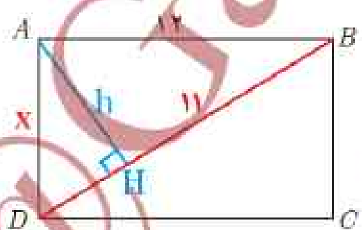


پ) $AB=8$ و $AC=6$ و $BC=?$ و $AH=?$

$$BC=\sqrt{AC^2+AB^2}\Rightarrow AC=\sqrt{36+64}\Rightarrow BC=10$$
$$AB\times AC=AH\times BC\Rightarrow 8\times6=AH\times10\Rightarrow AH=\frac{48}{10}$$

ت) $AB=12$ و $AH=6$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

$$BH=\sqrt{AB^2-AH^2}\Rightarrow BH=\sqrt{144-36}\Rightarrow BH=6\sqrt{3}$$
$$AB^2=BH\times BC\Rightarrow 144=6\sqrt{3}\times BC\Rightarrow BC=8\sqrt{3}$$
$$AC=\sqrt{BC^2-AB^2}\Rightarrow AC=\sqrt{192-144}=\sqrt{48}\Rightarrow AC=4\sqrt{3}$$

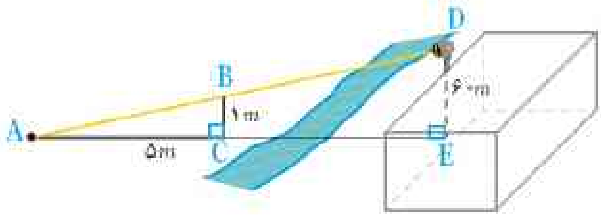


۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.

$$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}\Rightarrow h=\sqrt{144-121}\Rightarrow h=\sqrt{23}$$
$$AB^2=BH\times BD\Rightarrow 144=11\times BD\Rightarrow BD=\frac{144}{11}$$
$$AD\times AB=AH\times BD\Rightarrow x=\frac{\sqrt{23}\times\frac{144}{11}}{12}\Rightarrow x=\frac{12}{11}\sqrt{23}$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

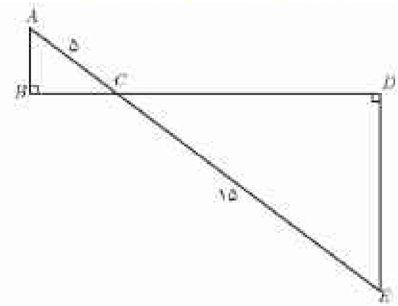
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



$\hat{C} = \hat{E} = 90^\circ$ و $\hat{A} = \hat{A}$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه $\overset{\triangle}{A\hat{B}C} \sim \overset{\triangle}{A\hat{D}E}$ در نتیجه داریم:

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{5}{AE} = \frac{1}{60} \Rightarrow AE = 300\ m$$

۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.



$\hat{C_1} = \hat{C_2}$ و $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه $\overset{\triangle}{A\hat{B}C} \sim \overset{\triangle}{C\hat{D}E}$ در نتیجه داریم:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{AC} = \frac{15}{5} = 3$$

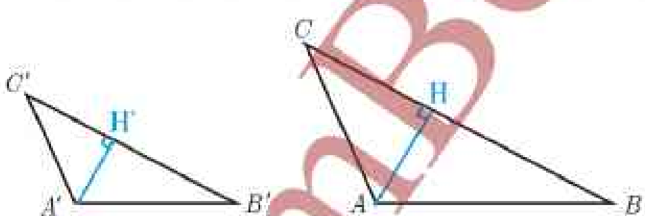
$$\frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}DC \times DE}{\cancel{\frac{1}{2}}BC \times AB} = \frac{DC}{BC} \times \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 3 \times 3 \Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}} = 9$$

می توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

$$\frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = \frac{DC + DE + CE}{BC + AB + AC} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow \frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = \frac{15}{5} \Rightarrow \frac{P_{CDE}}{P_{ABC}} = 3$$

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.



بنا به فرض $\hat{B} = \hat{B'}$ و $\hat{H} = \hat{H'} = 90^\circ$ پس بنا بر قضیهٔ اول تشابه

در نتیجه داریم: $\overset{\triangle}{A\hat{B}H} \sim A'\hat{B'}H'$

ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

با توجه به نسبت تشابه دو مثلث و فرض مسئله داریم:

$$\frac{CH}{C'H'} = \frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = k \Rightarrow \frac{AH}{A'H'} = k$$

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH \times BC}{\cancel{\frac{1}{2}}A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = k \times k \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2$$

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

می توان ثابت کرد اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a}{b}$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{BC + AB + AC}{B'C' + A'B' + A'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k \Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = k$$

ثابت کنید: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f}=k$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{a+c}{b+d}=k \Rightarrow a+c=k(b+d)\\ \frac{e}{f}=k \Rightarrow e=kf\end{array}\right\} \Rightarrow a+c+e=k(b+d)+kf \Rightarrow a+c+e=k(b+d+f) \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f}=k$$

فصل ۳
تابع

بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار (در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین‌لرزهٔ شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

درس اول — آشنایی با برخی از انواع توابع

درس دوم — وارون یک تابع و تابع یک به یک

درس سوم — اعمال جبری روی توابع

درس اول

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، **ضابطهٔ** آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد، اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایهٔ یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جادهٔ اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربهٔ خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخهٔ اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۱۰}$

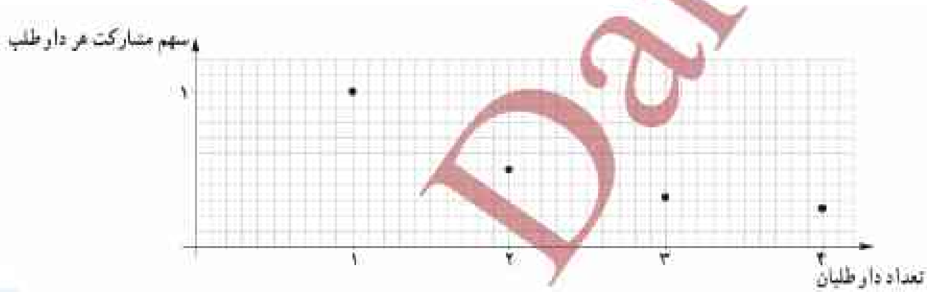
ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟ $\frac{1}{n}$

پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟ $f(x)=\frac{1}{x}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☑ افزایش ☐ می‌یابد».

این نمودار نشان می دهد که با افزایش تعداد افراد سهم مشارکت هر فرد کاهش می یابد.



خواندنی

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$	۲۸/۳	۱۰۹/۳	۲۵۵	۵۹۵	۲۲۹۵

الف)

$p(۱۰)=\frac{۲۵۵\times۱۰}{۱۰۰-۱۰}=\frac{۲۵۵۰}{۹۰}=۲۸/۳۳۳...=۲۸/۳$

$p(۳۰)=\frac{۲۵۵\times۳۰}{۱۰۰-۳۰}=\frac{۷۶۵۰}{۷۰}=۱۰۹/۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴...=۱۰۹/۳$

$p(۵۰)=\frac{۲۵۵\times۵۰}{۱۰۰-۵۰}=\frac{۲۵۵\times۵۰}{۵۰}=۲۵۵$

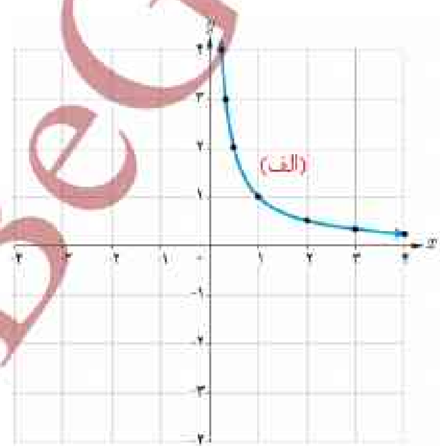
$p(۷۰)=\frac{۲۵۵\times۷۰}{۱۰۰-۷۰}=\frac{۲۵۵\times۷۰}{۳۰}=\frac{۲۵۵\times۷}{۳}=۵۹۵$

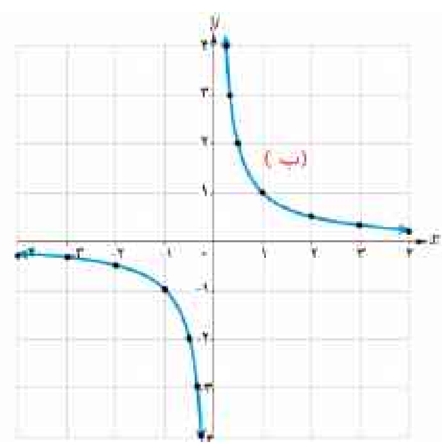
$p(۹۰)=\frac{۲۵۵\times۹۰}{۱۰۰-۹۰}=\frac{۲۵۵\times۹۰}{۱۰}=۲۵۵\times۹=۲۲۹۵$

فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(۰,+\infty)$ ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$





هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$, $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

ب)

$۱۰۰۰=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}\Rightarrow ۱۰۰۰۰۰-۱۰۰۰x=۲۵۵x\Rightarrow ۱۰۰۰۰۰=۱۲۵۵x$

$\Rightarrow x=\frac{۱۰۰۰۰۰}{۱۲۵۵}\approx ۷۹/۶۸\simeq ۸۰$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{1}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$f(x)=\frac{x+3}{x-10}$ $\qquad$ $f(x)=\frac{x}{x+5}$

$f(x)=2$ $\qquad$ $f(x)=\sqrt{5}x$

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می‌کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$f(x)=\frac{7+x}{10+x}$ $\qquad$ $f(x)=\frac{x}{0/7+x}$ $\qquad$ $f(x)=x+0/7$

نسبت پرتاب های موفق وحیده به کل پرتاب های ی او $\frac{7}{10}$ است حالا اگر فرض کنیم که او x پرتاب موفق دیگر انجام دهد پس به ۷پرتاب موفق قبلی x و به کل پرتاب ها هم x تا پرتاب اضافه می شود و نسبت پرتاب های موفق جدید به کل پرتاب های جدید به صورت $\frac{7+x}{10+x}$خواهد بود. بنا براین ضابطه ی تابع پرتاب های موفق وحیده $f(x)=\frac{7+x}{10+x}$ است .

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

بله زیرا صورت و مخرج کسر یک چندجمله ای است . و همچنین مخرج صفر نیست زیرا تعداد پرتاب ها که x است منفی نیست و با عدد ۱۰ هم که جمع شود صفر نمی شود.

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$$f(x)=\frac{80}{100} \rightarrow \frac{7+x}{10+x}=\frac{80}{100} \rightarrow 100x+700=80x+800 \rightarrow 20x=100 \rightarrow x=5$$

دامنهٔ توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{1}{x}$ نیست. به‌طور کلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطهٔ یک تابع گویا را صفر کنند، عضو دامنهٔ آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{5}{x-2}$ برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ است.

کار در کلاس

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$D_g=\mathbb{R}-\{4\}$	$g(x)=\frac{3}{x-4}$	$D_f=\mathbb{R}-\{-5\}$	$f(x)=\frac{x}{x+5}$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x}{x}$ و $g(x)=۲$ دقت کنید.

می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم :

$D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$ $\qquad$ $D_g = \mathbb{R}$

در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر : همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن محاسبه می‌کنیم.

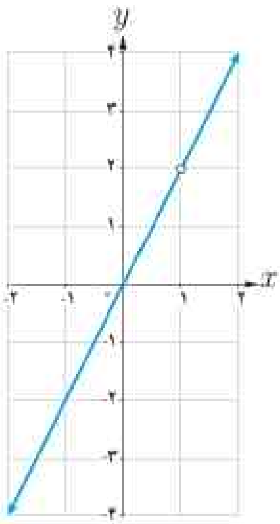
کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

خیر زیرا وقتی تابع **f(x)** را ساده می کنیم ، ضابطه ی دو تابع برابر می شود ولی دامنه ها باهم برابر نیستند پس این دو تابع با هم برابر نیستند.

$f(x)=\frac{x^۲}{x}=x$ $\qquad$ $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$, $D_g = \mathbb{R}$

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(x) = ۲x$

ب) $D_g = \mathbb{R} - \{۲\}$ $\quad g(x) = ۲x$

پ) $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ $\quad g(x) = ۲x$

ت) $D_g = \mathbb{R} - \{۱\}$ $\quad g(x) = \dfrac{۲x^۲ - ۲x}{x - ۱}$

ث) $D_g = \mathbb{R} - \{۲\}$ $\quad g(x) = \dfrac{۲x^۲ - ۴x}{x - ۲}$

با توجه به شکل دامنه ی تابع عبارت است از : $D_g = \mathbb{R} - (۱)$ بنا براین دامنهٔ آن با قسمت های (پ) و (ت) یکی است اما باید ضابطه های هر کدام از این قسمت ها را هم بررسی کنیم.

$$g(x) = \frac{۲x^۲ - ۲x}{x - ۱} = \frac{۲x(x - ۱)}{(x - ۱)} \xrightarrow[D_g = \mathbb{R} - (۱)]{\div (x-۱)} g(x) = ۲x$$

می دانیم نقاط $(۰,۰)$ و $(-۱,-۲)$ روی نمودار این تابع قرار دارند و در ضابطهٔ تابع $g(x) = ۲x$ صدق می کنند:

$$g(x) = ۲x \Rightarrow \begin{cases} ۰ = ۲ \times ۰ \Rightarrow ۰ = ۰ \\ -۲ = ۲ \times (-۱) \Rightarrow -۲ = -۲ \end{cases}$$

توابع رادیکالی

کار در کلاس

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S = ۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. ($\sqrt{۲} = ۱/۴$, $\sqrt{۳} = ۱/۷$)

d	۱	۲	۳	۴
$S = ۳۵۶\sqrt{d}$	۳۵۶	۴۹۸/۴	تقریباً ۶۰۵/۲	۷۱۲

ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها ... یک ... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع است.

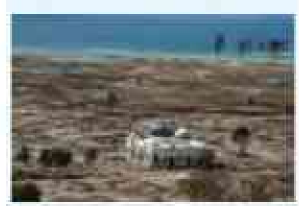
پ) کدام‌یک از اعداد ۵- و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

عدد ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است.

خواندنی

سونامی (آبلرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به‌شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.

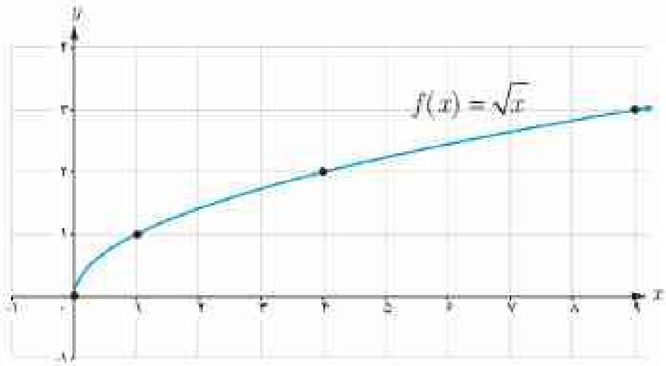


در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که « آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

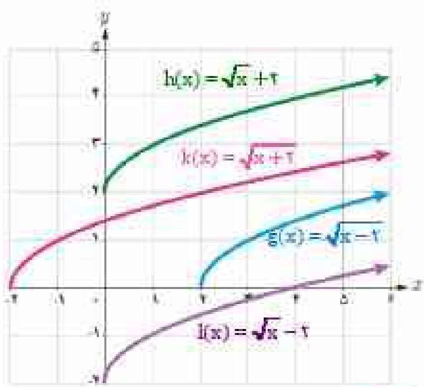
مطالعهٔ **توابع رادیکالی** مانند $S = ۳۵۶\sqrt{d}$ به‌دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به‌صورت زیر است.



فعالیت

۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.



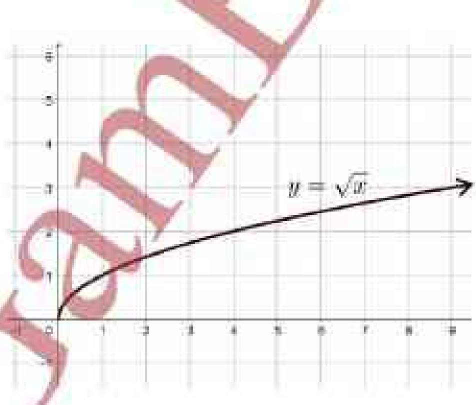
الف) $g(x) = \sqrt{x - ۲}$ $D_g = [۲, +\infty)$ ب) $h(x) = \sqrt{x} + ۲$ $D_h = [۰, +\infty)$

پ) $k(x) = \sqrt{x + ۲}$ $D_k = [-۲, +\infty)$ ت) $l(x) = \sqrt{x} - ۲$ $D_l = [۰, +\infty)$

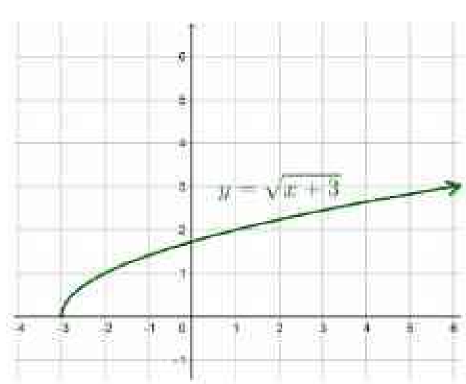
۲ می‌خواهیم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲ + \sqrt{x + ۳}$ را رسم کنیم.

الف) (مرحلهٔ اول) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x}$ در صفحهٔ قبل را در نظر بگیرید.

ب) (مرحلهٔ دوم) حال، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x + ۳}$ را رسم کنید.



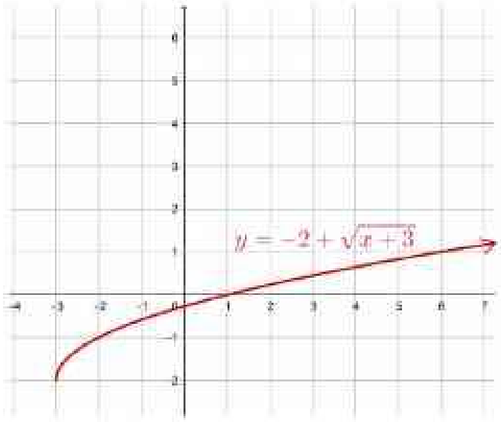
(الف) مرحلهٔ اول



(ب) مرحلهٔ دوم

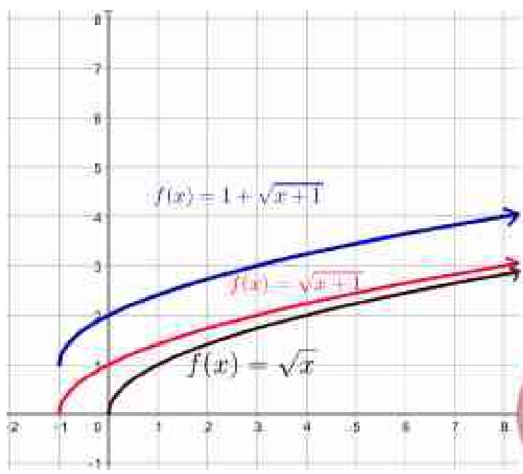
ب) (مرحلهٔ سوم) در پایان، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲+\sqrt{x+۳}$ را رسم کنید.

با توجه به شکل می‌بینید که دامنهٔ این تابع $[-۳,+\infty)$ است.



۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=۱+\sqrt{x+۱}$ را رسم کنید؛ سپس دامنهٔ آن را بیابید.

$D_f=[-۱,+\infty)$



توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

هزینهٔ پارکینگ خودرو

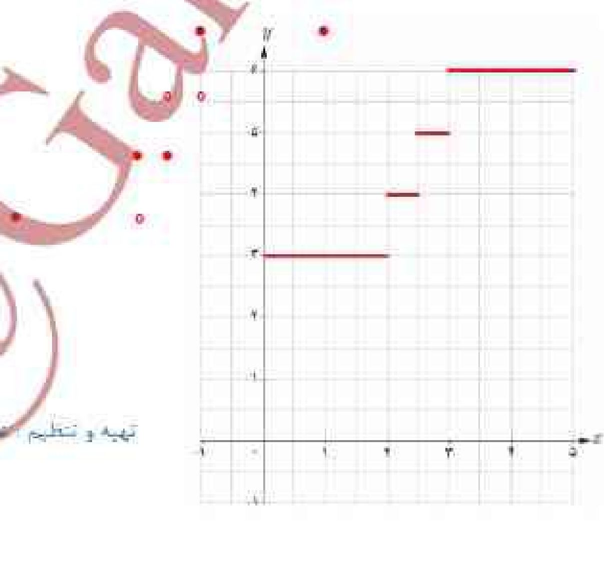
در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود :

زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\leq x<۲ \\ ۴ & ۲\leq x\leq ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵<x<۳ \\ ۶ & ۳\leq x\leq ۵ \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.



به توابعی مانند تابع هزینهٔ پارکینگ، **توابع پله‌ای** می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت با خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، **تابع جزء صحیح** است.

> تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x) = [x]$ نشان داده می‌شود.

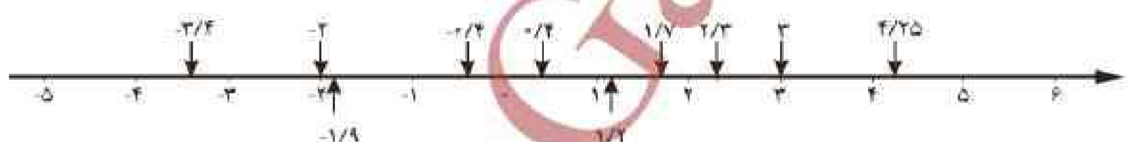
برای مثال داریم:

[−۳]=−۳   [−۴/۳]=−۵   [۰]=۰   [۶/۱]=۶   [۴]=۴

همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ با کمک گرفتن از محور اعداد، جزء صحیح اعداد خواسته شده را به‌دست آورید.



[−۳/۴] = −۴   [−۲] = −۲   [−۱/۹] = −۲   [۰/۴] = ۰   [−۰/۴] = −۱

[۴/۲۵] = ۴   [۳] = ۳   [۲/۳] = ۲   [۱/۷] = ۱   [۱/۲] = ۱

۲ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] = [۱/۱۰۸] = ۱$ $\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] = [-۰/۲۵۴] = -۱$

فعالیت

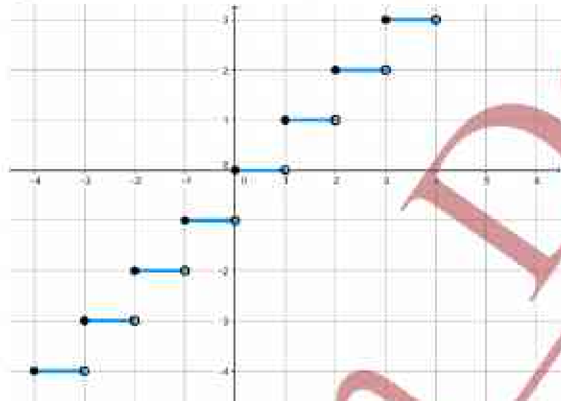
۱ اگر $[x]=۲$، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به‌صورت بازه بنویسید.

$[x] = ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳ \Rightarrow x \in [۲, ۳)$

خواندنی
برای قیمت‌گذاری یک محصول تولیدی خاص، قیمت مواد اولیه تعیین‌کننده است؛ اما بالا و پایین رفتن‌های جزئی قیمت مواد اولیه، قیمت یک محصول را تغییر نمی‌دهد. بنابراین به اعداد بازه‌ای از قیمت‌های مواد اولیه، تنها یک قیمت نهایی محصول را نسبت می‌دهند. به این ترتیب، تابع مورد نظر یک تابع پله‌ای است.

خواندنی
با مراجعه به وب‌گاه رسمی سامانهٔ محاسبهٔ نرخ مرسولات پستی شرکت ملی پست (http://parcelprice.post.ir) می‌توانید دو شهر را انتخاب کنید. سپس تابع پله‌ای هزینهٔ ارسال یک بسته را برحسب وزن ــ قیمت مشاهده کنید.

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $۰ \leq x < ۱$، آنگاه $[x] = ۰$؛ پس مقدار تابع $f(x) = [x]$ برای همهٔ اعداد عضو بازهٔ $[۰,۱)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازهٔ $[-۴,۴]$ تکمیل کنید.



۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

ب) نقطهٔ $a + ۳$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a + ۳]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a + ۳]$ برقرار است؟ $[a + ۳] = [a] + ۳$

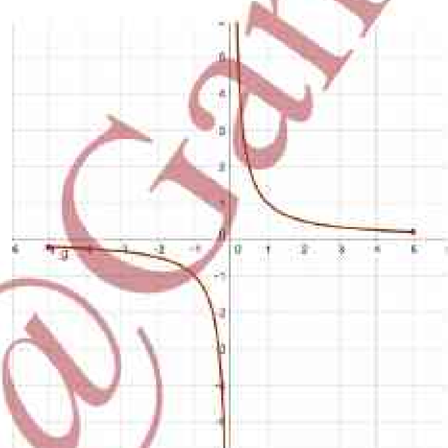
ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a + n] = [a] + n$»

تمرین

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۱}{x}$ و با دامنهٔ $D_f = [-۵,۵] - \{۰\}$ را رسم کنید.

$f(x) = \frac{۱}{x}$ $D_f = [-۵, ۵] - (۰)$



۲ دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x + ۳}{x - ۳}$ را به‌دست آورید.

کافی است عددی را که مخرج را صفر می کند از مجموعه ی اعداد حقیقی حذف کنیم . بنابراین داریم : $D_f = \mathbb{R} - \{۳\}$

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases} \quad , \quad g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

الف) دامنهٔ این دو تابع باهم برابر است. $D_f = D_g = \mathbb{R}-\{۰\}$

پس از ساده کردن تابع g مشاهده می کنیم که ضابطهٔ این دو تابع نیز باهم برابر است :

$$\left.\begin{array}{l} x>۰ \Rightarrow g(x)=\dfrac{x}{x}=۱ \\ x<۰ \Rightarrow g(x)=\dfrac{-x}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$$

ب) $f(x)=x-۲ \quad , \quad g(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}$

ب) می دانیم دامنه ی این دو تابع عبارت است از : $D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{-۲\}$

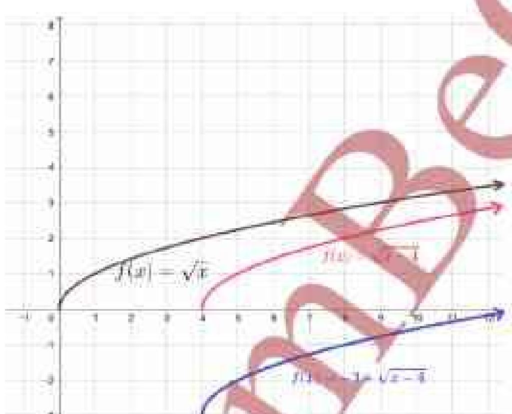
با وجود این که اگر **g(x)** را ساده کنیم ضابطه ی آن با ضابطه ی **f(x)** برابر می شود اما چون دامنه ها برابر نیستند نمی توانیم بگوییم که دو تابع برابر هستند.

$$g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}=\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x+۲)}=x-۲$$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

$f(x)=\dfrac{x+۳}{x+۱} \quad , \quad g(x)=\dfrac{x}{x^۲+x}$

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

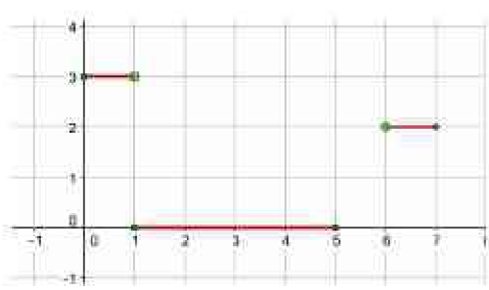


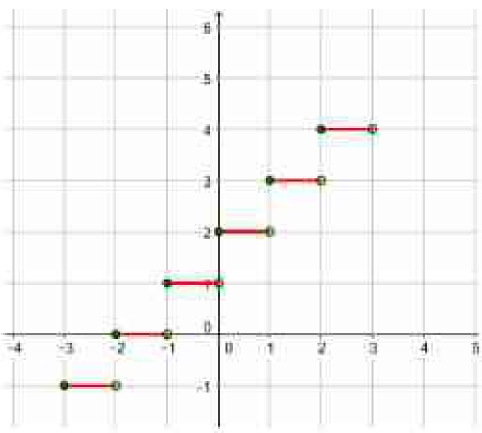
۶ حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید.

$[۳۰۰/۴۰۰۲]=۳۰۰ \qquad [-۱۰۳/۰۰۳]=-۱۰۴ \qquad [-۲۳۰۹/۵۴]=-۲۳۱۰$

۷ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۳ & x\in[۰,۱)\\ ۰ & x\in[۱,۵]\\ ۲ & x\in(۶,۷]\end{cases}$$





۸ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+۲$ و دامنهٔ $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

$f(x)=-۳+۲=-۱ \qquad -۳\le x<-۲$

$f(x)=-۲+۲=۰ \qquad -۲\le x<-۱$

$f(x)=-۱+۲=۱ \qquad -۱\le x<۰$

$f(x)=۰+۲=۲ \qquad ۰\le x<۱$

$f(x)=۱+۲=۳ \qquad ۱\le x<۲$

$f(x)=۲+۲=۴ \qquad ۲\le x<۳$

خواندنی

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان[1] را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x نشان‌دهندهٔ ماه‌های پس از تولد است.

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟

در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟

۱ــ کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

$f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$

$f(۹)=۷\sqrt{۹}+۵۰=۲۱+۵۰=۷۱ \ \text{cm}$

$۱۰۰=۷\sqrt{x}+۵۰ \Rightarrow ۵۰=۷\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۵۰}{۷} \Rightarrow x=\frac{۲۵۰۰}{۴۹}\approx ۵۱$

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریبا ۷۱ سانتی متر است.

در سن تقریبا ۵۱ ماهگی کودک تقریبا یک متر می شود.

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟ $f(۳۰)=\frac{۸}{۵}\times ۳۰=۴۸\ \ km/h$

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۲,۱),(۵,۳),(۶,۴)\}$ برابر با $f^{-1}=\{(۱,۲),(۳,۵),(۴,۶)\}$ است.

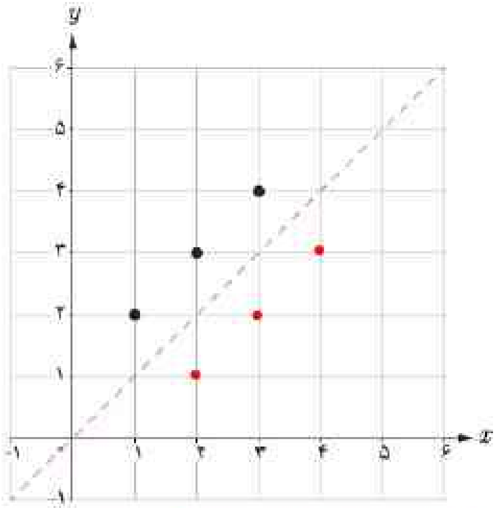
کار در کلاس

وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s=\{(۴,۱),(۱,۴),(۳,۳),(۲,۵)\}$	$s^{-1}=\{(۱,۴),(۴,۱),(۳,۳),(۵,۲)\}$
$t=\{(۵,۱),(۱,۴),(۴,۳),(۲,۳)\}$	$t^{-1}=\{(۱,۵),(۴,۱),(۳,۴),(۳,۲)\}$
$u=\{(۲,۳),(۵,۲),(۴,۱),(۳,۴)\}$	$u^{-1}=\{(۳,۲),(۲,۵),(۱,۴),(۴,۳)\}$

فعالیت

۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.



الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴)\}$

ب) تابع $f^{-۱}$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

$f^{-۱} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$

پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

ت) نمودار f و $f^{-۱}$ چه ارتباطی با هم دارند؟

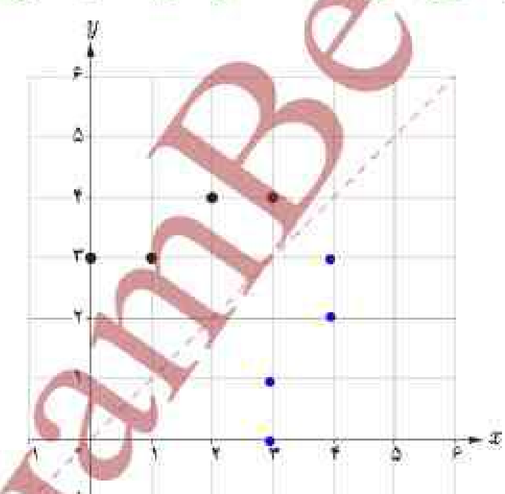
نمودار ها دو طرف خطچین قرمز رنگ قرار دارند ونسبت به این خط قرینه اند زیرا اگر هر نقطه را روی نمودار f به نقطة تظیرش روی نمودار $f^{-۱}$ وصل کنیم این خط عمود منصف پاره خط ایجاد شده خواهد بود.

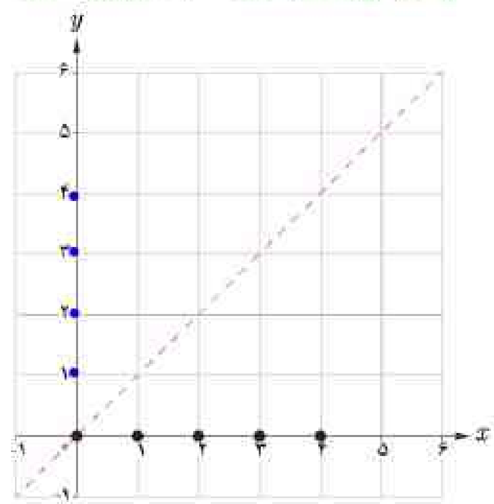
«نمودار f و $f^{-۱}$ نسبت به خط $y=x$ قرینهٔ یکدیگرند.»

۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.

نمودار ها معرف یک تابع هستند زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.

می توانیم خط هایی موازی محور y ها رسم کنیم ملاحظه می شود که نمودار ها فقط در یک نقطه این خطوط را قطع خواهند کرد. همچنین می توانیم هر یک از توابع را به صورت زوج مرتب نمایش دهیم و مشاهده می کنیم که مؤلفه اول تکراری نداریم.

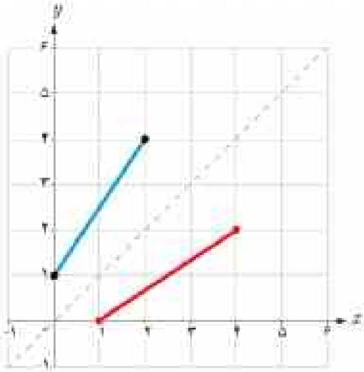




ب) عبارت زیر را کامل کنید.

> برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است که قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به خط $y=x$ رسم کنید.

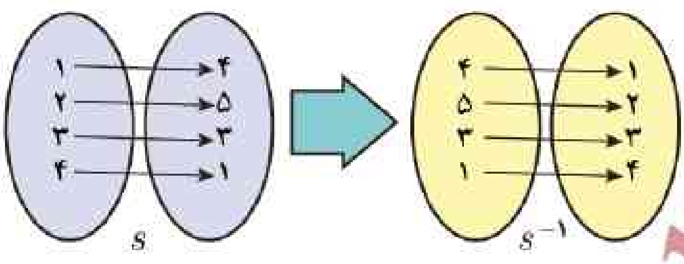
۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

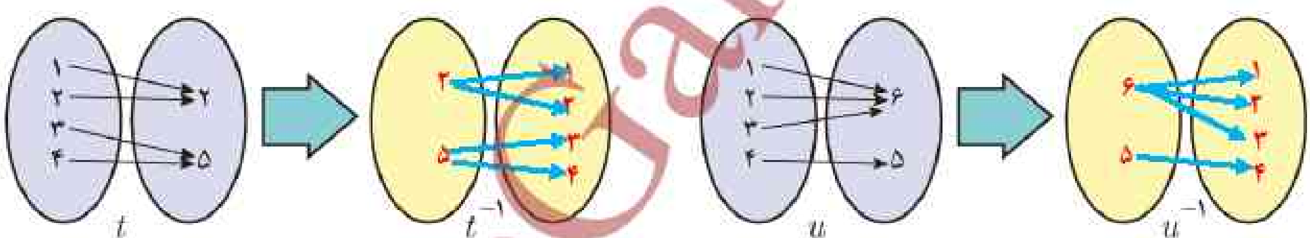


تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ حل شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به دست آورید.





ب) درستی یا نادرستی عبارات روبه‌رو را تعیین کنید.

s یک تابع است.	بله■ خیر□
t^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر■
u^{-1} یک تابع است.	بله□ خیر■

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

وارون تابع f، خود یک تابع است هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های ...... دوم ...... تکراری وجود نداشته باشد.

به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گویند.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابع $f=\{(1,2),(-2,4),(2,-1),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ f^{-1}، تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

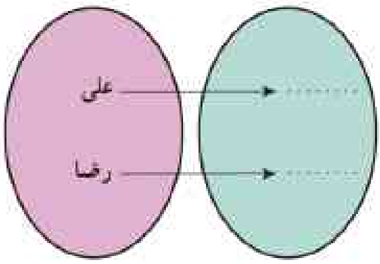
خیر ، زیرا همانطور می بینم مولفه های دوم در زوج های مرتب متفاوت تکراری است پس این تابع یک به یک نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

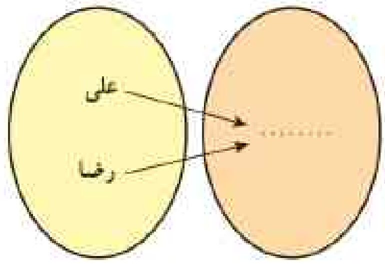
۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.

الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

نمودار پیکانی **f** مربوط به اثر انگشت و نمودار پیکانی **g** مربوط به گروه خونی است.



f



g

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟

بله هردو تابع هستند زیرا هر شخص فقط یک اثر انگشت و یک نوع گروه خونی دارد.

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

f^{-1} تابع است اما g^{-1} تابع نیست.

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟

تابع **f** یک به یک است ولی تابع **g** یک به یک نیست.

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود.

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

خواندنی

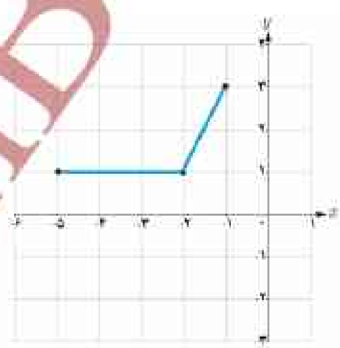
قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجستهٔ ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟

خیر یک به یک نیست .زیرا نقاطی که روی پاره خط موازی محور طول ها قرار دارند همگی یک عرض دارند به عبارتی نقاط متفاوت مؤلفه ی دوم یکسان دارند.

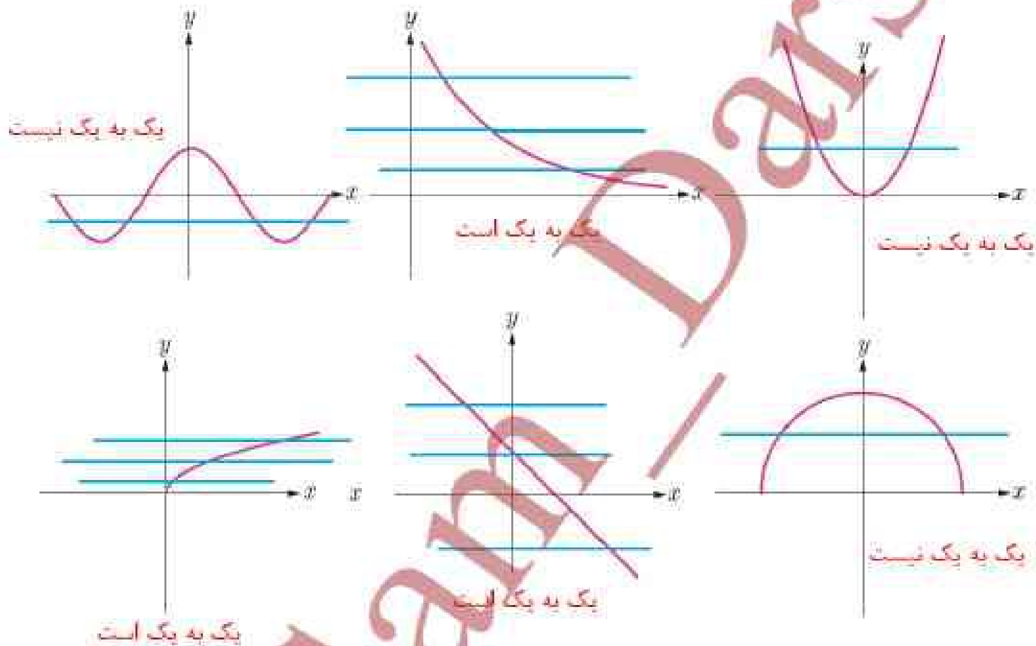


ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟

اگر هر خطِ موازی محور طول ها **(X ها)** نمودار یک تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

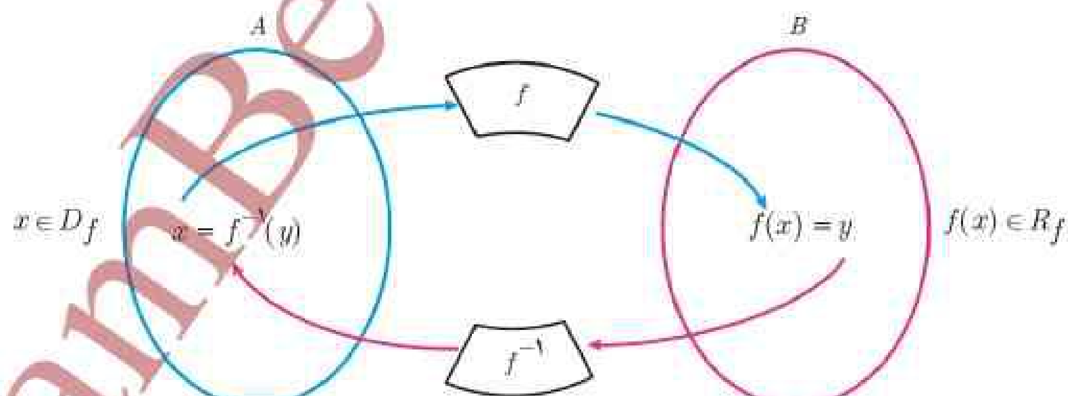
برای تشخیص دادن این که یک تابع یک به یک است یا خیر کافی است خط یا خطوطی موازی محور طول ها (**x** ها) رسم کنیم اگر نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند می گوییم تابع یک به یک نیست.

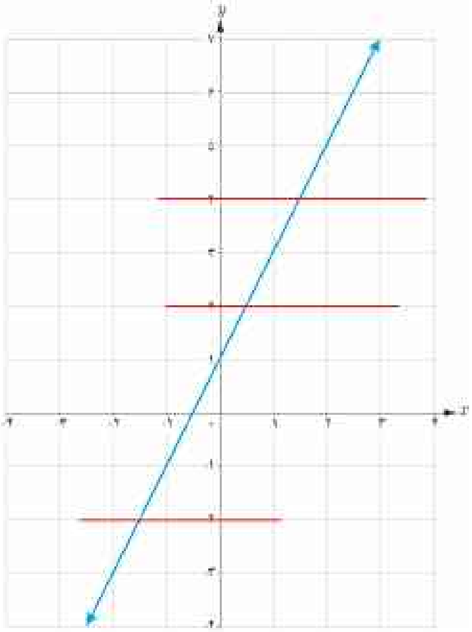
۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).





فعالیت

تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم.

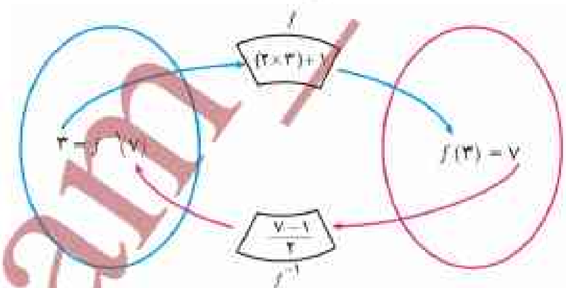
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

هماطور که مشاهده می شود اگر خط یا خطوطی موازی محور طول ها رسم کنیم نمودار را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند .

ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

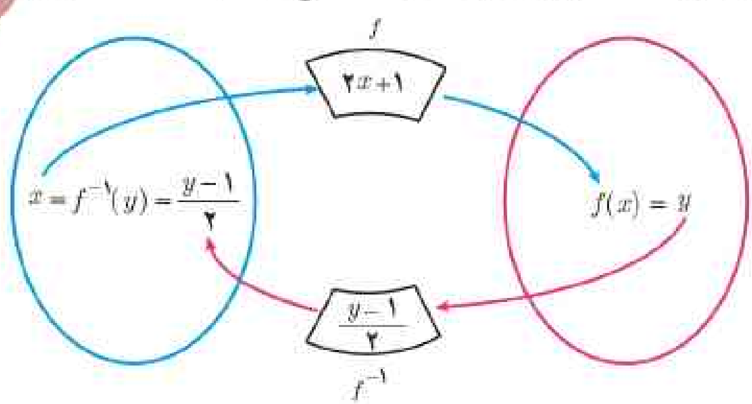
$(۷,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۷) \in f$

به عبارت دیگر $f\,(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$



۳ عضوی از دامنه تابع f است که با توجه به ضابطهٔ تابع f ابتدا دو برابر می شود سپس یک واحد به آن اضافه می شود و مقدار برد به دست می آید که ۷ است . حالا عدد ۷ عضوی از برد تابع f است و عضوی از دامنهٔ تابع $f^{-۱}$ است که از آن یک واحد کم می شود سپس حاصل نصف می شود تا عدد ۳ به دست آید. که عدد ۳ حالا عضوی از برد تابع $f^{-۱}$ است .

پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x+۱ \qquad (x\in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} \qquad (y\in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :
برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-1}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، چنین محاسبه می‌شود :

$$f(x) = ۲x+۱ \Rightarrow y = ۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۲x = y-۱$$
$$\Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

توابع خطی غیر ثابت یک به یک هستند زیرا هرگاه خطی موازی محور **x** ها رسم کنیم نمودار را فقط در یک نقطه قطع می کند.

اما نمودار توابع ثابت خطی موازی محور طول ها است و هر دو زوج مرتب متفاوت دارای مؤلفه دوم یکسان هستند. پس نمی تواند یک به یک باشد.

الف) $f(x) = x+۵$

$y = x+۵ \Rightarrow x+۵ = y$

$\Rightarrow x = y-۵ \Rightarrow f^{-۱}(x) = x-۵$

ب) $g(x) = ۴x$

$y = ۴x \Rightarrow ۴x = y$

$\Rightarrow x = \frac{۱}{۴}y \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۴}x$

پ) $u(x) = ۲x+۳$

$y = ۲x+۳ \Rightarrow ۲x+۳ = y$

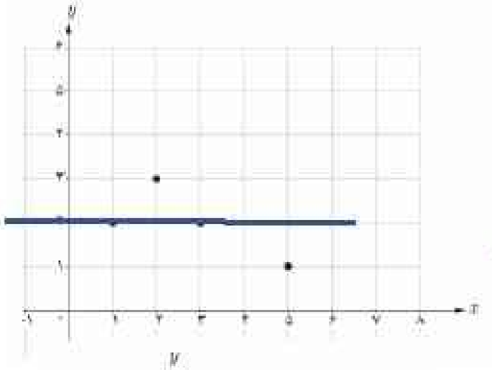
$\Rightarrow ۲x = y-۳ \Rightarrow x = \frac{y-۳}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۳}{۲}$

ت) $v(x) = \frac{۲}{۳}x - ۴$

$y = \frac{۲}{۳}x - ۴ \Rightarrow y = \frac{۲x-۱۲}{۳} \Rightarrow ۳y = ۲x-۱۲$

$\Rightarrow ۲x-۱۲ = ۳y \Rightarrow ۲x = ۳y+۱۲ \Rightarrow x = \frac{۳y+۱۲}{۲}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۳x+۱۲}{۲}$



۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟

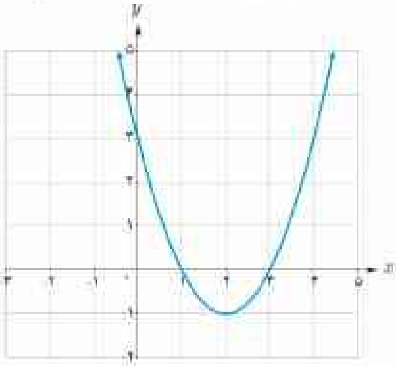
زیرا اگر خطی مانند $y = ۲$ را رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کنند.

ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید.

مسئله چند جواب دارد؟

می توانیم نقطهٔ $(۲,۲)$ یا $(۱,۲)$ را حذف کنیم تا نمودار تبدیل به یک تابع شود.

کار در کلاس



الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۴x + ۳$ در شکل مقابل، دقت کنید.

با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟

☐ $[۱,۴)$

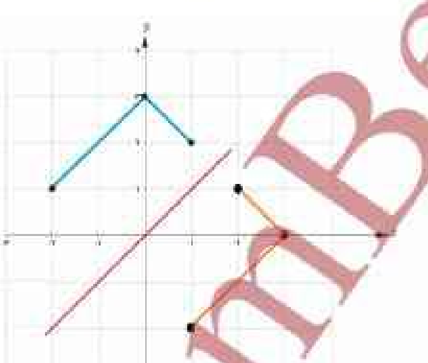
☑ $[۰,۲]$

ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟

در حالت کلی خیر زیرا وقتی خطی موازی محورطول ها رسم می کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می کند. مگر اینکه دامنهٔ تابع را محدود کنیم.

تمرین

۱ وارون تابع $f = \{(۲,۳), (-۲,۱), (-۱,۲)\}$ را به‌دست آورید. $f^{-۱} = \{(۳,۲), (۱,-۲), (۲,-۱)\}$



۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.

۳ ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x) = ۵x - ۲$

$y = ۵x - ۲ \Rightarrow ۵x - ۲ = y \Rightarrow ۵x = y + ۲$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+۲}{۵} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \dfrac{x+۲}{۵}$

ب) $f(x) = \dfrac{۳}{۵}x + ۴$

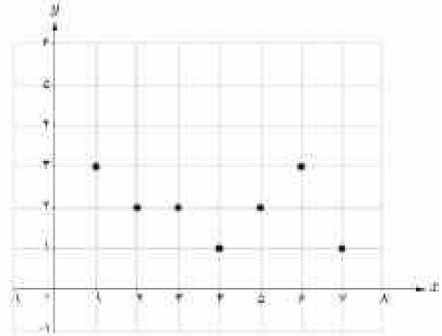
$y = \dfrac{۳}{۵}x + ۴ \Rightarrow ۵y = ۳x + ۲۰ \Rightarrow ۳x + ۲۰ = ۵y$

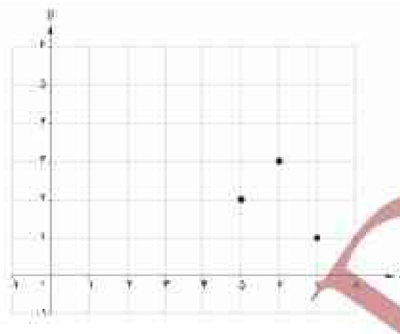
$\Rightarrow ۳x = ۵y - ۲۰ \Rightarrow x = \dfrac{۵y - ۲۰}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \dfrac{۵x - ۲۰}{۳}$

ج) $f(x) = \dfrac{-۷x + ۳}{۵}$

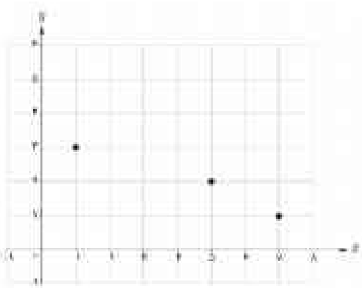
$y = \dfrac{-۷x+۳}{۵} \Rightarrow ۵y = -۷x + ۳ \Rightarrow ۷x = -۵y + ۳ \Rightarrow x = \dfrac{-۵y+۳}{۷} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \dfrac{-۵x+۳}{۷}$

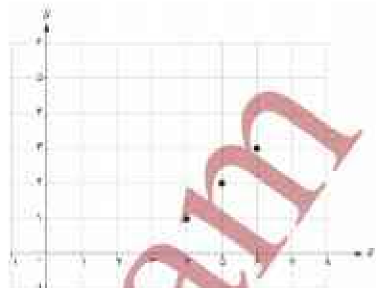
۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟

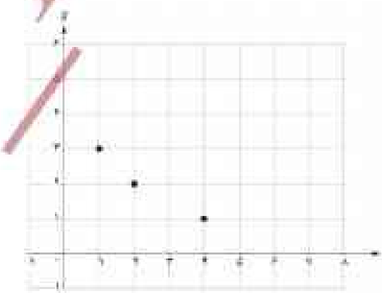




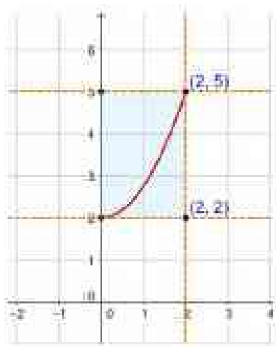
حد اکثر ۳ نقطه می تواند باقی بماند.
در شکل ها ی زیر چند حالت را رسم کرده ایم.







۵ نمودار تابعی با دامنهٔ $[0,2]$ و برد $[2,5]$ را رسم کنید :

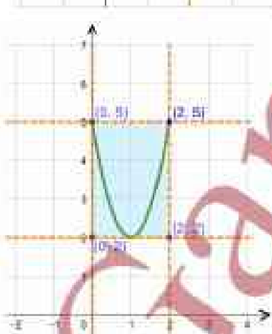


الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

نمودار تابع هایی مانند $g(x) = \frac{-3}{2}x + 5$ ، $f(x) = \frac{5}{2}x$ و $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2$ با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ یک به یک است.

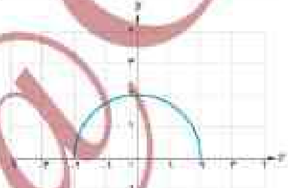
البته بی شمار تابع خطی و غیر خطی یک به یک می توان پیدا کرد.

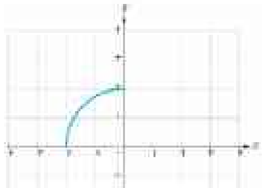
ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

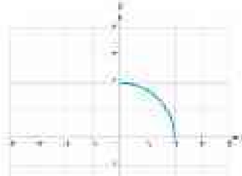


نمودار تابع $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ با دامنه $[0, 2]$ و برد $[2, 5]$ رسم شده است این تابع یک به یک نیست.

۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.







دامنه تابع نیم دایره $[-2, 2]$ است اگر دامنه را به صورت $[0, 2]$ یا $[-2, 0]$ محدود کنیم آنگاه نمودار یک تابع یک به یک را مشخص می کند.

درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g به‌ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این‌صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب*	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

فعالیت

اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x-۲$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها $(\frac{f}{g})$ را به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(۲x-۱)+(x-۲)=۳x-۳$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(۲x-۱)-(x-۲)=x+۱$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(۲x-۱).(x-۲)=۲x^۲-۵x+۲$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(۲x-۱)}{(x-۲)}$$

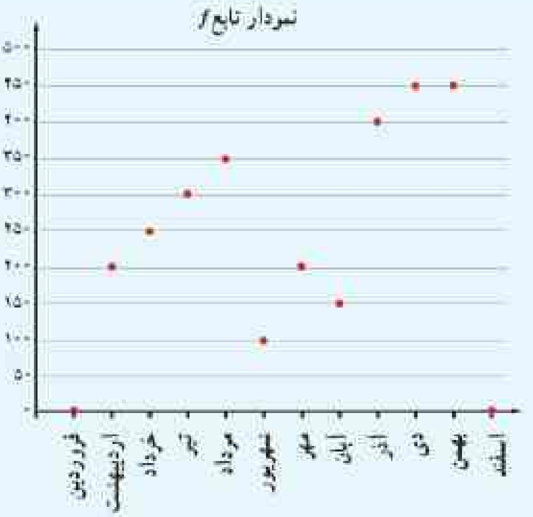
$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x\mid g(x)=۰\}=\left(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\right)-\{x\mid x-۲=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f\times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

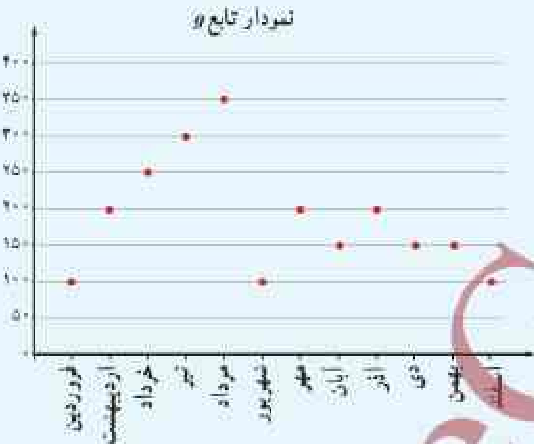
خواندنی

علی در یک کارگاه خانگی، محصولات دست‌دوز چرمی تولید می‌کند. او بخشی از مواد و لوازم مورد نیاز خود را از فروشگاه چرم و بخشی را از فروشگاه ابزار و یراق خریداری می‌کند. وی پس از تولید محصولاتی هنری، آنها را در بازارچه‌های کارآفرینی به فروش می‌رساند. نمودارهای زیر مقدار خرید او را در یک سال نشان می‌دهد.

نمودار تابع f نشان می‌دهد که در هر ماه سال گذشته، چند هزار تومان چرم خریداری شده است؛ برای مثال با توجه به شکل، $f(\text{تیر}) = ۳۰۰$. پس این هنرمند در چهارمین ماه سال، ۳۰۰ هزار تومان چرم خریده است.



نمودار تابع g نشان می‌دهد که این هنرمند در هر ماه سال گذشته چند هزار تومان ابزار و یراق خریده است.



پس در واقع هزینه‌ای که علی در کارگاه خود دارد، شامل دو بخش است؛ هزینهٔ چرم و هزینهٔ ابزار و یراق.

به زبان ساده، «هزینهٔ» او شامل قیمت همهٔ مواد و لوازم خریداری شده است. در شکل روبه‌رو نمودار تابع هزینهٔ خرید علی در سال گذشته رسم شده است. این تابع را با c نشان می‌دهیم.

الف) بر روی شکل، درستی مقدارهای تابع c را برای ماه‌های فصل زمستان بررسی کنید.

ب) آیا برای هر x در دامنهٔ تابع c، $c(x) = f(x) + g(x)$ درست است؟

همچنان که می‌بینید برای به‌دست آوردن مقادیر تابع c، مقادیر دو تابع f و g را با هم جمع می‌کنیم.

کار در کلاس

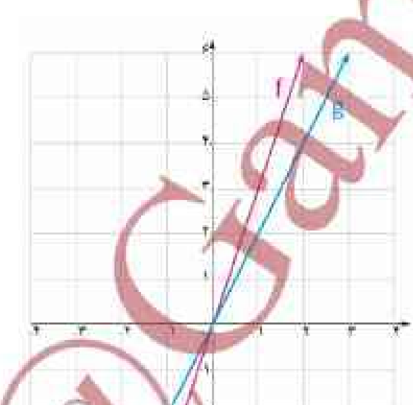
۱ دربارهٔ دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+3x+1$ و $g(x)=x-3$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=x^2+4x-2$	$D_{f+g}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=x^2+2x+4$	$D_{f-g}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=x^3+3x^2-2x-3$	$D_{f.g}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+3x+1}{x-3}$	$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{3\}$

۲ دربارهٔ دو تابع با ضابطهٔ $u(x)=\sqrt{x}+1$ و $v(x)=x-1$ جدول زیر را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=\sqrt{x}+1+x-1=\sqrt{x}+x$	$D_{u+v}=[0,+\infty)\cap\mathbb{R}=[0,+\infty)$
$u-v$	$(u-v)(x)=\sqrt{x}+1-(x-1)=\sqrt{x}-x+2$	$D_{u+v}=[0,+\infty)\cap\mathbb{R}=[0,+\infty)$
$u.v$	$(u.v)(x)=(\sqrt{x}+1)(x-1)=\sqrt{x}(x-1)+x-1$	$D_{u+v}=[0,+\infty)\cap\mathbb{R}=[0,+\infty)$
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$	$D_{u+v}=([0,+\infty)\cap\mathbb{R})-\{1\}=[0,+\infty)-\{1\}$

فعالیت



مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.

الف) ضابطهٔ دو تابع f و g را به‌دست آورید.

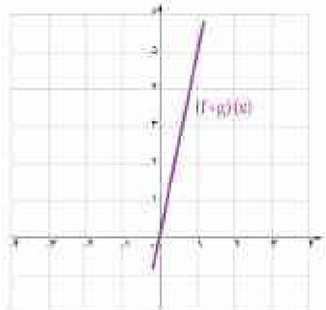
$f(x)=3x$ $\qquad$ $g(x)=2x$

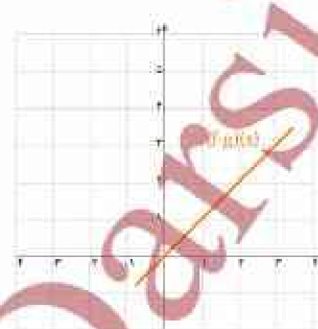
ب) ضابطهٔ دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به‌دست آورید.

$(f-g)(x)=3x-2x=x$ $\qquad$ $(f+g)(x)=3x+2x=5x$

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

x	۰	۱
$f(x)$	۰	۳
$g(x)$	۰	۲
$(f+g)(x)$	۰	۵
$(f-g)(x)$	۰	۱





ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

بله جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+b \\ g(x)=a'x+b' \end{array}\right\} \Rightarrow (f+g)(x)=ax+b+a'x+b'$$

$$(f+g)(x)=(a+a')x+(b+b') \xrightarrow[b+b'=B]{a+a'=A} (f+g)(x)=Ax+B$$

بله تفریق دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است.

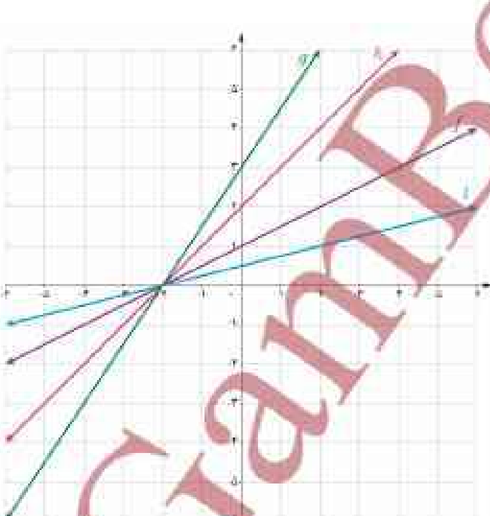
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+b \\ g(x)=a'x+b' \end{array}\right\} \Rightarrow (f-g)(x)=(ax+b)-(a'x+b')$$

$$(f-g)(x)=(a-a')x+(b-b') \xrightarrow[b-b'=B]{a-a'=A} (f+g)(x)=Ax+B$$

$$\xrightarrow[b\neq b']{a=a'} (f-g)(x)=B$$

$$\xrightarrow[b=b']{a=a'} (f-g)(x)=0$$

فعالیت



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x)=\frac{1}{2}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

$g(x)=$ ...۳... $f(x)$

$h(x)=$ ...۲... $f(x)$

$f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ، $l(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ ، $h(x)=x+2$ ، $g(x)=\frac{3}{2}x+3$

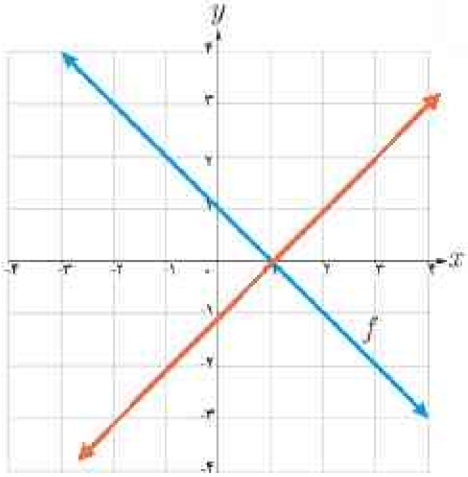
$\Rightarrow l=\frac{1}{2}f$ ، $h=2f$ ، $g=3l$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که:

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ را رسم کنید.



$y = f(x) \Rightarrow f(۰) = ۱ \ , \quad f(۱) = ۰$

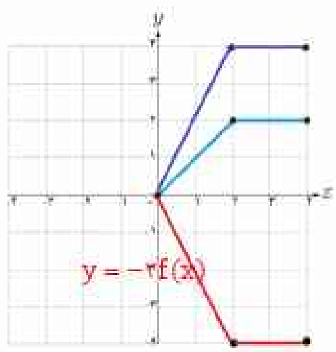
$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(۰) = -۱ \Rightarrow (۰, -۱)$

$y = -f(x) \Rightarrow y = -f(۱) = ۰ \Rightarrow (۱, ۰)$

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع ضابطهٔ $y = f(x)$ را نسبت به محور طول ها (x ها) رسم کنیم.

۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده‌شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -۲f(x)$ را رسم کنید.

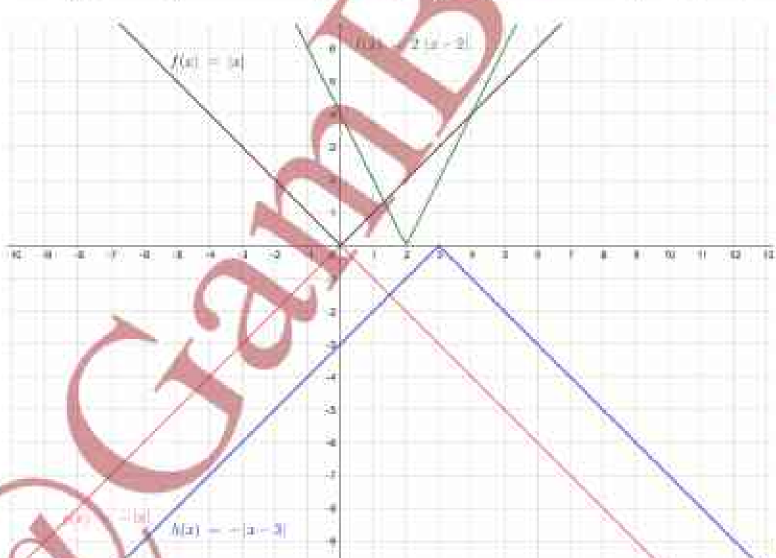


ابتدا عرض هر نقطه را ۲ برابر می کنیم و نمودار جدید را رسم می کنیم ،سپس قرینهٔ نقاط جدید را نسبت به محور طول ها (x ها) به دست می آوریم و نقاط را به هم وصل می کنیم.

تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|$، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -|x|$ ب) $h(x) = -|x-۳|$ پ) $l(x) = ۲|x-۲|$



الف) $g(x) = -f(x)$

کافی است نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ب) $h(x) = -f(x-۳)$

باید نمودار تابع f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم و ۳واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها حرکت کنیم.

پ) $l(x) = ۲f(x-۲)$

باید نمودار تابع f را روی محور طول ها ۲ واحد به سمت مثبت ها حرکت داده وبه ازای هر طول عرض را دو برابر کنیم.

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل‌جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=x$ $\qquad f(x)=|x|$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\lvert x\rvert+x$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\lvert x\rvert-x$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=\lvert x\rvert x=x\lvert x\rvert$	$D_{fg}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\lvert x\rvert}{x}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=0\}=\mathbb{R}-\{0\}$

ب) $g(x)=x+2$ $\qquad f(x)=x^2-4$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=x^2-4+x+2=x^2+x-2$	$D_{f+g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f-g$	$(f-g)(x)=x^2-4-(x+2)=x^2-x-6$	$D_{f-g}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$f.g$	$(f.g)(x)=(x^2-4)(x+2)=x^3+2x^2-4x-8$	$D_{fg}=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2-4}{(x+2)}=x-2$	$D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}-\{-2\}$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+(-\sqrt{x})=0$	$D_{f+g}=[0,+\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-(-\sqrt{x})=2\sqrt{x}$	$D_{f-g}=[0,+\infty)$
$f.g$	$(f.g)(x)=\sqrt{x}(-\sqrt{x})=-x$	$D_{fg}=[0,+\infty)$
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x}}{-\sqrt{x}}=-1$	$D_{\frac{f}{g}}=[0,+\infty)-\{0\}=(0,+\infty)$

ت) $g(x)=x^{۲}+۳x-۱۰$ $\qquad f(x)=\dfrac{x-۲}{x+۵}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\dfrac{x^{۳}+۸x^{۲}+۶x-۵۲}{x+۵}$	$D_{f+g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\dfrac{-x^{۳}-۸x^{۲}-۴x+۴۸}{x+۵}$	$D_{f-g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$f.g$	$(f.g)(x)=(x-۲)^{۲}$	$D_{f.g}=\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}-\{-۵\}$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{۱}{(x+۵)^{۲}}$	$D_{\frac{f}{g}}=(\mathbb{R}-\{-۵\}\cap\mathbb{R})-\{۲\}=\mathbb{R}-\{-۵,۲\}$

$$(f+g)(x)=\frac{x-۲}{x+۵}+x^{۲}+۳x-۱۰=\frac{x-۲+x^{۳}+۳x^{۲}-۱۰x+۵x^{۲}+۱۵x-۵۰}{x+۵}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{x^{۳}+۸x^{۲}+۶x-۵۲}{x+۵}$$

$$(f-g)(x)=\frac{x-۲}{x+۵}-(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{x-۲-x^{۳}-۳x^{۲}+۱۰x-۵x^{۲}-۱۵x+۵۰}{x+۵}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{-x^{۳}-۸x^{۲}-۴x+۴۸}{x+۵}$$

$$(f.g)(x)=\left(\frac{x-۲}{x+۵}\right)(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{(x-۲)}{(x+۵)}(x+۵)(x-۲)\Rightarrow(f+g)(x)=(x-۲)^{۲}$$

$$(f.g)(x)=\left(\frac{x-۲}{x+۵}\right)\div(x^{۲}+۳x-۱۰)=\frac{(x-۲)}{(x+۵)}\times\frac{۱}{(x+۵)(x-۲)}\Rightarrow(f+g)(x)=\frac{۱}{(x+۵)^{۲}}$$

ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$ $\qquad f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=\{(۲,۹),(۳,۴),(۰,۱)\}$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$f-g$	$(f-g)(x)=\{(۲,۱),(۳,۴),(۰,-۵)\}$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$f.g$	$(f.g)(x)=\{(۲,۲۰),(۳,۰),(۰,-۶)\}$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$
$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\{(۲,\frac{۵}{۴}),(۰,\frac{-۲}{۳})\}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}=\{۰,۲\}$

$\left.\begin{cases}f(۲)=۵\\ g(۲)=۴\end{cases}\right\}\Rightarrow(f+g)(۲)=۵+۴=۹$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۲)=۵\\ g(۲)=۴\end{cases}\right\}\Rightarrow(f-g)(۲)=۵-۴=۱$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۲)=۵\\ g(۲)=۴\end{cases}\right\}\Rightarrow(f.g)(۲)=۵\times۴=۲۰$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۲)=۵\\ g(۲)=۴\end{cases}\right\}\Rightarrow(\frac{f}{g})(۲)=\frac{۵}{۴}$

$\left.\begin{cases}f(۳)=۴\\ g(۳)=۰\end{cases}\right\}\Rightarrow(f+g)(۳)=۴+۰=۴$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۳)=۴\\ g(۳)=۰\end{cases}\right\}\Rightarrow(f-g)(۳)=۴-۰=۴$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۳)=۴\\ g(۳)=۰\end{cases}\right\}\Rightarrow(f.g)(۳)=۴\times۰=۰$

$\left.\begin{cases}f(۰)=-۲\\ g(۰)=۳\end{cases}\right\}\Rightarrow(f+g)(۰)=-۲+۳=۱$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۰)=-۲\\ g(۰)=۳\end{cases}\right\}\Rightarrow(f-g)(۰)=-۲-۳=-۵$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۰)=-۲\\ g(۰)=۳\end{cases}\right\}\Rightarrow(f.g)(۰)=-۲\times۳=-۶$ $\qquad \left.\begin{cases}f(۰)=-۲\\ g(۰)=۳\end{cases}\right\}\Rightarrow(\frac{f}{g})(۰)=\frac{-۲}{۳}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

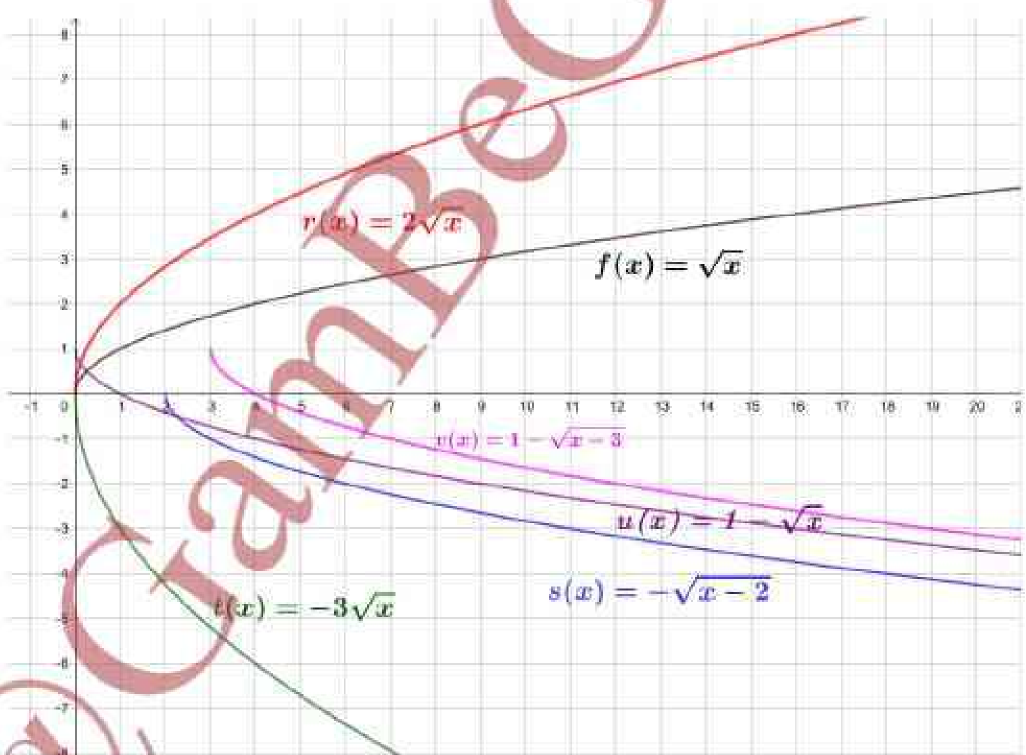
الف) با توجه به این که $r(x)=۲f(x)$ کافی است عرض های هر نقطه از نمودار f را دو برابر کنیم.

ب) با توجه به این که $s(x)=-f(x-۲)$ کافی است ابتدا نمودار f را به اندازه ی ۲ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس آن را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

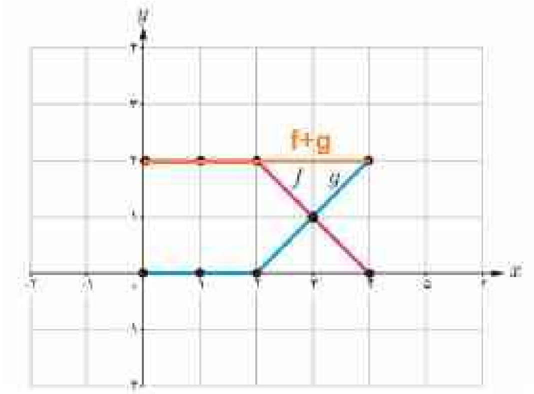
پ) با توجه به این که $t(x)=-۳f(x)$ کافی است ابتدا عرض های هر نقطه از نمودار f را سه برابر کنیم سپس نمودار را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم.

ت) با توجه به این که $u(x)=-f(x)+۱$ کافی است ابتدا نمودار f را نسبت به محور طول ها قرینه کنیم سپس نمودار جدید را به اندازه ی ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.

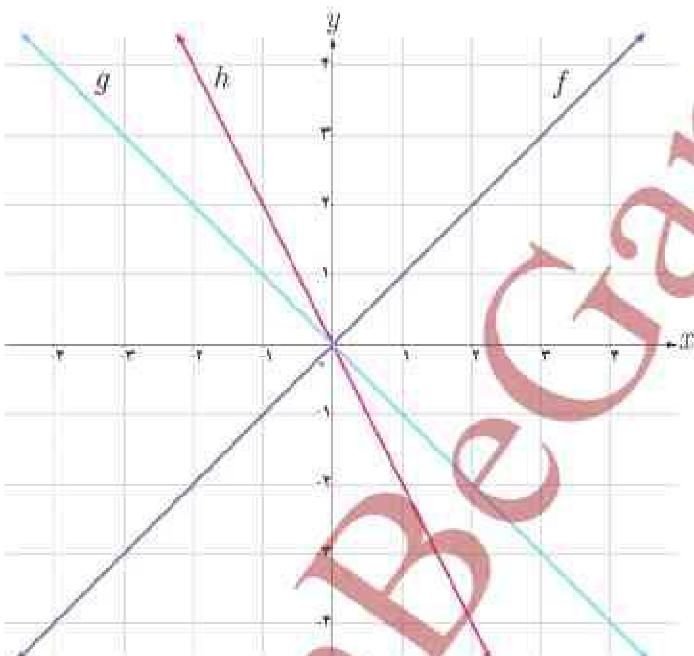
ث) با توجه به این که $v(x)=-f(x-۳)+۱$ کافی است ابتدا نمودار f رابه اندازهٔ ۳ واحد روی محور طول ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم سپس نسبت به محور طول ها قرینه کنیم بعد نمودار جدید را به اندازه ی ۱ واحد روی محور عرض ها به سمت مثبت ها انتقال دهیم.



۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل‌جمع این دو تابع را به‌دست آورید.



۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟



$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \\ h(1) = -2 \\ g(1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) + h(1) = g(1) \Rightarrow (f + h)(x) = g(x)$$

فصل ۳

مثلثات

کرمان، کلوت شهداد

ماهوارهٔ امید اولین ماهوارهٔ ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویه بین مرکز زمین (نقطهٔ O) تا ماهوارهٔ S و دوردست‌ترین نقطهٔ قابل دید روی کرهٔ زمین (نقطهٔ P) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه $\cos\alpha=\frac{6400}{6400+h}$ و $\widehat{PA}=6400\times\hat{\alpha}$ (برحسب رادیان)

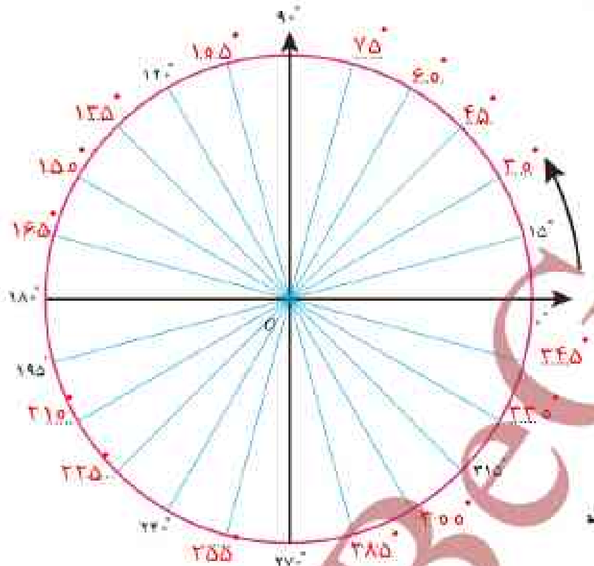
درس اول

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری

● اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هرکدام از این کمان‌ها **۱ درجه** است. اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.

● **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

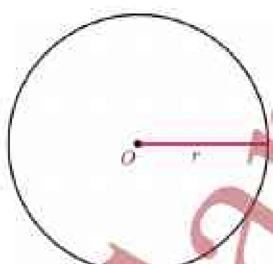


شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.

در فعالیت زیر رابطهٔ بین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان و طول ک

فعالیت



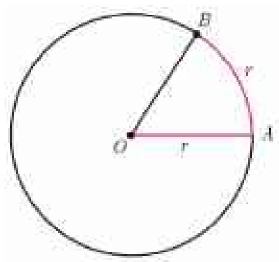
۱ یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید.

طول نخ اندزهٔ محیط دایره را مشخص می کند.اگر فرض کنیم اندازهٔ محیط دایره عددی مانند p شده باشد ، بنا براین شعاع به صورت مقابل به دست می آید:

$$p = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{p}{۲\pi}$$

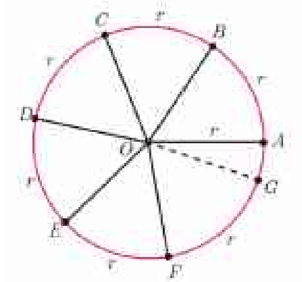
در این قسمت اگر فرض کنیم که $p = ۴۴ \text{ cm}$ برای محاسبه شعاع با فرض $\pi = ۳/۱۴$ داریم :

$$۴۴ = ۲ \times ۳/۱۴ \times r \Rightarrow r = \frac{۴۴}{۶/۲۸} \Rightarrow r = ۷$$



۲ قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی محیط آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟

این زاویه تقریبا برابر با ۵۷ است .



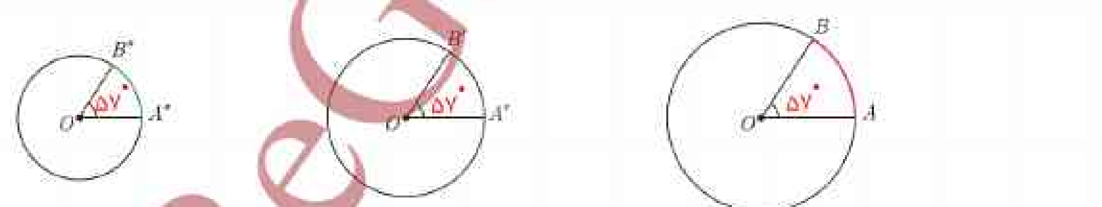
۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی محیط دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی محیط دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$، $\widehat{COD}$، $\widehat{DOE}$، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه ...$\widehat{AOB}$... برابر و هر یک تقریباً ...۵۷... درجه است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟ خیر این دو نقطه بر هم منطبق نمی شوند.

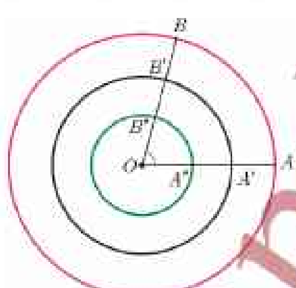
نکته : $\widehat{GOA} = 18^\circ$

به این ترتیب ۶ زاویهٔ مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با ..شعاع.. دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها **یک رادیان** می‌گوییم.

> **۱ رادیان** برابر است با اندازهٔ زاویه مرکزی دایره‌ای که طول کمان روبه‌روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.





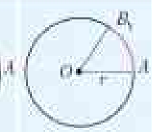
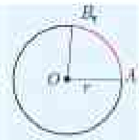
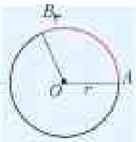
به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم:

$$OA = \widehat{AB}$$

$$OA' = \widehat{A'B'}$$

$$OA'' = \widehat{A''B''}$$

۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $1 \le i \le 7$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$	$3r$	$4r$	$5r$	$6r$
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ $1 \le i \le 7$	۱ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۴ رادیان	۵ رادیان	۶ رادیان

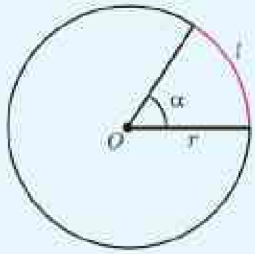
همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید.
با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت :

$$\text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{شعاع دایره}}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



کار در کلاس

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید :

l	۵ سانتی‌متر	۵۰۰ سانتی‌متر (۵۰۰ سانتی متر= ۵ متر)	۰/۷۵ متر، ۷۵ سانتی متر	۲۰۰ سانتی‌متر (۲۰۰ سانتی متر= ۲ متر)	۹۰ سانتی‌متر	۵۰ متر	۱۰ متر	۴۰۰ سانتی متر
r	۵ سانتی‌متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	۱ متر	۲۰ سانتی‌متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$r = 5\ cm,\ \alpha = 1\ \text{رادیان},\ l = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{5} \Rightarrow l = 5\ cm$

$r = 5\ m,\ l = 500\ cm \Rightarrow l = 5\ m,\ \alpha = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{5} \Rightarrow \alpha = 1\ \text{رادیان}$

$r = 0/5\ m,\ \alpha = 1/5\ \text{رادیان},\ l = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 1 = \frac{l}{0/5} \Rightarrow l = 0/75\ m$

$r = 1\ m,\ l = 200\ cm \Rightarrow l = 2\ m,\ \alpha = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = 2\ \text{رادیان}$

$l = 90\ cm,\ \alpha = 3\ \text{رادیان},\ r = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 3 = \frac{90}{r} \Rightarrow r = 30\ cm$

$r = 10\ m,\ l = 50\ m,\ \alpha = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{50}{10} \Rightarrow \alpha = 5\ \text{رادیان}$

$l = 10\ m,\ \alpha = 10\ \text{رادیان},\ r = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 10 = \frac{10}{r} \Rightarrow r = 1\ m$

$r = 20\ cm,\ \alpha = 20\ \text{رادیان},\ l = ?\ ,\ \alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow 20 = \frac{l}{20} \Rightarrow l = 400\ cm$

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید :

زاویه برحسب رادیان	π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان
زاویه برحسب درجه	دقیقاً °۱۸۰	تقریباً °۱۷۹	تقریباً °۱۷۱	تقریباً °۱۱۴	تقریباً °۵۷	تقریباً °۲۸/۵

$۵۷^\circ \times ۳/۱۴ = ۱۷۹^\circ$ ، $۵۷^\circ \times ۳ = ۱۷۱^\circ$ ، $۵۷^\circ \times ۲ = ۱۱۴^\circ$ ، $۵۷^\circ \times ۰/۵ = ۲۸/۵^\circ$

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با ...۱۸۰... درجه یا ...π... رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با ...π... رادیان. در نتیجه :

$$\frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان} = \text{یک درجه}$$

به این ترتیب :

$$\pi\ \text{رادیان} = ۱۸۰^\circ \begin{cases} \xrightarrow{\div ۲} ۹۰^\circ = \frac{\pi}{۲}\ \text{رادیان} \\ \xrightarrow{\div ۳} ۶۰^\circ = \frac{\pi}{۳}\ \text{رادیان} \\ \xrightarrow{\div ۴} ۴۵^\circ = \frac{\pi}{۴}\ \text{رادیان} \\ \xrightarrow{\div ۶} ۳۰^\circ = \frac{\pi}{۶}\ \text{رادیان} \end{cases}$$

خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت اینشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به‌صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانهٔ mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.

کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$۳۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \frac{\pi}{۶}\ \text{رادیان}$

$۴۵^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \frac{\pi}{۴}\ \text{رادیان}$

$۹۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \frac{\pi}{۲}\ \text{رادیان}$

$۳۶^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \frac{\pi}{۵}\ \text{رادیان}$

$۶۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \frac{\pi}{۳}\ \text{رادیان}$

$۱۸۰^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}} \pi\ \text{رادیان}$

اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

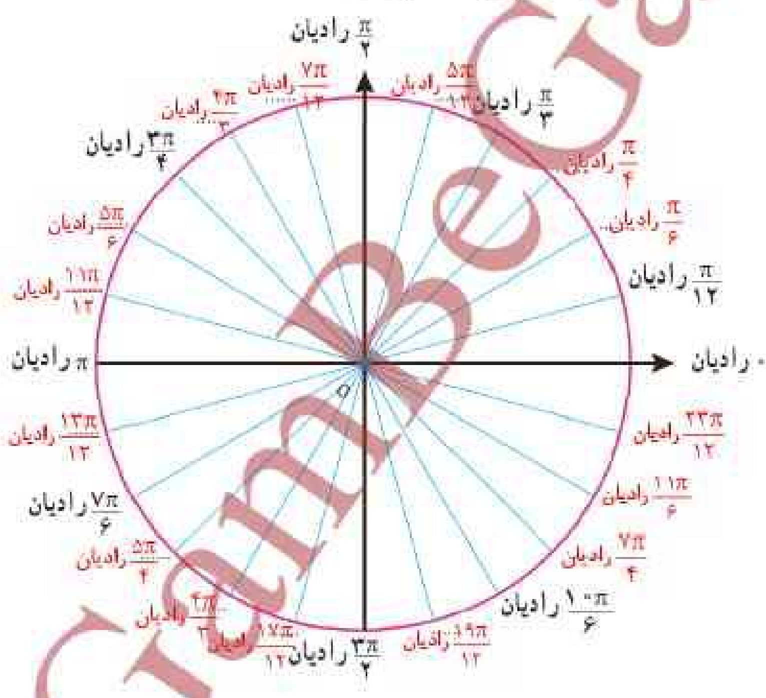
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	۵°	$۲۵/۷۱^\circ$	۲۴°	۷۲°	۱۲۰°	۲۲۵°
R (رادیان)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$	$\frac{۲\pi}{۱۵}$	$\frac{۲\pi}{۵}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۴}$

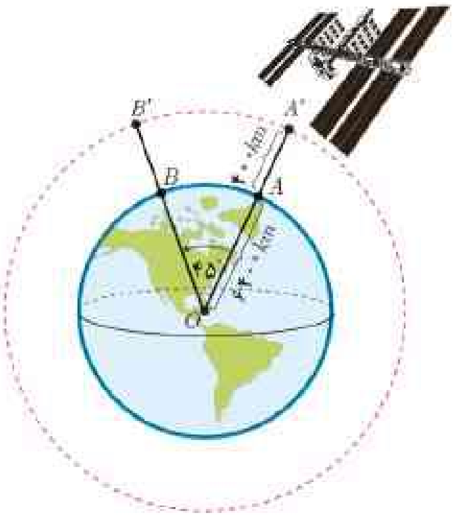
$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{D}{۱۸۰^\circ}=\dfrac{\frac{\pi}{۷}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow D=\dfrac{۱۸۰^\circ}{۷}\Rightarrow D=۲۵/۷۱^\circ\\[2ex]\dfrac{۲۴^\circ}{۱۸۰^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow R=\dfrac{۲\pi}{۱۵}\ \text{رادیان}\\[2ex]\dfrac{D}{۱۸۰^\circ}=\dfrac{\frac{۲\pi}{۵}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow D=\dfrac{۲\times۱۸۰^\circ}{۵}\Rightarrow D=۷۲^\circ\\[2ex]\dfrac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\dfrac{R}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow R=\dfrac{۲\pi}{۳}\ \text{رادیان}\\[2ex]\dfrac{D}{۱۸۰^\circ}=\dfrac{\frac{۵\pi}{۴}\ \text{رادیان}}{\pi\ \text{رادیان}}\Rightarrow D=\dfrac{۵\times۱۸۰^\circ}{۴}\Rightarrow D=۲۲۵^\circ\end{cases}$$

۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.



فعالیت

ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کرهٔ زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویهٔ ۴۵° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.



۱ ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

$\frac{\pi}{۴}$ رادیان $= ۴۵^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰^\circ} = \alpha =$ اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برحسب رادیان

۲ شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r =$ ۶۸۰۰km

$r = ۶۴۰۰ + ۴۰۰ = ۶۸۰۰\ km$

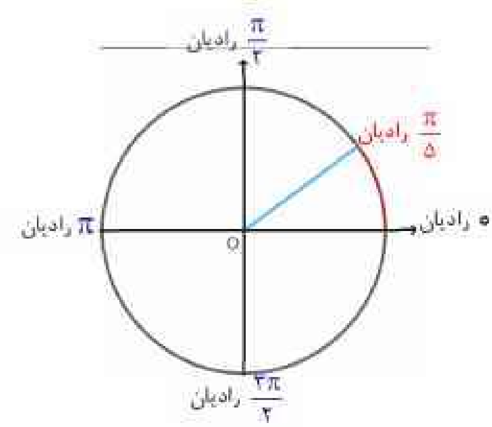
۳ طول کمان روبه‌روی $A'\hat{O}B'$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطهٔ $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با :

$A'B'$ طول کمان $= l = \frac{\pi}{۴} \times ۶۸۰۰ \Rightarrow l = \frac{۳/۱۴}{۴} \times ۶۸۰۰ = ۵۳۳۸\ km$

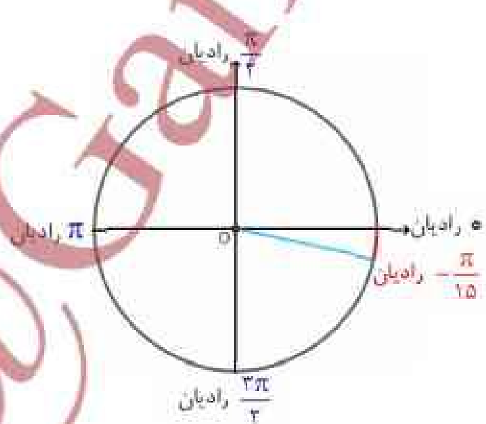
تمرین

۱ هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

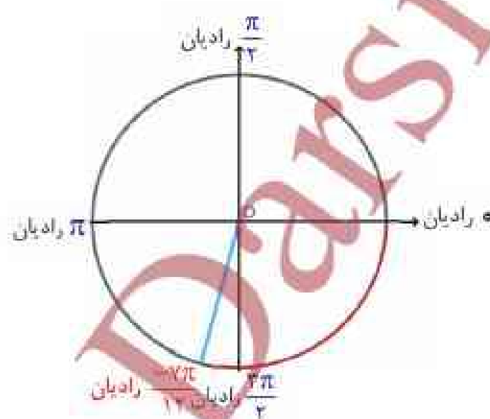
$۳۶^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{ رادیان}}$ رادیان $\frac{\pi}{۵}$



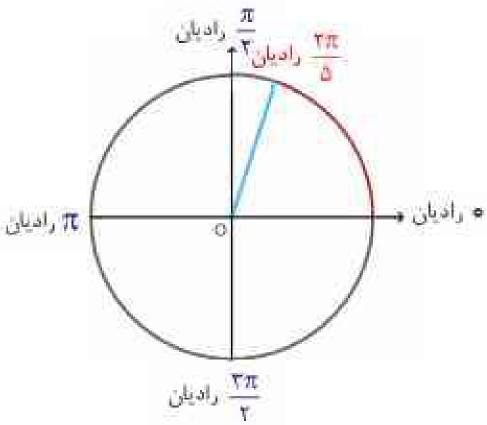
$-۱۲^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{۱۸۰}\text{ رادیان}}$ رادیان $-\frac{\pi}{۱۵}$



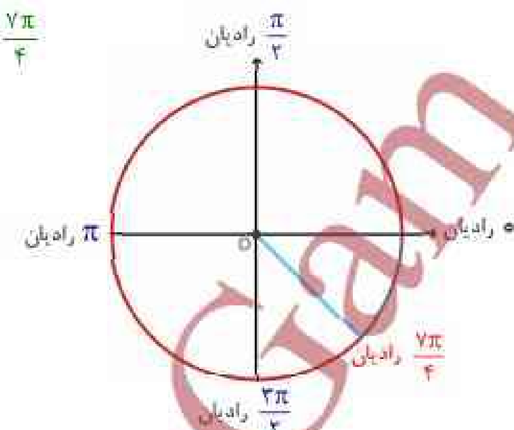
$-105^\circ \xrightarrow{\text{رادیان} \times \frac{\pi}{180^\circ}} -\frac{7\pi}{12}$ رادیان



$72^\circ \xrightarrow{\text{رادیان} \times \frac{\pi}{180^\circ}} \frac{2\pi}{5}$ رادیان

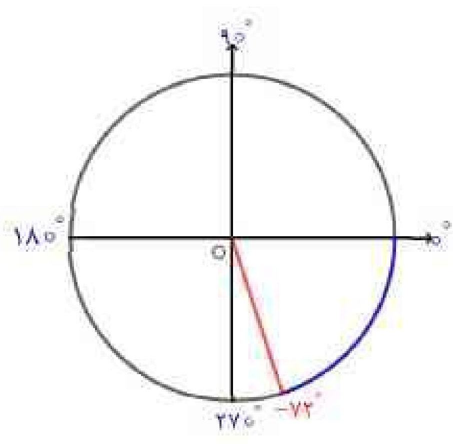


$315^\circ \xrightarrow{\text{رادیان} \times \frac{\pi}{180^\circ}} \frac{7\pi}{4}$ رادیان

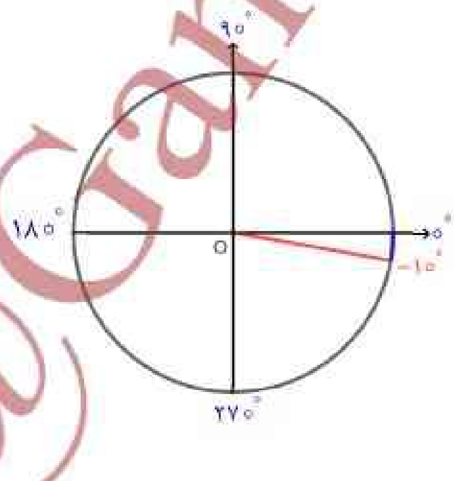


۲ هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{18}$ رادیان، $\frac{-2\pi}{5}$ رادیان، $\frac{3\pi}{4}$ رادیان، $\frac{7\pi}{8}$ رادیان، $\frac{6\pi}{5}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

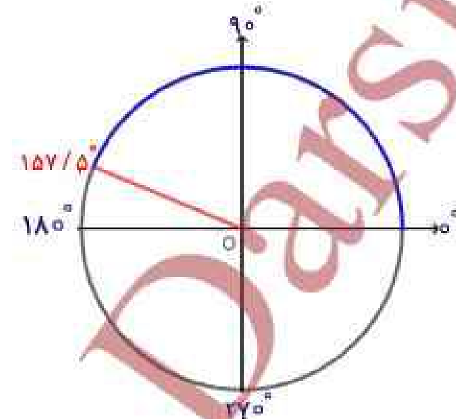
$\frac{-2\pi}{5}$ رادیان $\xrightarrow{\pi = 180^\circ \quad \text{رادیان}} \frac{-360^\circ}{5} = -72^\circ$



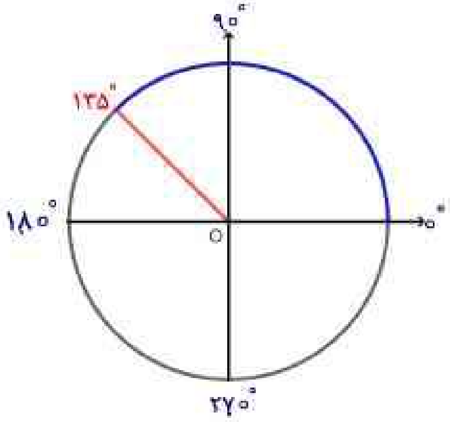
$\frac{-\pi}{18}$ رادیان $\xrightarrow{\text{رادیان}\ \pi = 180^\circ} \frac{-180^\circ}{18} = -10^\circ$



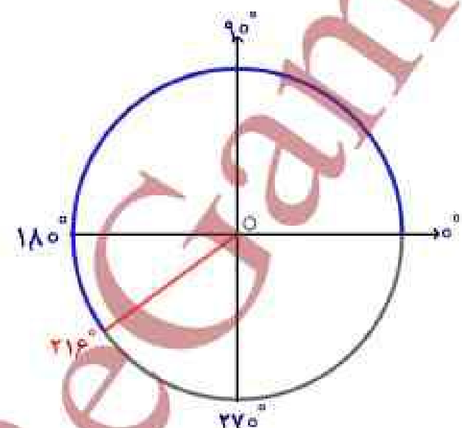
رادیان $\frac{۷\pi}{۸} \xrightarrow{\pi = ۱۸۰^\circ \text{ رادیان}} \frac{۱۲۶۰^\circ}{۸} = ۱۵۷/۵^\circ$



رادیان $\frac{۳\pi}{۴} \xrightarrow{\pi = ۱۸۰^\circ \text{ رادیان}} \frac{۵۴۰^\circ}{۴} = ۱۳۵^\circ$



رادیان $\frac{۶\pi}{۵} \xrightarrow{\pi = ۱۸۰^\circ \text{ رادیان}} \frac{۱۰۸۰^\circ}{۸} = ۲۱۶^\circ$



۳ زاویهٔ D بر حسب درجه برابر با $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازهٔ این زاویه چند درجه است؟

راه اول : رادیان $\frac{\pi}{۲۰} \xrightarrow{\pi = ۱۸۰^\circ \text{ رادیان}} \frac{۱۸۰^\circ}{۲۰} = ۹^\circ$

راه دوم : $\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{\frac{\pi}{۲۰}\text{ رادیان}}{\pi \text{ رادیان}} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{۲۰} \Rightarrow D = ۹^\circ$

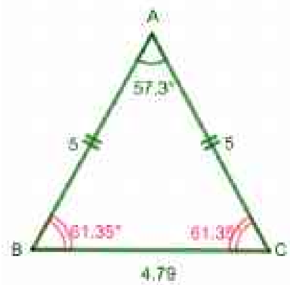
۴ دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

$\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow \alpha = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \alpha = ۰/۸$ رادیان

نکته : l و $\mathbf{r}$ هم واحد هستند و α برحسب رادیان به دست می آید.

۵ درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هر یک از ساق‌های آن است.



همانطور که قبلا دیده ایم ۱ رادیان تقریباً برابر با ۵۷/۳ درجه است. بنا براین با توجه به اینکه مثلث متساوی الساقین است؛ بنا براین اندازهٔ هریک از دو زاویه مجاور به ساق را می توان به دست آورد: $\hat{B} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - ۵۷/۳^\circ}{۲} = ۶۱/۳۵^\circ$ همچنین می دانیم در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر ، بزرگ تر از ضلع روبه رو به زاویهٔ کوچک تر است پس طول قاعده کوچک تر از طول ساق ها خواهد بود.پس عبارت فوق درست است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

این عبارت درست است زیرا : $\alpha = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\alpha \Rightarrow l = ۱ \times \pi = \pi = ۳/۱۴ \ cm$

پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

این عبارت نادرس است زیرا :

راه اول : زیرا $\frac{۶\pi}{۵} = \pi + \frac{\pi}{۵}$ بنا براین انتهای کمان این زاویه در ربع سوم قرار دارد ؛ زیرا بیش تر از π رادیان است .

راه دوم : انتهای کمان زاویه ۲۱۶درجه در ربع سوم است . $\frac{۶\pi}{۵}\text{رادیان} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۱۰۸۰^\circ}{۵} = ۲۱۶^\circ$

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

این عبارت نادرست است زیرا :

راه اول : می دانیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$\frac{\pi}{۹}\text{ رادیان} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۱۸۰^\circ}{۹} = ۲۰^\circ \qquad \frac{۷\pi}{۳۶}\text{رادیان} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۱۲۶۰^\circ}{۳۶} = ۳۵^\circ \qquad \frac{۲\pi}{۳}\text{رادیان} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۳۶۰^\circ}{۳} = ۱۲۰^\circ$

$۱۲۰^\circ + ۲۰^\circ + ۳۵^\circ = ۱۷۵^\circ < ۱۸۰^\circ$

راه دوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° است پس :

$\frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹} + \frac{۷\pi}{۳۶} = \frac{۲۴\pi + ۴\pi + ۷\pi}{۳۶} = \frac{۳۵\pi}{۳۶} \Rightarrow \frac{۳۵\pi}{۳۶}\text{رادیان} \xrightarrow{\text{رادیان } \pi = ۱۸۰^\circ} \frac{۶۳۰۰^\circ}{۳۶} = ۱۷۵^\circ < ۱۸۰^\circ$

راه سوم : می دانیم مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰° یا همان π رادیان است پس :

$\frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹} + \frac{۷\pi}{۳۶} = \frac{۲۴\pi + ۴\pi + ۷\pi}{۳۶} = \frac{۳۵\pi}{۳۶} < \pi$

خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $۱\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر با $۵۷/۳^\circ$ است.

حال شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

$۰/۵$ رادیان	=	$۲۸/۶^\circ$
$\frac{۴}{۵}$ رادیان	=	$۴۵/۸^\circ$
۲ رادیان	=	$۱۱۴/۶^\circ$
۳ رادیان	=	$۱۷۱/۹^\circ$
$۳/۱۴$ رادیان	=	$۱۷۹/۹^\circ$
$\frac{\pi}{۳}$ رادیان	=	۶۰°
$\frac{\pi}{۴}$ رادیان	=	۴۵°
π رادیان	=	۱۸۰°

$۰/۵\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۲۸/۶^\circ$ ، $\frac{۴}{۵}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۴۵/۸^\circ$ ، $۲\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۱۴/۶^\circ$

$۳\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۷۱/۹^\circ$ ، $۳/۱۴\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۷۹/۹^\circ$ ، $\frac{\pi}{۳}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۶۰^\circ$

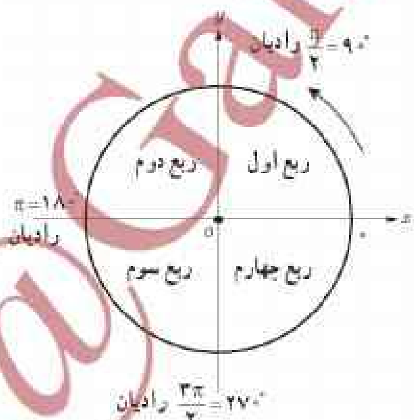
$\frac{\pi}{۴}\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۴۵^\circ$ ، $\pi\times\frac{۱۸۰}{\pi}=۱۸۰^\circ$

درس دوم | روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

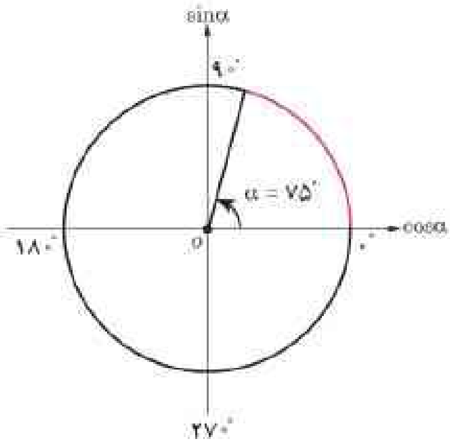
در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.



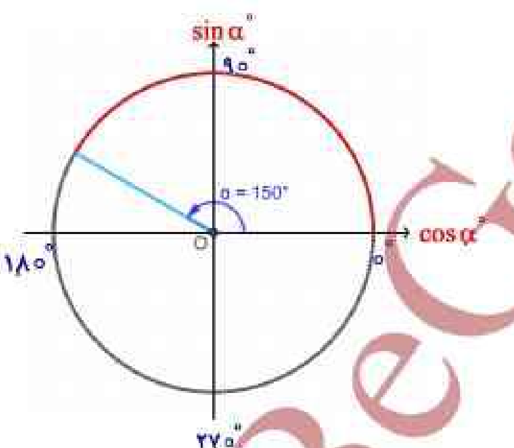
ربع / نسبت مثلثاتی	اول $۰<\alpha<\frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲}<\alpha<\pi$	سوم $\pi<\alpha<\frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

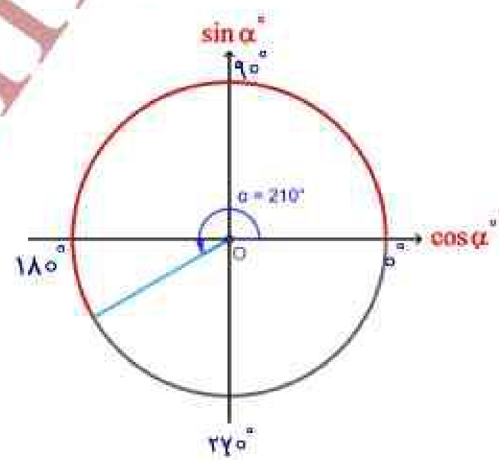
فعالیت

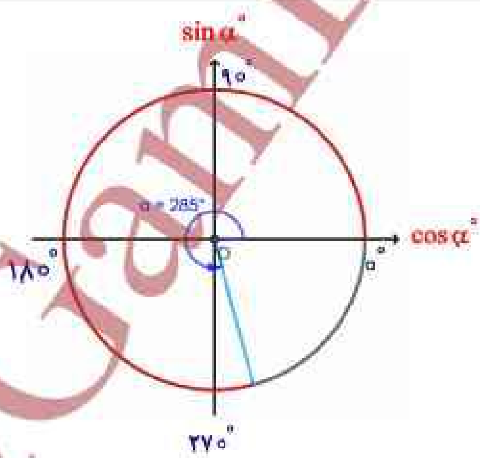
۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

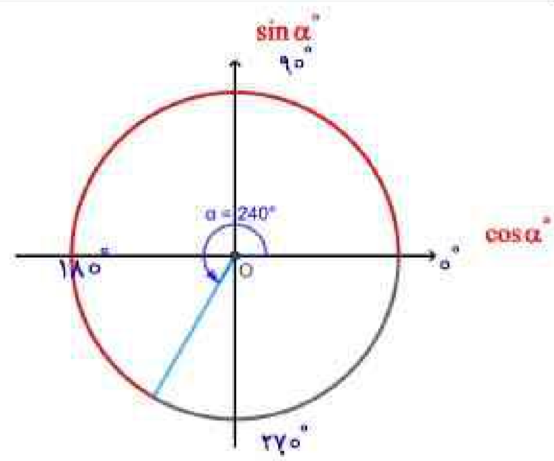


زاویه α	انتهای کمان روبه‌روی α	علامت نسبت مثلثاتی
۷۵°	ربع اول	$\tan\alpha > ۰$
۱۵۰°	ربع دوم	$\sin\alpha > ۰$
۲۱۰°	ربع سوم	$\cos\alpha < ۰$
۲۴۰°	ربع سوم	$\cot\alpha > ۰$
۲۸۵°	ربع چهارم	$\tan\alpha < ۰$

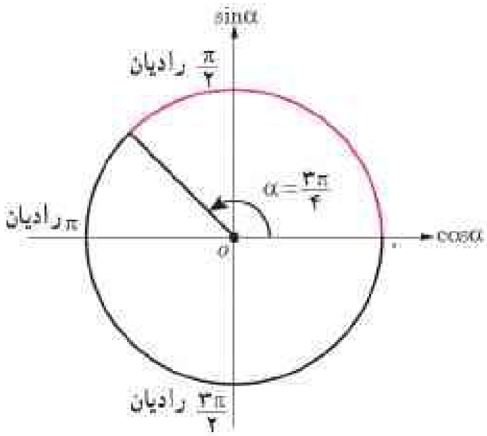








علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha<0$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha>0$	ربع دوم	$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha<0$	ربع چهارم	$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha>0$	ربع اول	$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha>0$	ربع سوم	$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان



$\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۲}=\frac{۳\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$ رادیان بیش تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$\pi-\frac{\pi}{۵}=\frac{۴\pi}{۵}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۵}$ رادیان از π رادیان کم تر است پس در ربع دوم قرار دارد.

$۲\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۳}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۳}$ رادیان از ۲π رادیان کم تر است پس در ربع چهارم قرار دارد.

$\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۱۲}$ بنا براین $\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان از $\frac{\pi}{۲}$ رادیان کم تر است پس در ربع اول قرار دارد.

$\pi+\frac{\pi}{۴}=\frac{۵\pi}{۴}$ بنا براین $\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ رادیان از π رادیان بیش تر است پس در ربع سوم قرار دارد.

۲ اگر $\sin\alpha=\frac{-۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۱}{۹}=\frac{۸}{۹}\xrightarrow{\cos\alpha<0}\cos\alpha=-\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{-۱}{۳}}{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}\longrightarrow\tan\alpha=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}}{\frac{-۱}{۳}}\longrightarrow\cot\alpha=۲\sqrt{۲}$$

۳ اگر $\cot\alpha=-2$ و $\cos\alpha>0$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha>0$ و $\cot\alpha<0$ لذا انتهای کمان α در ربع چهارم واقع است. بنابراین :

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha=5 \longrightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{5} \longrightarrow \sin\alpha=\frac{-1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{4}{5} \longrightarrow \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha=\frac{-1}{2}$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x=\frac{-4}{5}$ و $\sin x>0$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

حل : چون $\cos x<0$ و $\sin x>0$ لذا انتهای کمان x در ربع دوم واقع است ، بنا بر این :

$$\sin^2x=1-\cos^2x \longrightarrow \sin^2x=1-\frac{16}{25} \longrightarrow \sin^2x=\frac{9}{25} \longrightarrow \sin x=\frac{3}{5}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}} \longrightarrow \tan x=\frac{-3}{4}$$

$$\cot x=\frac{1}{\tan x} \longrightarrow \cot x=\frac{-4}{3}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α / نسبت	۰ رادیان = °۰	$\frac{\pi}{6}$ رادیان = °۳۰	$\frac{\pi}{4}$ رادیان = °۴۵	$\frac{\pi}{3}$ رادیان = °۶۰	$\frac{\pi}{2}$ رادیان = °۹۰	π رادیان = °۱۸۰	$\frac{3\pi}{2}$ رادیان = °۲۷۰	2π رادیان = °۳۶۰
$\sin\alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-1	۰
$\cos\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	-1	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\alpha$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3}\times\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{3} - \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$

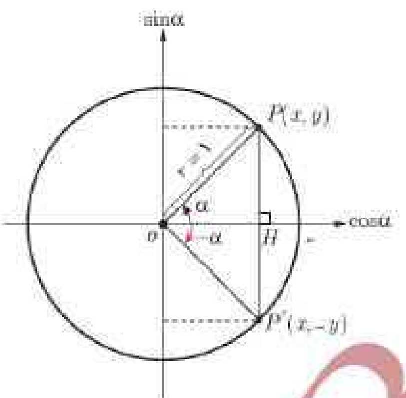
ب) $\frac{\tan^2(\frac{\pi}{6})+\sin^2(\frac{\pi}{4})}{\cot^2(\frac{\pi}{4})-\cos^2(\frac{\pi}{3})} + \underbrace{\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ}_{1} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینه یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=30^\circ$، نسبت‌های مثلثاتی زاویه -30° در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

$\sin(-30^\circ) = \frac{-y}{r} = -\sin 30^\circ = \frac{-1}{2}$

$\cos(-30^\circ) = \frac{x}{r} = \cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-30^\circ) = \frac{-y}{x} = -\tan(30^\circ) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

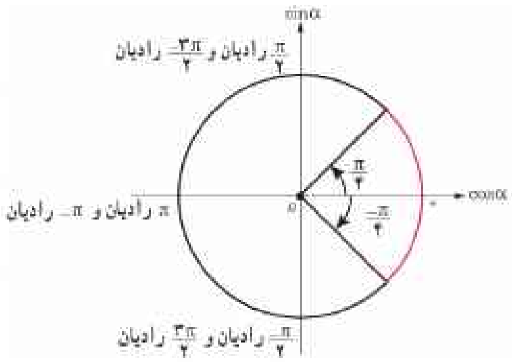
$\cot(-30^\circ) = \frac{x}{-y} = -\cot(30^\circ) = -\sqrt{3}$

در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.



$$\sin(-\frac{\pi}{۴}) = -\sin\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan(-\frac{\pi}{۴}) = -\tan(\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

$$\cot(-\frac{\pi}{۴}) = -\cot(\frac{\pi}{۴}) = -۱$$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶} - \tan\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ = -\frac{۳}{۲}$$

الف) $\frac{\cos(-۹۰^\circ) + \sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ) - \cos(-۳۶۰^\circ)} = \frac{\cos ۹۰^\circ - \sin ۲۷۰^\circ}{-\sin ۱۸۰^\circ - \cos ۳۶۰^\circ} = \frac{۰-(-۱)}{۰-۱} = \frac{۱}{-۱} = -۱$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{۶}) + \tan(\frac{-\pi}{۳}) = -\cot(\frac{\pi}{۶}) - \tan(\frac{\pi}{۳}) = -\sqrt{۳} - \sqrt{۳} = -۲\sqrt{۳}$

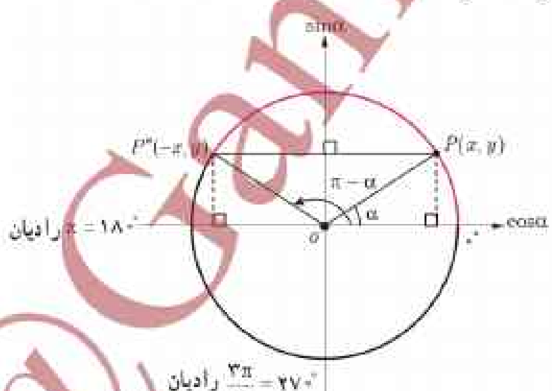
پ) $\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ) + \sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ) = \cos(۴۵^\circ)\times\cos(۶۰^\circ) + (-\sin(۴۵^\circ))\times(-\sin(۶۰^\circ))$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} + \frac{\sqrt{۶}}{۴} = \frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۶}}{۴}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از :



$$\sin ۱۵۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = y = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۱۵۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۱۵۰^\circ = \frac{\sin ۱۵۰^\circ}{\cos ۱۵۰^\circ} = \frac{\frac{۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot ۱۵۰^\circ = \frac{\cos ۱۵۰^\circ}{\sin ۱۵۰^\circ} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰^\circ$$

قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

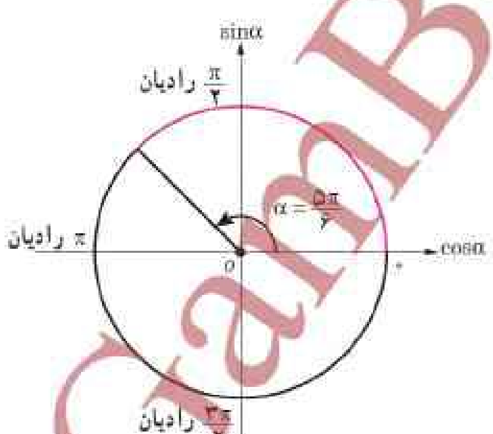
الف) ۷۵° $\quad ۱۸۰^\circ-۷۵^\circ=۱۰۵^\circ$ مکمل زاویه ۷۵°، زاویهٔ ۱۰۵° است.

ب) -۲۵° $\quad ۱۸۰^\circ-(-۲۵^\circ)=۲۰۵^\circ$ مکمل زاویه -۲۵°، زاویهٔ ۲۰۵° است.

پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان $\quad \pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ مکمل زاویه $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$ رادیان است.

ت) $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان $\quad \pi-(\frac{-\pi}{۴})=\frac{۵\pi}{۴}$ مکمل زاویه $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان، زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان است.

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\tan\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cot\frac{\pi}{۶}=-\sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan \frac{۲\pi}{۳} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{۳}\right) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$

$$\cos \frac{۳\pi}{۴} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{۴}\right) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۱۲۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cot(-۱۲۰^\circ) = -\cot(۱۲۰^\circ) = -\cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -(-\cot ۶۰^\circ) = \sqrt{۳}$$

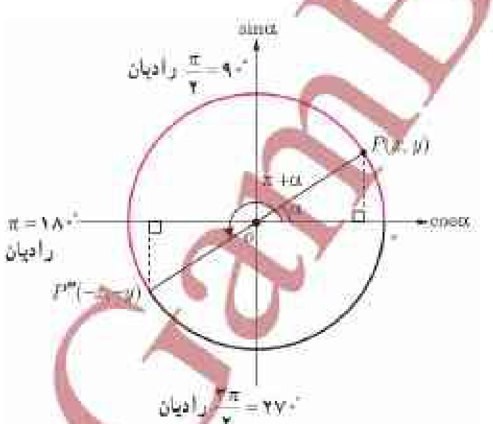
$$\cos(۱۳۵^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha = ۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از:



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است

$$\sin ۲۱۰^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -y = -\sin ۳۰^\circ = \frac{-۱}{۲}$$

$$\cos ۲۱۰^\circ = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) = -x = -\cos ۳۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۲۱۰^\circ = \frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰^\circ$$

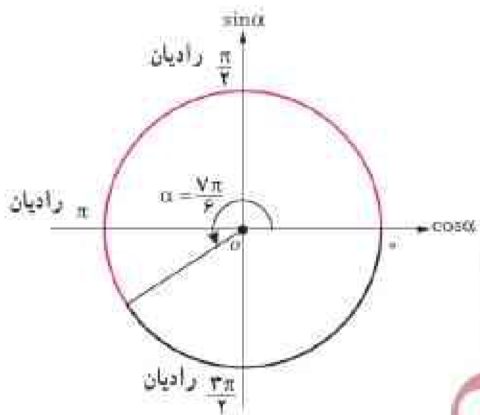
$$\cot ۲۱۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۲۱۰^\circ} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰^\circ$$

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.



$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۷\pi}{۶} = \cos(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan\frac{۷\pi}{۶} = \tan(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۶} = \cot(\pi+\frac{\pi}{۶}) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۲۲۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cos(\frac{-۴\pi}{۳}) = \cos(\frac{۴\pi}{۳}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{۳}) = -\cos\frac{\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}$$

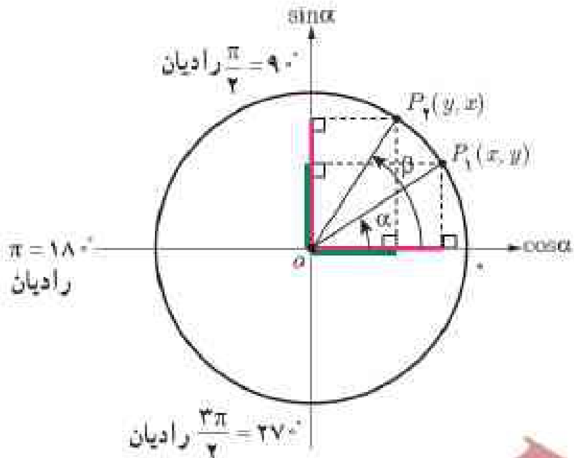
$$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) = -\sin(\frac{۷\pi}{۶}) = -\sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -(-\sin(\frac{\pi}{۶})) = \frac{۱}{۲}$$

$$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) = \cot(\pi+\frac{\pi}{۴}) = \cot(\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت

دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها 90° یا $\frac{\pi}{2}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=30^\circ$ و $\beta=60^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :



$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

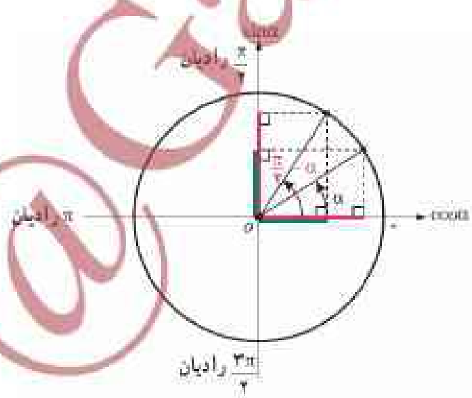
$$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1 \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

همچنین زاویه ..۰.. و $\frac{\pi}{2}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$$

$$\tan\frac{\pi}{2} = \cot 0 =$$ تعریف نشده

در حالت کلی :



$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$$

به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر :

$\sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \cot\beta$

$\cos\alpha = \sin\beta \quad , \quad \cot\alpha = \tan\beta$

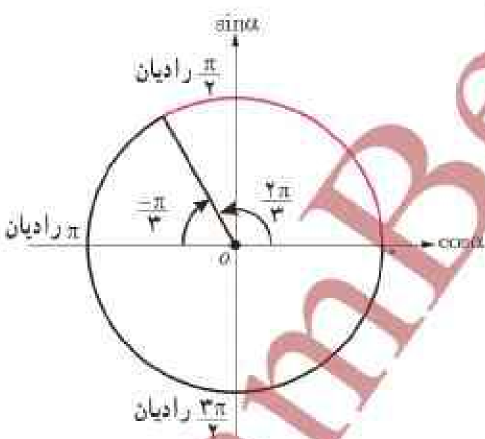
نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.

روش اول ــ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\pi-\frac{\pi}{۳}$. بنابراین :



$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۳})= \sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

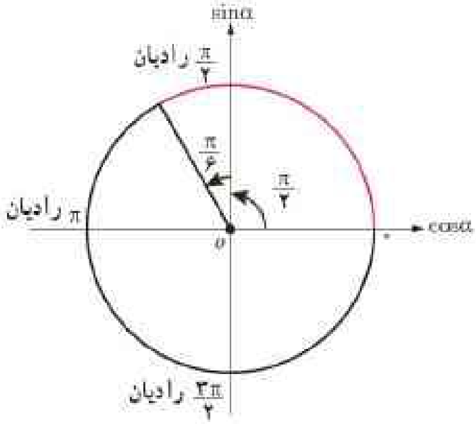
$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}= -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳}=\cot(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cot\frac{\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

روش دوم ــ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳}=\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳}=\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$



$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\cot\frac{2\pi}{3} = \cot(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

یا به عبارتی $\frac{\pi}{2} = (-\frac{\pi}{6}) + \frac{2\pi}{3}$ پس $\frac{2\pi}{3}$ رادیان و $-\frac{\pi}{6}$ متمم هم هستند. با توجه قانون نسبت های مثلثاتی برای دو زاویهٔ متمم داریم :

$$\begin{cases} \sin\frac{2\pi}{3} = \cos(-\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{2\pi}{3} = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \tan\frac{2\pi}{3} = \cot(-\frac{\pi}{6}) = -\cot\frac{\pi}{6} \\ \cot\frac{2\pi}{3} = \tan(-\frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

ازطرفی با توجه به تساوی $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$ به جای $\frac{2\pi}{3}$ رادیان مقدار مساوی آن یعنی $(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6})$ رادیان را قرار دهیم .

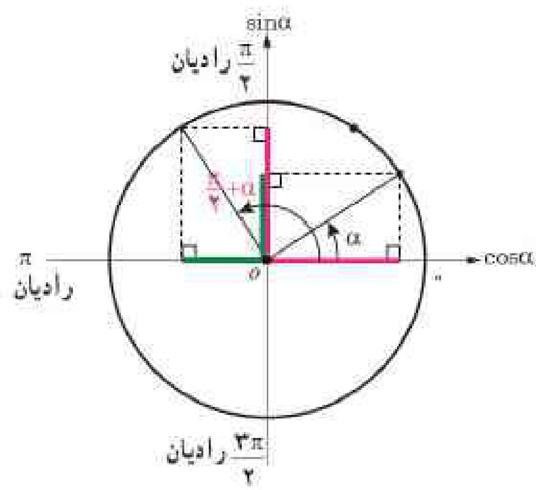
در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$$

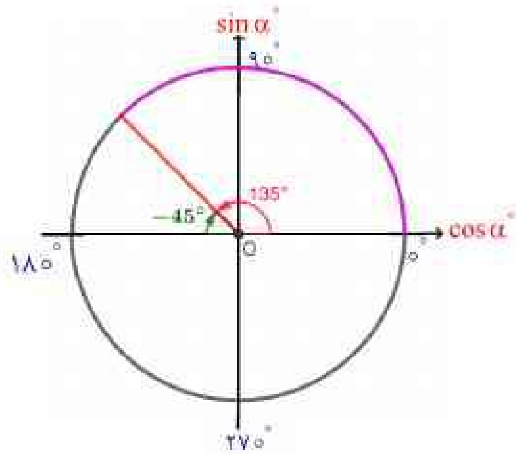
$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan\alpha$$



کار در کلاس

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به‌دست آورید.



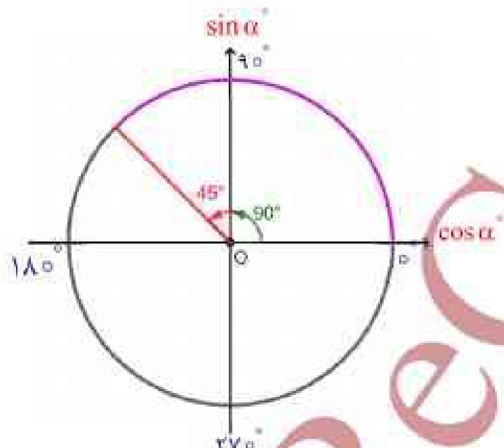
راه اول:

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cos ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$



راه دوم:

$$\sin ۱۳۵^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۱۳۵^\circ = \cos(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ = \tan(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\cot ۴۵^\circ = -۱$$

$$\cot ۱۳۵^\circ = \cot(۹۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\tan ۴۵^\circ = -۱$$

کار در کلاس

به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید:

۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟

(مثلاً $\sin ۱۰^\circ = \sin ۱۷۰^\circ$)

می دانیم زاویه های مکمل دارای سینوس های برابر هستند.

بنا براین داریم:

$$\sin ۲۰^\circ = \sin ۱۶۰^\circ \ , \ \sin ۳۰^\circ = \sin ۱۵۰^\circ$$

$$\sin ۴۰^\circ = \sin ۱۴۰^\circ \ , \ \sin ۵۰^\circ = \sin ۱۳۰^\circ$$

$$\sin ۶۰^\circ = \sin ۱۲۰^\circ \ , \ \sin ۷۰^\circ = \sin ۱۱۰^\circ$$

$$\sin ۸۰^\circ = \sin ۱۰۰^\circ$$

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان = 90° می‌شود؟
نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

به عنوان مثلا می توانیم 120° و 30° یا 135° و 45° یا 150° و 60° اشاره کنیم .

به عنوان مثال می توانیم نسبت های مثلثاتی زاویه 150° را به کمک نسبت های مثلثاتی 60° به دست آوریم :

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 150^\circ = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

خیر نمی توان یافت با توجه به روابطی که برای زوایا مکمل ، متمم و دو زاویه که اختلاف آن ها 90° $(\frac{\pi}{2})$ باشد ، کسینوس ها برابر نیستند.

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.

مکمل زاویه 180° زاویه 0° است . بنا براین داریم :

$$\sin 180^\circ = \sin(180^\circ - 180^\circ) = \sin 0^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -\cos 0^\circ = -1$$

$$\tan 180^\circ = -\tan 0^\circ = 0$$

$\cot 180^\circ = -\cot 0^\circ =$ تعریف نشده

۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

$$\sin 180^\circ = \sin(180^\circ - 135^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

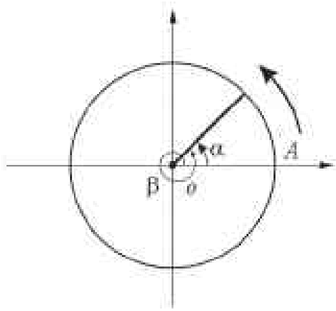
$$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

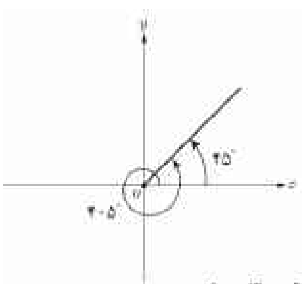
$$\cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

فعالیت



یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی یعنی ۳۶۰° بزرگ‌ترند مانند زاویهٔ ۴۰۵°.
برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازه ۴۵° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه ۴۰۵° و ۴۵° را هم انتها می‌نامیم.
دو زاویهٔ α و β را هم انتها گوییم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل).



اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا ۱۸۰° است. مثلاً زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° هم انتها هستند؛ زیرا $۴۰۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۶۰^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ ۴۵° در ربع اول است، بنابراین:

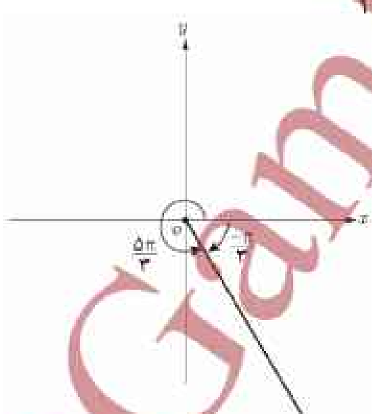
$$\sin ۴۰۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos ۴۰۵^\circ = \cos(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۰۵^\circ = \tan(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cot ۴۰۵^\circ = \cot(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \cot ۴۵^\circ = ۱$$

حال همین بررسی را روی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$ بنابراین دو زاویه $-\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).
چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین:



$$\sin\frac{۵\pi}{۳} = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = \frac{-\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۳} = \cos(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos(-\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۳} = \tan(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \tan(-\frac{\pi}{۳}) = -\sqrt{۳}$$

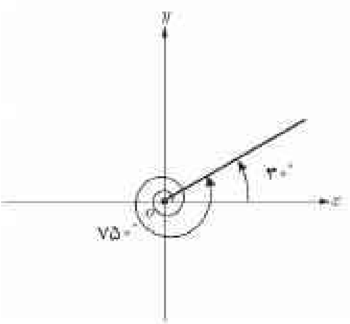
$$\cot\frac{۵\pi}{۳} = \cot(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cot(-\frac{\pi}{۳}) = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$
$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$
$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$
$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$

کار در کلاس

مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)



$\sin 750^\circ=\sin(2\times 360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\tan(-315^\circ)=-\tan(315^\circ)=-\tan(360^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

۱) $\cos 300^\circ=\cos(360^\circ-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

۲) $\sin 420^\circ=\sin(360^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\tan(-225^\circ)=-\tan(225^\circ)=-\tan(360^\circ-135^\circ)=-(-\tan 135^\circ)=\tan 135^\circ$

$=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=1$

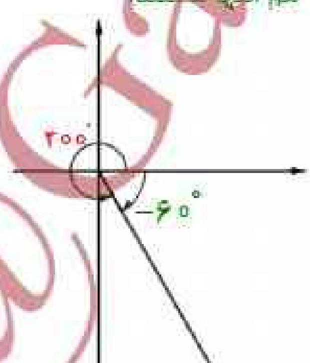
۴) $\cot(-330^\circ)=-\cot(330^\circ)=-\cot(360^\circ-30^\circ)=-(-\cot 30^\circ)=\cot 30^\circ=\sqrt{3}$

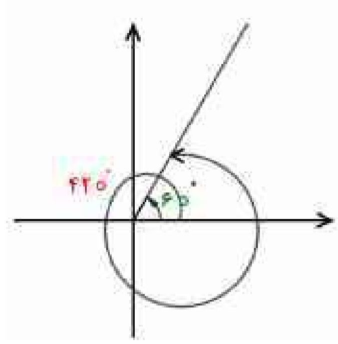
۵) $\sin\frac{11\pi}{4}=\sin(2\pi+\frac{3\pi}{4})=\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶) $\cos(\frac{-7\pi}{4})=\cos(\frac{7\pi}{4})=\cot(2\pi-\frac{\pi}{4})=\cos(-\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

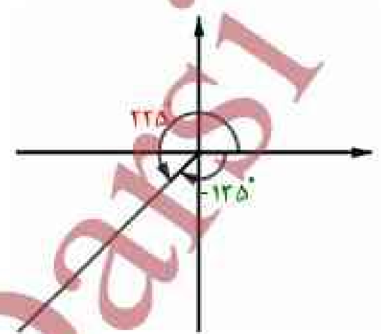
دو زاویه 60° و 420° هم انتها هستند.

دو زاویه -60° و 300° هم انتها هستند.

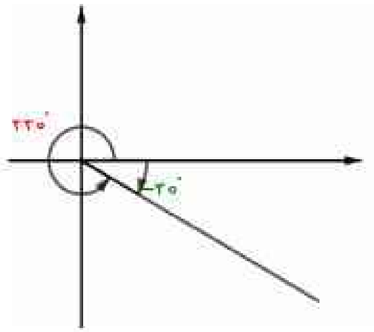




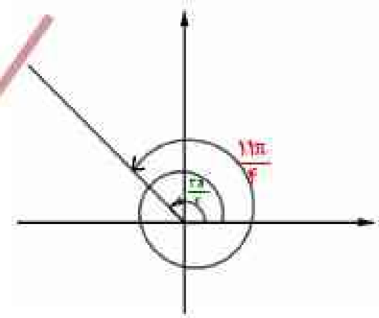
دو زاویه ۲۲۵° و ۱۳۵° هم انتها هستند.



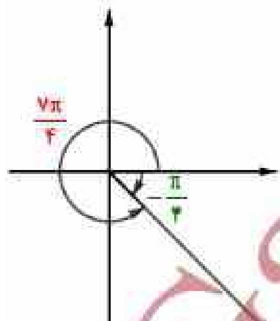
دو زاویه ۳۳۰° و -۳۰° هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۱۱\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



دو زاویه $\frac{۷\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ هم انتها هستند.



تمرین

۱) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید:

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ = \tan(۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) = -\tan ۴۵^\circ + (-\cot ۶۰^\circ) = -۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

ب) $\cos(-۲۱۰^\circ) + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos ۲۱۰^\circ + \cot(۲۴۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۳۰^\circ) + \cot(۱۸۰^\circ + ۶۰^\circ)$

$$= -\cos ۳۰^\circ + \cot ۶۰^\circ = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

پ) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) = \sin ۶۳۰^\circ - \tan ۵۴۰^\circ = \sin(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ) - \tan(۳۶۰^\circ + ۱۸۰^\circ)$

$$= -\sin ۹۰^\circ - \tan ۱۸۰^\circ = -۱ + ۰ = -۱$$

ت) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan ۷۲۰^\circ - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

$$= \cos ۷۲۰^\circ - \cot ۶۰۰^\circ + \tan ۷۲۰^\circ + \tan ۶۰۰^\circ$$

$$= \cos(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) - \cot(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ) + \tan(۲ \times ۳۶۰^\circ + ۰) + \tan(۲ \times ۳۶۰^\circ - ۱۲۰^\circ)$$

$$= \cos ۰^\circ - (-\cot ۱۲۰^\circ) + \tan ۰^\circ - \tan ۱۲۰^\circ = \cos ۰^\circ + \cot(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ) + \tan ۰^\circ - \tan(۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ)$$

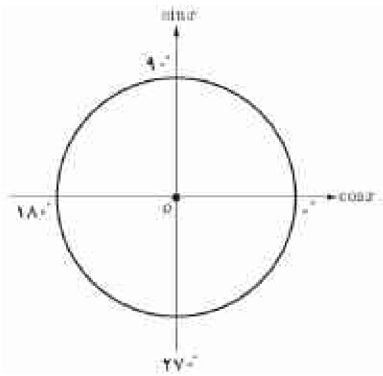
$$= \cos ۰^\circ - \cot ۶۰^\circ + \tan ۰^\circ + \tan ۶۰^\circ = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + ۰ + \sqrt{۳} = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۳} + \sqrt{۳}$$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳})-\cos(\frac{۲۳\pi}{۴})=\sin(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-\cos(۸\pi-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}-\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}$

ج) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴})+\tan(\frac{-۴\pi}{۳})}=\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴}-\cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(-\frac{۳\pi}{۴})+\tan(-\frac{۴\pi}{۳})}=\dfrac{\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\cos(\pi-\frac{\pi}{۶})}{-\sin(\pi-\frac{\pi}{۴})-\tan(\pi+\frac{\pi}{۳})}$

$$=\dfrac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\sqrt{۳}}=\dfrac{-۴-\sqrt{۶}}{۱۰}$$

۲ جدول زیر را کامل کنید :



نسبت \ زاویه x	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
$\cos x$	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
$\tan x$	$-\sqrt{۳}$	-۱	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	$-\sqrt{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\cot x$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	-۱	$-\sqrt{۳}$	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$-\sqrt{۳}$

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ=\sin ۶۰^\circ$

$\sin ۸۴۰^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۲۰^\circ)=\sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ$

ب) $\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

$\cos(-۳۲۴^\circ)=\cos ۳۲۴^\circ=\cos(۳۶۰^\circ-۳۶^\circ)=\cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

$\tan(-۱۰۰۰^\circ)=-\tan ۱۰۰۰^\circ=-\tan(۳\times ۳۶۰^\circ-۸۰^\circ)=-(-\tan ۸۰^\circ)=\tan ۸۰^\circ$

ت) $\sin ۸۷۵^\circ=\sin ۱۵۵^\circ$

$\sin ۸۷۵^\circ=\sin(۲\times ۳۶۰^\circ+۱۵۵^\circ)=\sin ۱۵۵^\circ$

راه حل دیگر این است که نشان دهیم این زوایا هم انتها هستند. همانطور که ملاحظه می شود اختلاف هر دو زاویهٔ ارائه شده در هر قسمت مضربی از ۲π رادیان یا ۳۶۰° است : $۸۷۵^\circ-۱۵۵^\circ=۷۲۰^\circ=۲\times ۳۶۰^\circ$

۴ در تساوی‌های زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

الف) $\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم : $x + ۲۰^\circ + x = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۳۵^\circ$

ب) $\tan(x + \frac{\pi}{۱۸}) = \cot(\frac{۲\pi}{۹} + x)$

با توجه به رابطه ی نوشته شده باید زوایا متمم هم باشند پس داریم : $x + \frac{\pi}{۱۸} + \frac{۲\pi}{۹} + x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۹}$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

با توجه به نسبت های مثلثاتی زاویه های متمم ، می توانیم زوایای فوق را به دست آوریم اما برای یکتایی پاسخ ارائه شده می توانیم توضیح دهیم که می توان زوایای بسیاری یافت که در تساوی های فوق صدق کنند کافی است مضارب ۲π رادیان یا ۳۶۰° را به این زوایا اضافه کنیم مثلاً برای قسمت(الف) $x = ۳۹۵^\circ$ یا برای قسمت (ب) $x = \frac{۱۹\pi}{۹}$ نیز قابل قبول هستند.

درس سوم

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

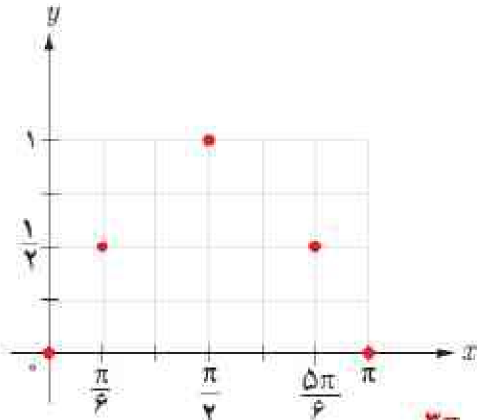
۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

x	$y=\sin x$	مختصات نقطه
۰	۰	$(۰,۰)$
$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
$\frac{\pi}{۲}$	۱	$(\frac{\pi}{۲},۱)$
$\frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$
π	۰	$(\pi,۰)$

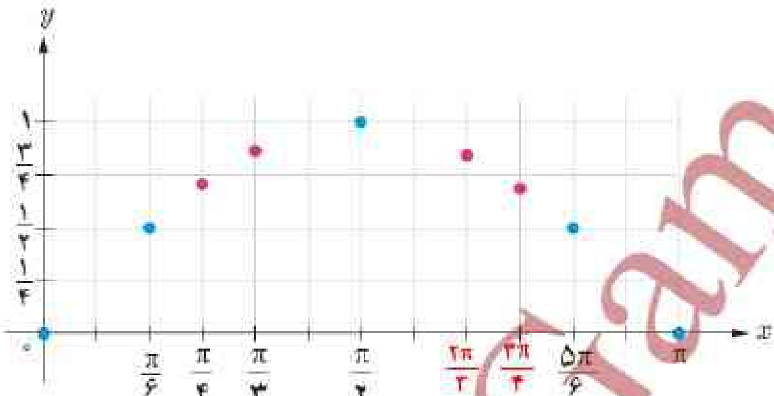
مجموعهٔ زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

$$f = \left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\pi,۰)\right\}$$

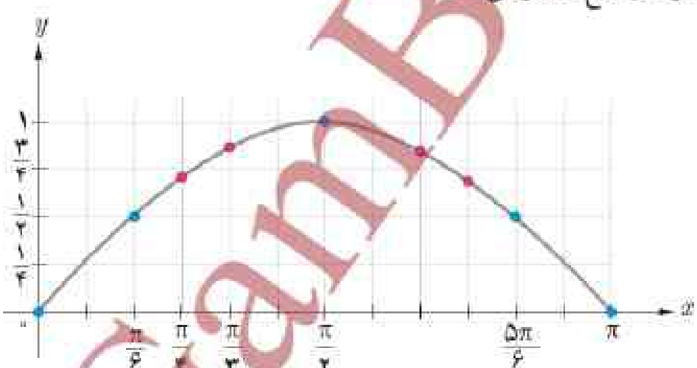
۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.



۳ با افزودن نقاط ($\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$)، ($\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$)، ($\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$) و ($\frac{۳\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$) به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.
(با فرض $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷$)



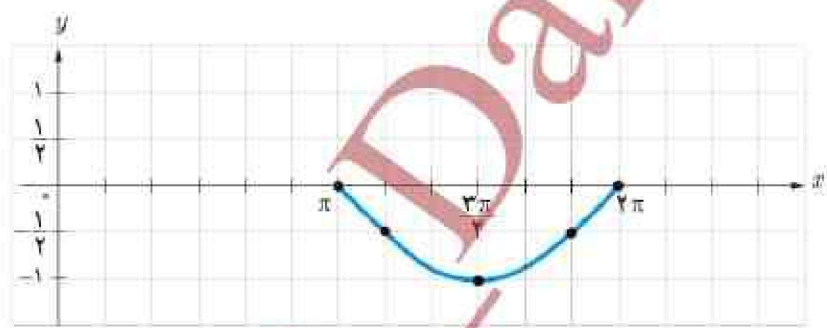
۴ نقاط حاصل در شکل را به‌ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[۰, \pi]$ این شکل به‌طور دقیق‌تری به‌دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطهٔ $y = \sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.



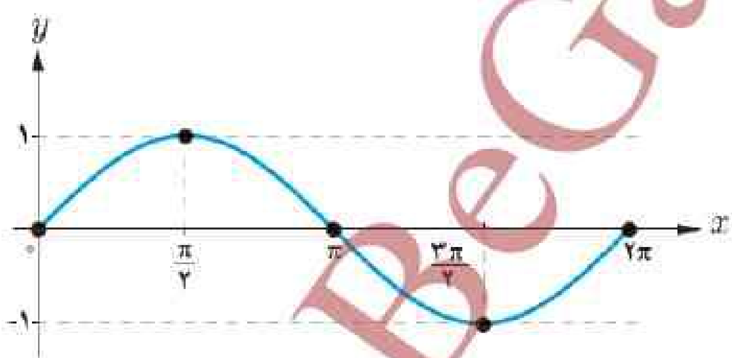
۵ مراحل صفحهٔ قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi$ و $۲\pi]$ انجام دهید.

برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به‌دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(\pi,۰)$	۰	π
$(\frac{۷\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۶}$
$(\frac{۳\pi}{۲},-۱)$	-۱	$\frac{۳\pi}{۲}$
$(\frac{۱۱\pi}{۶},\frac{-۱}{۲})$	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$
$(۲\pi,۰)$	۰	۲π



۶ با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطه $y=\sin x$ در بازه $[۰$ و $۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را دربارهٔ مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[۰,\frac{\pi}{۲}]$
مقدار تابع از ۱- به ۰ افزایش می یابد.	مقدار تابع از ۰ به ۱-کاهش می یابد.	مقدار تابع از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
مقدار تابع در ربع چهارم منفی است.	مقدار تابع در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin(x+۲k\pi)=\sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می توان گفت:

$\sin(x+۲\pi)=\sin x$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی کند

بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰$ و $۲\pi]$ و $[۲\pi, ۴\pi]$ یکسان است.

همچنین داریم :

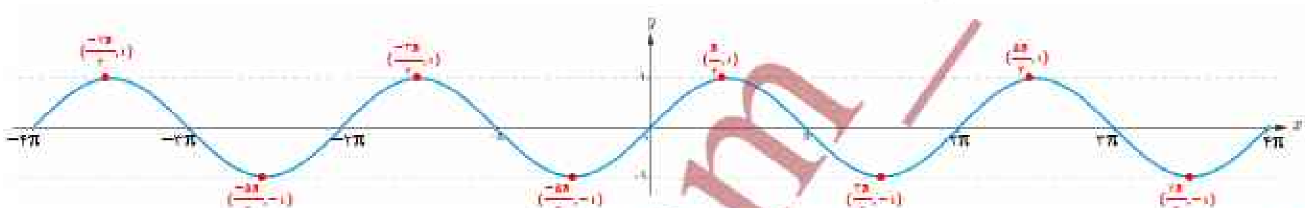
$$\sin(x-۲\pi)=\sin x$$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند.

در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰, ۲\pi]$ و $[-۲\pi, ۰]$ یکسان است.

در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۲k\pi, (۲k+۲)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[۰, ۲\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[۲\pi, ۴\pi]$، $[۴\pi, ۶\pi]$، $[-۲\pi, ۰]$، $[-۴\pi, -۲\pi]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱, ۱]$ است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{۲}$، $x=\frac{۵\pi}{۲}$، $x=\frac{-۳\pi}{۲}$، $x=\frac{-۷\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

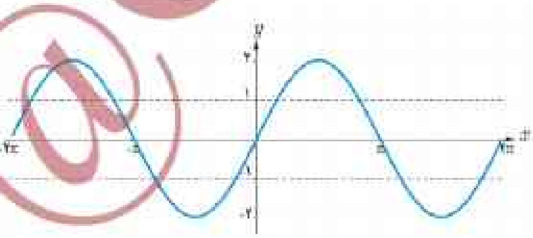
ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با -۱ است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{۳\pi}{۲}$، $x=\frac{۷\pi}{۲}$، $x=\frac{-\pi}{۲}$، $x=\frac{-۵\pi}{۲}$ و در حالت کلی $x=\frac{۳\pi}{۲}+۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

۱ $y=۲\sin x$

برای رسم نمودار این تابع در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ چون برد تابع بازهٔ $[-۲, ۲]$ است، کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را روی این بازه انبساط دهیم. نمودار حاصل در بازهٔ $[-۲\pi, ۰]$ نیز تکرار می‌شود. و شکل مقابل به دست می‌آید.

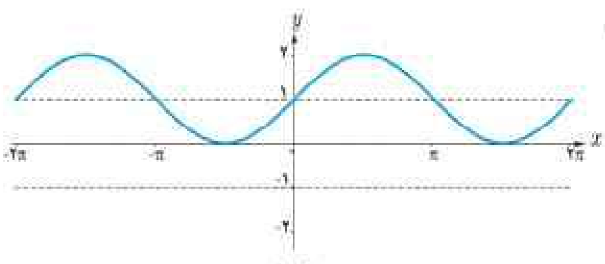


(الف)

تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ یک واحددر جهت مثبت روی محور عمودی انتقال دهیم.
به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

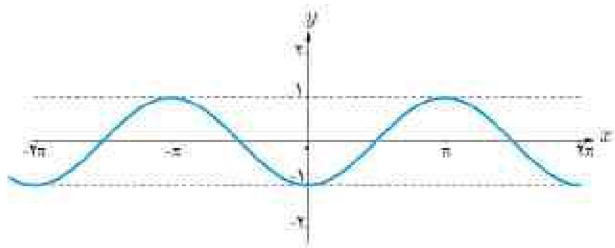
۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$



(ب)

برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ واحددر جهت مثبت روی محور افقی انتقال دهیم.
به این ترتیب شکل مقابل حاصل می شود.

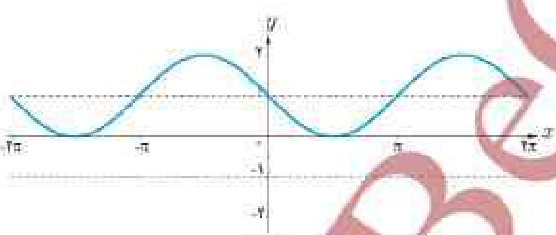
۳ $y=\sin x+۱$



(پ)

برای رسم نمودار این تابع ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\sin x$ را با قرینه کردن نمودار تابع سینوس نسبت به محور x ها رسم نموده و سپس نمودار حاصل را به اندازهٔ یک واحد در جهت مثبت محور عمودی انتقال می دهیم به این ترتیب شکل مقابل به دست می آید.

۴ $y=-\sin x+۱$



(ت)

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

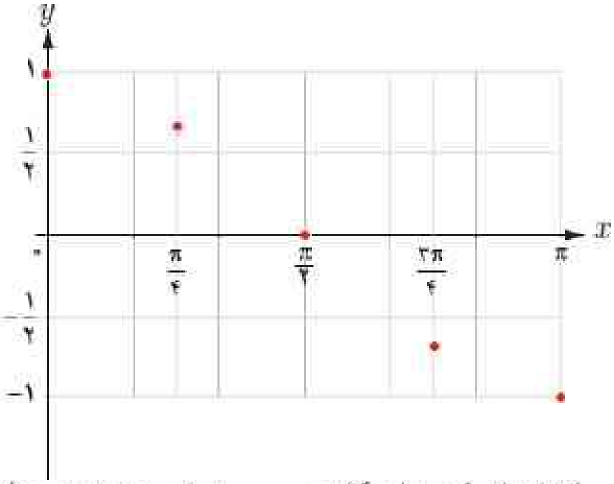
مختصات نقطه	$y=\cos x$	x
(۰,۱)	۱	
$(\frac{\pi}{۴}, ۰/۷)$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۰/۷$	$\frac{\pi}{۴}$
$(\frac{\pi}{۲}, ۰)$	۰	$\frac{\pi}{۲}$
$(\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷)$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-۰/۷$	$\frac{۳\pi}{۴}$
$(\pi, -۱)$	-۱	π

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$f=\{(۰,۱),(\frac{\pi}{۴}, ۰/۷),(\frac{\pi}{۲}, ۰),(\frac{۳\pi}{۴}, -۰/۷),(\pi, -۱)\}$

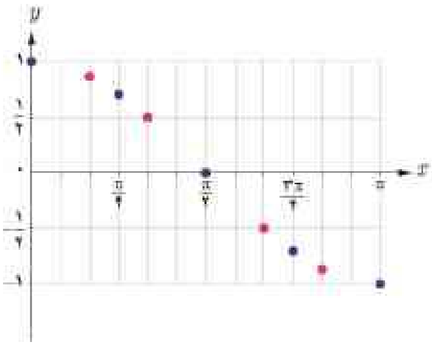
آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

بله یک تابع را مشخص می کند.



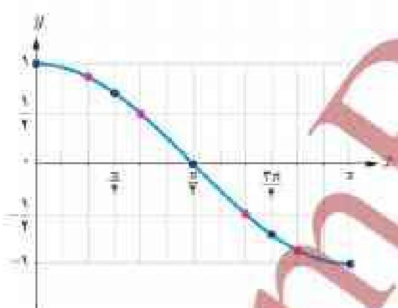
۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

۳ نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{3} \simeq 1/7$).



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$
$y=\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$

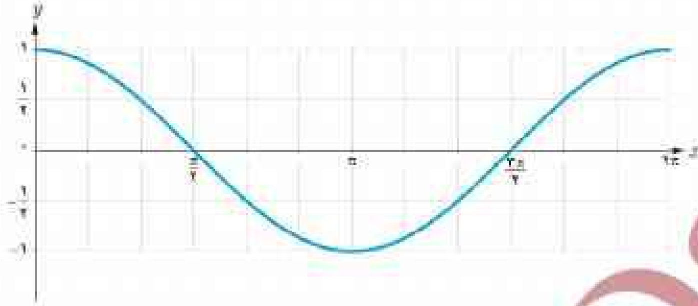
۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید.
این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ مشخص می‌کند.



۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $2\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.

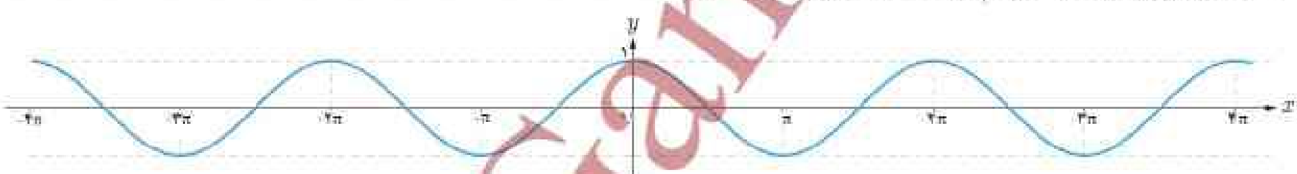
x	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	-1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$
مقدار تابع از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.	مقدار تابع از ۱- به ۰ افزایش می	مقدار تابع از ۰ به ۱- کاهش می یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.
مقدار تابع در ربع چهارم مثبت است	مقدار تابع در ربع سوم منفی است	مقدار تابع در ربع دوم منفی است	مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[0, 2\pi]$، $[2\pi, 4\pi]$، $[-2\pi, 0]$ و $[-4\pi, -2\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[0, 4\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس ... R ... و برد آن $[-1,1]$ ... است.

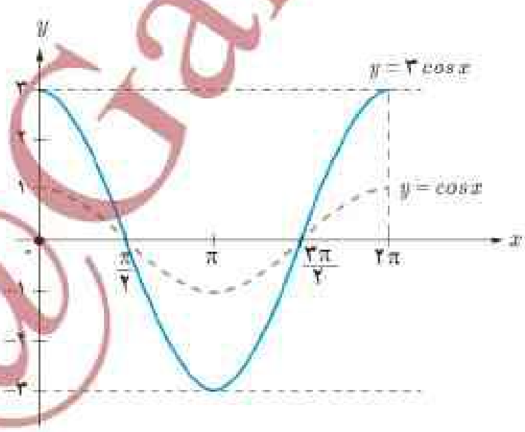
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های ... $x=\frac{k\pi}{2}$ ... برابر با صفر است. $(k \in \mathbb{Z})$

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس ... ۱ ... است که در طول‌های $x=2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$ به‌دست می‌آید.

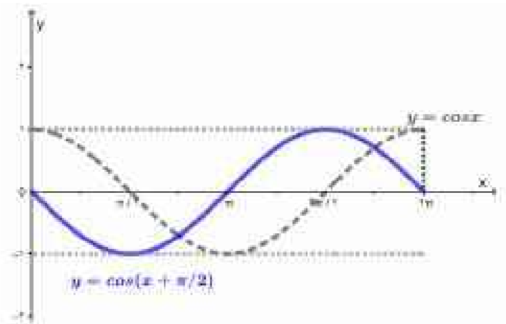
ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ... ۱- ... است که در طول‌های $x=(2k+1)\pi$ به‌دست می‌آید. $(k \in \mathbb{Z})$

کار در کلاس

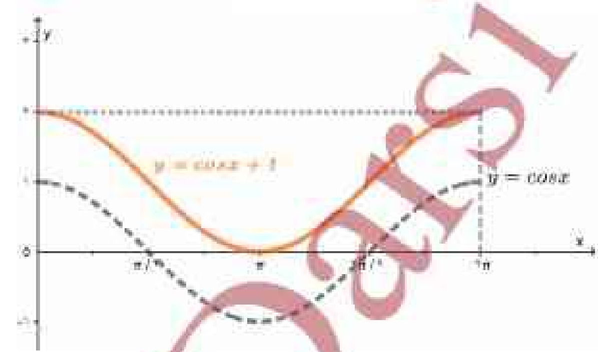
شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[0, 2\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



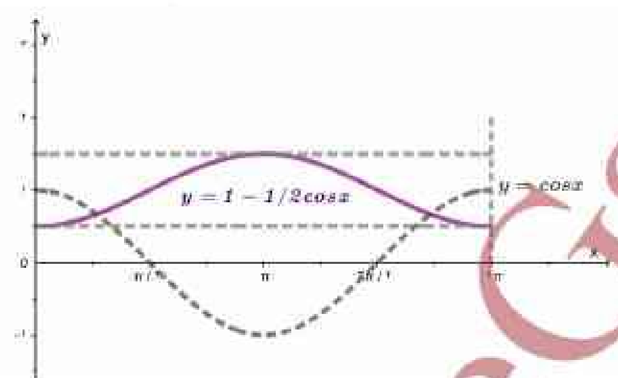
۱ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$



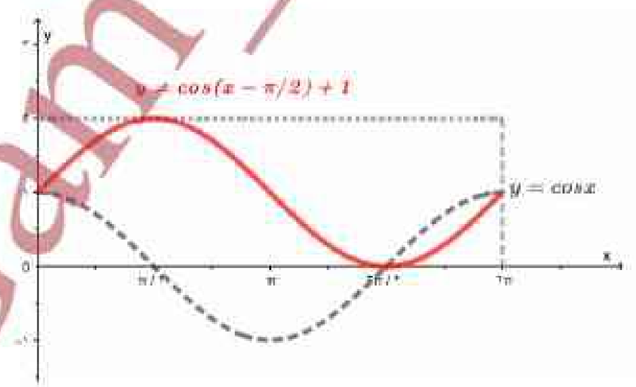
۲ $y=\cos x-۱$



۳ $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$



۴ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$



تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x \quad , \quad y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

$y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(-(\frac{\pi}{۲}-x))=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۲) $y=\cos x \quad , \quad y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

$y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

۳) $y=\cos x \quad , \quad y=\cos(۲\pi-x)$

$y=\cos(۲\pi-x)=\cos x$

بله این دو نمودار بر هم منطبق هستند.

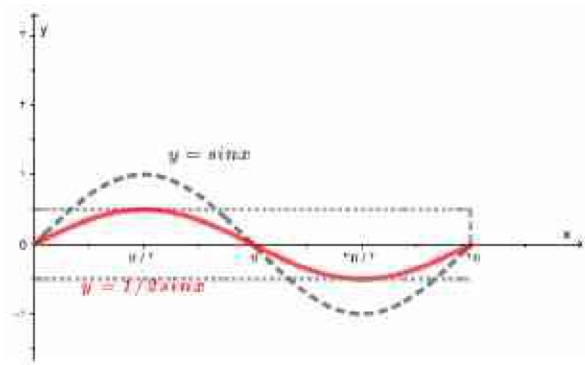
تهیه و تنظیم: عطیه تبریزی

۴) $y=\sin x \quad , \quad y=\sin(5\pi-x)$

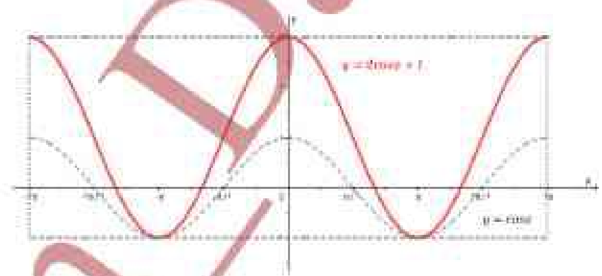
این دو نمودار بر هم منطبق هستند. $y=\sin(5\pi-x)=\sin(4\pi+\pi-x)=\sin(\pi-x)=\sin x$

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

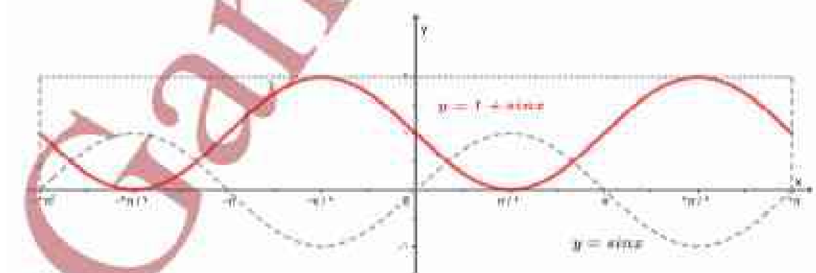
۱) $y=\frac{1}{2}\sin x \quad , \quad [0,2\pi]$



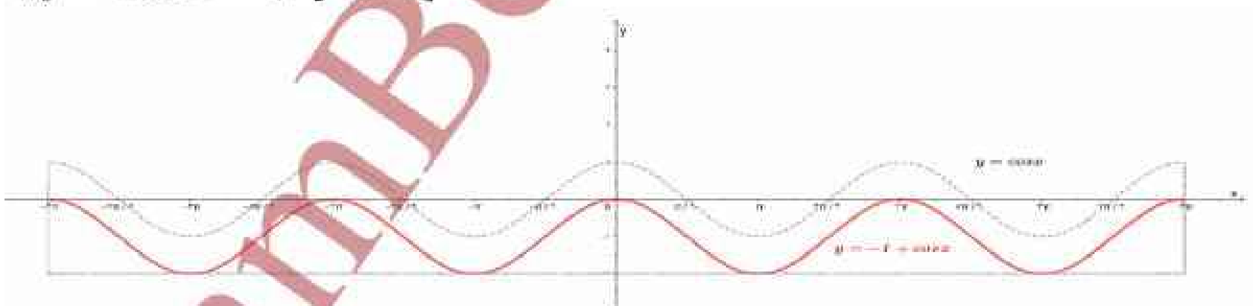
۲) $y=2\cos x+1 \quad , \quad [-2\pi,2\pi]$



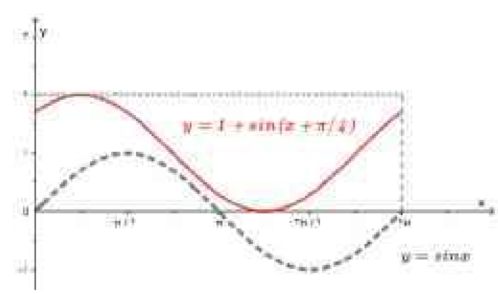
۳) $y=1-\sin x \quad , \quad [-2\pi,2\pi]$



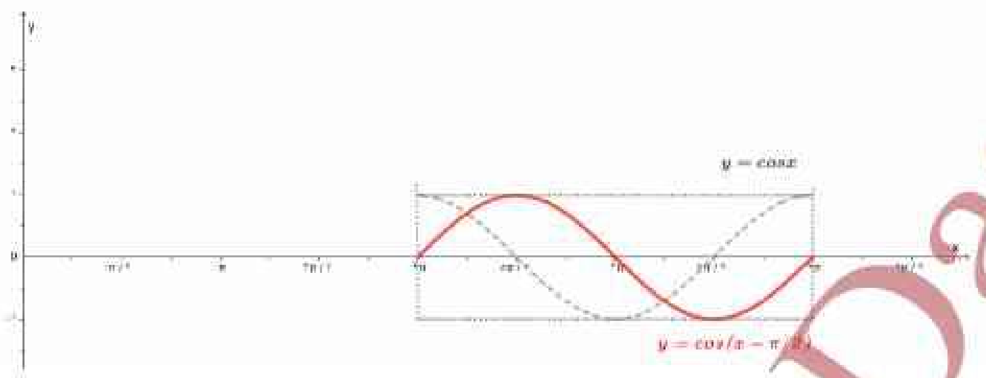
۴) $y=-1+\cos x \quad , \quad [-4\pi,4\pi]$



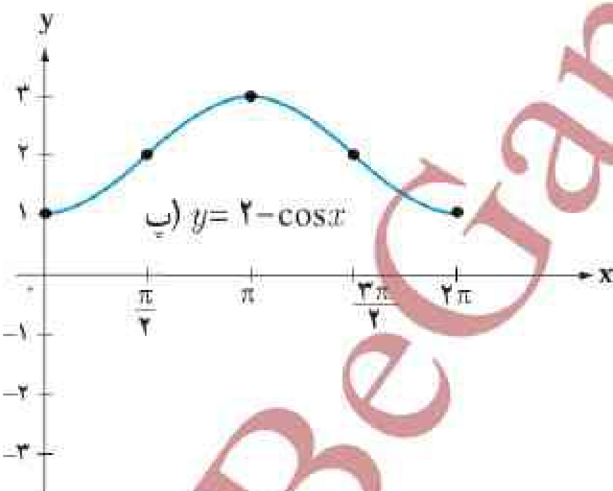
۵) $y=1+\sin(x+\frac{\pi}{4}) \quad , \quad [0,2\pi]$

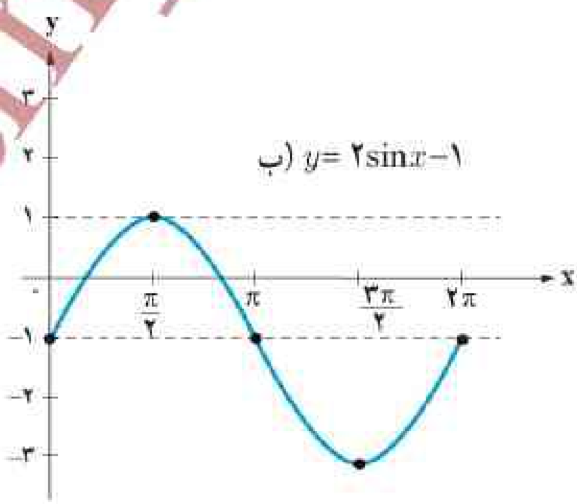


۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$, $[۲\pi,۴\pi]$

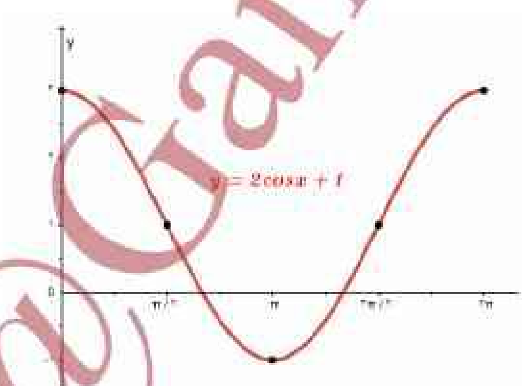


۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند؟ نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.

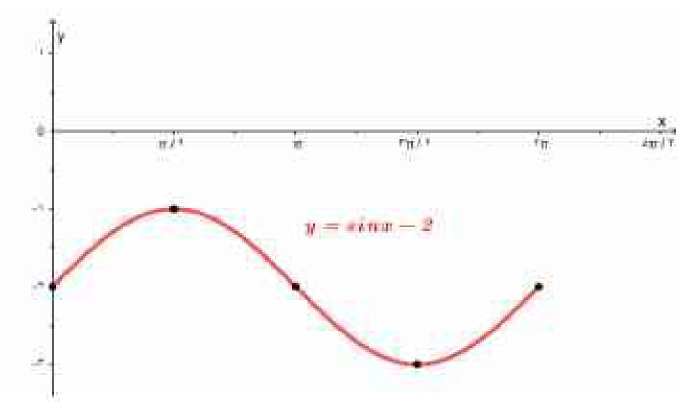




الف) $y=۲\cos x+۱$

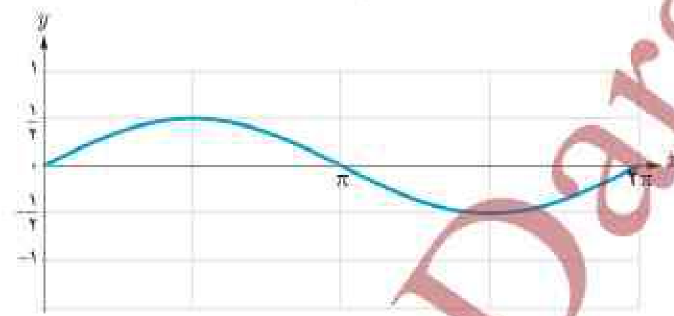


ت) $y=\sin x-۲$



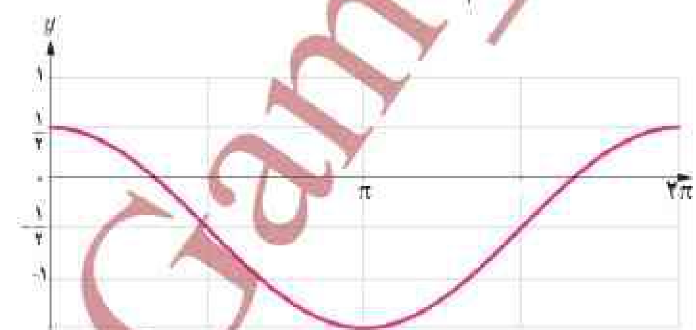
۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

الف) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می‌دهد.



درست است . در نمودار تابع سینوس مقادیر y باید نصف شوند.

ب) شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.



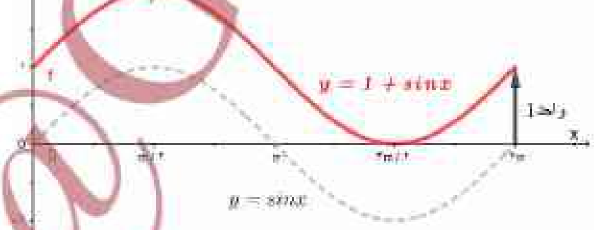
درست است نمودارتابع کسینوس را به اندازه نصف واحد به موازات محور y ها به سمت پایین منتقل می کنیم.

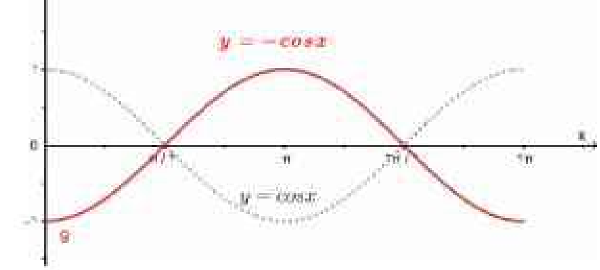
پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد به موازات محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

پ) باید به اندازه یک واحد به موازات محور y ها به سمت بالا انتقال یابد.

ت) درست است .

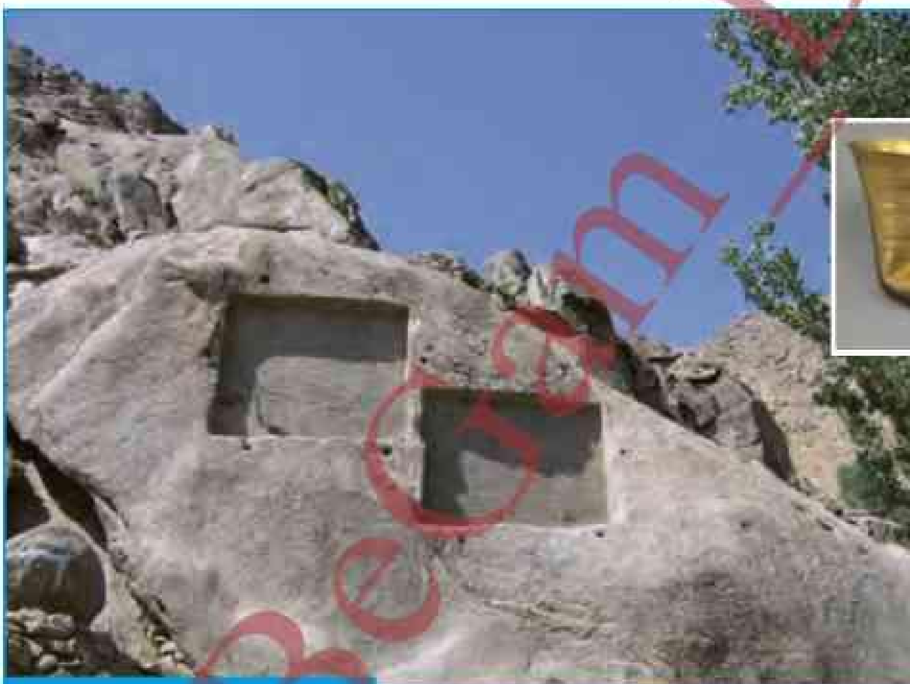




فصل

توابع نمایی و لگاریتمی

ریتون طلایی هگمتانه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)



سنگ‌نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)

آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟
با استفاده از روش سال‌یابی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

درس اول — تابع نمایی و ویژگی‌های آن

درس دوم — تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

درس سوم — نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.

۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم‌ها در هر مرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

اگر تعداد تیم های هر مرحله را در ۲ ضرب کنیم، تعداد تیم ها ی مرحله قبل به دست می آید.

به عبارتی : تعداد تیم ها در مرحله قبل = تعداد تیم ها در هر مرحله×۲

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟

تعداد کل تیم های شرکت کننده=۲^(تعداد مراحل)

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟

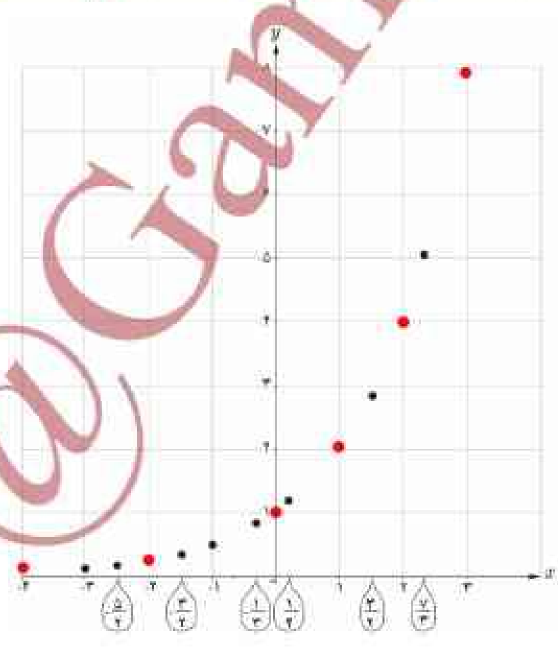
تعداد تیم های اولیه $= ۲^۶ = ۶۴$

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $y = ۲^x$

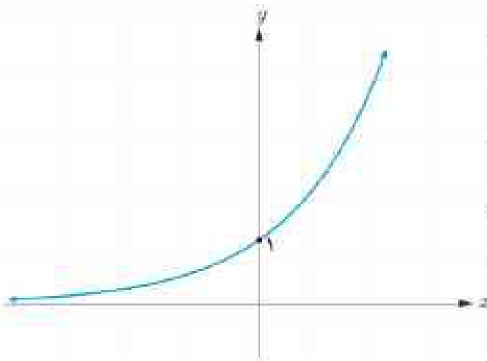
فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-۴	-۳	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۷}{۳}$	۳
۲^x	$\frac{۱}{۱۶}$	۰/۱۲	۰/۱۸	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹	۱	۱/۱۹	۲	۲/۸۳	۴	۵/۰۴	۸



تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی



دیدیم که برای هر عدد گویای a، مقداری برای ۲^a به‌دست می‌آید و نقطهٔ $(a, ۲^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای ۲^b خواهیم داشت و مختصات $(b, ۲^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r، مقادیر ۲^r را به‌دست آوریم و نقاط $(r, ۲^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به‌دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq ۱)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به‌دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

الف) $a^0=۱$ ب) $a^{-x}=\frac{۱}{a^x}$ پ) $a^x.a^y=a^{x+y}$ ت) $(a^x)^y=a^{xy}$

ث) $(ab)^x=a^x.b^x$ ج) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$ چ) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

کار در کلاس

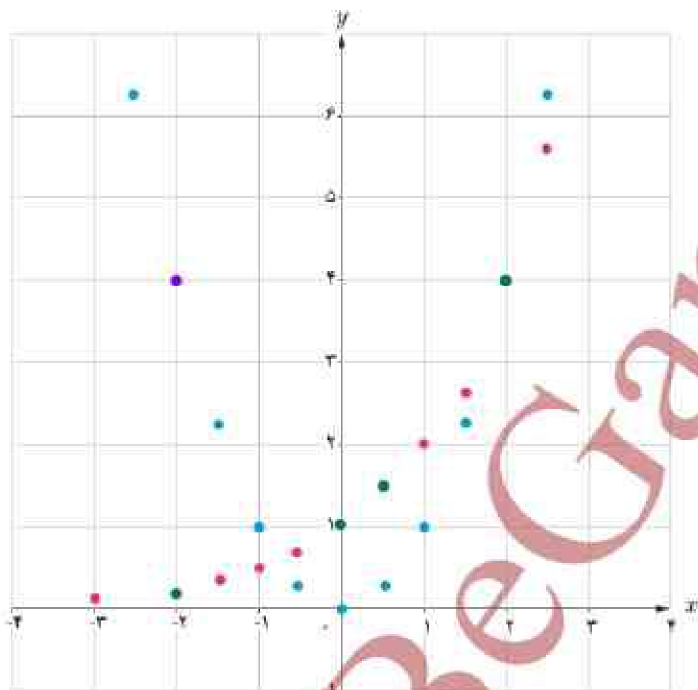
۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y=x^۲$ و $y=۲^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

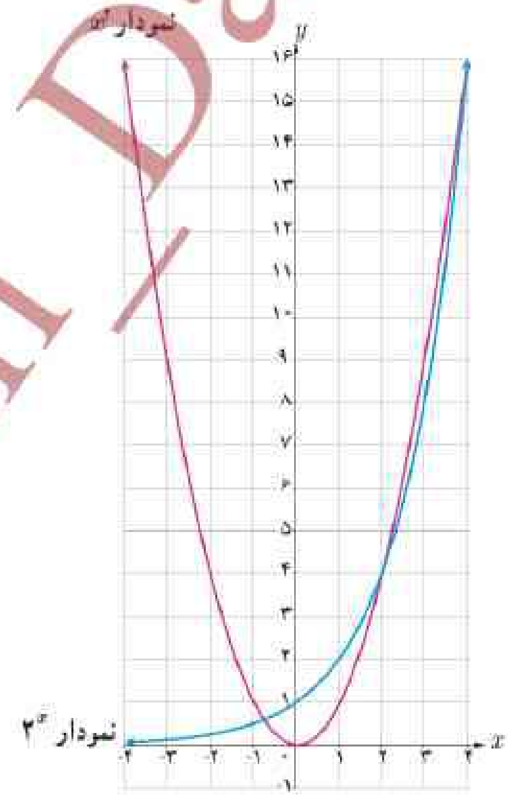
x	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=x^۲$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y=۲^x$	۰/۱۲	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴۱	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

۲ حال این دو نمودار را دریک دستگاه مختصات رسم می کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 باهم مساوی‌اند؟

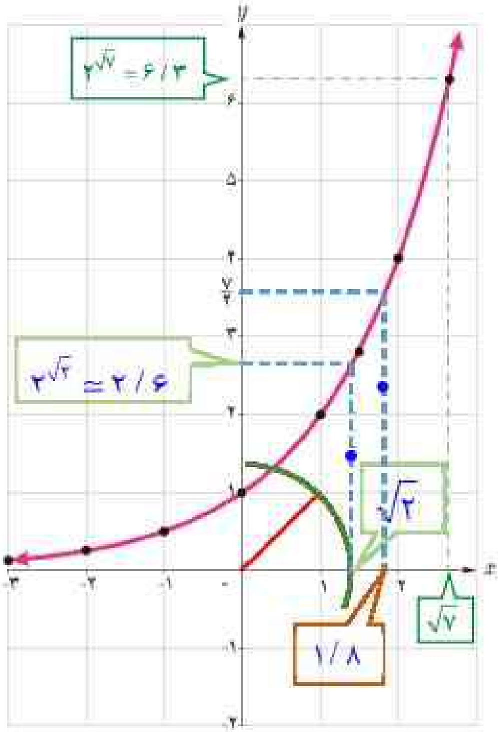
۳ در x^2، متغیر در پایه و عدد ثابت در توان است؛ ولی در 2^x، متغیر در توان و عدد ثابت در پایه است.





هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$, $a\neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.



فعالیت

درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=2^x$ رسم شده است.

۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(0,1)$

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,+\infty)$

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کنند.

۴ عدد $\sqrt{2}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $2^{\sqrt{2}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. $2^{\sqrt2} = 2/6$

۵ عدد $\frac{7}{2}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $2^a = \frac{7}{2}$.

همانطور که در شکل انجام شده ابتدا از نقطهٔ $y = \frac{7}{2}$ عمودی خارج می کنیم تا نمودار را قطع کند سپس از این نقطه بر محور x ها عمود می کنیم در نتیجه : $x = 1/8$ که در واقع داریم : $2^{(1/8)} = \frac{7}{2}$

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$2^{\sqrt5}$, $2^{\frac{3}{2}}$, $2^{\frac{5}{2}}$, $2^{0/3}$, 2^{5} , $2^{-0/4}$, 2^{-1}

$2^{-1} < 2^{-0/4} < 2^{0/3} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\sqrt5} < 2^{\frac{5}{2}} < 2^{5}$

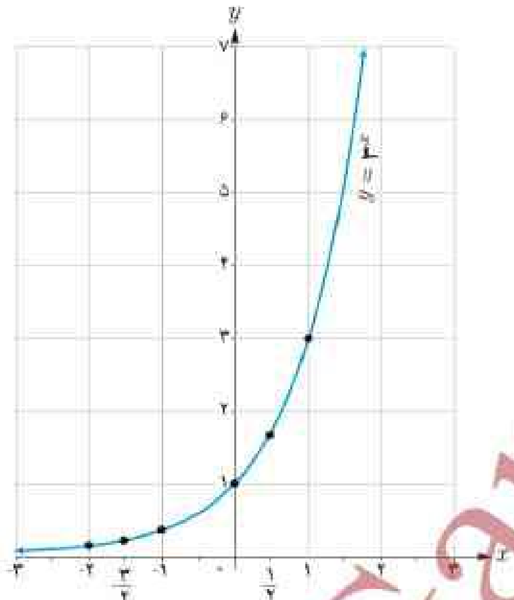
۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین 2^x و 2^y برقرار است؟

در حالت کلی رابطهٔ مقابل برقرار است . $x<y \Rightarrow 2^x < 2^y$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

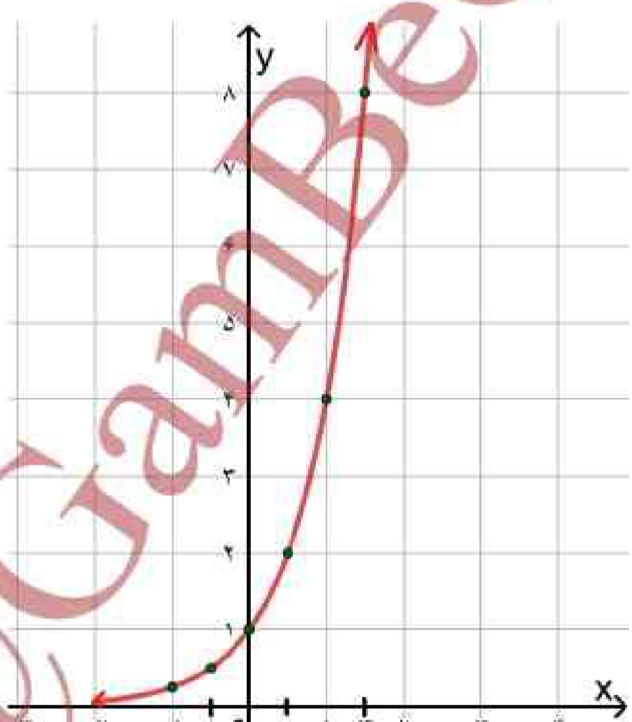
کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.



x	$y=۳^x$
-۲	۰/۱۱
$-\frac{۳}{۲}$	۰/۱۹
-۱	۰/۳۳
۰	۱
$\frac{۱}{۲}$	۱/۷۳
۱	۳

۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۴^x$ را رسم کنید.



x	$y=۴^x$
...۱-...	$\frac{۱}{۴}$
$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۰	...۱...
$\frac{۱}{۲}$	...۲...
۱	...۴...
$\frac{۳}{۲}$	۸

۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید.

دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است .یعنی $D=(-\infty,+\infty)$

برد هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ تر از صفر است . یعنی $R=(0,+\infty)$

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5}$ > $3^{\frac{7}{3}}$ ب) $4^{\sqrt{7}}$ > $4^{\sqrt{5}}$

با توجه به نمودار این دو تابع ، هر چقدر که مقدار x یعنی توان عدد های ۳ و ۴ افزایش پیدا کند مقدار y یعنی 3^x و 4^x هم افزایش پیدا می کنند .

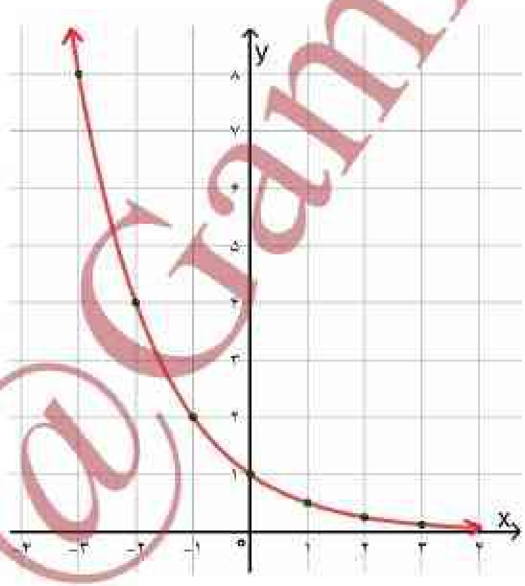
۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) 3^x < 3^y ب) 4^x < 4^y

فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	8	4	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور yها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(0,1)$

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,+\infty)$

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{1}{2})^{0/5} > (\frac{1}{2})^{1/5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{2})^{4}$ پ) $(\frac{1}{2})^{4} < (\frac{1}{2})^{3}$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^y$ و $(\frac{1}{2})^x$ وجود دارد؟

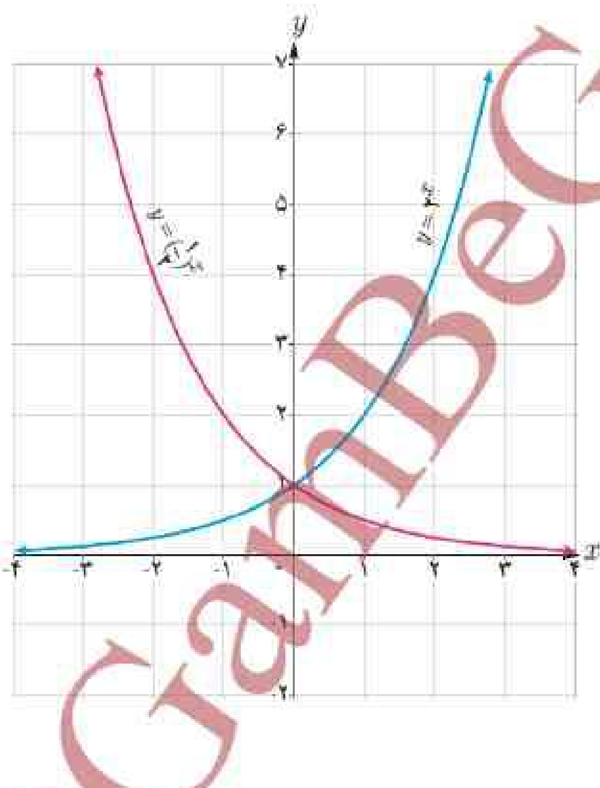
در حالت کلی داریم : $x < y \Rightarrow (\frac{1}{2})^x > (\frac{1}{2})^y$

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟

نمودار های این دو تابع نسبت به محور y ها قرینه اند.



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=2^x$

به تابع با ضابطهٔ $y = 2^{-x}$ یا همان $y = (\frac{1}{2})^x$

دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

دامنه و برد این دو تابع باهم برابرند. یعنی :

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,+\infty)$

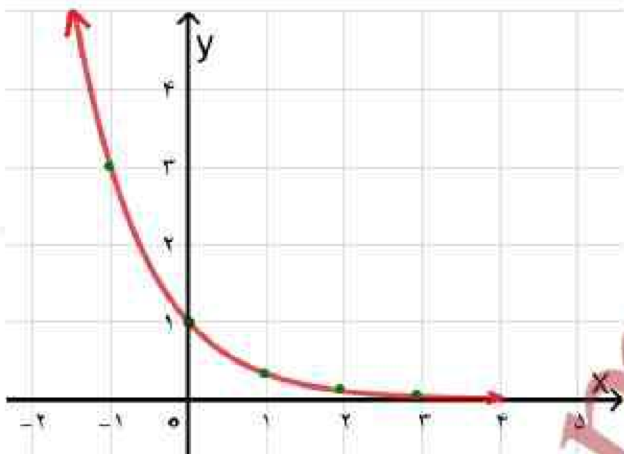
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید

$y = 3^x$, $y=(\frac{1}{3})^x$ و $y=(\frac{2}{5})^x$, $y=(\frac{5}{2})^x$

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>0$ و $a\neq 1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید. جدول زیر را تکمیل کنید.



x	$y=(\frac{1}{3})^x$
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

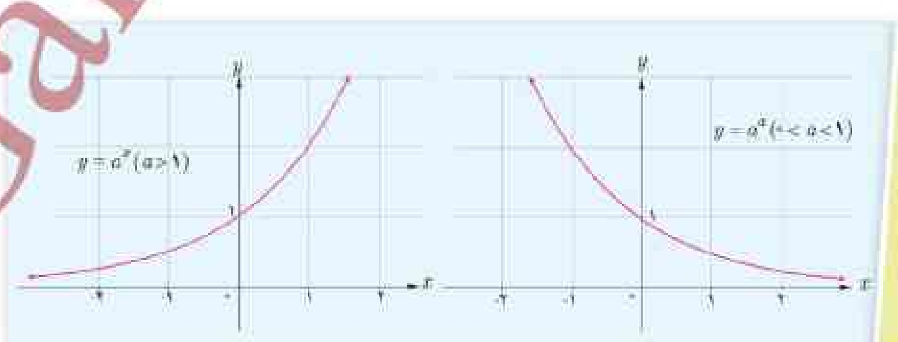
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>1$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(0,+\infty)$ است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($0<a<1$) ... $\mathbb{R}$ ... و برد آن بازهٔ $(0\ ,\ +\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را در نقطهٔ ... $(0,1)$ ... قطع می کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی کند.

۴ این دو تابع، یک به یک ... هستند ... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در ... یک ... نقطه قطع می کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $۳^{۲x-۳}=۸۱ \to ۳^{۲x-۳}=۳^۴ \to ۲x-۳=۴ \to x=\frac{۷}{۲}$

ب) $۴^{۲x-۱}=۸^{x+۱} \to (۲^۲)^{۲x-۱}=(۲^۳)^{x+۱} \to ۴x-۲=۳x+۳ \to x=۵$

پ) $۵^{۳n-۱}=۱۲۵^{۲n+۱} \to ۵^{۳n-۱}=۵^{۶n+۳} \to ۳n-۱=۶n+۳ \to n=-\frac{۴}{۳}$

تمرین

۱) کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

پ) $y=(۰/۱)^x$ ب) $y=x^۲$ الف) $y=۲x^۲-۳x+۱$

ج) $y=\sqrt{x-۱}$ ث) $y-۳x=۲$ ت) $y=(\frac{۳}{۲})^x$

قسمت های (پ) و (ت) تابع نمایی هستند.

۲) کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ قرار دارند؟

الف) $(۱,۰)$ — بنا بر این نقطهٔ $(۰,۱)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow ۰\neq ۳^۱$

ب) $(۳,۱)$ — بنا بر این نقطهٔ $(۳,۱)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow ۱\neq ۳^۳$

پ) $(۰,۱)$ — بنا بر این نقطهٔ $(۰,۱)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow ۱=۳^۰$

ت) $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ — بنا بر این نقطهٔ $(\sqrt{۳},\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳}\neq ۳^{\sqrt{۳}}$

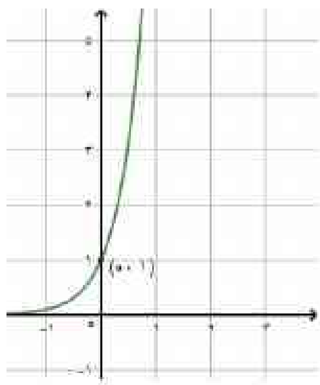
ث) $(۱,۳)$ — بنا بر این نقطهٔ $(۳,۱)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow ۳=۳^۱$

ج) $(-۱,\frac{۱}{۳})$ — بنا بر این نقطهٔ $(-۱,\frac{۱}{۳})$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=۳^x \Rightarrow \frac{۱}{۳}=۳^{-۱}$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۵})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۵^x$ قرار دارد.

الف) صحیح است $(\frac{۱}{۲}, \sqrt{۵}) \Rightarrow \sqrt{۵} = ۵^{\frac{۱}{۲}}$



ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۱۰^x$ با محور yها، نقطهٔ $(۰,۱۰)$ است.

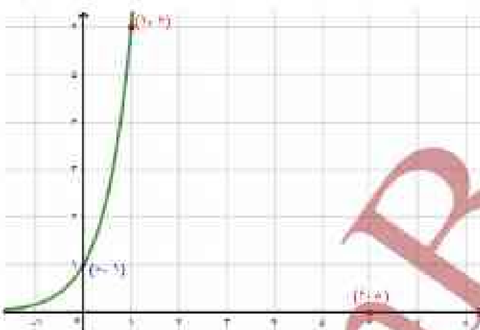
راه اول: نمودار $y = ۱۰^x$ را رسم می کنیم با توجه به نمودار گزاره غلط است زیرا از نقطهٔ $(۰,۱)$ عبور می کند.

راه دوم : محل برخورد با تابع با ضابطهٔ $y = ۱۰^x$ نقطهٔ $(۰,۱)$ است .

$x = ۰ \Rightarrow y = (۱۰)^۰ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow (۰,۱)$

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y = ۲^x$ و $y = x^۲$ مساوی‌اند.

دامنهٔ هردو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است . بنا براین گزاره صحیح است.



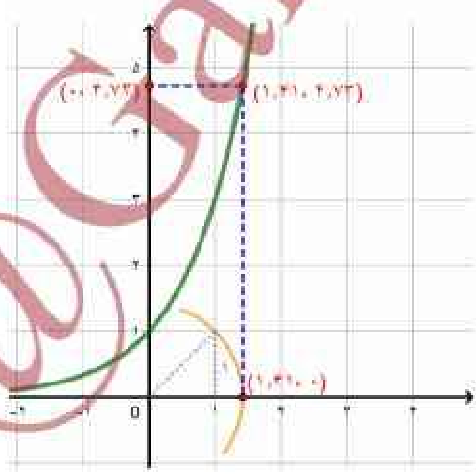
ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۶^x$ با محور xها، نقطهٔ $(۶,۰)$ است.

نمودار تابع $y = ۶^x$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل نقطهٔ $(۶,۰)$ روی نمودار نیست . بنا براین گزاره صحیح نیست.

نکته : این نمودار محور x ها را قطع نمی کند.

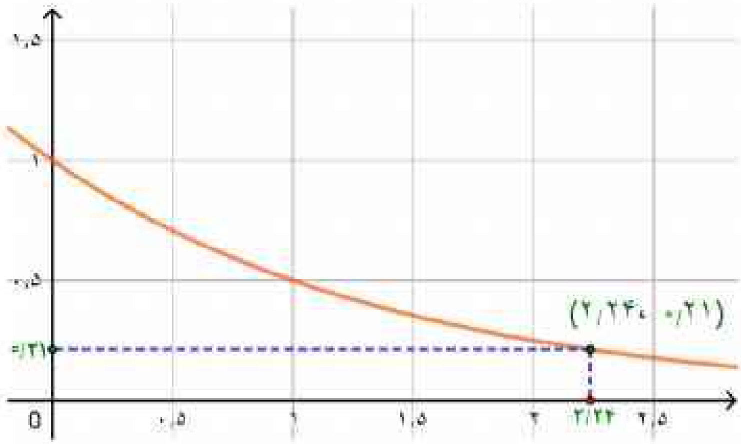
۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۳^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $۳^{\sqrt{۲}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

x	۰	۱	$\sqrt{۲} = ۱/۴۱$	۲
y	۱	۳	$۳^{\sqrt{۲}} = ۴/۷۳$	۹



ابتدا $\sqrt{۲}$ را به کمک رسم روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار رسم شده مقدار تقریبی $۳^{\sqrt{۲}}$ برابر است با ۴/۷۳ .

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.



مقدار تقریبی $\sqrt{۵}=۲/۲۴$ را روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار مقدار تقریبی $(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{۵}}$ برابر است با ۰/۲۱ .

۵ فرض کنیم $f(x)=۳^x$, $g(x)=(\frac{۱}{۱۶})^x$ و $h(x)=۱۰^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۳^x \Rightarrow f(۳)=۳^۳=۲۷$

ب) $g(x)=(\frac{۱}{۱۶})^x \Rightarrow g(-۱)=(\frac{۱}{۱۶})^{-۱}=۱۶$

پ) $h(x)=۱۰^x \Rightarrow h(-۲)=۱۰^{-۲}=\frac{۱}{۱۰^۲}=\frac{۱}{۱۰۰}=۰/۰۱$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

برای حل معادلات نمایی ابتدا هر دو طرف تساوی را هم پایه می کنیم

الف) $۲^{۳n-۲}=\frac{۱}{۳۲^۲} \Rightarrow ۲^{۳n-۲}=(۲^۵)^{-۲} \Rightarrow ۲^{۳n-۲}=۲^{-۱۰} \Rightarrow ۳n-۲=-۱۰ \Rightarrow n=-\frac{۸}{۳}$

ب) $۹^{۳y-۳}=۲۷^{y+۱} \Rightarrow (۳^۲)^{۳y-۳}=(۳^۳)^{y+۱} \Rightarrow ۳^{۶y-۶}=۳^{۳y+۳} \Rightarrow ۶y-۶=۳y+۳ \Rightarrow ۳y=۹ \Rightarrow y=۳$

پ) $۴^{۳x+۲}=\frac{۱}{۶۴^۳} \Rightarrow ۴^{۳x+۲}=(۴^۳)^{-۳} \Rightarrow ۴^{۳x+۲}=۴^{-۹} \Rightarrow ۳x+۲=-۹ \Rightarrow ۳x=-۱۱ \Rightarrow x=\frac{-۱۱}{۳}$

ت) $۹^x=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow (۳^۲)^x=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow ۳^{۲x}=۳^{x^۲-۴x} \Rightarrow ۲x=x^۲-۴x \Rightarrow x^۲-۶x=۰$

$\Rightarrow x(x-۶)=۰ \Rightarrow x=۰ \ , \ x=۶$

ث) $(\frac{۳}{۵})^{x+۱}=\frac{۲۵}{۹} \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۵}{۳})^۲ \Rightarrow (\frac{۳}{۵})^{x+۱}=(\frac{۳}{۵})^{-۲} \Rightarrow x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳$

درس دوم

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و ... مشهود است.

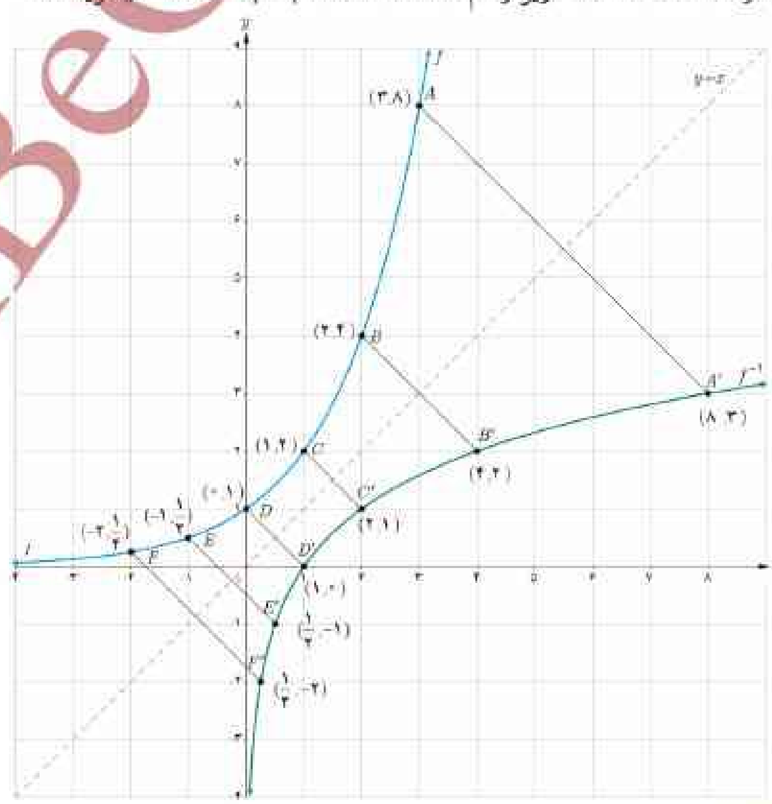
خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.



در فیزیک مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I_0 شدت صوت مبناست که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است).

$\beta=\log_{10} I$

صدا	تراز شدت صوت dB
شدت صوت مبنا	۰
نفس کشیدن	۱۰
برگ درختان در نسیم	۲۰
صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری	۴۰
همهمه در فروشگاه	۶۰
سروصدای خودروها در خیابان شلوغ	۷۰
آستانهٔ دردناکی (برای بسامد $1000 Hz$)	۱۲۰
مسلسل	۱۳۰
غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن	۱۴۰
راکت فضایی، در موقع بلند شدن	۱۷۰

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f = \mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f = (۰,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع f^{-1} مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی ($D_{f^{-1}} = (۰,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$) است.

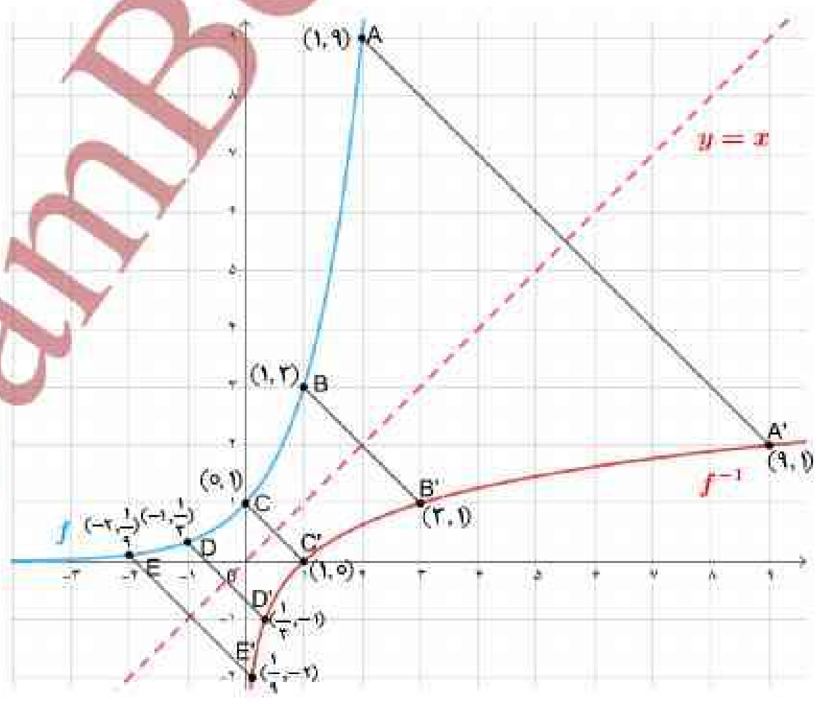
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-۲) = \frac{۱}{۴}$	$f(-۱) = \frac{۱}{۲}$	$f(۰) = ۱$	$f(۲) = ۴$
$f^{-۱}(\frac{۱}{۴}) = -۲$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۲}) = -۱$	$f^{-۱}(۱) = ۰$	$f^{-۱}(۴) = ۲$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(-۲)=\frac{۱}{۹}$	$f(۰)=۱$	$f(۱)=۳$	$f(۲)=۹$
$f^{-1}(\frac{۱}{۹})=-۲$	$f^{-1}(۱)=۰$	$f^{-1}(۳)=۱$	$f^{-1}(۹)=۲$

۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f=\mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f=(۰,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع f^{-1} مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی($D_{f^{-1}}=(۰,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$) است.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

اگر $(a\in\mathbb{R},\ a>۰,\ a\neq۱)$ $f(x)=a^x$ آنگاه $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(۰,+\infty)$

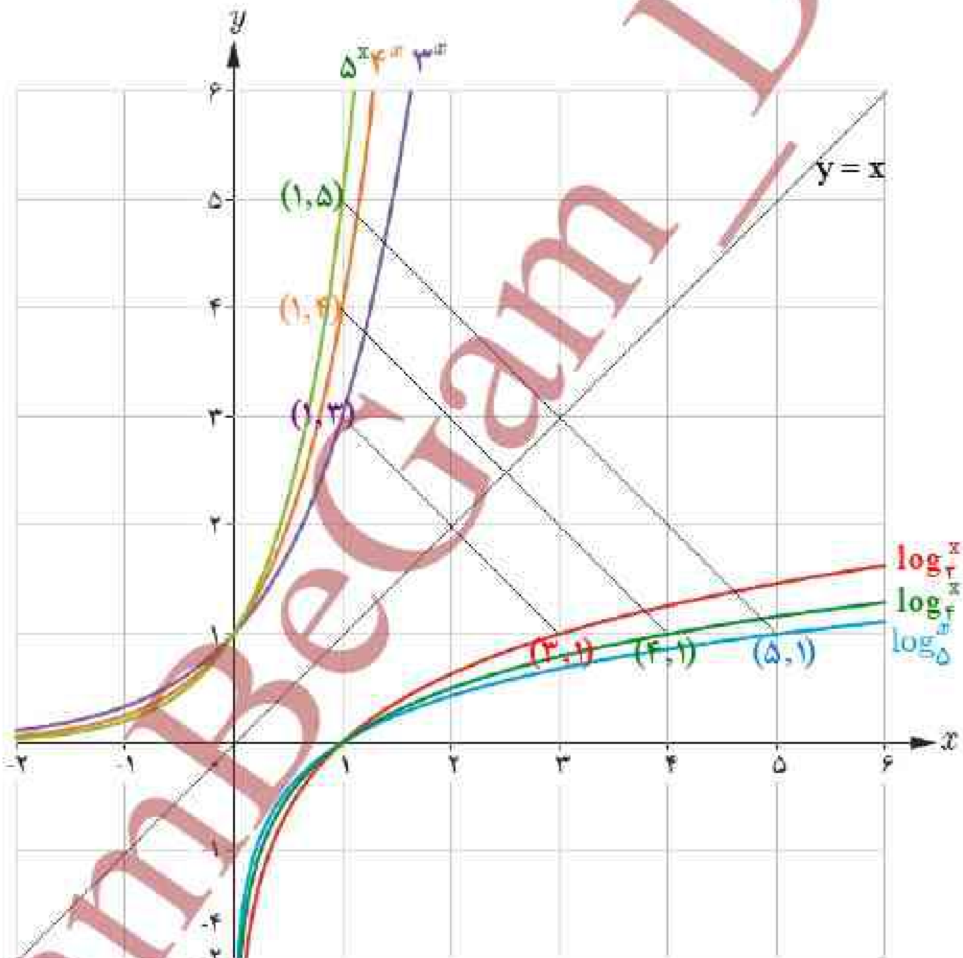
اگر $(a\in\mathbb{R},\ a>۰,\ a\neq۱)$ $f^{-1}(x)=\log_a x$ آنگاه $D_{f^{-1}}=(۰,+\infty)$ و $R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq۱)$ داریم:

$$f(x)=a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\log_a x$$

کار در کلاس

در شکل زیر ، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

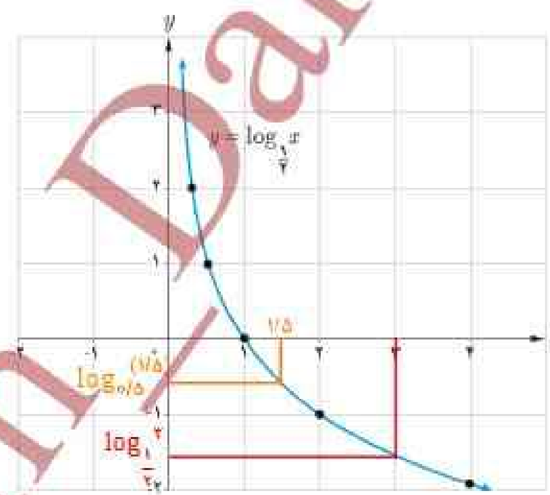


کار در کلاس

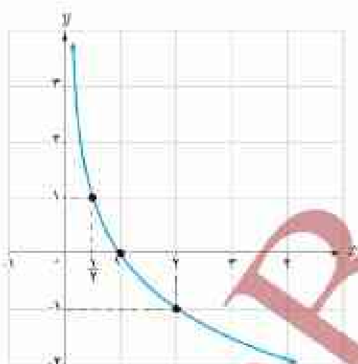
نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} ۳$ ...... $-۲ < \log_{\frac{1}{2}} ۳ < -۱$ ......

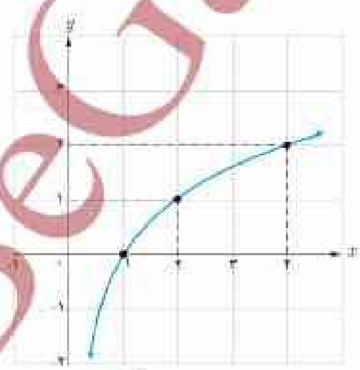
ب) $\log_{۰/۵}(۱/۵)$ ...... $-۱ < \log_{۰/۵}(۱/۵) < ۰$ ......



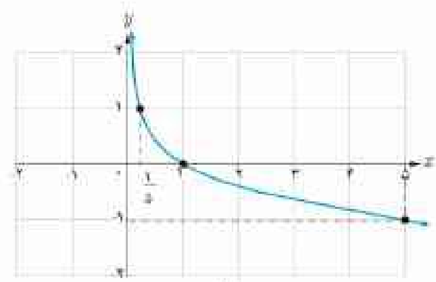
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



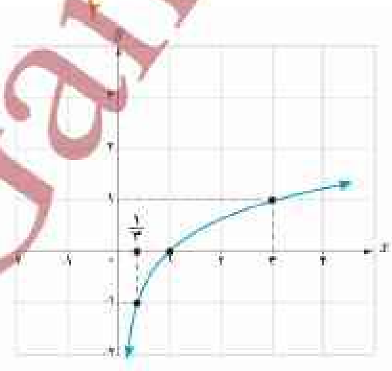
(۱) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



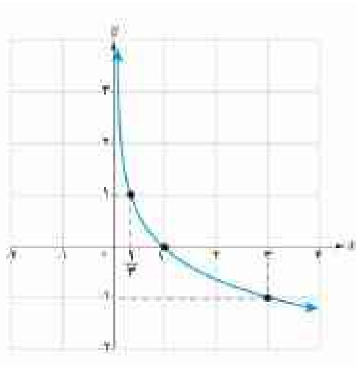
(۲) $y = \log_{۲} x$



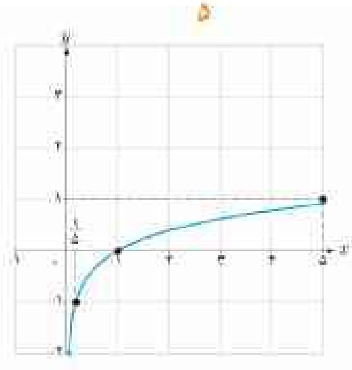
(۳) $y = \log_{\frac{1}{5}} x$



(۴) $y = \log_{۳} x$



(۵) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$



(۶) $y = \log_{۵} x$

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0<a<1)$، بازه **$(0,+\infty)$** و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۳ نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ **$x = 1$** قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

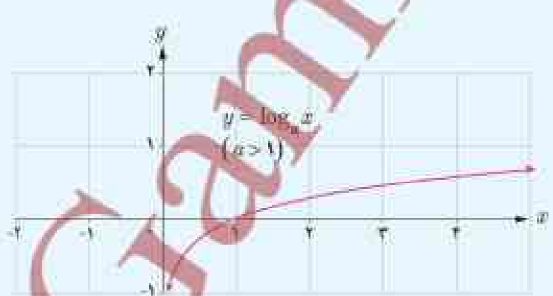
۴ این دو تابع، یک‌به‌یک **هستند**؛ زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کند.

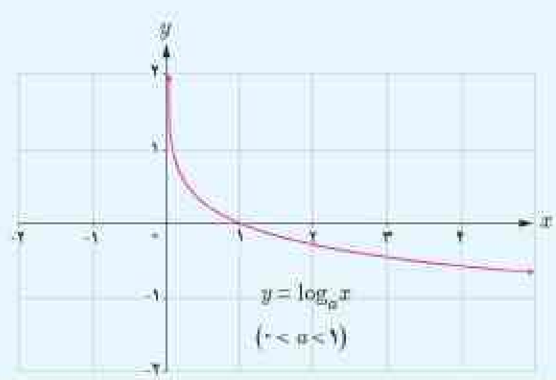
۵ وارون تابع نمایی، تابع **لگاریتمی** است و وارون تابع لگاریتمی، تابع **نمایی** است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq 1)$ باشد، داریم: $a^0 = 1$، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

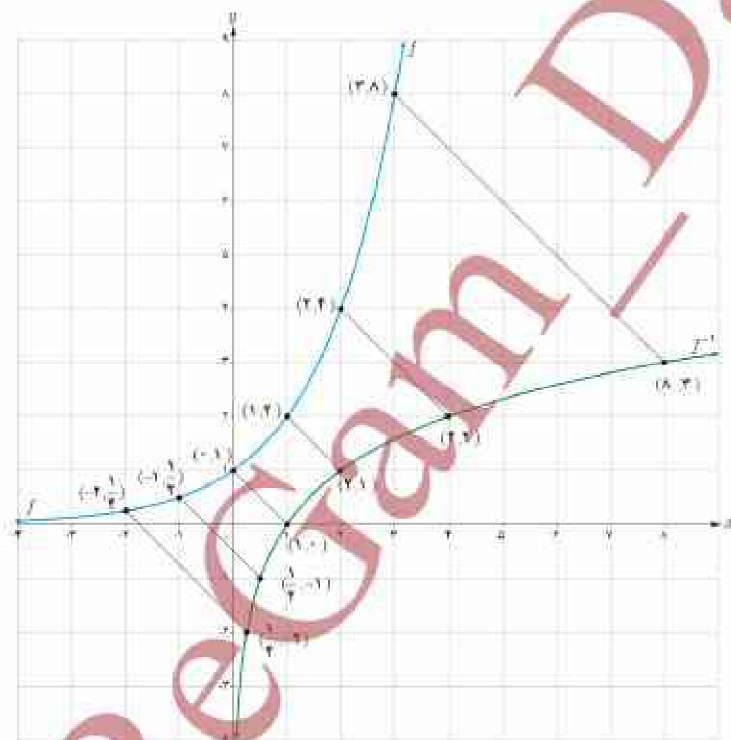




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و $f^{-1}(x)=\log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$
لگاریتمی	$\log_2 8=3$	$\log_2 4=2$	$\log_2 2=1$	$\log_2 1=0$	$\log_2\frac{1}{2}=-1$	$\log_2\frac{1}{4}=-2$

به‌طور کلی اگر $x=a^y$ آن‌گاه $y=\log_a x$ و به عکس. $(x>0\ ,\ a\neq 1\ ,\ a>0)$

$$b^a=c \Leftrightarrow \log_b c=a \qquad (c>0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$\log_{۸}۱ = \quad \to ۸ = ۱$	$۱۰^{۳} = ۱۰۰۰ \to \log_{۱۰}۱۰۰۰ = ۳$
$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶}) = -۴ \to ۲^{-۴} = \frac{۱}{۱۶}$	$۹^{\frac{۱}{۲}} = ۳ \to \log_{۹}۳ = \frac{۱}{۲}$
$\log_{۵}۱۲۵ = ۳ \to ۵^{۳} = ۱۲۵$	$۴^{۳} = ۶۴ \to \log_{۴}۶۴ = ۳$
$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷ = -۳ \to (\frac{۱}{۳})^{-۳} = ۲۷$	$۲^{۵} = ۳۲ \to \log_{۲}۳۲ = ۵$
$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵ = -۳ \to (\frac{۱}{۵})^{-۳} = ۱۲۵$	$۲^{-۳} = \frac{۱}{۸} \to \log_{۲}\frac{۱}{۸} = -۳$
$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶ = -۴ \to (\frac{۱}{۲})^{-۴} = ۱۶$	$۳^{-۴} = \frac{۱}{۸۱} \to \log_{۳}\frac{۱}{۸۱} = -۴$

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq ۱)$ باشد، همواره داریم :

$$\log_a ۱ = ۰ \quad و \quad \log_a a = ۱ \quad و \quad \log_a (\frac{۱}{a}) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از این‌رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم : $\log_c ab = m + n$ و در نتیجه :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال : فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳ \times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم :

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال : اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ ، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵=\log\frac{۱۰}{۲}=\log ۱۰-\log ۲=۱-\log ۲\simeq ۱-۰/۳=۰/۷$$

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :

«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a=۱۵۵۰۰(۵-\log P)$ است ، که در آن a ارتفاع برحسب متر و P نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲=\log(۳\times ۴)=\log ۳+\log ۲^۲=\log ۳+۲\log ۲\simeq ۰/۴۸+۰/۶=۱/۰۸$

۲) $\log ۰/۷۵=\log\frac{۳}{۴}=\log ۳-\log ۴=\log ۳-\log ۲^۲=\log ۳-۲\log ۲\simeq ۰/۴۸-۰/۶=۰/۴۲$

۳) $\log\sqrt{۵}=\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}(\log ۱۰-\log ۲)\simeq\frac{۱}{۲}(۱-۰/۳)=۰/۳۵$

۴) $\log\frac{۲۵}{۱۸}=\log\frac{۱۰۰}{۷۲}=\log ۱۰۰-\log ۷۲=\log ۱۰-\log(۲^۳\times ۳^۲)=\log ۱۰۰-(\log ۲^۳+\log ۳^۲)$

$=\log ۱۰۰-(۳\log ۲+۲\log ۳)\simeq ۲-(۰/۹+۰/۹۶)=۰/۱۴$

۵) $\log\sqrt[۳]{۶}=\log(۲\times ۳)^{\frac{۱}{۳}}=\frac{۱}{۳}(\log ۲+\log ۳)\simeq\frac{۱}{۳}(۰/۳+۰/۴۸)=۰/۲۶$

۶) $\log\frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}}=\log\sqrt{۲۷}-\log\sqrt[۴]{۵}=\log ۳^{\frac{۳}{۲}}+\log ۵^{\frac{۱}{۴}})=\frac{۳}{۲}\log ۳+\frac{۱}{۴}\log ۵\simeq\frac{۳}{۲}(۰/۴۸)+\frac{۱}{۴}(۰/۷)=۰/۸۹۵$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند :

$$\log_4 x+1 = 3 \quad , \quad \log_2 x = \log_2 7 \quad , \quad \log_5 x+\log_5(x-1) = \log_5 12$$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

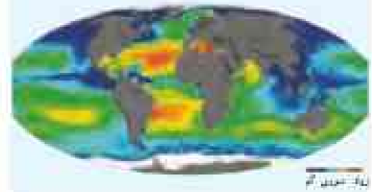
به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq 1)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ (x, y>0)$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و به عکس، اگر $x=y \ (x , y>0)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از :

$$S(x) = 31/5+1/1\log(x+1)$$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.



فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 = 9$

۲) $\log_5 (x+6) = \log_5 (2x-3) \rightarrow x+6 = 2x-3 \rightarrow x = 9$

که $x = 9$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳) $\log_5 (x+6)+\log_5 (x+2)=1 \rightarrow \log_5 \left[(x+6)(x+2)\right] = 1$

$\rightarrow (x+6)(x+2) = 5 \rightarrow x^2+8x+12 = 5$

$\rightarrow x^2+8x+7 = 0 \rightarrow (x+7)(x+1) = 0 \rightarrow x=-7$ یا $x = -1$

توجه کنید که $x=-7$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x=-1$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۴ $\log_4(x+2)=\log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=6$

۵ $3\log_3 x=-\log_3 27 \rightarrow \log_3 x^3=\log_3 \frac{1}{27} \rightarrow x^3=\frac{1}{27} \rightarrow x=\frac{1}{3}$

۶ $\log(x+1)-\log(x-3)=3 \rightarrow \log\frac{x+1}{x-3}=3 \rightarrow \log\frac{x+1}{x-3}=\log 1000$

$\rightarrow \frac{x+1}{x-3}=1000 \rightarrow x+1=1000x-3000$

$\rightarrow 3001=999x \rightarrow x=3/004$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_5 x=3 \rightarrow x=5^3 \rightarrow x=125$

۲ $\log_2(2x+1)=3 \rightarrow 2x+1=2^3 \rightarrow 2x+1=8 \rightarrow 2x=7 \rightarrow x=3/5$

۳ $\log_2(x+1)+\log_2(x+4)=2 \rightarrow \log_2(x+1)(x+4)=\log_2 4 \rightarrow (x+1)(x+4)=4$

$\rightarrow x^2+5x+4=4 \rightarrow x^2+5x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$

توجه کنید که $x=-5$ قابل قبول نیست؛از این رو تنها جواب قابل قبول $x=0$ است.

۴ $\log_3 243=2x+1 \rightarrow 243=3^{2x+1} \rightarrow 3^5=3^{2x+1} \rightarrow 2x+1=5 \rightarrow x=2$

۵ $\log_3(x-1)=4 \rightarrow x-1=3^4 \rightarrow x=81+1 \rightarrow x=82$

۶ $\log(2x)-\log(x-3)=1 \rightarrow \log(\frac{2x}{x-3})=\log 10 \rightarrow \frac{2x}{x-3}=10$

$\rightarrow 2x=10x-30 \rightarrow 8x=30 \rightarrow x=\frac{30}{8}=3/75$

۷ $2\log_4(x-1)=3 \rightarrow \log_4(x-1)^2=\log_4 64 \rightarrow (x-1)^2=64$

$\rightarrow \begin{cases} x-1=8 \rightarrow x=9 \\ x-1=-8 \rightarrow x=-7 \end{cases}$

توجه کنید که $x=-7$ قابل قبول نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$)

$$\log_c abd = \log_c (ab)d = \log_c (ab) + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$$

ب) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (a و b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ و b)

اگر $x = \log_b a$ آنگاه داریم: $b^x = a$ حالا از دو طرف این تساوی لگاریتم در مبنای c می گیرم:

$$b^x = a \rightarrow \log_c b^x = \log_c a \rightarrow x\log_c b = \log_c a$$

$$\rightarrow x = \frac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{x=\log_b a} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ) $a^{\log_a b} = b$ (a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a \neq 1$)

اگر $\log_a b = x$ آنگاه داریم:

$$b = a^x \xrightarrow{x=\log_a b} b = a^{\log_a b}$$

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

با توجه به رابطهٔ قسمت (ب) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \end{array}\right\} \rightarrow \log_b a \times \log_a b = \frac{\cancel{\log_c a}}{\cancel{\log_c b}} \times \frac{\cancel{\log_c b}}{\cancel{\log_c a}} = 1 \rightarrow \log_b a \times \log_a b = 1$$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49} = \log_7 (49)^{\frac{1}{5}} = \log_7 (7^2)^{\frac{1}{5}} = \log_7 (7)^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\log_7 7 = \frac{2}{5}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$

پ) $-\log_5 125 = -\log_5 (5)^3 = -3\log_5 5 = -3$

ت) $3\log_{10}\sqrt{1000} = 3\log_{10}\sqrt{10^3} = 3\log_{10}(10)^{\frac{3}{2}} = 3\times\frac{3}{2}\log_{10} 10 = \frac{9}{2}$

۳ اگر $f(x) = 3 - 2\log_4(\frac{x}{2} - 5)$ ، مقدار $f(42)$ را به‌دست آورید.

$f(42) = 3 - 2\log_4(\frac{42}{2} - 5) = 3 - 2\log_4 16 = 3 - 2\log_4 (4)^2 = 3 - 2\times 2\log_4 4 = 3 - 4 = -1$

$\rightarrow f(42) = -1$

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(2, 2)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

$f(2) = 2 \rightarrow \log_a 2 = 2 \rightarrow a^2 = 2 \rightarrow a = \sqrt{2}\ ,\ a = -\sqrt{2}$

جون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt{2}$ غیر قابل قبول است.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2}, -4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

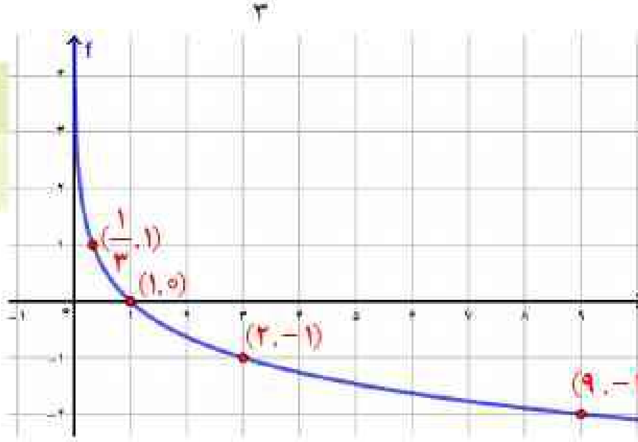
$f(\frac{1}{2}) = -4 \rightarrow \log_a(\frac{1}{2}) = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{a^4} = \frac{1}{2} \rightarrow a^4 = 2 \rightarrow a = \sqrt[4]{2}\ ,\ a = -\sqrt[4]{2}$

جون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a = -\sqrt[4]{2}$ غیر قابل قبول است.

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کنید.

x	$\frac{1}{3}$	۱	۳	۹
y	۱	۰	-1	-2

به کمک جدول نقاط را در صفحه پیدا می کنیم و به هم وصل می کنیم



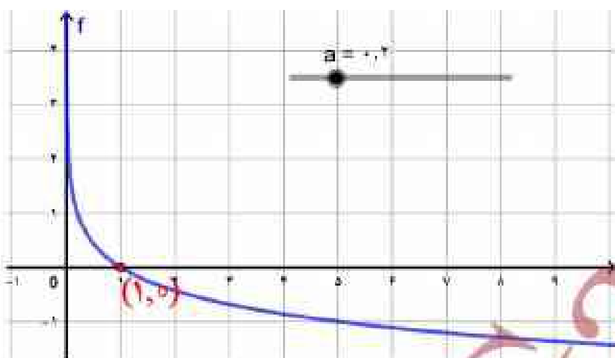
۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

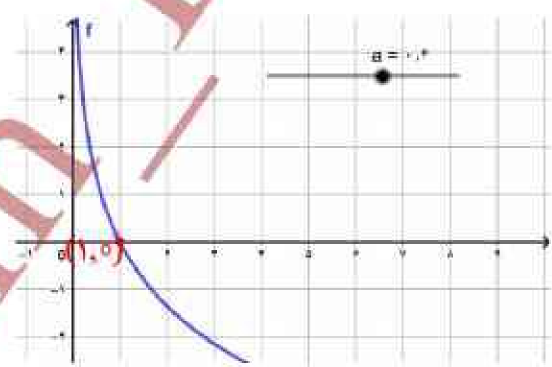
الف) اگر $y=\log_a x$ ، آنگاه $a^x=y$.

نادرست است زیرا به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس ($x>0 , a\neq 1 , a>0$)

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ ($0<a<1$) از نقطهٔ (۱, ۰) عبور می‌کند.

راه اول : نمودار تابع را رسم می کنیم و بررسی می کنیم که نقطهٔ (۱,۰) روی نمودار هست یا نه .





راه دوم : می توانیم به جای x عدد ۱ را قرار دهیم و سپس مقدار y را به دست آوریم .

$x=0 \to \log_a 1=0 \to y=0$

بنا براین نمودار تابع با ضابطهٔ $\log_a x = y$ ($0<a<1$) از نقطهٔ (۱,۰) عبور می کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

درست است . با توجه به تعریف ص ۱۱۰ کتاب .

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_3(p^2-2)=\log_3 p \to p^2-2=p \to p^2-p-2=0 \to (p-2)(p+1)=0 \to p=2 , p=-1$

توجه کنید که $p=-1$ قابل قبول نیست .

ب) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=1$

$\log_5 (x+1)(x-1)=1 \to (x+1)(x-1)=5^1 \to x^2-1=5 \to x^2=6 \to x=-\sqrt{6} \ , \ x=\sqrt{6}$

توجه کنید که $x=-\sqrt{6}$ قابل قبول نیست .

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

پ) $3\log_4 a-\log_4 5=\log_4 25 \rightarrow \log_4(\frac{a^3}{5})=\log_4 25 \rightarrow \frac{a^3}{5}=25 \rightarrow a^3=125 \rightarrow a^3=5^3 \rightarrow a=5$

ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-21)=-2$

$x^2-21=(\frac{1}{10})^{-2} \rightarrow x^2-21=10^2 \rightarrow x^2-21=100 \rightarrow x^2=121 \rightarrow x=-11 , x=11$

توجه کنید که $x=-11$ قابل قبول نیست

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_{۲} x \rightarrow (۶)$

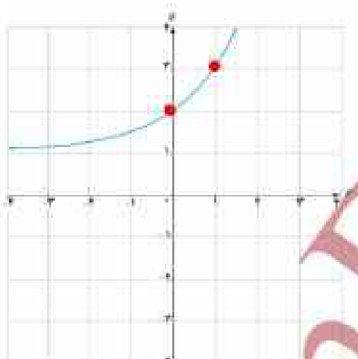
ب) $l(x) = ۲ + \log x \rightarrow (۴)$

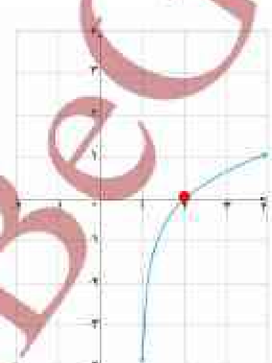
پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^{x} \rightarrow (۳)$

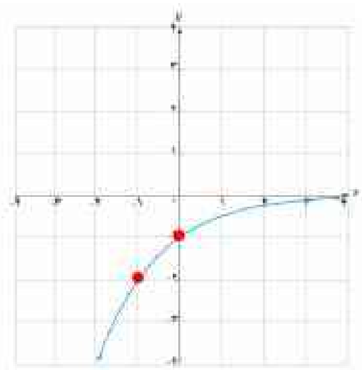
ت) $g(x) = \log(x-۱) \rightarrow (۲)$

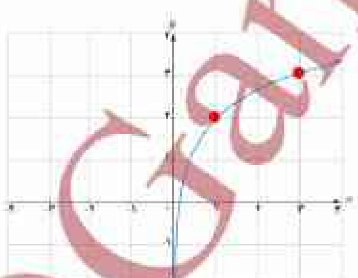
ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)} \rightarrow (۵)$

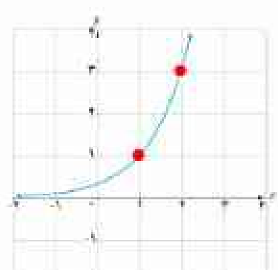
ج) $f(x) = ۲^{x} + ۱ \rightarrow (۱)$

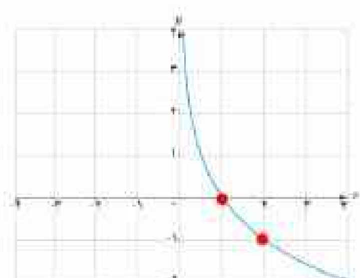

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


(۵)

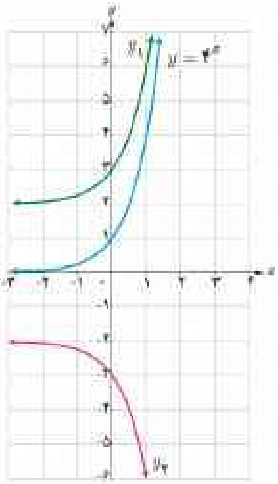

(۶)

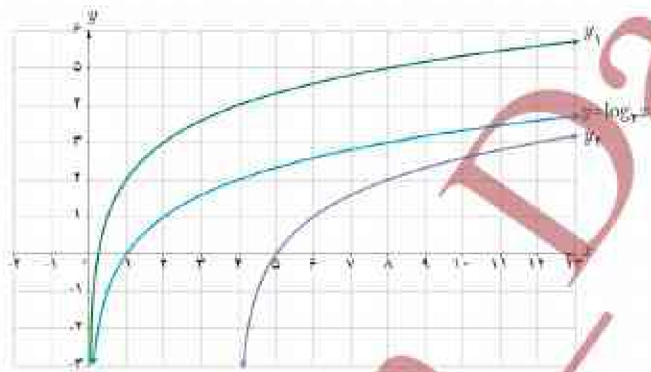
در هر قسمت می توان نقاط کلیدی (●) را در معادله ها امتحان کرد.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کار در کلاس

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





$$y = 4^x \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + 4^x \\ y_2 = -(2 + 4^x) \end{cases}$$

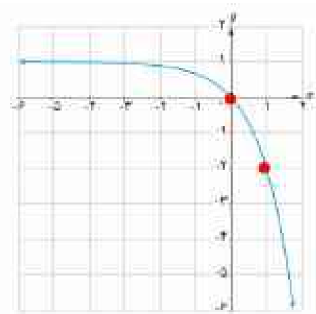
$$y = \log_2 x \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 + \log_2 x \\ y_2 = \log(x - 4) \end{cases}$$

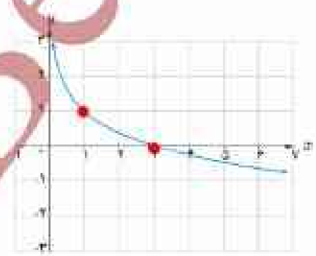
کار در کلاس

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

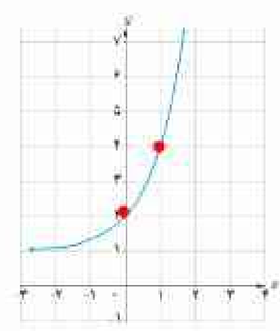
۱) $y = \log_3 (x-1)$ → (ث)　　۲) $y = 3^x + 1$ → (ج)　　۳) $y = 1 - 3^x$ → (پ)

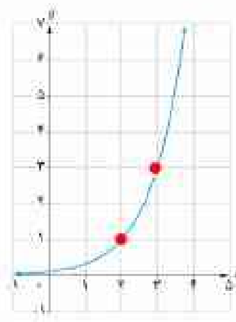
۴) $y = \log_3 x - 1$ → (الف)　　۵) $y = 1 - \log_3 x$ → (ب)　　۶) $y = 3^{(x-2)}$ → (ت)

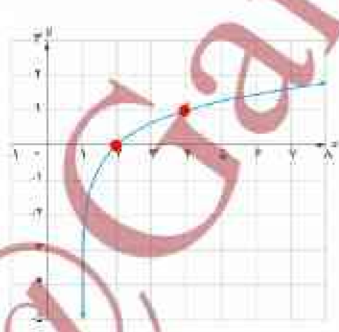

(پ)


(ب)


(الف)


(ج)

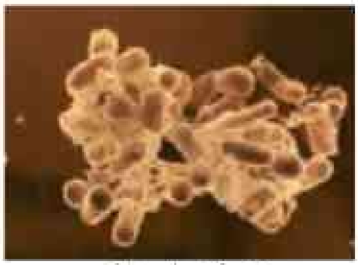

(ت)


(ث)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ ($a\neq ۱$, $a>۰$) مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$p(۳)=۱۰۰\times ۲^۶=۶۴۰۰$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\to$

$\log E=۱۱/۸+۱/۵\,(۶/۶)$

$\to\log E=۲۱/۷ \to E=۱۰^{۲۱/۷}\,Erg$

کار در کلاس

زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ـ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$

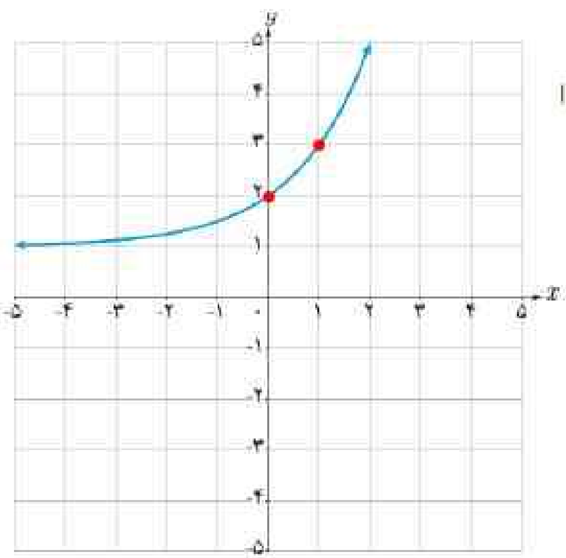
$\to\log E=۱۱/۸+۱/۵(۷/۴)$

$\to\log E=۲۲/۹\to E=۱۰^{۲۲/۹}\,Erg$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.



راه اول : نقاط کلید در این نمودار را مشخص می کنیم که عبارتند از

$(0,2)$ و $(1,3)$ در نتیجه با جایگذاری در ضابطهٔ تابع داریم :

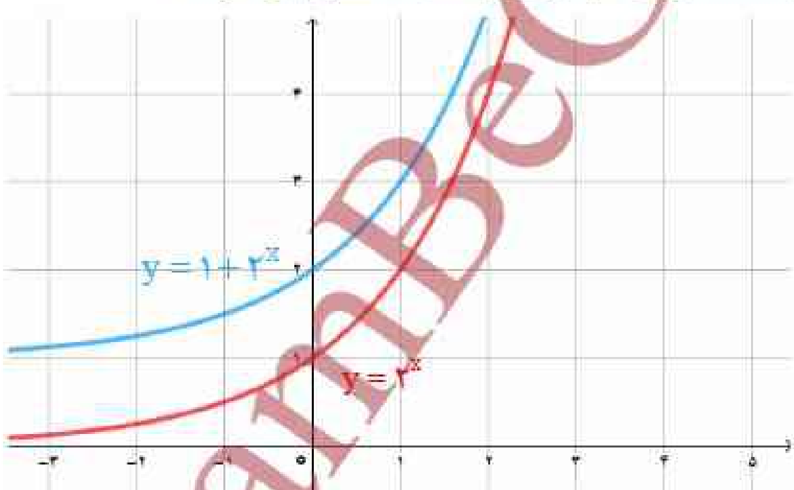
$$\begin{cases} 2 = a + 2^{(0-b)} \rightarrow 2 = a + 2^{-b} \\ 3 = a + 2^{(1-b)} \rightarrow 3 = a + 2^{(1-b)} \end{cases}$$

$$\rightarrow 1 = 2^{(1-b)} - 2^{-b} \rightarrow 1 = 2 \times 2^{-b} - 2^{-b} \rightarrow 1 = 2^{-b}(2-1)$$

$$\rightarrow 2^{-b} = 1 \rightarrow \frac{1}{2^{b}} = 1 \rightarrow 2^{b} = 1 \rightarrow b = 0$$

$$\rightarrow 2 = a + 2^{0} \rightarrow a = 1$$

راه دوم : نمودار $y = 2^{x}$ را در نظر می گیریم اگر این نمودار با توجه به انتقال به اندازهٔ ۱ واحد به سمت بالا روی محور عرض ها انتقال دهیم نمودار داده شده به دست می آید. بنا براین با مقایسه معلوم می شود که :



$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + 2^{x} \\ y = a + 2^{(x-b)} \end{array}\right\} \rightarrow a = 1 \ , \ b = 0$$

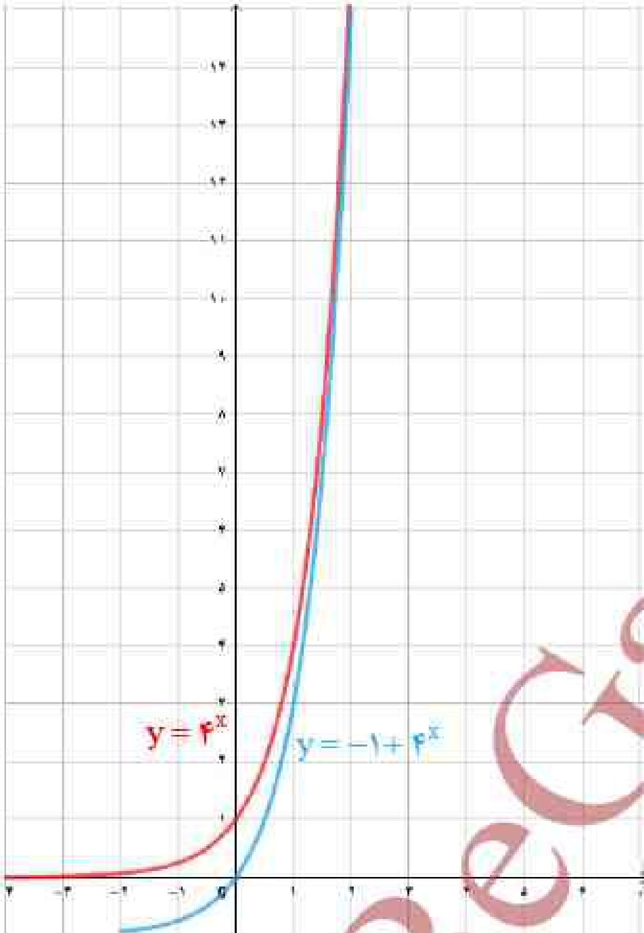
۲ فرض می‌کنیم $g(x)=4^{x}+2$. الف) $g(-1)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=66$، مقدار x چقدر است؟

$$g(-1) = 4^{(-1)} + 2 \rightarrow g(-1) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$66 = 4^{x} + 2 \rightarrow 64 = 4^{x} \rightarrow 4^{3} = 4^{x} \rightarrow x = 3$$

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۴^x - ۱$ را در بازهٔ $[-۲و۲]$ رسم کنید.

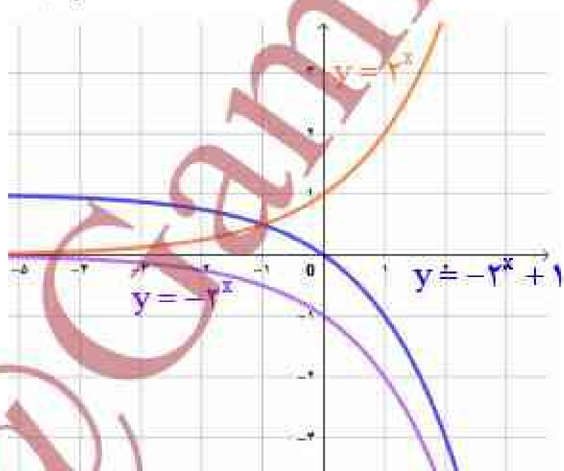
برای رسم از انتقال استفاده می کنیم کافی است نمودار $y = ۴^x$ را یک واحد روی محور عرض ها به سمت پایین انتقال دهیم. و بعد در بازه $[-۲,۲]$ آن را رسم کنیم به این ترتیب داریم :



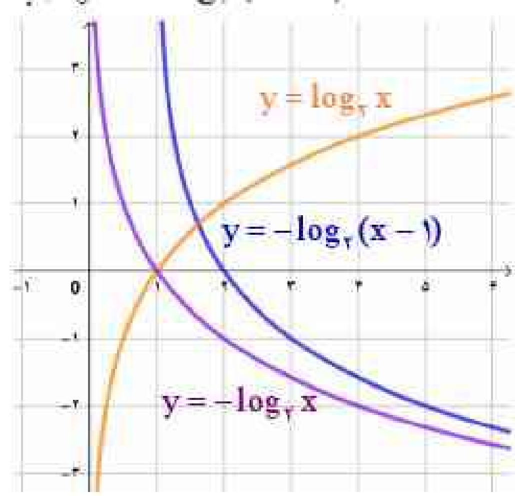
۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طولها رسم می شود.

الف) $y = -۲^x + ۱$



ب) $y = -\log_۲ (x - ۱)$

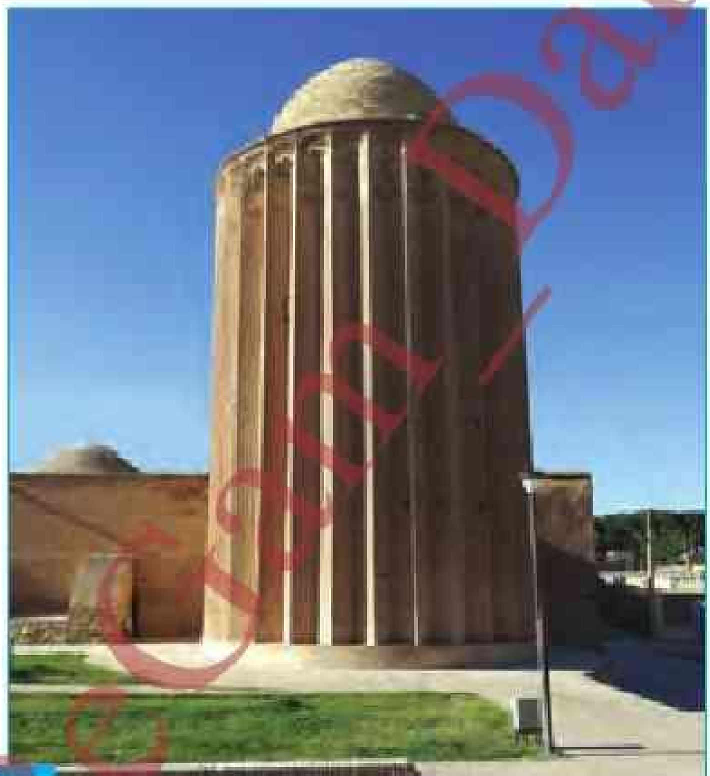


حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

فصل ۶

حد و پیوستگی



برج کاشانه در نزدیکی مسجد جامع شهر بسطام قرار دارد. بسطام در شمال شاهرود و در استان سمنان واقع است. قدمت این برج حدود ۷۰۰ سال است و ارتفاع برج از داخل ۲۴ و از بیرون ۲۰ متر است. فضای داخلی برج ده ضلعی و نمای بیرونی آن سی ضلعی منتظم است.

درس اول — فرایندهای حدی

درس دوم — محاسبه حد توابع

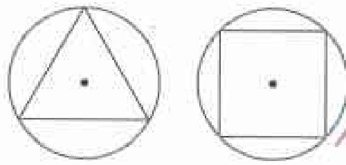
درس سوم — پیوستگی

درس اول

فرایندهای حدی

فعالیت

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

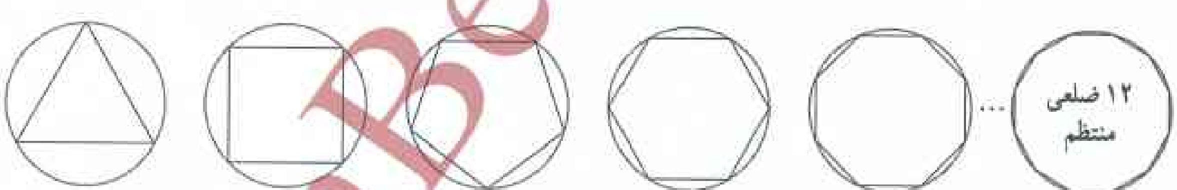


حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ مربع هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟ مساحت آن چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر شود

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ تعداد اضلاع را زیاد کنیم آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ بله

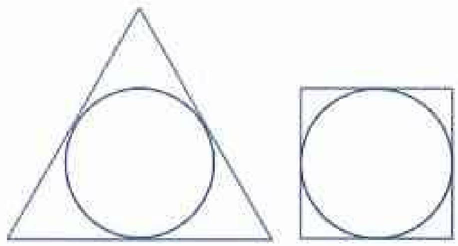
چند ضلعی منتظم محاطی	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲	→	زیاد شدن تعداد اضلاع
مساحت تقریبی	$۱/۳r^2$	$۲r^2$	$۲/۳۸r^2$	$۲/۶r^2$	$۲/۸r^2$	...	$۳r^2$	→	نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت ....



> مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

کار در کلاس

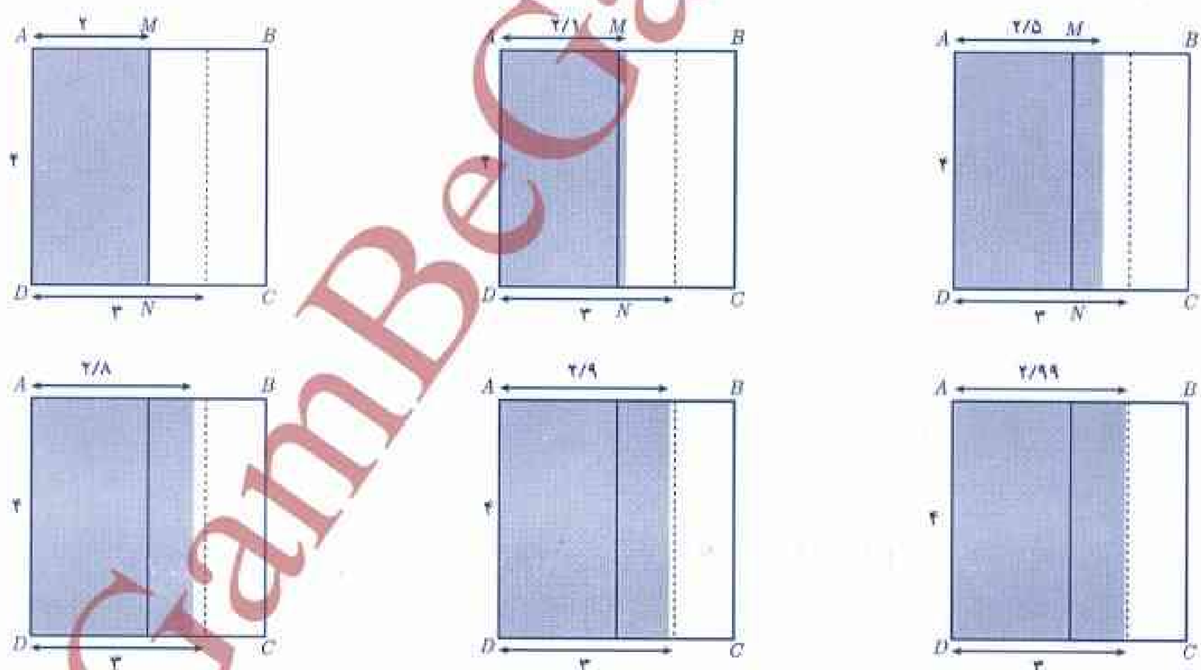
فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).



فعالیت

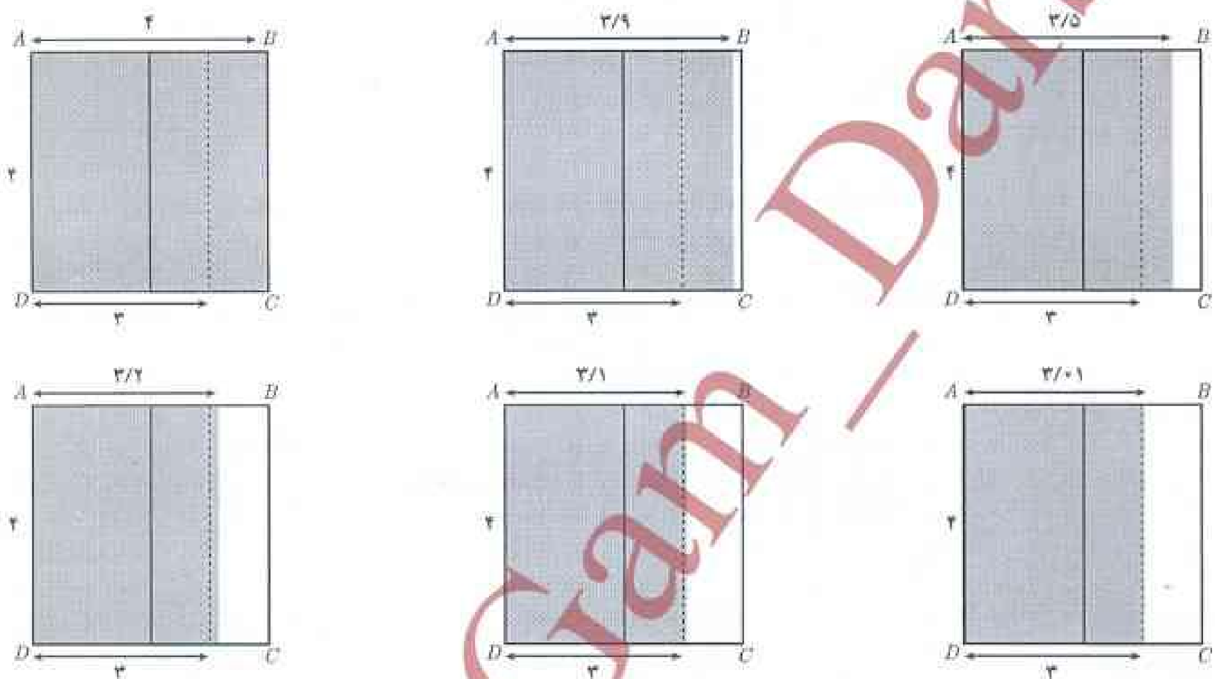
مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ به موازات MN پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ۱۲... نزدیک می‌شود.	۱۱/۹۶	۱۱/۶	۱۱/۲	۱۰/۸	۱۰	۸/۴	۸	مساحت مستطیل رنگی



مشابه همین کار را با شروع از پاره‌خط BC انجام می‌دهیم. پاره‌خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

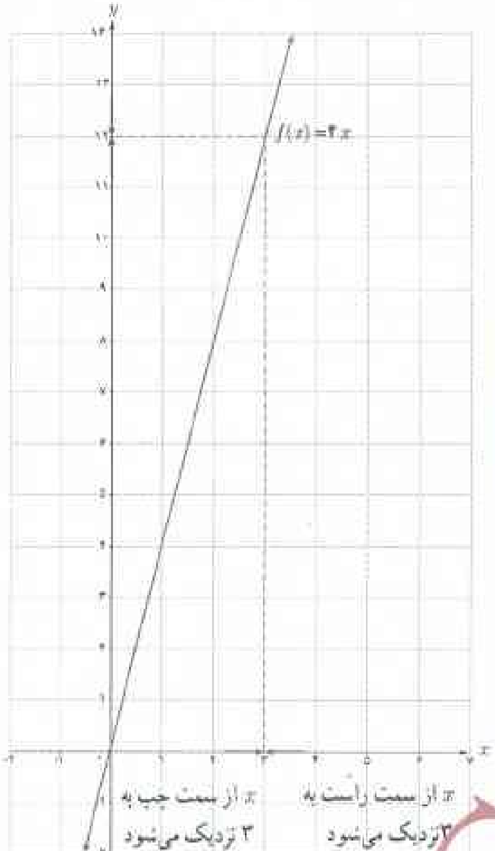
عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ...۱۲... نزدیک می‌شود.	۱۲٫۰۴	۱۲٫۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	مساحت مستطیل رنگی



اگر طول مستطیل‌ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل‌ها را می‌توان به‌صورت تابع $f(x)=4x$ نمایش داد. با این تفاوت که در حالت اول x، با مقادیر کمتر از عدد ۳، به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود و در حالت دوم x، با مقادیر بیشتر از عدد ۳ به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود. این دو وضعیت را به ترتیب با نمادهای $x \to 3^-$ و $x \to 3^+$ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود								x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود					
x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴	۱۰	۱۱٫۲	۱۱٫۲	۱۱٫۹۶	→۱۲←	۱۲٫۰۴	۱۲٫۴	۱۲٫۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶
$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود								$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود					

وقتی $x\to ۳^+$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x\to ۳^-$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطه ۳ بررسی شده است.

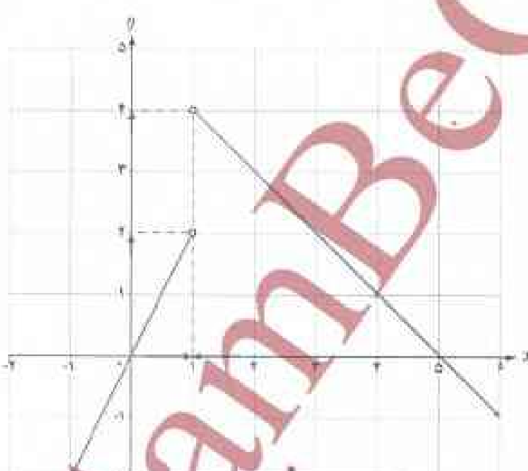


دیدیم که وقتی $x\to ۳^-$ مساحت مستطیل‌ها یا همان مقادیر $f(x)$ به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۱۲$

به طریق مشابه وقتی $x\to ۳^+$ باز هم مساحت مستطیل‌ها به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت هم می گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=۱۲$

اگر حد راست و حد چپ یک تابع در یک نقطه، موجود و برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. در این فعالیت حد راست و حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود، موجود و برابر ۱۲ است. به‌طور خلاصه می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=۱۲$$



مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۱ \\ -x+۵ & x>۱ \end{cases}$ رسم شده است.

جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود								x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود					
x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	→۱←		۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	۱	۱/۶	۱/۸	۱/۹۸	→۲	۴←	۳/۹۹	۳/۹	۳/۸	۳/۵	۳/۲	۳
$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود								$f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود					

به عبارت دیگر حد تابع وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۲ است؛ یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ و حد تابع وقتی x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۴ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. در این مثال حد راست و حد چپ هر دو وجود دارند؛ ولی باهم برابر نیستند. تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد، ولی حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ) وجود دارند.

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a\ ,\ x_0)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به x_0 نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_0\ ,\ b)$ تعریف شده باشد. حد راست f در x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a$ و $b)$ شامل نقطهٔ x_0 (به جز احتمالاً در خود x_0) تعریف شده باشد. حد تابع f در x_0 برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به x_0 نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$.

بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل ارائه در قالب یک تابع‌اند. در بسیاری از مواقع لازم است رفتار یک تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی کنیم. در فعالیت زیر رفتار سه تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی خواهیم کرد تا با مفهوم حد بهتر آشنا شویم.

فعالیت

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند:

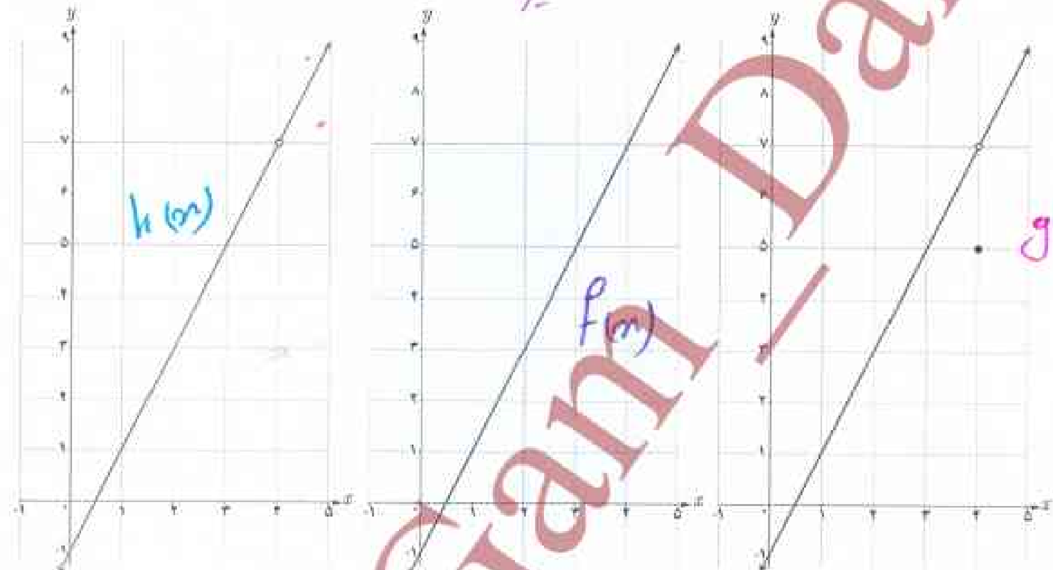
$f(x)=۲x-۱$

$g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$

$h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$ $\quad D_g=\mathbb{R}$ $\quad R_g=\mathbb{R}-\{7\}$ $\quad D_h=\mathbb{R}-\{4\}$ $\quad R_h=\mathbb{R}-\{7\}$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ خیر دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود ← | → x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	→ ۴ ←	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶٫۸	۶٫۹۸	→ ۷ ←	۷٫۰۲	۷٫۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶٫۶	۶٫۸	۶٫۹۸	→ ۵ ←	۷٫۰۲	۷٫۲	۷٫۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶٫۶	۶٫۸	۶٫۹۸	→ ← تعریف نشده	۷٫۰۲	۷٫۲	۷٫۴	۸	۹

مقادیر f، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود.

حد هر سه تابع وقتی که $x\to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ۷ است. به عبارت دیگر:

$\lim\limits_{x\to ۴} f(x) = 7$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۴} g(x) = 7$ $\qquad \lim\limits_{x\to ۴} h(x) = 7$

در فعالیت قبل مشاهده گردید که سه تابع f، g و h در نزدیکی نقطهٔ $x=4$ رفتار یکسانی دارند. به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۷ است. با این حال دربارهٔ مقادیر این سه تابع در نقطه ۴ داریم:

الف) $h(4)$ وجود ندارد (h در ۴ تعریف نشده است).

ب) $g(4)$ موجود است؛ ولی $\lim_{x\to 4} g(x) \neq g(4)$.

پ) $f(4)=7$ و $\lim_{x\to 4} f(x)=7$.

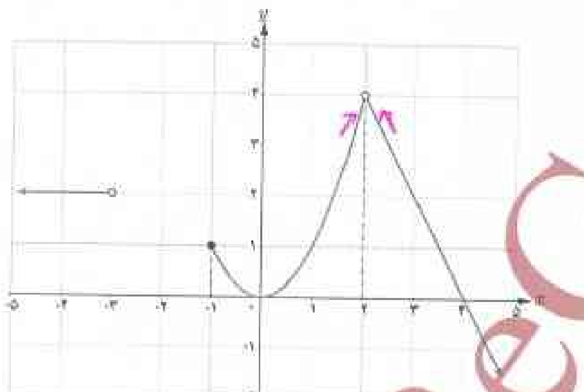
به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim_{x\to a} f(x)=l$، آنگاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم:

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

پ) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

مثال ۱: در شکل زیر نمودار تابع
$$f(x)=\begin{cases} -2x+8 & x>2 \\ x^2 & -1\leq x<2 \\ 2 & x<-3 \end{cases}$$
رسم شده‌است.



الف) $f(2)$ تعریف نشده است؛ ولی $\lim_{x\to 2} f(x)=4$.

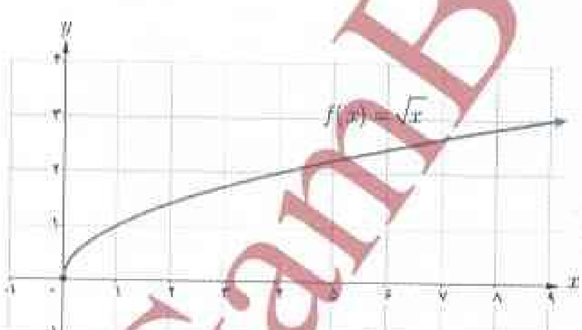
ب) $\lim_{x\to -1^+} f(x)=1$ ولی $\lim_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد.

پ) $f(-1)=1$.

ت) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$ و $f(0)=0$.

ث) $\lim_{x\to 4} f(x)=0$ و $f(4)=0$.

ج) $f(-3)$ و $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ وجود ندارند؛ ولی $\lim_{x\to -3^-} f(x)=2$.



مثال ۲: برای تابع $g(x)=\sqrt{x}$ داریم:

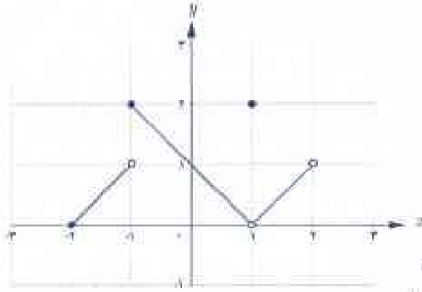
الف) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0$.

ب) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد؛ زیرا تابع برای $x<0$ تعریف نشده است.

پ) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

تمرین

۱ برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



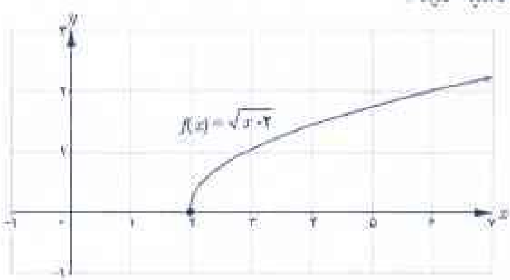
الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ نادرست
ب) $f(1)=2$ درست
پ) $f(2)=1$ نادرست
ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$ درست
ث) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$ درست
ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ درست
چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد. درست
ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد. درست

۲ مثالی از یک تابع همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3)=1$.

۴ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$.

۵ دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$
ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$
پ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
ت) $f(2)$

۶ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.
آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۷ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

$$f(x)=2x+1 \quad , \quad g(x)=2x+1 \quad (x\neq 2) \quad , \quad h(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(2)$، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.
ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to 2} h(x) \quad , \quad \lim_{x\to 2} g(x) \quad , \quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

۸ آیا حد تابع زیر در $x=2$ موجود است؟

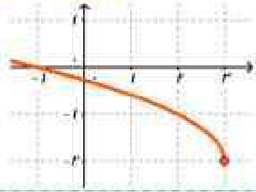
$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

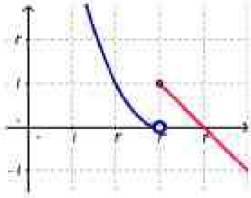
۱۰ اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود است؟

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۲۷

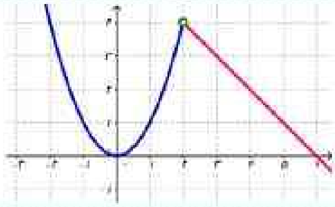
تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{۲-x}-۲$



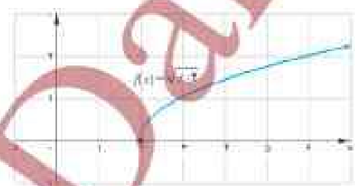
تمرین ۳: $f(x)=\begin{cases}(x-۳)^۲ & x<۳\\ ۴-x & x\geq ۳\end{cases}$



تمرین ۴: $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۲\\ ۶-x & x>۲\end{cases}$



تمرین ۵:



$f(x)=\sqrt{x-۲}$

الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

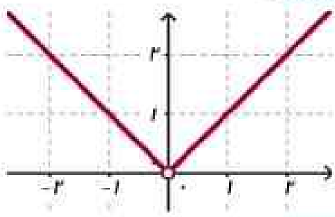
ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

ت) $f(۲)=\sqrt{۲-۲}=۰$

تمرین ۶: $f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ -x & x<۰\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$



تمرین ۷: $h(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$ $\quad g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲) \quad f(x)=۲x+۱$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$ – $g(۲)$ وجود ندارد – $h(۲)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$

تمرین ۸: $f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۲\\ -۲ & x=۲\\ x-۳ & x<۲\end{cases}$

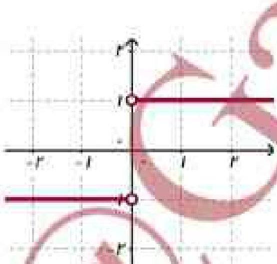
$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۲=۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲-۳=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۹: $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ & x>۰\\ -۲x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰)^۲+۲=۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲(۰)-۲=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۱۰: $f(x)=\dfrac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & x>۰\\ \dfrac{-x}{x} & x<۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

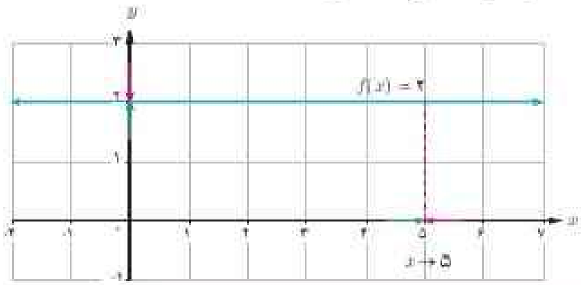


درس دوم

محاسبه حد توابع

یکی از عواملی که به مطالعهٔ دقیق‌تر یک تابع می‌تواند کمک کند، محاسبهٔ حد آن تابع است. برای محاسبهٔ حد یک تابع قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این درس برخی از این قواعد به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده می‌شوند.

۱ــ حد تابع ثابت



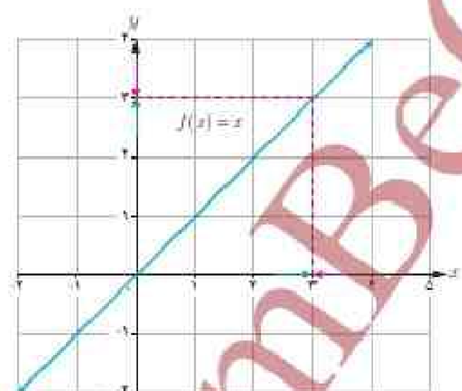
حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به‌طور مثال: $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = 2$

به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند: $\lim\limits_{x\to a} c = c$

۲ــ حد تابع همانی

اگر [illegible]



به‌طور مثال: $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$

کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید:

$\lim\limits_{x\to 0} x =$ ۰ $\qquad \lim\limits_{x\to 7} 5 =$ ۵ $\qquad \lim\limits_{x\to 7} x =$ ۷

$\lim\limits_{x\to -7} x =$ −۷ $\qquad \lim\limits_{x\to 4} (-2) =$ −۲ $\qquad \lim\limits_{x\to 5} 0 =$ ۰

تاکنون برای محاسبهٔ حدّ یک تابع بیشتر از جدول‌ها و نمودارها بهره بردیم. در اینجا به کمک چند قانون، حد توابع را محاسبه می‌کنیم.

۳ــ حد مجموع

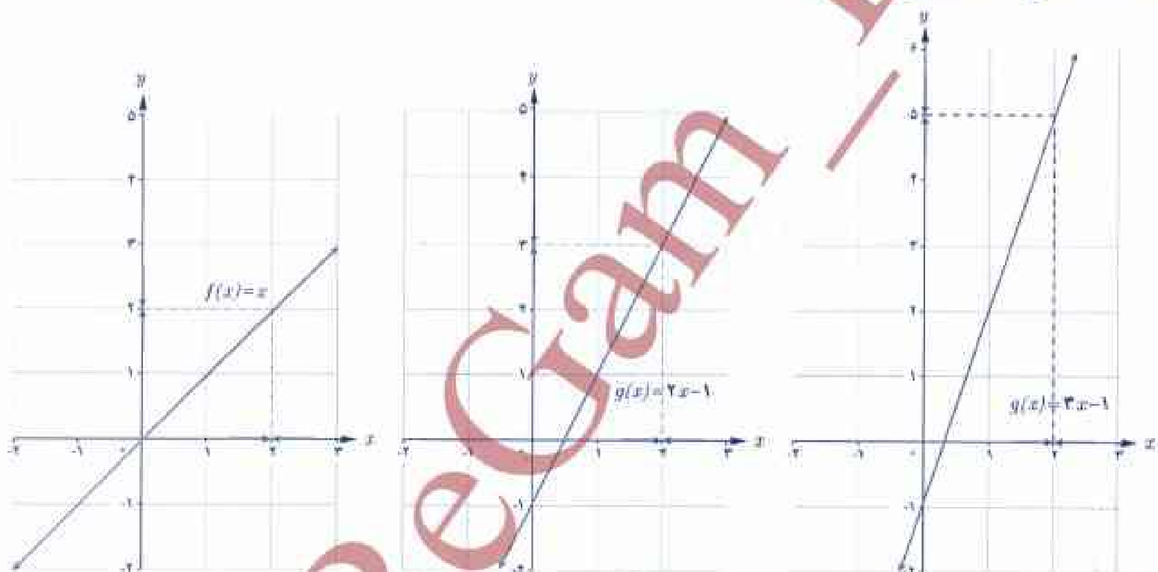
اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ ۲ $\qquad \lim\limits_{x\to ۲} g(x)=$ ۳ $\qquad \lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))=$ ۲ + ۳ = ۵

۴ــ حد تفاضل

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

به‌طور مثال در «کار در کلاس» قبل داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to ۲}f(x)-\lim_{x\to ۲}g(x)=۲-۳=-۱$$

۵ــ حد حاصل ضرب

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim_{x\to a}g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)=lm$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر حاصل ضرب حدهای آنها در همان نقطه است.

اگر c یک عدد ثابت و $\lim_{x\to a}f(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cl \quad (a\in\mathbb{R})$$

کار در کلاس

الف) اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^۲=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))= l\times l=l^۲$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^۳= l^۳$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنند؟ توضیح دهید.

$$\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)=\lim_{x\to ۲۰}\frac{۲}{۵}x-\lim_{x\to ۲۰}۳=\frac{۲}{۵}\lim_{x\to ۲۰}x-\lim ۳=\frac{۲}{۵}(۲۰)-۳=۸-۳=۵$$

حد تفاضل ، قانون ۴

در حالت کلی اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n=l^n$$

۶ــ حد تقسیم

اگر $\lim_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim_{x\to a}g(x)=m$ که $m\neq ۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{l}{m} \quad (m\neq ۰)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آنکه حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

ب) $f(1)=3(1)^2+2(1)-7=3+2-7=-2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

فعالیت

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=3x^2+2x-7$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x^2+2x-7)$$

$$=\lim_{x\to 1}(3x^2)+\lim_{x\to 1}(2x)-\lim_{x\to 1}7$$

$$=3\lim_{x\to 1}x^2+2\lim_{x\to 1}x-7=3(1)^2+2(1)-7=3+2-7=-2$$

اشتباه چاپی باید منفی باشد

ب) $f(1)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+5x-\frac{1}{2}$ ، درستی تساوی $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$ را بررسی کنید.

> به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(2x-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x+1)}=\frac{2(3)-1}{(3)^2-4(3)+1}=\frac{5}{-2}=-2.5$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3+1}{5x^2+\frac{2}{3}}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^4+2x^3+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(5x^2+\frac{2}{3})}=\frac{(1)^4+2(1)^3+1}{5(1)^2+\frac{2}{3}}=\frac{4}{\frac{17}{3}}=\frac{12}{17}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{3}{5}x^2-2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(\frac{3}{5}x^2-2x+1)}=\frac{(1)^2-1}{\frac{3}{5}(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{-\frac{2}{5}}=0$$

> به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} Q(x)\neq 0$

> اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=0$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم :
>
> چون $P(a)=Q(a)=0$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

پ) $g(2)=\frac{1}{8}(2)^4-(2)^3+5(2)-\frac{1}{2}=2-8+10-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}(\frac{1}{8}x^4-x^3+5x-\frac{1}{2})=\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{8}x^4-\lim\limits_{x\to 2}x^3+\lim\limits_{x\to 2}5x-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}(\lim\limits_{x\to 2}x)^4-(\lim\limits_{x\to 2}x)^3+5\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(2)^4-(2)^3+5(2)-\frac{1}{2}$

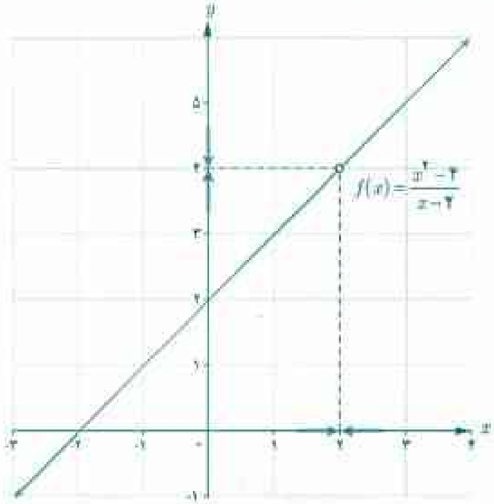
$=\frac{7}{2}$

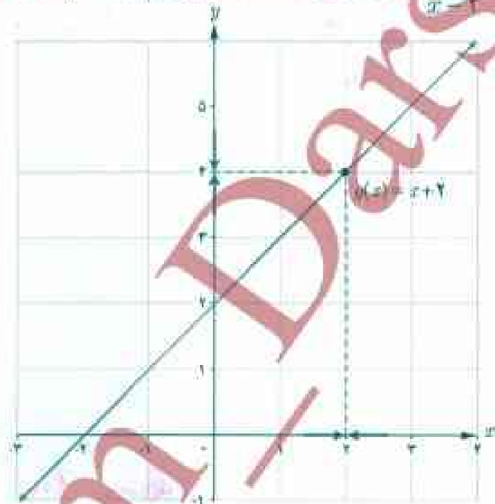
مثال : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ را محاسبه کنید.

داریم : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ ،

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

توجه داریم که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $x\neq 2$ پس $x-2\neq 0$ و صورت و مخرج کسر را می‌توانیم بر $x-2$ تقسیم کنیم. در نمودارهای زیر توابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ و $g(x)=x+2$ رسم و حد آنها در $x=2$ نمایش داده شده است.





دو تابع g و f برابر نیستند (چرا؟)؛ ولی حد آنها در $x=2$ برابر است.

چون دامنه ی آنها برابر نیست

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

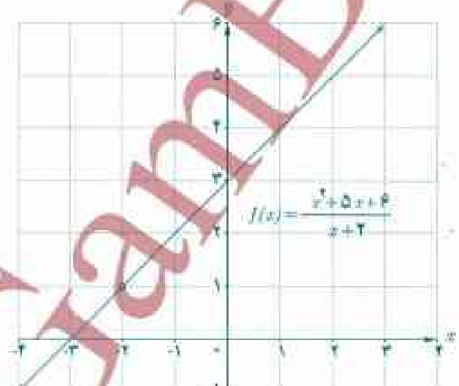
$D_g=\mathbb{R}$

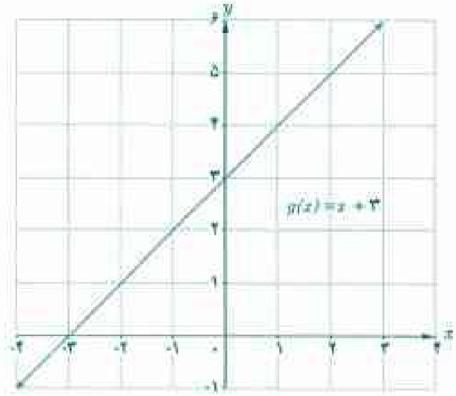
کار در کلاس

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

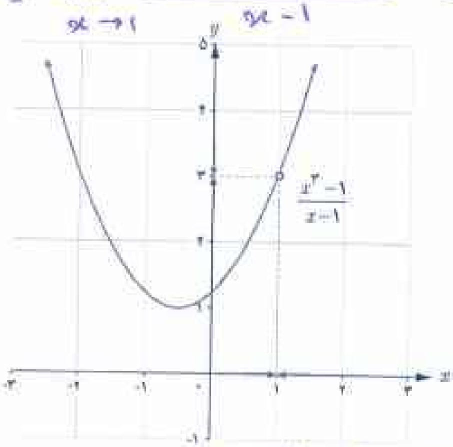
$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}(x+3)=-2+3=1$

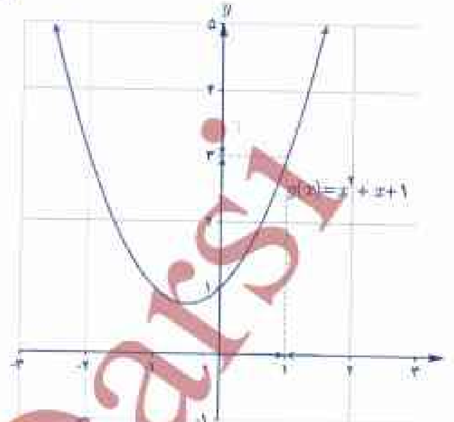




دو تابع f و g برابر نیستند. ولی حد آنها در $x=-2$ برابر عدد 1 است.

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = (1)^2+1+1 = 3$





دو تابع f و g برابر نیستند، ولی حد آنها در $x=1$ برابر عدد ۳ است.

۷ــ حد ریشه

اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=l>0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim_{x\to c}ax+b}=\sqrt{l}$$

تذکر: تمام قوانینی که در این درس دربارهٔ حد مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

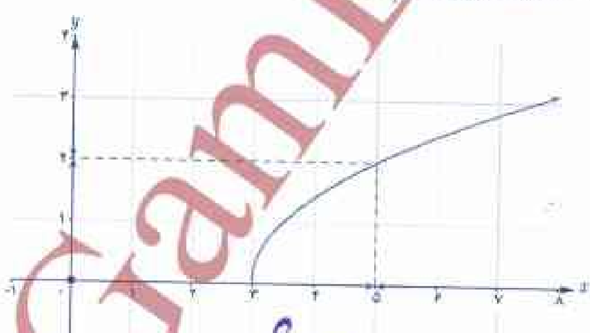
مثال: مطلوب است: $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x-6}$

حل: به کمک دستور فوق داریم:

$$\lim_{x\to 5}(2x-6)=4>0 \Rightarrow \lim_{x\to 5}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim_{x\to 5}(2x-6)}=\sqrt{4}=2$$

کار در کلاس

۱) نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{2x-6}$ و $g(x)=\sqrt{2x-6}\quad (x\neq 5)$ رسم شده‌اند.



الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 5} g(x)$ موجودند؟ بله

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 3} 2x-6} = \sqrt{0} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 3^-}(2x-6)} = \sqrt{0} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-6)} = \sqrt{0} = 0$

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(1)=1$ درست

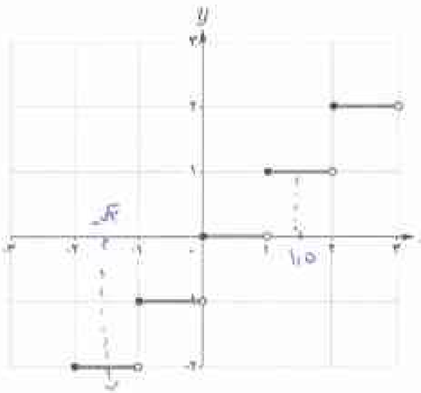
ب) $D_h = \mathbb{R}-\{0\}$ درست

پ) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=1$ درست

ت) $h(0)=0$ نادرست

ث) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ وجود ندارد. درست

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} [x] = 2$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} [x] = 1$

پ) $\lim\limits_{x\to 2} [x]$ ← وجود ندارد

ت) $\lim\limits_{x\to 1} [x]$ ← وجود ندارد

ث) $\lim\limits_{x\to 1/5} [x] = 1$

ج) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}} [x] = -2$

حدهای مثلثاتی

فعالیت

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

ب) $\lim\limits_{x\to -\pi} \sin x = 0$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

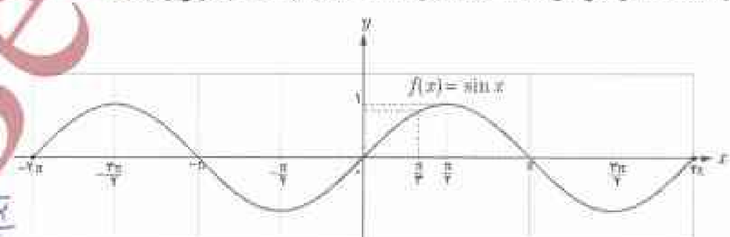
ت) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \sin x = 0$

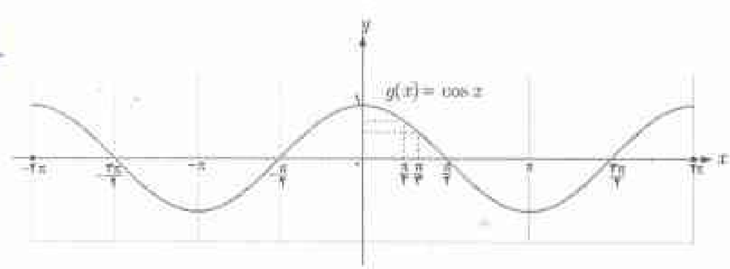
ث) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

چ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \cos x = \frac{1}{2}$





به‌طور کلی داریم: $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$

مثال : به کمک دستورهایی که در این درس آموخته‌اید، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x]-3}{x}$ ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}$

حل : الف) چون $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ موجود نیست؛ پس $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$ موجود نیست.

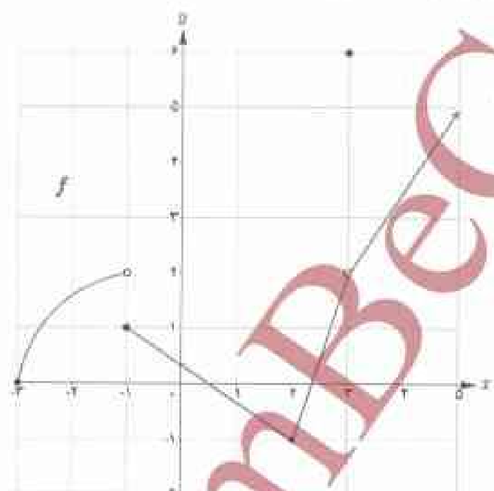
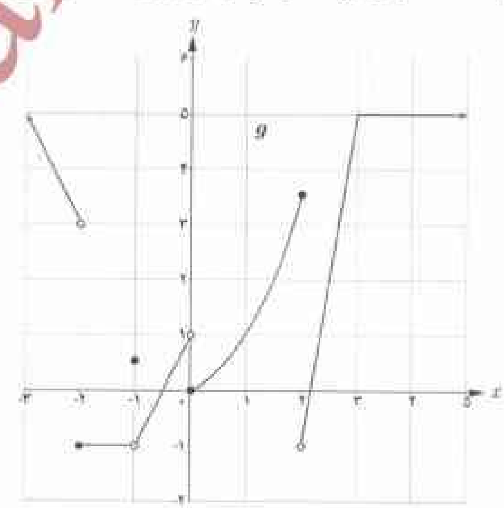
ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}(2+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$

پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x]-3}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+}([x]-3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}x}=\dfrac{-2}{1}=-2$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x\cos x)}{\lim\limits_{x\to \pi}(1+\cos^2 x)}=\dfrac{0(-1)}{2}=0$

تمرین

۱ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ = ۲ ب) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ وجود ندارد پ) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ = ۵

ت) $\lim\limits_{x\to 3}(f(x)+g(x))$ = ۲+۵=۷ ث) $\lim\limits_{x\to -1}(f(x)+g(x))$ وجود ندارد ج) $\lim\limits_{x\to 2}(2f(x)+5g(x))$ وجود ندارد

چ) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x))^2$ ح) $\lim\limits_{x\to 0}(g(x))^2$ = وجود ندارد خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد د) $\lim\limits_{x\to 5}(f(x).g(x))$ = ۵×۵=۲۵

حل تمرینات در صفحات بعدی

اشتباه تایپی است قبل

حداقل سه پرسش دیگر مانند موارد صفحهٔ ~~بعد~~ مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. دربارهٔ مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)$ پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}$ ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}$ ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}$ ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos x$ س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x}{[x]}$ ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}$ ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$

۴ اگر $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$ و $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=-1$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+h(x))$ ب) $\lim\limits_{x\to 2}(h(x))^5$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}$ ج) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}$

۵ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x)=1$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۶ در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۷ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x]$ ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x]$ پ) $\lim\limits_{x\to m}[x]$

به‌طور کلی تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۳۶

تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ در نقطه $x=1$ حد برابر دارند. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=1$

تمرین ۳:

الف) $\lim\limits_{x\to 7}(-3)=-3$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}(-2x-7)=-2(0)-7=-7$

پ) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-4x+5)=3(-1)^2-4(-1)+5=3+4+5=12$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{x^2-9}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{3}{3+3}=\dfrac{1}{2}$

ث) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x^2-x}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(2x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(0)-1}=-1$

ج) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x+2}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x^2-2x+4)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4=12$

چ) $\lim\limits_{x\to -2}[x]$ وجود ندارد

ح) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=3$

د) $\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد

ذ) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+5}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}$

ر) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-2}$ وجود ندارد

ز) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-2}{[x]+1}=\dfrac{3-2}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos(x)=\cos(-\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{2}$

س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\big(\sin(x)+\cos(x)\big)=\sin(\dfrac{\pi}{4})+\cos(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ش) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x}{[x]}=\dfrac{-2}{-2}=1$

ص) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\big(1-\sin(x)\big)\big(1+\sin(x)\big)}{1-\sin(x)}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\big(1+\sin(x)\big)=1+\sin(\dfrac{\pi}{2})=1+1=2$

ض) $\lim\limits_{x\to 0}(x+[x])$ وجود ندارد

تمرین ۴: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=0$ ، $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=-1$

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\big(f(x)+h(x)\big)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)+\lim\limits_{x\to 2} h(x)=3+0=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 2}\big(h(x)\big)^5=\left(\lim\limits_{x\to 2} h(x)\right)^5=(-1)^5=-1$

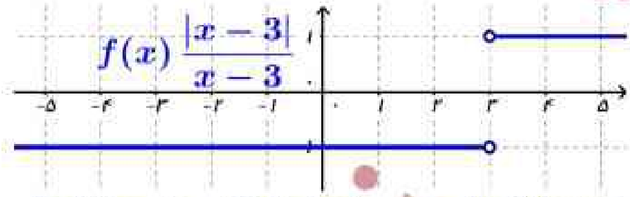
پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

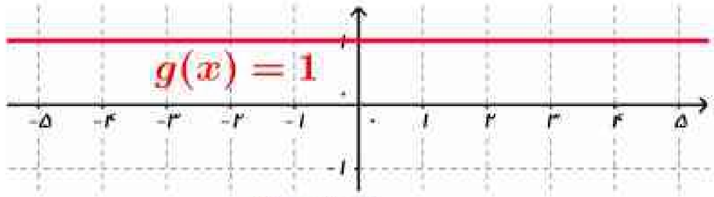
ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}=\dfrac{0}{3}=0$

پ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}\big(3f(x)\big)}{\lim\limits_{x\to 2}\big(g(x)-5h(x)\big)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)-5\lim\limits_{x\to 2} h(x)}=\dfrac{3\times 3}{0-5(-1)}=\dfrac{9}{5}$

ت) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{h(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}=\dfrac{1}{-1}=-1$

تمرین ۵ :





$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ وجود ندارد

$\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 1$

در تمام نقاط بازه $(3,+\infty)$ دو تابع با هم برابرند.

تمرین ۶ : الف) حد $f+g$ تابع وجود ندارد   ب) حد $f+g$ تابع وجود ندارد

تمرین ۷ :

الف) $\lim\limits_{x\to m^+} [x] = m$ ب) $\lim\limits_{x\to m^-} [x] = m-1$ پ) $\lim\limits_{x\to m} [x]$ وجود ندارد

در تمام $x \notin \mathbb{Z}$ نقاط تابع $f(x)=[x]$ حد دارد

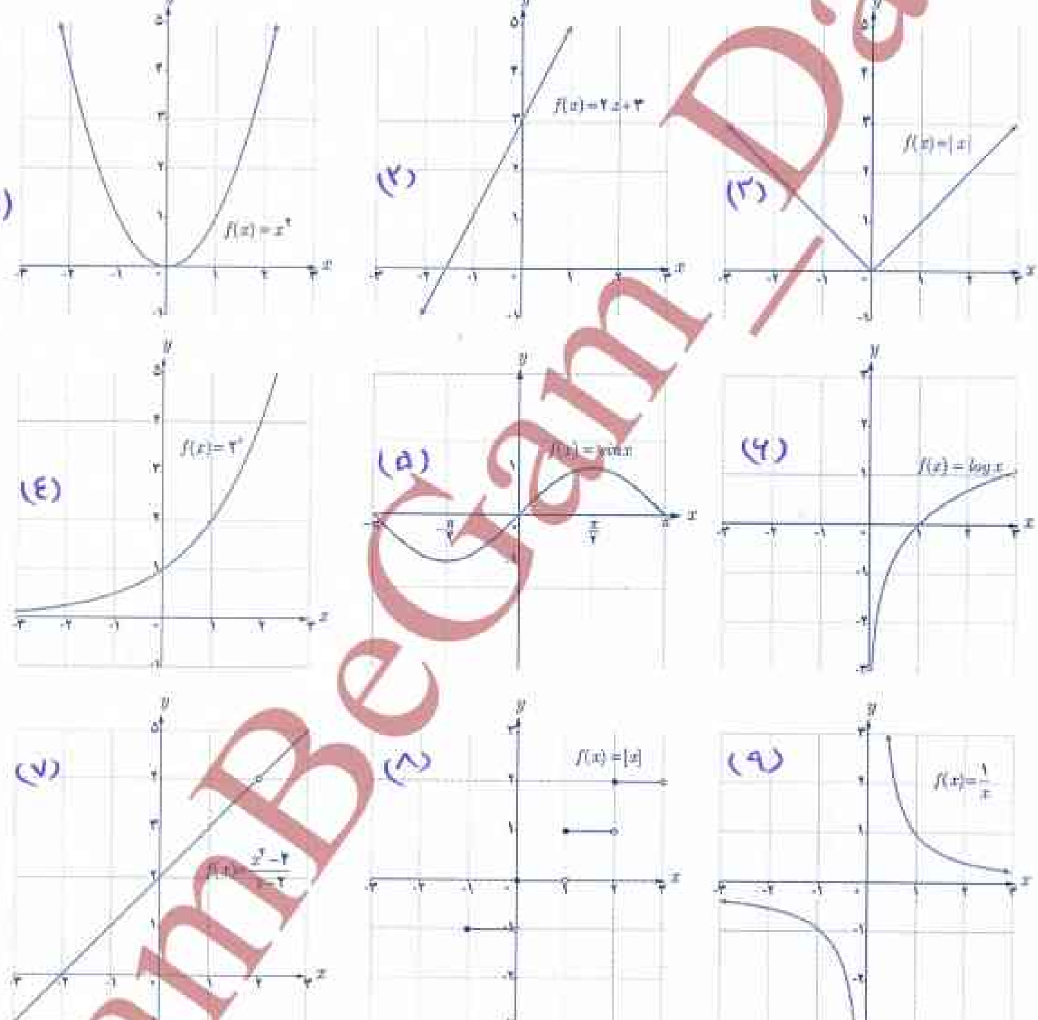
درس سوم

پیوستگی

یکی از مفاهیم مهم در مبحث حد توابع، مفهوم پیوستگی است که در این درس با آن آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودارهای شش تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. شایسته است نمودارها شماره گذاری یا نام گذاری شود

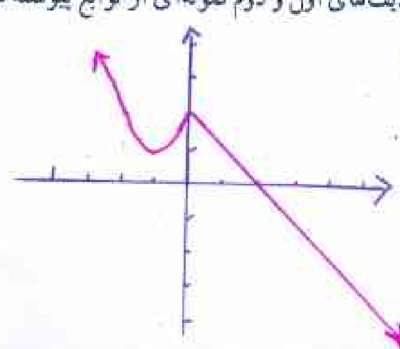


الف) کدام‌یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

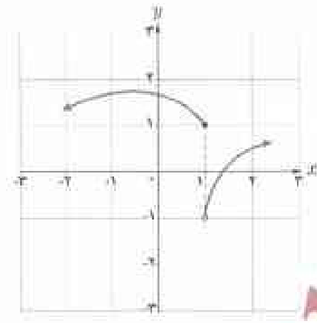
ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید.

ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.

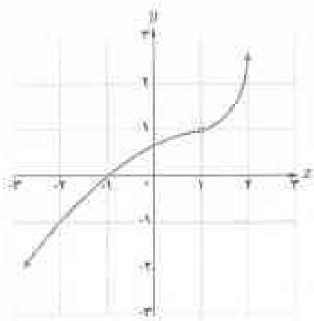
ب)



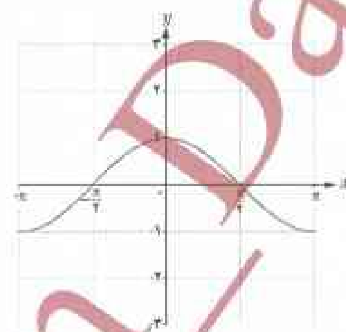
مثال : تابع‌های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته‌اند.



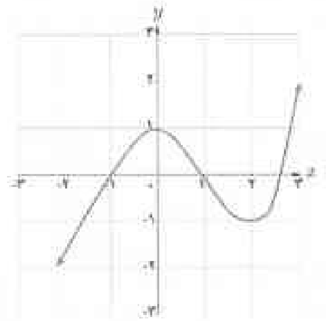
(ب)



(الف)



(ت)

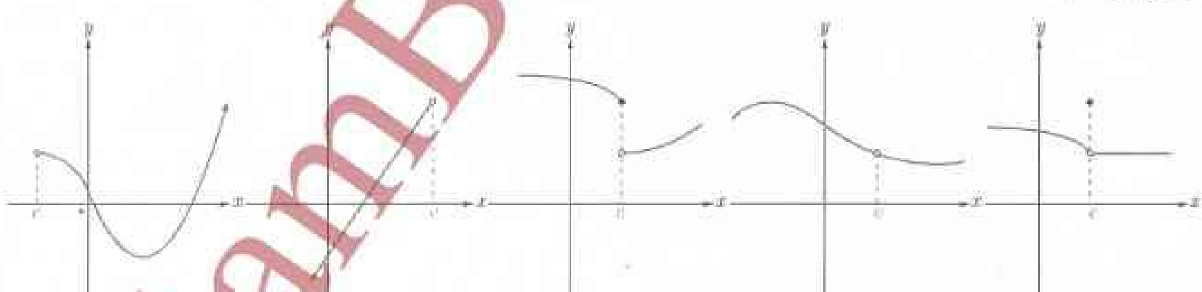


(پ)

اکنون به بررسی دقیق‌تر مفهوم پیوستگی می‌پردازیم. به این منظور پیوستگی تابع در یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

> تابع f در نقطه $x=c$ را پیوسته نامیم، هرگاه $(c\in\mathbb{R})$ $\quad \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این‌صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطهٔ c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.



$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد.

$f(c)$ وجود ندارد.

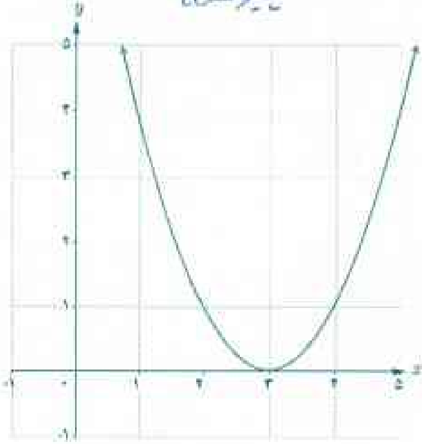
$\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq f(c)$

کار در کلاس

کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=1$ ناپیوسته‌اند؟

الف) $f(x)=(x-3)^2$

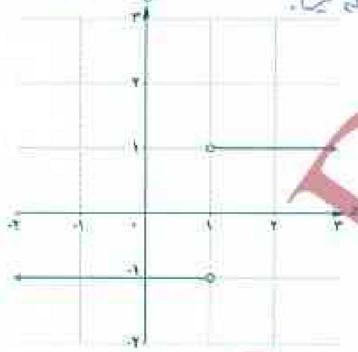
پیوسته



ب) $g(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$

ناپیوسته

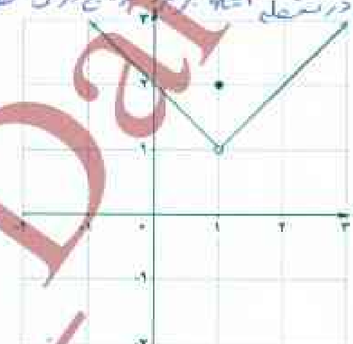
حد چپ و راست برابر نیست



پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & x<1 \end{cases}$

ناپیوسته

مقدار تابع در نقطه $x=1$ برابر حد تابع در آن نقطه نیست.



فعالیت

تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

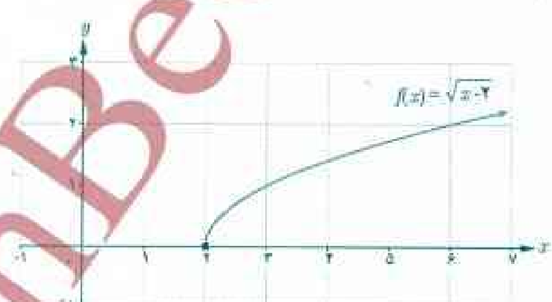
الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ موجودند؟

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وجود ندارد

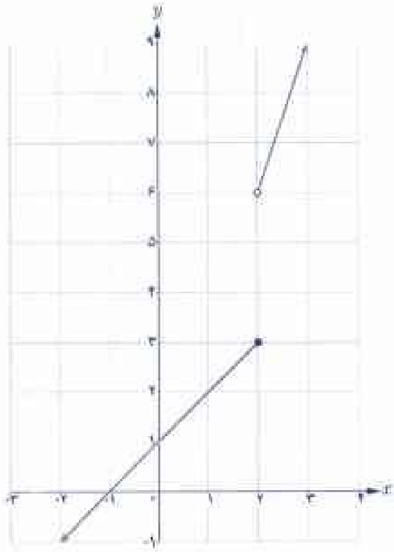
ب) آیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود است؟ خیر

پ) آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟ خیر

در این فعالیت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ گوییم f از طرف راست در نقطهٔ ۲ پیوسته است.



تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. در این صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.



کار در کلاس

تابع با ضابطه $g(x)=\begin{cases}3x & x>2\\ x+1 & x\le 2\end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.

الف) کدام یک از حدهای $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$ موجودند؟ هردو موجودند

ب) آیا $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ موجود است؟ خیر

پ) آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟ خیر

برای تابع $g(x)$، $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=g(2)$، گوییم g از طرف چپ در نقطه ۲ پیوسته است.

تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

با توجه به تعریف معلوم است که f در $x=c$ پیوسته است، هرگاه f در c هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال: الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=2$ پیوستگی راست دارد، تابع $f(x)=[x]$ در $x=2$ پیوسته نیست.

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le 0\\ 2x+3 & x>0\end{cases}$ در نقطهٔ ۰ پیوستگی چپ دارد. تابع f در $x=0$ پیوسته نیست.

پ) تابع $g(x)=\begin{cases}-x+3 & x<1\\ 2x & x\ge 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است؛ هرگاه، در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.

تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است؛ هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a,b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

کار در کلاس

سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

$f(x)=x$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{x+2}$ $\quad$ $h(x)=\sqrt{-x}$

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد. ب) روی بازه $[-2,+\infty)$ پیوسته باشد. پ) روی بازه $(-\infty,0]$ پیوسته باشد.

مثال : الف) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، آنگاه f روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است؛ زیرا $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ $(c\in\mathbb{R})$

ب) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $(-\infty,\infty)$ پیوسته‌اند.

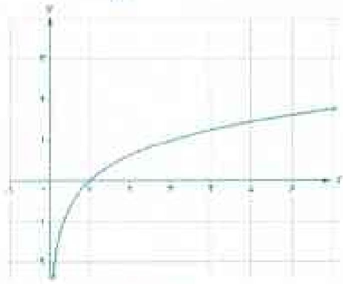
پ) تابع $f(x)=\log_2 x$ روی بازه $(0,\infty)$ پیوسته است.

ت) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

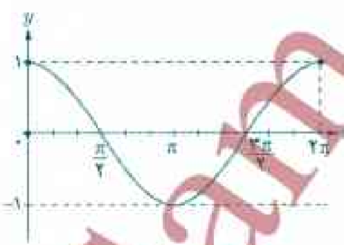
ث) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $[0,2\pi]$ پیوسته‌اند.

ج) تابع $f(x)=\log_2 x$ روی بازه $[1,2]$ پیوسته است.

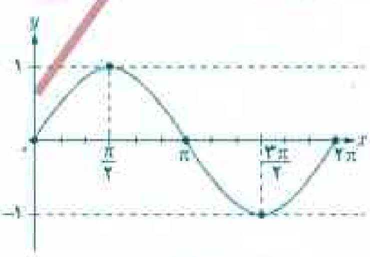
بهتر بود به جای مثال می‌نوشت نکته



$f(x)=\log_2 x$

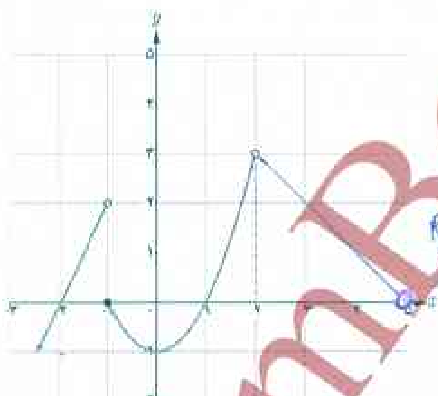


$f(x)=\cos x$



$f(x)=\sin x$

کار در کلاس



۱) تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :
$$f(x)=\begin{cases} 2x+4 & x<-1 \\ x^2-1 & -1\le x<2 \\ -x+5 & 2<x<5 \end{cases}$$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

$R_f=(-\infty,3]$ $\quad$ $D_f=(-\infty,2)\cup(2,5)$

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1,1]$ و $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

پیوسته $\quad$ پیوسته $\quad$ ناپیوسته

۲) دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $(-\infty,-1]$ پیوسته است. نادرست $\quad$ ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ پیوسته است. درست

پ) f روی بازهٔ $[2,5)$ پیوسته است. نادرست $\quad$ ت) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=0$ نادرست

ث) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=0$ درست $\quad$ ج) f روی بازهٔ $(-2,0)$ پیوسته است. نادرست

۳ با توجه به تابع f :

الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

[۲,۴] [۱,۲] ناپیوسته   [۳,۴] [۲/۵,۴/۵] پیوسته

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی (a,b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد.

[۲,۳] [۲,۴]   (۲,۳] (۲,۴]

تمرین

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x)=۲x+۱ \quad , \quad g(x)=۲x+۱ \quad x\neq ۲ \quad , \quad h(x)=\begin{cases} ۲+x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید : $f(۲)=$, $g(۲)=$, $h(۲)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=$ $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۱ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

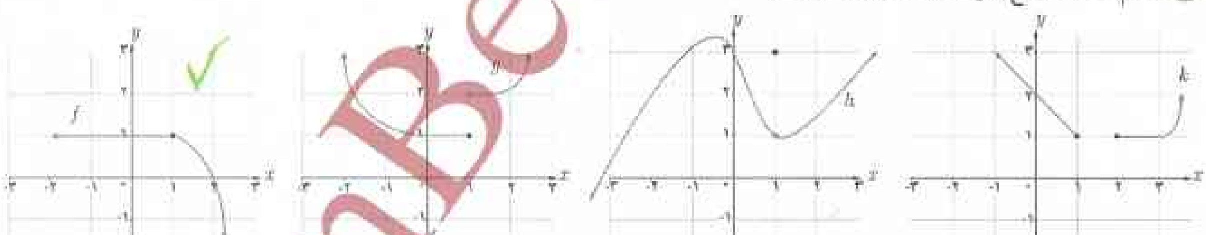
۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۶ & x=۳ \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید.

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۲ & x\leq ۰ \\ x^۲+۲ & x>۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=۱$ مساوی -۱ باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۷ کدام‌یک از توابع زیر در $x=۱$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\leq t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰ \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود :

$$f(\tfrac{۱}{۲})=۶\times(\tfrac{۱}{۲})+۴=۷$$

سال $\frac{۱}{۲}=\frac{۶}{۱۲} \leftarrow$ ۶ ماه

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید.   ب) آیا f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته است؟

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۴۲

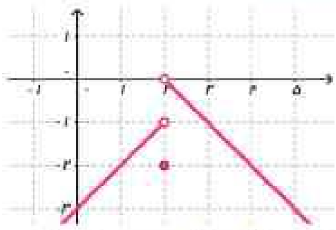
تمرین ۱: $f(x)=۲x+۱ \qquad g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲) \qquad h(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$ – $g(۲)$ وجود ندارد – $h(۲)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$

پ) فقط تابع $f(x)$ در $x=۲$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=f(۲) \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$

تمرین ۲: $f(x)=\begin{cases}x-۳ & x<۲\\ -۲ & x=۲\\ -x+۲ & x>۲\end{cases}$



این تابع در تمام نقاط دامنه اش به غیر از نقطه $x=۲$ پیوسته است زیرا:

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۲=۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲-۳=-۱ \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۳: $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} \quad , \quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$

تابع $g(x)$ در نقطه $x=۳$ ناپیوسته است زیرا $g(۳)$ تعریف نشده است.

تابع $f(x)$ در $x=۳$ پیوسته است زیرا:

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}=\dfrac{۰}{۰} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x+۳)(x-۳)}{(x-۳)}=\lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)=۳+۳=۶ \quad , \quad f(۳)=۶ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳} f(x)=f(۳)$

تمرین ۴: تابع $f(x)=[x]$ در تمام نقاط $x_۰\notin \mathbb{Z}$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰)$

و در تمام نقاط $x_۰\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است. زیرا: $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_۰^-} f(x)$

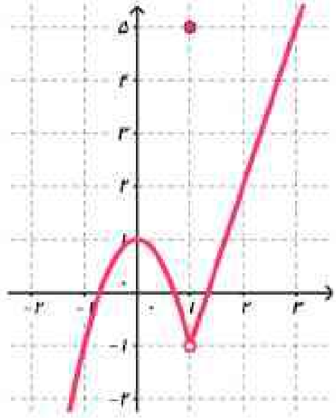
تمرین ۵: $f(x)=\begin{cases}-۲x+۲ & x\leq ۰\\ x^۲+۲ & x>۰\end{cases}$

تابع $f(x)$ در نقطه $x=۰$ پیوسته است زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲+۲)=(۰)^۲+۲=۲\\ \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(-۲x+۲)=-۲(۰)+۲=۲\\ f(۰)=-۲(۰)+۲=۲\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=f(x_۰)$

تمرین ۶:

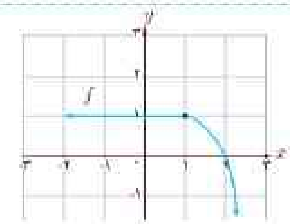


تابع $f(x)=\begin{cases}۳x-۴ & x>۱\\ ۵ & x=۱\\ -۲x^{۲}+۱ & x<۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد دارد زیرا:

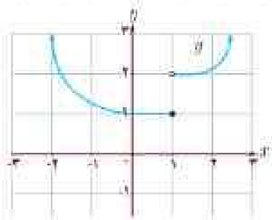
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{+}}(۳x-۴)=۳(۱)-۴=۳-۴=-۱\\ \lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^{-}}(-۲x^{۲}+۱)=-۲(۱)^{۲}+۱=-۲+۱=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۱$$

اما این تابع در نقطه $x=۱$ ناپیوسته است زیرا: $f(۱)=۵$ پس $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\neq f(۱)$

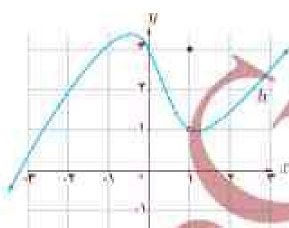
تمرین ۷:



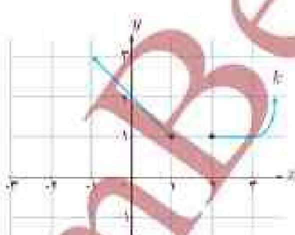
تابع $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$



تابع $g(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} g(x)\neq \lim\limits_{x\to ۱^{-}} g(x)$



تابع $h(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۱} h(x)\neq h(۱)$



تابع $k(x)$ در $x=۱$ ناپیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to ۱^{-}} k(x)=۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} k(x)$ وجود ندارد

تمرین ۸: $f(t)=\begin{cases}۶t+۴ & ۰\leq t<۱\\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t<۱۰\end{cases}$

الف) $f(۵)=۲(۵)+۱۰=۱۰+۱۰=۲۰$, $f(۲)=۲(۲)+۱۰=۴+۱۰=۱۴$

ب) تابع f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته است زیرا: به ازای هر $x\in(۰,۱۰)$ تابع f پیوسته است و در نقطه $x=۰$ پیوستگی راست دارد و در نقطه $x=۱۰$ پیوستگی چپ دارد.

حل فصل ۷ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

فصل

آمار و احتمال

رامسر، استان مازندران

امروزه نقش روزافزون آمار و احتمال در حل مسائل زندگی بر کسی پوشیده نیست. یکی از کاربردهای مهم آمار و احتمال، پیش‌بینی وضع هواست. با پیشرفت روش‌های علمی، احتمال پیش‌بینی درست آب‌وهوا به‌طور چشمگیری افزایش یافته است.

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

درس دوم: آمار توصیفی

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال‌های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

۱ــ پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A \cap B = \varnothing$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شمارهٔ ۸ به‌دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{20}$

اگر بدانید که یک شمارهٔ یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟ $\frac{1}{10}$

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شمارهٔ انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شمارهٔ انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از "احتمال A به شرط B" که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که:

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت[1]:

۱ــ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ــ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

بنابراین داریم:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Longrightarrow p(A|B)=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Longrightarrow$$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$* \quad (۱) \quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه: شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$. بنابراین اگر $P(B)=۰$، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ اتومبیل‌رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل:

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: احتمال رسیدن به خط پایان

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A)=۰/۸ \\ P(A\cap B)=۰/۷ \end{cases}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{۰/۷}{۰/۸}=\frac{۷}{۸}=۰/۸۷۵$$

[1] ــ آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A: پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B: پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $۴ = \binom{۴}{۳}$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $۴۰ = \binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲}$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج‌اند. پس :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$$P(A)=\frac{۱}{۴} \quad \text{و} \quad P(B)=\frac{۱}{۶} \quad \text{و} \quad P(A|B)=\frac{۱}{۳}$$

حل : هدف محاسبهٔ $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۱۸}$$

و با جای‌گذاری مقادیر داریم :

$$P(A\cup B)=\frac{۱۳}{۳۶}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند، ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

> پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع A با شرط رخ دادن B و بدون این شرط یکسان است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $(P(B)\neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$، پس:

$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ *

از این رابطه به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت:

دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطهٔ * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

(۱) با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ احتمال، یعنی: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می‌توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

مثال: یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.

حل: فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال : خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل : جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل‌اند، بنابراین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

احتمال پسر بودن هر دو $= P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

مثال : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=0/5$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=0/8$

به وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، پس $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=0/4$

اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A\cup B$ است و داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/5+0/8-0/4=0/9$$

در مثال‌های قبل استقلال دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. ($n(S)=36$)

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

{(۳،۲) و (۲،۳) و (۴،۱) و (۱،۴)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با : $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با : $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با : $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

ب) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

پ) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به‌صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$B=${(۲,۶) و (۲,۵) و (۲,۴) و (۲,۳) و (۲,۲) و (۲,۱)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطهٔ $P(A|B)=P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به‌دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{1}{9}$ به $\frac{1}{6}$ **افزایش می‌دهد**. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

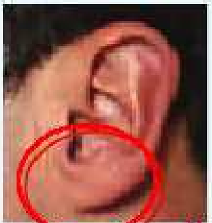
ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{1}{6}$ است. بنابراین

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ؛ استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

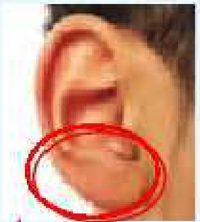
بنابراین در ا... حالت احتمال اینکه

مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود، صفر است.

خواندنی



نرمه گوش پیوسته a



نرمه گوش آزاد A

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند.
آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند:
اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت؟
در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا می‌پردازیم.

مثال: در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن:

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا Aa می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{1}{2}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است:

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشند، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

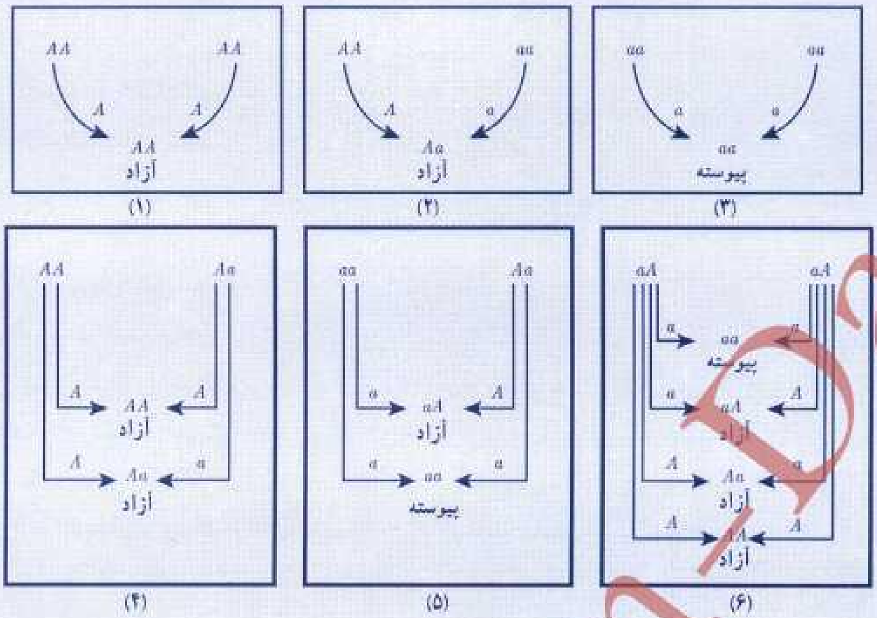
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشند، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشند، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. به‌طور خلاصه داریم:

عامل‌های شخص	AA	Aa یا aA	aa
نوع نرمهٔ گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

ــ به حالت‌های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می‌گوییم.

در شکل‌های صفحهٔ بعد حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمهٔ گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل: از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است، اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$ فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

۱. در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲. یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم پشت ظاهر شده باشد.

۳. فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{1}{7}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{1}{4}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

تمرین فصل ۷ - صفحه ۱۵۱

تمرین ۱ : A = ظاهر شدن عدد زوج B = ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ C = ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$A=\{۲,۴,۶\} \Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ $B=\{۳,۶\} \Rightarrow P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$ $C=\{۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow P(C)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$

* ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن مضرب ۳

$P(A|B)=\frac{۱}{۲} \Leftarrow B=\{۳,۶\}$ چون $P(A|B)=P(A)$ پس پیشامد A و B مستقل هستند.

** ظاهر شدن عدد زوج به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$P(A|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Leftarrow C=\{۳,۴,۵,۶\}$ چون $P(A|C)=P(A)$ پس پیشامد A و C مستقل هستند.

*** ظاهر شدن عددی با مضرب ۳ به شرط ظاهر شدن عددی بزرگتر از ۲

$P(B|C)=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Leftarrow C=\{۳,۴,۵,۶\}$ چون $P(B|C)\neq P(B)$ پس پیشامد B و C مستقل نیستند.

تمرین ۲ : $S=\{($پ،پ،پ$)$، $($پ،ر،پ$)$، $($پ،پ،ر$)$، $($ر،پ،پ$)$، $($ر،ر،پ$)$، $($ر،پ،ر$)$، $($پ،ر،ر$)$، $($ر،ر،ر$)\}$

A = ظاهر شدن رو در پرتاب سوم سکه $A=\{($ر،پ،پ$)$، $($ر،ر،پ$)$، $($ر،پ،ر$)$، $($ر،ر،ر$)\} \Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

B = ظاهر شدن پشت در دو پرتاب اول و دوم $B=\{($پ،پ،پ$)$، $($ر،پ،پ$)\} \Rightarrow P(A|B)=\frac{۱}{۲}$

تمرین ۳ : چون پیشامدهای A و B مستقل هستند $\Leftarrow$ $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

الف) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B)$

$$P(A')\times P(B)=(۱-P(A))\times P(B)=P(B)-P(A)\times P(B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B-A)=P(B\cap A')=P(A'\cap B)$$

ب) می خواهیم ثابت کنیم: $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')$

$$P(A')\times P(B')=(۱-P(A))\times(۱-P(B))=۱\underbrace{-P(B)-P(A)+P(A\cap B)}$$

$$=۱-(P(B)+P(A)-P(A\cap B))=۱-P(A\cup B)=P(A\cup B)'=P(A'\cap B')$$

تمرین ۴ : A = انتخاب در تیم کوهنوردی B = انتخاب در تیم ملی فوتبال نوجوانان

الف) باید $P(A\cap B)$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۷\times۰/۸=۰/۵۶$

ب) باید $P(A'\cap B')$ را بدست آوریم و چون پیشامدهای A' و B' مستقل هستند، پس:

$P(A')=۱-P(A) \Rightarrow P(A')=۱-۰/۷=۰/۳$ $P(B')=۱-P(B) \Rightarrow P(B')=۱-۰/۸=۰/۲$

$P(A'\cap B')=P(A')\times P(B') \Rightarrow P(A'\cap B')=۰/۳\times۰/۲=۰/۰۶$

پ) باید $P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(B-A)=۰/۸-۰/۵۶=۰/۲۴$

ت) باید $P(A-B)+P(B-A)$ را بدست آوریم. پس:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A-B)=۰/۷-۰/۵۶=۰/۱۴$ $P(A-B)+P(B-A)=۰/۱۴+۰/۲۴=۰/۳۸$

ث) باید $P(A\cup B)$ را بدست آوریم پس:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=۰/۷+۰/۸-۰/۵۶=۰/۹۴$

تمرین ۵ : A = احتمال قبول شدن رویا در درس ریاضی B = احتمال قبول شدن دوستش در درس ریاضی $P(A\cup B)=0/625$ $P(A)=?$

$P(A)=2P(B) \Rightarrow P(B)=\frac{1}{2}P(A)$

چون پیشامدهای A و B مستقل هستند، پس:
$P(A\cap B)=P(A)\times P(B) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times\frac{1}{2}P(A)=\frac{1}{2}\left(P(A)\right)^2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0/625=P(A)+\frac{1}{2}P(A)-\frac{1}{2}\left(P(A)\right)^2 \xRightarrow{\times 2}$

$1/25=2P(A)+P(A)-\left(P(A)\right)^2 \Rightarrow \left(P(A)\right)^2-3P(A)+1/25=0 \xRightarrow{t=P(A)}$

$t^2-3t+1/25=0 \Rightarrow (t-2/5)(t-0/5)=0 \Rightarrow \begin{cases}\cancel{t=2/5}\\ t=0/5 \Rightarrow P(A)=0/5\end{cases}$

تمرین ۶ : A = هر دو عدد رو شده زوج B = مجموع اعداد روشده برابر ۸

$A=\{(2,6),(6,2),(5,3),(3,5),(4,4)\}$ $(A\cap B)=\{(2,6),(6,2),(4,4)\}$ $P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B)=\frac{3}{5}$

تمرین ۷ $P(A)=\frac{1}{5}$ $P(B)=\frac{1}{7}$ $P(B|A)=\frac{1}{4}$ $P(A\cup B)=?$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{n(A\cap B)}{\frac{1}{5}} \Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{20}=\frac{28+20-7}{140}=\frac{41}{140}$

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

درس دوم

آمار توصیفی

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای پراکندگی** که در ادامه با آنها آشنا خواهید شد، می‌پردازد. آمارتوصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می شود، دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به‌صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم اندیشهٔ کلی دربارهٔ ویژگی مورد مطالعه به‌دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به‌سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایهٔ هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\overline{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با :

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فعالیت

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۴۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

۴۲+۵۵+۵۷+۶۱+۵۵=۲۹۰

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

$\frac{۲۹۰}{۵}=۵۸$

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

$* \ \bar{x}_{ax} = \frac{ax_1+ax_2+\cdots+ax_N}{N} = \frac{a(x_1+x_2+\cdots+x_N)}{N} = a\bar{x}$

$* \ \bar{x}_{x+a} = \frac{(x_1+a)+(x_2+a)+\cdots+(x_N+a)}{N} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N+Na}{N}$

$= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N} + \frac{Na}{N} = \bar{x}+a$

میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ... ۵۸

ویژگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟ *

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟ *

کار در کلاس

۱) در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟ $۵۸ \times ۱۰۰۰ = ۵۸۰۰۰$

۲) هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی‌گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F = \frac{9}{5}C + 32$)

$F = \frac{9}{5}(۲۸) + ۳۲ = \frac{۲۵۲}{۵} + ۳۲ = ۵۰/۴ + ۳۲ = ۸۲/۴$

میانه

> پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با Q_2 نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت قبل، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

محمد برای پاسخ به این سؤال :

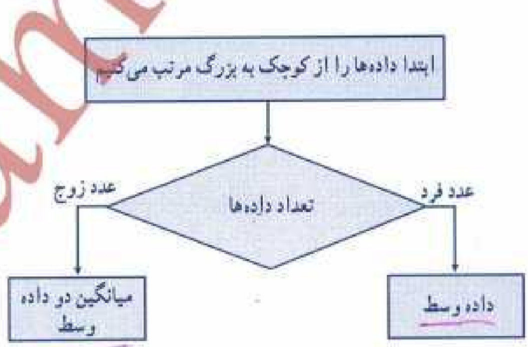
الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد :

۵۵ ۵۵ ۵۷ ۶۱ ۶۲

ب) جرم رضا و احمد از سام کمتر است. در حالی‌که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

در مثال فوق، عدد ۵۷ را میانهٔ داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.

روش محاسبهٔ میانه :



مثال :اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.

ــ میانگین و میانهٔ نمره‌های او را حساب کنید.

۱۹ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۲۰ ۵

الف) محاسبهٔ میانگین

$$\overline{X}=\frac{۱۹+۱۷+۱۸+۱۸+۲۰+۵}{۶}=۱۶/۱۷$$

ب) محاسبهٔ میانه ۵, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۰

$$Q_۲=\frac{۱۸+۱۸}{۲}=۱۸$$

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش‌آموز در این درس را بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟ میانه، چون نمره ۵ باعث شده میانگین خیلی کم شود. درصورتی که این دانش‌آموز اکثر نمرات خوبی داشته است.

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. درصورتی که میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین درصورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم در غیر این صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

کار در کلاس

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۱۰۰ ۹۱ ۸۲ ۷۵ ۱۰۵ ۹۸ ۹۸ ۱۰۱ ۸۹ ۹۲ ۹۷ ۸۶

ــ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید: ۷۵ ۸۲ ۸۶ ۸۹ ۹۱ ۹۲ ۹۷ ۹۸ ۹۸ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۰۵

$$Q_۲=\frac{۹۲+۹۷}{۲}=۹۴/۵$$

ــ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

$$\overline{x}=\frac{۷۵+۸۲+۸۶+۸۹+۹۱+۹۲+۹۷+۹۸+۹۸+۱۰۰+۱۰۱+۱۰۵}{۱۲}=\frac{۱۱۱۴}{۱۲}\approx ۹۲/۸۳$$

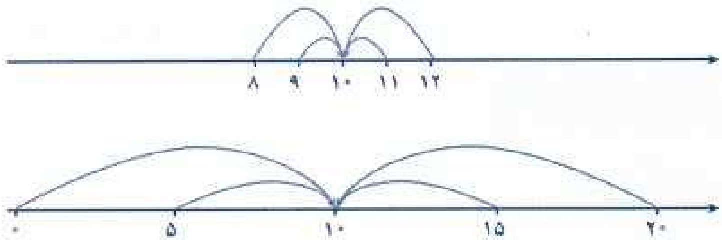
معیارهای پراکندگی

میانه و میانگین اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به‌عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

فعالیت

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است :



A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ۱۲ $\quad Q_2 = 10$

۰ ۵ ۱۰ ۱۵ ۲۰ $\quad Q'_2 = 10$

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

$\bar{x}_A = \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10 \qquad \bar{x}_B = \frac{0+5+10+15+20}{5} = \frac{50}{5} = 10$

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت می‌بینید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها نیز توجه شود.

دامنهٔ تغییرات

دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت بالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B به‌صورت زیر عمل کنید :

	کلاس B	کلاس A
کوچک‌ترین داده	۰	۸
بزرگ‌ترین داده	۲۰	۱۲
دامنه تغییرات	۲۰=۰−۲۰	۴=۸−۱۲

در فعالیت بالا دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

کار در کلاس

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱۵ ۸ ۹ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ $R = ۱۵ - ۱ = ۱۴$

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعدادکتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید. $R = ۱۵ - ۱ = ۱۴$

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ هردو با هم برابرند. چون دامنه تغییرات فقط به بزرگترین داده و کوچکترین داده بستگی دارد.

همان طور که می‌بینید، دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس

می‌خواهیم شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها پیدا کنیم. از آنجا که میانگین، معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشد و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

فعالیت

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

کلاس B	
y_i	$(y_i - \overline{Y})$
۰	$۰ - ۱۰ = -۱۰$
۵	$۵ - ۱۰ = -۵$
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$
۱۵	$۱۵ - ۱۰ = ۵$
۲۰	$۲۰ - ۱۰ = ۱۰$

کلاس A	
x_i	$(x_i - \overline{X})$
۸	$۸ - ۱۰ = -۲$
۹	$۹ - ۱۰ = -۱$
۱۰	$۱۰ - ۱۰ = ۰$
۱۱	$۱۱ - ۱۰ = ۱$
۱۲	$۱۲ - ۱۰ = ۲$

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین کلاس A $= (-۲) + (-۱) + ۰ + ۱ + ۲ = ۰$

مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین کلاس B $= (-۱۰) + (-۵) + ۰ + ۵ + ۱۰ = ۰$

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده است.

> همواره برای هرمجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدرمطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده کرد. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس B		
y_i	$(y_i-\overline{Y})$	$(y_i-\overline{Y})^۲$
۰	-۱۰	۱۰۰
۵	-۵	۲۵
۱۰	۰	۰
۱۵	۵	۲۵
۲۰	۱۰	۱۰۰

کلاس A		
x_i	$(x_i-\overline{X})$	$(x_i-\overline{X})^۲$
۸	-۲	۴
۹	-۱	۱
۱۰	۰	۰
۱۱	۱	۱
۱۲	۲	۴

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(۸-۱۰)^۲+\dots+(۱۲-۱۰)^۲=۱۰$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(۰-۱۰)^۲+\dots+(۲۰-۱۰)^۲=۲۵۰$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(۸-۱۰)^۲+\dots+(۱۲-۱۰)^۲}{۵}=\frac{۱۰}{۵}=۲$
میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(۰-۱۰)^۲+\dots+(۲۰-۱۰)^۲}{۵}=\frac{۲۵۰}{۵}=۵۰$

> میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود: $\sigma^۲=\frac{(x_۱-\overline{X})^۲+\dots+(x_N-\overline{X})^۲}{N}$

تذکر: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد دادهٔ مورد نظر است.

$\bar{x} = \frac{15+8+8+12+14+4+1}{7} = \frac{62}{7} \approx 8.85 \to 9$

$\sigma^2 = \frac{(6)^2+(1)^2+(1)^2+(3)^2+(5)^2+(5)^2+(8)^2}{7} = \frac{161}{7} = 23$

همان‌طور که در فعالیت قبل دیده می‌شود، واریانس بزرگ (کلاس B) نشان دهندهٔ دور بودن داده‌ها از میانگین آنها و واریانس کوچک (کلاس A) نشان دهندهٔ نزدیکی داده‌ها به میانگین آنهاست. چنانچه همه داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس آنها صفر خواهد بود. بنابراین واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

$\bar{x} = \frac{15+8+8+12+14+4+1+5+11}{9} = \frac{78}{9} \approx 8.67 \to 9$

کار در کلاس

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کاردرکلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

$\sigma^2 = \frac{(6)^2+(1)^2+(1)^2+(3)^2+(5)^2+(5)^2+(8)^2+(4)^2+(2)^2}{9} = \frac{181}{9} \approx 20.11$

واریانس	دامنه تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
23	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱
20.11	۱۴	۱۵ ۸ ۸ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱ ۵ ۱۱

همان‌طور که در این «کاردرکلاس»، دیده می‌شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

پس اختلاف از میانگین تغییری نمی‌کند

ویژگی‌های واریانس

* اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟ چون میانگین هم به همان مقدار اضافه می‌شود
* اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

چون میانگین هم در همان عدد ضرب می‌شود پس اختلاف از میانگین‌ها هم در همان عدد ضرب می‌شود و چون که اختلاف از میانگین‌ها به توان ۲ می‌رسد این عدد هم به توان ۲ می‌رسد.

کار در کلاس

۱) در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

$\sigma^2 = \frac{(62-58)^2+(55-58)^2+(57-58)^2+(61-58)^2+(55-58)^2}{5} = \frac{16+9+1+9+9}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$

۲) هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی $F = \frac{9}{5}C + 32$) جمع با ۳۲ تاثیری ندارد. ۹/۵ باید به توان دو ضرب شود.

$\sigma^2 = 6 \times \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{486}{25} = 19.44$

انحراف معیار

معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی فعالیت قبل در جدول زیر آمده است.

اشتباه تایپی

جذر واریانس	واریانس	دامنه تغییرات	میانه	میانگین	
~~۱/۶~~ $\sqrt{2} \approx 1.41$	~~۲/۵~~ 2	۴	۱۰	۱۰	کلاس A
~~۷/۹~~ $\sqrt{50} \approx 7.07$	~~۶۲/۵~~ 50	۲۰	۱۰	۱۰	کلاس B

همان‌طور که در جدول و نمودار بالا دیده می‌شود، واریانس پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حدانتظار نشان می‌دهد؛ زیرا در محاسبهٔ واریانس از میانگین مجذور اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود. درحالی‌که جذر واریانس شاخص بهتری برای پراکندگی حول میانگین داده‌ها است.

$\sigma^2_{a+x} = \frac{((a+x_1)-(a+\bar{x}))^2+\dots+((a+x_N)-(a+\bar{x}))^2}{N} = \frac{(\cancel{a}+x_1-\cancel{a}-\bar{x})^2+\dots+(\cancel{a}+x_N-\cancel{a}-\bar{x})^2}{N}$

$= \frac{(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_N-\bar{x})^2}{N} = \sigma^2_x$

$\sigma^2_{ax} = \frac{(ax_1-a\bar{x})^2+\dots+(ax_N-a\bar{x})^2}{N} = \frac{(a(x_1-\bar{x}))^2+\dots+(a(x_N-\bar{x}))^2}{N}$

$= \frac{a^2(x_1-\bar{x})^2+\dots+a^2(x_N-\bar{x})^2}{N} = a^2\frac{[(x_1-\bar{x})^2+\dots+(x_N-\bar{x})^2]}{N} = a^2\sigma^2_x$

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن‌را با نماد σ نمایش می‌دهند :

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\overline{X})^2+\cdots+(x_N-\overline{X})^2}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟ انحراف معیار ، چون واحد آن با واحد داده‌ها برابر است.

مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که با cv نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv=\frac{\sigma}{\overline{X}}$) است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود. مزیت این ضریب آن است که به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد. بنابراین اگر داده‌های مربوط به یک کمیت در دو جامعه با واحدهای متفاوت بیان شده باشد و یا با واحدهایی که نمی‌شناسیم بیان شده باشند می‌توان برای مقایسهٔ پراکندگی داده‌ها در دو جامعه از این ضریب استفاده کرد.

مثال : ضریب تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A و کلاس B در فعالیت قبل محاسبه شد.

اشتباه تایپی

	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کلاس A	۱۰	~~۱/۶~~ ۱٫۴۱	$\frac{\cancel{۱/۶}\ ۱٫۴۱}{۱۰}=\cancel{۰/۱۶}$ یا $\cancel{۱۶\%}$ ، ۰٫۱۴ ، ۱۴٪
کلاس B		۷٫۵۷	$\frac{\cancel{۷/۹}\ ۷٫۵۷}{۱۰}=\cancel{۰/۷۹}$ یا $\cancel{۷۹\%}$ ، ۰٫۷۵ ، ۷۵٪

معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کلاس A، که ضریب تغییرات کمتری دارد، تدریس کند.

کار در کلاس

دمای هوای یک هفتهٔ اسفند مشهد وکیش، به ترتیب به فارنهایت و سانتی‌گراد گزارش شده است. دمای هوای این هفته در کدام شهر از ثبات بیشتری برخوردار است (ضریب تغییرات کمتری دارد)؟

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
مشهد (فارنهایت)	۵۰	۵۳	۴۹	۴۱	۳۹	۳۷	۳۷
کیش (سانتی‌گراد)	۲۷	۲۶	۲۴	۲۳	۲۲	۲۲	۲۱

$\overline{x}_{\text{مشهد}}=\frac{۵۰+۵۳+۴۹+۴۱+۳۹+۳۷+۳۷}{۷}=\frac{۳۰۶}{۷}\approx ۴۳٫۷۱\to ۴۴$

$\sigma^2_{\text{مشهد}}=\frac{(۶)^2+(۹)^2+(۵)^2+(۳)^2+(۵)^2+(۷)^2+(۷)^2}{۷}=\frac{۲۷۴}{۷}\approx ۳۹٫۱۴$ $\sigma=\sqrt{۳۹٫۱۴}\approx ۶٫۲۵$

$\overline{x}_{\text{کیش}}=\frac{۲۷+۲۶+۲۴+۲۳+۲۲+۲۲+۲۱}{۷}=\frac{۱۶۵}{۷}\approx ۲۳٫۵۷\to ۲۴$

$\sigma^2_{\text{کیش}}=\frac{(۳)^2+(۲)^2+(۰)^2+(۱)^2+(۲)^2+(۲)^2+(۳)^2}{۷}=\frac{۳۱}{۷}\approx ۴٫۴۳$ $\sigma=\sqrt{۴٫۴۳}\approx ۲٫۱۰$

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

۲۲ ۲۴ [۴۸] ۵۱ ۶۰ [۷۰] ۷۵ ۸۰ [۸۷] ۹۳ ۹۵

چارک اول — میانه — چارک سوم

می‌بینید که ۲۵ درصد داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰ درصد داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵ درصد داده‌ها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.

محاسبهٔ چارک‌ها :

ابتدا میانه داده‌ها را بدست آورید

↓

برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

↓

برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

مثال : تعداد تصادف‌های اتومبیل‌ها در ۱۵ روز اول تابستان در شهری به‌صورت زیر گزارش شده است.

۱۲ ۱۰ ۱۵ ۲۳ ۱۴ ۲۷ ۱۶ ۳۴ ۴۳ ۴۱ ۳۲ ۱۸ ۲۵ ۳۱ ۱۹

چارک‌ها را مشخص کنید :

۱۰ ۱۲ ۱۴ [۱۵] ۱۶ ۱۸ ۱۹ [۲۳] ۲۵ ۲۷ ۳۱ [۳۲] ۳۴ ۴۱ ۴۳

چارک اول — میانه — چارک سوم

توجه به این نکته نیز ضروری است که با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصلهٔ بین دو دادهٔ متوالی قرار گیرند.

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۱۵-۱۵-۲۰-۲۰-۲۵-۳۰-۳۰-۳۰-۴۵-۴۵-۴۵-۴۵-۶۰-۶۰-۶۰-۶۰-۶۰-۶۰ Q_1 Q_2
۷۵-۷۵-۸۰-۹۰-۹۰-۹۰-۹۰-۱۰۰-۱۰۰-۱۱۵-۱۲۰-۱۲۰-۱۲۰-۱۸۰-۱۸۰-۲۰۰-۲۰۰ Q_3

خواندنی

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم ....، و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

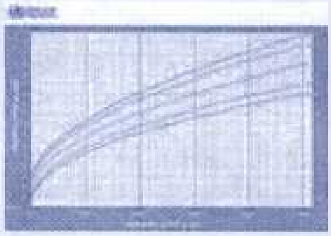
اگر دولت بخواهد یارانهٔ افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانهٔ افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به‌صرفه است؟

صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم ....و صدک نود و نهم) مقادیر نود و نه داده‌اند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست‌وپنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازهٔ قد باید ارزیابی شوند.

ـ منظور از صدک سوم قد چیست؟

ـ بر اساس جملهٔ فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟



کار در کلاس

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

$Q_2 = ۶۰ \quad Q_1 = ۴۵ \quad Q_3 = ۱۰۰$

تمرین

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید. با فرض مثبت بودن c

ـ اگر مقدار ثابت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد. نادرست

ـ اگر مقدار ثابت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود. نادرست

ـ اگر مقدار ثابت $\frac{1}{c}$ در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار $\frac{1}{c}$ برابر می‌شود. درست

ـ اگر مقدار ثابت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند. درست

۲ کارخانه‌ای دو نوع لاستیک تولید می‌کند. میانگین طول عمر برای نوع A و B به ترتیب ۱۱۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰۰ کیلومتر و انحراف معیار برای نوع A و B به ترتیب ۲۰۰۰ کیلومتر و ۱۰۰۰ کیلومتر است. کدام نوع لاستیک بهتر است؟

۳ جدول زیر پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

مینا	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
مریم	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

۴ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ـ۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

۵ در جدول زیر ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود.

(راهنمایی: $1m = 3/281\,ft$ ، فوت : ft ، متر : m)

	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟
پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

خواندنی

شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارها در یک جامعه به مصرف می‌رسد. این شاخص به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به‌شمار می‌رود. برای محاسبهٔ شاخص تورم، سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبهٔ شاخص تورم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$I_t = \frac{P_t^1 Q_t^1 + \cdots + P_t^{۳۸۵} Q_t^{۳۸۵}}{P_\circ^1 Q_\circ^1 + \cdots + P_\circ^{۳۸۵} Q_\circ^{۳۸۵}} \times ۱۰۰$$

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t

P_t^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان t

$P_\circ^i$: قیمت کالا یا خدمت iام در زمان پایه

Q_t^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان t

$Q_\circ^i$: مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان پایه

برای محاسبهٔ نرخ تورم (Inf_t) از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$Inf_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times ۱۰۰$$

I_t شاخص تورم در سال موردنظر و I_{t-1} شاخص تورم در سال قبل از آن است.

سال	شاخص تورم	نرخ تورم
۱۳۸۴	۳۹/۸۰	۱۰/۴
۱۳۸۵	۴۴/۵۳	۱۱/۹
۱۳۸۶	۵۲/۷۴	۱۸/۴
۱۳۸۷	۶۶/۱۲	۲۵/۴
۱۳۸۸	۷۳/۲۳	۱۰/۸
۱۳۸۹	۸۲/۳۱	۱۲/۴
۱۳۹۰	۱۰۰/۰۰	۲۱/۵
۱۳۹۱	۱۳۰/۵۴	۳۰/۵
۱۳۹۲	۱۷۵/۸۸	۳۴/۷
۱۳۹۳	۲۰۳/۲۴	۱۵/۶
۱۳۹۴	۲۲۷/۴۶	۱۱/۹

تهیه کننده:
گروه ریاضی دوره‌ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تمرین فصل ۷ – صفحه ۱۶۲

تمرین ۲ : $\bar{x}_B = ۱۰۰۰۰ , \sigma_B = ۱۰۰۰ \quad CV_B = \dfrac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \dfrac{۱۰۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۱$ $\qquad \bar{x}_A = ۱۱۰۰۰ , \sigma_A = ۲۰۰۰ \quad CV_A = \dfrac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \dfrac{۲۰۰۰}{۱۱۰۰۰} \approx ۰/۱۸$

لاستیک نوع B بهتر است چون ضریب تغییراتش کمتر است.

تمرین ۳ : الف)

$$\bar{x}_{maryam} = \frac{۱۵+۲۰+۲۵+۳۰+۳۵}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵ \qquad \bar{x}_{mina} = \frac{۲۳+۲۴+۲۵+۲۶+۲۷}{۵} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

ب)

$$\sigma^۲_{mina} = \frac{(۲۳-۲۵)^۲+(۲۴-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۲۶-۲۵)^۲+(۲۷-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۴+۱+۰+۱+۴}{۵} = \frac{۱۰}{۵} = ۲$$

$$\sigma^۲_{maryam} = \frac{(۱۵-۲۵)^۲+(۲۰-۲۵)^۲+(۲۵-۲۵)^۲+(۳۰-۲۵)^۲+(۳۵-۲۵)^۲}{۵} = \frac{۱۰۰+۲۵+۰+۲۵+۱۰۰}{۵} = \frac{۲۵۰}{۵} = ۵۰$$

پ) برای مینا چون پراکندگی پول توجیبی آن کمتر است.

تمرین ۴ :

$Q_۲ = ۱۵/۶$ $\qquad$ ۱۰/۴ , ۱۰/۸ , ۱۱/۹ , ۱۱/۹ , ۱۲/۴ , ۱۵/۶ , ۱۸/۴ , ۲۱/۵ , ۲۵/۴ , ۳۰/۵ , ۳۴/۷

$$\bar{x} = \frac{۱۰/۴+۱۰/۸+۱۱/۹+۱۱/۹+۱۲/۴+۱۵/۶+۱۸/۴+۲۱/۵+۲۵/۴+۳۰/۵+۳۴/۷}{۱۱} = \frac{۲۰۳/۵}{۱۱} = ۱۸/۵$$

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۰/۴-۱۸/۵)^۲+(۱۰/۸-۱۸/۵)^۲+۲(۱۱/۹-۱۸/۵)^۲+(۱۲/۴-۱۸/۵)^۲+(۱۵/۶-۱۸/۵)^۲}{۱۱}$$

$$+\frac{(۱۸/۴-۱۸/۵)^۲+(۲۱/۵-۱۸/۵)^۲+(۲۵/۴-۱۸/۵)^۲+(۳۰/۵-۱۸/۵)^۲+(۳۴/۷-۱۸/۵)^۲}{}$$

$$= \frac{۶۵/۶۱+۴۳/۵۶+۰/۰۱+۴۷/۶۱+۵۹/۲۹+۳۷/۲۱+۹+۱۴۴+۲۶۲/۴۴+۸/۴۱}{۱۱} = \frac{۶۷۷/۱۴}{۱۱} \approx ۶۱/۵۶$$

$$\sigma = \sqrt{۶۱/۵۶} \approx ۷/۸۵$$

تهیه کننده :
گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه و انجمن معلمان ریاضی ، استان خوزستان
khuzmath1394@chmail.ir

تمرین ۵ :

	مرکزی				کهگیلویه و بویر احمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
فاصله از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)
	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ ۵۶۰۳/۹۴۸ (ft)	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ ۵۸۲۳/۷۷۵ (ft)	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ ۶۰۰۴/۲۳ (ft)	$\downarrow \times ۳/۲۸۱$ ۶۲۹۹/۵۲ (ft)	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ ۱۸۷۰ (m)	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ ۹۹۰ (m)	$\downarrow \div ۳/۲۸۱$ ۲۲۰۰ (m)

الف) $\bar{x} = \dfrac{۱۷۰۸+۱۷۷۵+۱۸۳۰+۱۹۲۰}{۴} = \dfrac{۷۲۳۳}{۴} = ۱۸۰۸/۲۵ \quad \rightarrow \quad ۱۸۰۸$

ب)

$$\sigma^۲ = \frac{(۱۷۰۸-۱۸۰۸)^۲+(۱۷۷۵-۱۸۰۸)^۲+(۱۸۳۰-۱۸۰۸)^۲+(۱۹۲۰-۱۸۰۸)^۲}{۴} = \frac{(-۱۰۰)^۲+(-۳۳)^۲+(۲۲)^۲+(۱۱۲)^۲}{۴}$$

$$= \frac{۱۰۰۰۰+۱۰۸۹+۴۸۴+۱۲۵۴۴}{۴} = \frac{۲۴۱۱۷}{۴} \approx ۶۰۲۹/۲۵ \qquad \sigma = \sqrt{۶۰۲۹/۲۵} \approx ۷۷/۶۴$$

پ) شهرهای استان مرکزی ارتفاع بیشتری از سطح دریا دارند. $\qquad \bar{x} = \dfrac{۱۸۷۰+۹۹۰+۲۲۰۰}{۳} = \dfrac{۵۰۶۰}{۳} \approx ۱۶۸۶/۷$