

ابرار

- دانلود نمونه سوالات امتحانی
 - دانلود ۵۶۳ بحث
 - دانلود آزمون گنج و خلم چهارم
 - دانلود فیلم و مقاله آنلاین شی
 - دانلود و مشارکه



iranTooshe.Ir



@irantooche

IranTooshe







وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

هندسه(۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۳

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

سیدمحمد رضا احمدی، حمید رضا امیری، علی ابرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا حبیبی، محمد هاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، میر شهرام صدر، اکرم قابل رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمد پور (اعضای شورای برنامه‌ریزی) حمید رضا امیری، ابراهیم ریحانی، محمد رضا سید صالحی، هوشنگ شرقی و هادی مین باشیان (اعضای گروه تالیف) - محمد دانشگر (ویراستار)

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - مجتبی زند (مدیر هنری، طراح جلد و صفحه‌آرا) -

مریم دهقان‌زاده (رسام) - زهرا برهانی زرنجی، سوروش سعادت‌مندی، فاطمه گیتی جبین، فاطمه صفری ذوال‌فقاری، کبری اجابتی و حمید ثابت‌کلاچاهی (امور آماده‌سازی)

تهران: خیلان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۰۲۶۱-۹۸۸۳۰۹۶۶، دورنگار: ۰۲۶۱-۸۸۳۰۹۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیلان ۶۱

(داروپخش) تلفن: ۰۲۶۱-۴۴۹۸۵۱۶۰، دورنگار: ۰۲۶۱-۴۴۹۸۵۱۶۱، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

چاپ اول ۱۳۹۷

نام کتاب:

بدیدآورندۀ:

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

مدیریت آماده‌سازی هنری:

شناسه افزوده آماده‌سازی:

نشانی سازمان:

ناشر:

چاپخانه:

سال انتشار و نوبت چاپ:

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۱۱۳

ISBN: 978-964-05-3113-6



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
نقوی و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.
امام خمینی
«قدس سرّه الشریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌کیرند.



فهرست

۹	■ فصل ۱ : ماتریس و کاربردها
۱۰	درس اول : ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها
۲۲	درس دوم : وارون ماتریس و دترمینان
۳۳	■ فصل ۲ : آشنایی با مقاطع مخروطی
۳۴	درس اول : آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی
۴۰	درس دوم : دایره
۴۷	درس سوم : بیضی و سهمی
۶۱	■ فصل ۳ : بردارها
۶۲	درس اول : معرفی فضای \mathbb{R}^3
۷۷	درس دوم : ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها
۸۷	منابع

ایران‌لوسی

توشه‌ای برای موفقیت

پیشگفتار

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای داشن‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به داشن‌آموز برای کشف مفاهیم به طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص باید. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این گونه سوالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در استناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و داشن‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پژوهش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چراًی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را باید به سادگی از دست داد. فرایند‌هایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پژوهش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تالیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دیگران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دیگران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دیگران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از خدمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تالیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تالیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار^۱ و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۲ دارد، به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

ایران‌لوگو

توشه‌ای برای موفقیت

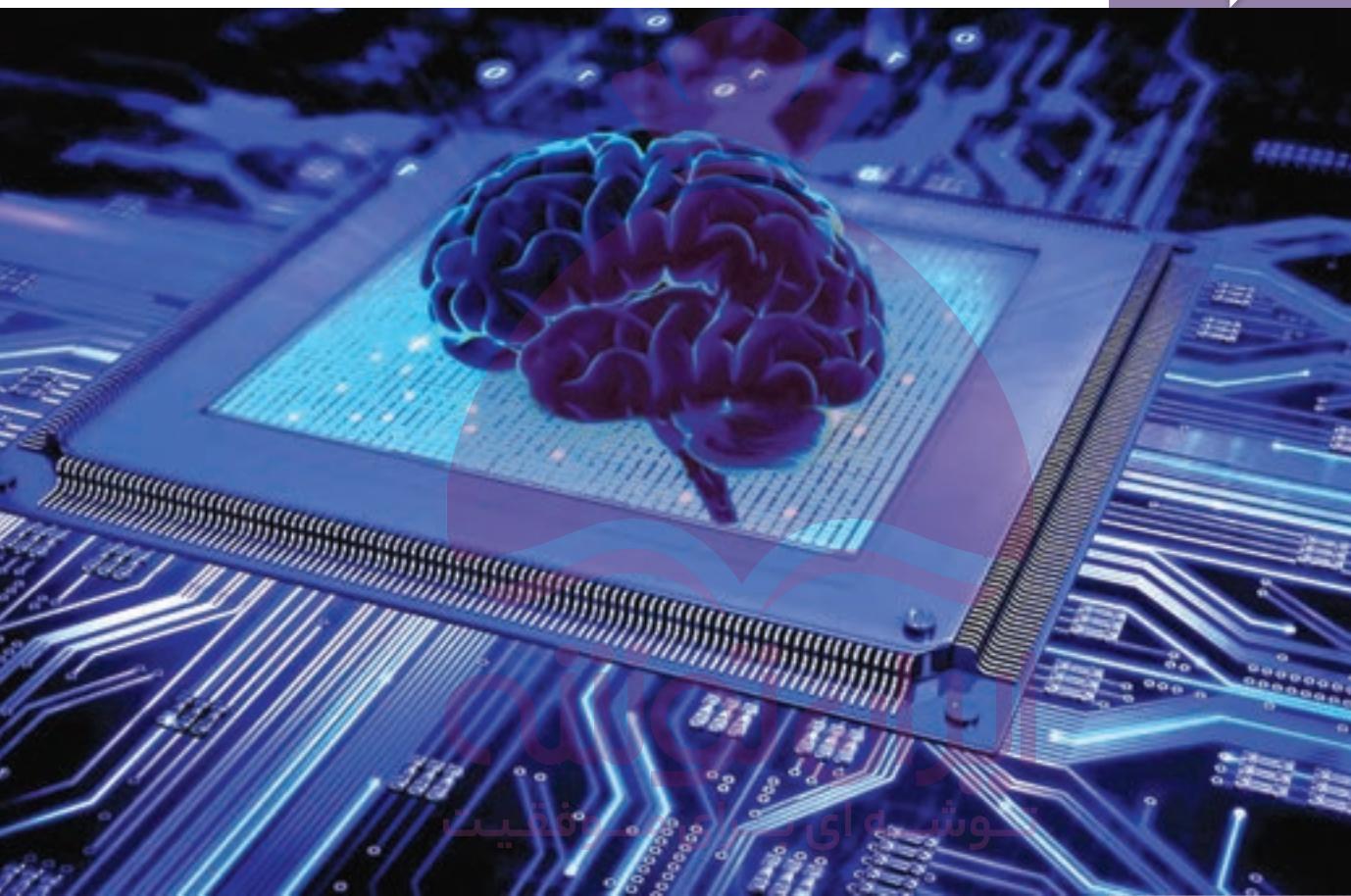
۱—mathrde@gmail.com

۲—<http://math-dept.talif.sch.ir>



فصل اول

ماتریس و کاربردها



یکی از کاربردی‌ترین مباحث و موضوع‌های ریاضی مبحث ماتریس است. امروزه از ماتریس به عنوان ابزاری قوی در شاخه‌های دیگر ریاضیات و به خصوص در فیزیک کواترم (هایزنبُرگ)، اولین شخصی که ماتریس‌ها را در فیزیک به کار برد، می‌گوید: تنها ابزاری که من در مکانیک کواترم نیاز دارم ماتریس‌ها می‌باشند. و در رایانه و علومی چون آمار، حسابداری و... استفاده می‌شود. ریاضیات کاربردی، در تمام گرایش‌هاییش نیاز مبرم به ماتریس دارد زیرا در بیشتر موارد، حل مسائل کاربردی و عملی با حل دستگاه‌های معادلات و نامعادلات پیوند می‌خورد و حل این دستگاه‌ها با ماتریس رابطه تنگاتنگ دارد.

درس اول

ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

اطلاعات مربوط به ۴ تیم اول حاضر در یک سری مسابقات فوتبال که به صورت رفت و برگشتی انجام می‌شود در جدول زیر آمده است:

امتیاز	مساوی	باخت	برد	
۳۰	۳	۳	۹	A تیم
۲۵	۴	۴	۷	B تیم
۲۴	۶	۳	۶	C تیم
۲۲	۴	۵	۶	D تیم

اگر این اطلاعات را به شکل آرایشی از اعداد و در داخل دو کروشه محصور کنیم، در این صورت یک ماتریس شامل ۴ سطر و ۴ ستون حاصل می‌شود که اگر آن را با حرف M نمایش دهیم، خواهیم داشت:

تعريف: هر نمایش مستطیلی شامل تعدادی سطر و ستون یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه آن ماتریس می‌نامیم.

معمولًاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A ، B و C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

مثال: ماتریس A ماتریسی شامل سه سطر و چهار ستون است. این ماتریس دارای $3 \times 4 = 12$ درایه است و مثلاً عدد حقیقی $\sqrt{2}$ درایه روی سطر اول و ستون چهارم است و درایه (-7) روی سطر دوم و ستون سوم قرار دارد.

در حالت کلی اگر ماتریسی چون A دارای m سطر و n ستون باشد می‌نویسیم $A_{m \times n}$ ماتریسی از مرتبه $m \times n$ (در n) است. برای هر درایه ماتریس و

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & -7 & 1 \\ -3 & 20 & \pi & 14 \end{bmatrix}$$

مفهوم ماتریس نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵) ریاضی دان ایرلندی و «کلی» ریاضی دان انگلیسی در نیمة اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبانی نظری این علم را کارل واپراشتراوس (۱۸۱۵-۱۸۹۷) و دیگران در نیمة دوم قرن نوزدهم و نیمة اول قرن بیست پایه‌ریزی کردند.

به منظور مشخص کردن جایگاه آن، دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند، a_{ij} یعنی درایه روی سطر i و ستون j زام.

ماتریس $A_{2 \times 2}$ و ماتریس $B_{m \times n}$ با درایه‌هایشان نمایش داده شده‌اند:

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

درایه b_{ij} را درایه عمومی ماتریس B می‌نامیم که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$ تغییر می‌کند. همه درایه‌های ماتریس B را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و برای اختصار می‌نویسیم ${}^1B = [b_{ij}]$.

مثال: اگر ماتریس $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ باشد و برای $i = j$ داشته باشیم $a_{ii} = 7$ و برای $i > j$ داشته باشیم $a_{ij} = 5$ و برای $i < j$ داشته باشیم $a_{ij} = -2$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش نمایش دهید.

$$\text{حل: } A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{پس } a_{11} = 7, a_{22} = 7, a_{12} = -2, a_{21} = 5.$$

	بیراهن	بلوز	شلوار
A	۲۴	۱۵	۷
B	۲۶	۱۹	۱۱
C	۱۷	۲۸	۲۲
D	۱۲	۳۱	۳۵

	A	B	C	D
شلوار	۲۴	۲۶	۱۷	۱۲
بلوز	۱۵	۱۹	۲۸	۳۱
بیراهن	۷	۱۱	۲۲	۳۵

اطلاعات مربوط به ۴ فروشگاه A , B , C و D در مورد تعداد شلوار، بلوز و بیراهن‌های موجود در هر فروشگاه، در جدول دو بعدی زیر آمده است این اطلاعات را یک بار با یک ماتریس 3×4 و یک بار با ماتریسی 4×3 نمایش دهید.

فروشگاه A	شلوار، ۲۴	بلوز و ۷ بیراهن
فروشگاه B	شلوار، ۲۶	بلوز و ۱۱ بیراهن
فروشگاه C	شلوار، ۱۷	بلوز و ۲۲ بیراهن
فروشگاه D	شلوار، ۱۲	بلوز و ۳۵ بیراهن

۱- اگر $m=n=1$ در این صورت ماتریس $[K]_{1 \times 1}$ را مساوی با عدد حقیقی K تعریف می‌کیم.

■ معرفی چند ماتریس خاص

۱- اگر در ماتریس A , تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبه $n \times n$ می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی مربعی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad \text{و} \quad C = [5]_{1 \times 1} = 5$$

در ماتریس‌های A و B قطرهای مشخص شده را قطر اصلی این دو ماتریس می‌نامیم و اگر $j = i$ در این صورت درایه a_{ij} روی قطر اصلی قرار دارد.

۲- اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد (فقط دارای یک سطر باشد) آن را یک ماتریس سطرنی می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی ماتریس‌های سطرنی هستند:

$$A = [1 \ 2]_{1 \times 2}, \quad B = [2 \ -1 \ 4 \ 5]_{1 \times 4}, \quad C = [7]_{1 \times 1} = 7$$

۳- اگر ماتریسی فقط دارای یک ستون باشد آن را ماتریس ستونی می‌نامیم.
ماتریس‌های زیر همگی ستونی هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ \pi \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}_{4 \times 1} \quad \text{و} \quad C = [114]_{1 \times 1} = 114$$

۴- ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر می‌توانند صفر باشند یا نباشند). ماتریس‌های زیر همگی قطری‌اند برای موفقیت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۵- اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند آن را یک ماتریس اسکالر می‌نامیم. ماتریس‌های زیر همگی اسکالر هستند:

ضرب عدد در ماتریس همانی

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad C = [2]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 6 & 15 \\ 3 & 0 \\ 18 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

مثل عدمی ماند که در ماتریس ضرب شده است

۶- ماتریس صفر، ماتریسی است که همه درایه‌های آن صفر باشند. ماتریس صفر را با نماد $\bar{0}$ نشان می‌دهیم. ماتریس صفر 2×2 است.

تساوی بین دو ماتریس: دو ماتریس هم مرتبه را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند به عبارت دیگر:

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij} \Leftrightarrow [a_{ij}] = [b_{ij}] \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

مثال: اگر دو ماتریس مساوی باشند $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ را مساوی $(x+y+z)$ بایابید.

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \\ z - 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 3, z = 6 \Rightarrow x + y + z = 15$$

■ جمع ماتریس‌ها

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر قرار باشد شرکت تولیدکننده لباس‌ها به هریک از ۴ فروشگاه مذکور ۲۰ شلوار، ۳۰ بلوز و ۵ پیراهن ارسال کند در این صورت اطلاعات مربوط به تعداد لباس‌ها در هر فروشگاه به صورت زیر است:

D	C	B	A	
۱۲+۲۰	۱۷+۲۰	۲۶+۲۰	۲۴+۲۰	شلوار
۳+۳۰	۲۸+۳۰	۱۹+۳۰	۱۵+۳۰	بلوز
۳۵+۵۰	۲۲+۵۰	۱۱+۵۰	۷+۵۰	پیراهن

اگر این جدول را با یک ماتریس 3×4 نمایش دهیم می‌توان آن را توسط مجموع دو ماتریس که درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم جمع شده‌اند نوشت:

$$\begin{bmatrix} 12 & 20 & 17 & 20 \\ 3 & 30 & 28 & 31 \\ 35 & 50 & 22 & 35 \end{bmatrix}_{3 \times 4} + \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 50 & 50 & 50 & 50 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 44 & 46 & 37 & 32 \\ 45 & 49 & 58 & 61 \\ 57 & 61 & 72 & 85 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

برای جمع یا تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یا از هم کم کیم که حاصل مجموع یا تفاضل A و B ماتریسی است چون C که از همان مرتبه A و B است. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A \pm B = [a_{ij}] \pm [b_{ij}] = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

کاردر کلاس

مانند نمونه ماتریس‌های A و B را در هر حالت با هم جمع یا تفیق کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) & 3+(-3) & (-1)+1 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 & (-1)+4 \\ 7+5 & 8+6 & 9+7 & (-1)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 3 \\ 12 & 14 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

(الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \dots$

(ب) $A = [1 \ -1 \ 3 \ 7], \quad B = [3 \ 2 \ -1 \ 4] \Rightarrow A + B = \dots$

(پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 3 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow A - B = \dots$

(ت) $A = [5], \quad B = [-7] \Rightarrow A + B = \dots$

(ث) دو ماتریس 3×3 و غیرصفر مثال بزنید که جمع آنها برابر با ماتریس صفر باشد.

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A + B = [4 \ 1 \ 2 \ 11] \quad (\text{ب})$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 & -5 \\ \sqrt{2}+1 & 7 & 2 & -5 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$A + B = [-2] = -2 \quad (\text{ت})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} = A + (-A) = \bar{0} \quad (\text{ث})$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

تعريف: برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی چون A آن عدد را در تمام

درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad r \in \mathbb{R} \Rightarrow rA = r[a_{ij}]_{m \times n} = [ra_{ij}]_{m \times n}$$

در کار در کلاس مربوط به فروشگاه‌های لباس اگر ماتریس حاصل را A بنامیم و قرار باشد در هر فروشگاه تمام سه نوع لباس تعدادشان دو برابر شود ماتریس حاصل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} 24 \times 2 & 26 \times 2 & 17 \times 2 & 12 \times 2 \\ 15 \times 2 & 19 \times 2 & 28 \times 2 & 31 \times 2 \\ 7 \times 2 & 11 \times 2 & 22 \times 2 & 35 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24+24 & 26+26 & 17+17 & 12+12 \\ 15+15 & 19+19 & 28+28 & 31+31 \\ 7+7 & 11+11 & 22+22 & 35+35 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 26 & 17 & 12 \\ 15 & 19 & 28 & 31 \end{bmatrix} = A + A = 2A$$

۱- در هر حالت طرف دوم تساوی های زیر را به دست آورید.

$$-1 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ \sqrt{2} & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$0 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}_{4 \times 3} \quad 0A = \bar{0}$$

$$7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

۲- هر یک از ماتریس های زیر را به صورت ضرب یک عدد در یک ماتریس بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 2 \\ 10 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \times \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس: اگر $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ماتریسی دلخواه باشد قرینه ماتریس A را با $(-A)$ نمایش داده و از ضرب (-1) در ماتریس A به دست می آید. واضح

$$(-A) + A = \bar{0}$$

$$A + (-A) = \bar{0}$$

خواص مهم جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس

اگر A ، B و C ماتریس های $m \times n$ (هم مرتبه) و r و s اعدادی حقیقی باشند خواص زیر همگی بر راحتی و با توجه به تعاریف جمع ماتریس ها و ضرب عدد در ماتریس قابل اثبات اند:

$$A+B=B+A \quad \text{(الف)}$$

خاصیت جابه جایی

$$A+(B+C)=(A+B)+C \quad \text{(ب)}$$

خاصیت شرکت پذیری

$$A+\bar{0}=\bar{0}+A=A \quad \text{(پ)}$$

خاصیت عضو خنثی برای عمل جمع ماتریس ها

$$(ت) A + (-A) = (-A) + A = \bar{O} \quad \text{خاصیت عضو قرینه}$$

$$(ث) r(A \pm B) = rA \pm rB$$

$$(ج) (r \pm s)A = rA \pm sA$$

$$ج) rA = rB, r \neq 0 \Rightarrow A = B$$

$$ح) A = B \Rightarrow rA = rB$$

مثال: فرض کنیم

در این صورت نشان می‌دهیم که $(-2)(A+B) = (-2)A + (-2)B$

$$\begin{aligned} -2(A+B) &= (-2)\left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right]\right) \\ &= (-2)\left[\begin{array}{ccc} 1+(-2) & 2+1 & 3+4 \\ (-1)+3 & 3+2 & (-5)+0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} (-2)(1+(-2)) & (-2)(2+1) & (-2)(3+4) \\ (-2)((-1)+3) & (-2)(3+2) & (-2)((-5)+0) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc} (-2) \times 1 + (-2) \times (-2) & -2 \times 2 + (-2) \times 1 & -2 \times 3 + (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-1) + (-2) \times 3 & -2 \times 3 + (-2) \times 2 & (-2) \times (-5) + (-2) \times 0 \end{array}\right] \\ &\stackrel{\substack{\text{توزیع پذیری ضرب} \\ \text{نسبت به جمع} \\ \text{در } \mathbb{R}}}{=} \left[\begin{array}{ccc} -2 \times 1 & -2 \times 2 & -2 \times 3 \\ (-2) \times (-1) & -2 \times 3 & (-2) \times (-5) \end{array}\right] \\ &+ \left[\begin{array}{ccc} (-2) \times (-2) & -2 \times 1 & -2 \times 4 \\ -2 \times 3 & -2 \times 2 & -2 \times 0 \end{array}\right] \\ &= (-2)\left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 \end{array}\right] + (-2)\left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{array}\right] = (-2)A + (-2)B \end{aligned}$$

در حالت کلی اگر فرض کنیم $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ و $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ در این صورت برای $r \in \mathbb{R}$

داریم:

$$\begin{aligned} r(A \pm B) &= r([a_{ij}] \pm [b_{ij}]) = r[a_{ij} \pm b_{ij}] = [r(a_{ij} \pm b_{ij})] \\ &= [ra_{ij} \pm rb_{ij}] \quad \text{توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع در } \mathbb{R} \\ &= [ra_{ij}] \pm [rb_{ij}] \quad \text{تعريف جمع (تفاضل)} \\ &= r[a_{ij}] \pm r[b_{ij}] \quad \text{تعريف ضریب عدد در ماتریس} \\ &= rA \pm rB \end{aligned}$$

۱- برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و دو عدد حقیقی $r = 3$ و $s = -2$ برقراری خاصیت (ج) را تحقیق کنید.

۲- درستی خاصیت (ج) را در حالت کلی ثابت کنید.

▶ ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند در این صورت $A \times B$ تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در B ضرب کرده و حاصل این ضربها را باهم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی 1×1 یا عدد حقیقی حاصل می‌شود.

مثال: اگر $[A] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ و $[B] = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ در این صورت داریم :

$$A \times B = [-1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + (-5) \cdot (-1)]$$

$$= [(-1) \times (-2) + 2 \times 3 + 0 \times 7 + 3 \times (-1) + (-5) \times (-2)]$$

$$= [2 + 6 + 0 + (-3) + 10] = [15] = 15$$

ابران توپی

توشه‌ای برای موفقیت

یک ماتریس سطری 1×3 مانند A و یک ماتریس ستونی 1×3 مانند B طوری تعریف کنید که $A \times B = -7$

▶ ضرب ماتریس در ماتریس

اگر A ماتریسی $m \times p$ و B ماتریسی $p \times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای B برابر باشد) در این صورت $A_{mp} \times B_{pn}$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $C_{mn} = [c_{ij}]$ ماتریسی C مانند $A_{mp} \times B_{pn}$ بوده که درایه روی سطر i ام و ستون j ام در آن یعنی، c_{ij} از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید، یعنی

حل سوال اکار در کلاس صفحه ۱۷

$$(r+s)A = (\mu + (-\nu))A = 1 \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$rA + sA = \mu \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} + (-\nu) \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\nu & -\nu \\ \nu & -\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$(r-s)A = (\mu - (-\nu))A = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$rA - sA = \mu \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} - (-\nu) \times \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ -\mu & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu & \nu \\ -\nu & \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}$$

حل سوال ۲ کارد کلاس صفحه ۱۷:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

$$(r \pm s)A = (r \pm s)[a_{ij}]_{m \times n} = [(r \pm s)a_{ij}] = [ra_{ij} \pm sa_{ij}] = [ra_{ij}] \pm [sa_{ij}] = r[a_{ij}] \pm s[a_{ij}] = rA \pm sA$$

حل کار در کلاس پاییں صفحه ۱۷: این سوال با سه مثال مختلف حل شد

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = [-1 - 2 - 4] = [-v] = -v$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -v \\ w \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -v \\ w \\ 5 \end{bmatrix} = [-v + 0 + 0] = [-v] = -v$$

$$A = \begin{bmatrix} w & 0 & v \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} w & 0 & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = [0 + 0 - v] = [-v] = -v$$

$$c_{ij} = A \text{ سطر } i \times B \text{ سطر } j = A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 3}$$

$$\Rightarrow C_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}] \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{bmatrix} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \dots + a_{ip} \times b_{pj}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

مثال: اگر

اگر فرض کنیم، $A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 3} = C = [c_{ij}]_{3 \times 2}$ در این صورت ماتریس حاصل ضرب یعنی ماتریسی C 3×2 بوده و داریم:

$$c_{11} = A \text{ سطر اول} \times B \text{ سطر دوم} = [1 \ 2 \ -1] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \times 3 + 2 \times 2 + (-1) \times 5 = \dots$$

$$c_{22} = A \text{ سطر سوم} \times B \text{ سطر دوم} = [-1 \ -2 \ 4] \times \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = (-3) + (-4) + 2 \circ = \dots$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2-4 & 3+4-5 \\ 6-2+4 & 9+4+5 \\ -2+2+16 & -3-4+20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & 18 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$$

آیا ضرب $(B \times A)$ امکان پذیر است؟ چرا؟

خیر زیرا ضرب مولفه سوم ستون ها عددی نداریم که ضرب کنیم

کاردرکلاس

۱- برای هر حالت $A \times B$ و $B \times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

(الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \dots$

(ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots, B \times A = \dots$

(پ) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{1 \times 3} \Rightarrow A \times B = \dots, B \times A = \dots$

(ت) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1+1+1 & ۲+۰+۴ & -۱+۲+۰ & -۱+۲+۰ \\ ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ & ۰+۰+۰ \\ ۱-۲+۹ & ۲+۰+۳ & ۳+۲-۳ & -۱-۴+۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۴ & ۶ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵ \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲-۳ & -۱+۰ & ۱-۵ \\ ۴+۳ & -۲+۰ & ۲+۵ \\ ۶-۶ & -۳+۰ & ۳-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۱ & -۴ \\ ۷ & -۲ & ۷ \\ ۰ & -۳ & -۷ \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲-۲+۳ & -۲-۱-۲ \\ ۳+۰+۱۵ & -۳+۰-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۱۸ & -۱۳ \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ -۲ & -۳ & -۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \end{bmatrix} \quad B \times A = [۲-۳+۸] = [۷] = ۷ \quad (\text{د})$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -۱+۱+۰ & ۲-۲+۰ & -۲+۲+۰ \\ -۲+۱+۱ & ۴-۲-۲ & -۴+۲+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad (\text{ه})$$

$$A \neq O, B \neq O, A \times B = \bar{O}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

قسمت (ت) را با این حکم در اعداد حقیقی، که «اگر $a \times b = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ » مقایسه کنید.

۲- اگر A ماتریسی 3×5 باشد در این صورت در هریک از حالت‌های زیر مشخص کنید که $A \times B$ و $B \times A$ قابل تعریف است یا خیر و در صورت تعریف مرتبه آن را بیابید:

$$B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$$

$$B = [b_{ij}]_{2 \times 5}$$

$$B = [b_{ij}]_{5 \times 2}$$

$$B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$$

$$B = [b_{ij}]_{5 \times 5}$$

﴿ خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

کاردرکلاس

۱- فرض کنید $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $(A \times B)$ و $(B \times A)$ را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

نتیجه

در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جایه‌جایی .. ندارد

۲- ماتریس اسکالار $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را از چپ و راست در ماتریس $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ضرب کرده و حاصل ضرب‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس اسکالار روبرو که آن را ماتریس واحد یا همانی مرتبه n می‌نامیم، عضو خشی برای عمل ضرب ماتریس‌های مربعی مرتبه n است یعنی:

$$A_{n \times n} \times I_n = I_n \times A_{n \times n} = A_{n \times n}$$

۳- اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ در این

صورت درستی تساوی $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ را بررسی کنید.

(الف) $A \times B$ ✗ $3 \times A$ ✗

ب) $A \times B = C_{3 \times 3}$

ث) $A \times B = C_{3 \times 5}$

(ب) $A \times B$ ✗ $B \times A$ ✗

$B \times A = D_{5 \times 3}$

ت) $A \times B = C_{3 \times 5}$ $B \times A$ ✗

ایران نویش
توشه‌ای برای موفقیت

سوال ۱:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -14 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

سوال ۲:

$$I_r \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow I_r \times A = A \times I_r$$

$$A \times I_r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$I_m \times A_{m \times n} = A_{m \times n}$ $A_{m \times n} \times I_n = A_{m \times n}$ اگر $A \times I$ تعریف شده باشد

مسئلہ:

$$B + C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mu & \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ 1 & \mu \end{bmatrix}$$

$$A \times (B + C) = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ -1 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ 1 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & 1\mu \\ -\mu & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix} (1)$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ -1 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mu & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ -1 & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$A \times C = \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ -1 & 0 \\ \mu & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & -\mu \\ \mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1), (\mu) \Rightarrow A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$$

ایران نویس

توشه‌ای برای معرفتی

$$B \times C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ -3 & -2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

ایران نجیب

توضیحات و فرمات

در حالت کلی اگر $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ و $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ در این صورت ضرب ماتریس A در مجموع $(B+C)$ خاصیت توزیع پذیری یا پخشی دارد یعنی:

$$A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C)$$

۴- با همان ماتریس‌های معرفی شده در شماره (۳) درستی تساوی زیر را بررسی کنید:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

در حالت کلی اگر $C = [c_{ij}]_{k \times n}$ و $B = [b_{ij}]_{p \times k}$ و $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ در این صورت ضرب این سه ماتریس خاصیت شرکت‌پذیری دارد یعنی:

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

تمرین

۱- اگر $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ ماتریسی باشد به طوری که برای $j=i$ داشته باشیم $a_{ij}=7$ و برای $j>i$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $j< i$ داشته باشیم $a_{ij}=i^j$ در این صورت ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 2x+y \\ z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A=B$ در این صورت حاصل $(x+y+z)$ را بیابید.

۳- دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ مانند \bar{O} مثال بزنید که $A \neq \bar{O}$ و $B \neq \bar{O}$ ولی $AB = \bar{O}$

ایران تویزه

توشه‌ای برای موفقیت

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد به عبارت دیگر نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$.

۵- اگر A ماتریسی مربعی باشد و توان‌های A را به صورت $A^1=AA^0$ و $A^2=AA^1$ و ... و $A^n=AA^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$ $n > 1$) در این صورت با فرض $A^0=I$ حاصل A^2 و A^3 و A^4 را بیابید.

حل تمرینات درس اول فصل اول

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7 & i=j \\ i+j & i>j \\ i^r & i<j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 2x + y &= 5 \end{aligned} \rightarrow 4x = 8 \rightarrow x = 2, y = 1$$

سوال ۱:

سوال ۲:

سوال ۳:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

توضیح این ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 28 & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC \neq B = C$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 16 \\ 28 & 48 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = AC \neq B = C$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = [b_{ij}]_{r \times r} \quad C = [c_{ij}]_{r \times r}$$

$$AB = AC = \bar{O} \neq B = C$$

$$AB - AC = \bar{O} \rightarrow A(B - C) = \bar{O} \neq \begin{cases} A = \bar{O} \\ B = C \end{cases}$$

توضیه ای باید موقوف قیمت

حل تمرین ۵

$$A^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^r = A^r \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A$$

$$A^r = I \quad A^r = A \quad A^v = A$$

ابراهیم

حل تمرین ۶

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mu & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \mu a & -1 + \mu a \\ b - \mu & -\mu b - 1 \end{bmatrix}$$

موفقیت برای تو!

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + \mu a = 0 \rightarrow a = 1 \\ b - \mu = 0 \rightarrow b = \mu \end{cases}$$

۶- اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۷- اگر $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$ و $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ به صورت زیر معرفی شده باشند، ابتدا A و B را با درایه‌هایشان نوشت و سپس $A \times B$ و $B \times A$ را به دست آورید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i-1 & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+2 & i<j \end{cases}$$

۸- اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & & & \\ & r_2 & & \\ & & r_3 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹- اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالار باشد و B ماتریسی هم مرتبه A در این صورت
 (الف) برای $A \times B$ و $B \times A$ قوانینی تعريف کنید.
 (ب) آیا تساوی $A \times B = B \times A$ برقرار است؟

۱۰- اگر A و B ماتریس‌های 3×3 و تعویض پذیر باشند $(A \times B = B \times A)$ ثابت کنید.

$$(A + B)^T = A^T + 2AB + B^T \quad (\text{الف})$$

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 \quad (\text{ب})$$

۱۱- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 4 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$ مفروض باشد. حاصل A^3 را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل تمرین ۷:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 19 & 7 \end{bmatrix}$$

ایران توچی

توضیه ای برای مفهوم قیمت

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

سطر اول B در r_1 ضرب می شود

سطر دوم B در r_2 ضرب می شود

سطر سوم B در r_3 ضرب می شود

$$B \times A = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & r_1 b_{13} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & r_2 b_{23} \\ r_3 b_{31} & r_3 b_{32} & r_3 b_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

ستون اول B در r_1 ضرب می شود

ستون دوم B در r_2 ضرب می شود

لوشه ای برای موفقیت

ستون سوم B در r_3 ضرب می شود

حل تمرین:

$$A = \begin{bmatrix} r & o & o \\ o & r & o \\ o & o & r \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} r & o & o \\ o & r & o \\ o & o & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} = rB$$

$$\Rightarrow A \times B = B \times A = rB$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & o & o \\ o & r & o \\ o & o & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_{11} & rb_{12} & rb_{13} \\ rb_{21} & rb_{22} & rb_{23} \\ rb_{31} & rb_{32} & rb_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow rB$$

گل تمرین ۱۰:

$$(A + B)^r = (A + B)(A + B) = A^r + AB + BA + B^r \xrightarrow{A, B} A^r + \mu AB + B^r$$

تغییض پذیرند

گل تمرین ۱۱:

$$(A - B)(A + B) = A^r - AB + BA + B^r \xrightarrow{A, B} A^r - B^r$$

تغییض پذیرند

$$A^{\mu} = A \times A^r = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^r & 0 & 0 \\ 0 & r_2^r & 0 \\ 0 & 0 & r_3^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{\mu} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \Rightarrow A^{\mu} = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \mu \gamma \end{bmatrix}$$

توشهای برای موقوعیت

وارون ماتریس و دترمینان

وارون ماتریس‌ها

همان‌طور که در اعداد حقیقی وارون هر عدد حقیقی مانند $a \neq 0$ را با $\frac{1}{a}$ نشان می‌دهیم و همواره $\frac{1}{a} \times a = 1$ (عدد یک عضو ختنی برای عمل ضرب است)

برای هر ماتریس مربعی مانند A , وارون ماتریس A (در صورت وجود) ماتریسی است چون $B = B \times A = I$. در این صورت B را وارون A نامیم و با A^{-1} نشان می‌دهیم.

از وارون ماتریس‌ها در حل دستگاه‌های معادلات استفاده خواهد شد.

مسئله: نشان دهید ماتریس $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ است. $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون یک ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (در صورت وجود)

باید ماتریسی چون $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ بیاییم طوری که $A \times B = B \times A = I$ یا

که این تساوی x, y, z, t را بر حسب a, b, c, d نتیجه

خیر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{آیا دو ماتریس} \quad \text{وارون یکدیگرند؟ چرا؟}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA \neq I$$

$$\text{می‌دهد و ماتریس } B \text{ یا } A^{-1} \text{ به صورت می‌آید}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

که با توجه به تعریف ضرب عدد در ماتریس می‌توان نوشت:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

عدد $(ad-bc)$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم و با نماد $|A|$ (می‌خوانیم، دترمینان A) نشان می‌دهیم بنابراین می‌توان گفت:

نتیجه

$$\text{اگر } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ در این صورت وارون ماتریس } A \text{ یعنی } A^{-1} \text{ از تساوی زیر به دست می‌آید:}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تذکر: با توجه به قاعدة محاسبه A^{-1} واضح است که اگر $|A| \neq 0$ آنگاه A^{-1} وجود ندارد. (A وارون پذیر نیست). به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای اینکه A^{-1} وجود داشته باشد (A وارون پذیر باشد) آن است که $|A| \neq 0$.

مثال: وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آوردید.

چون $|A| = 2 \neq 0$ پس A دارای وارون است (وارون پذیر است) و داریم

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

پاسخ به دست آمده را امتحان کنید.

قضیه یکتایی وارون: وارون هر ماتریس مرتبی (در این کتاب فقط وارون ماتریس های 2×2 محاسبه شده است) در صورت وجود منحصر به فرد است.

ابتدا: فرض کنیم ماتریس های B و C هر دو وارون A باشند ثابت می کنیم $B = C$

$$AB = BA = I$$

$$AC = CA = I$$

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

حل دستگاه معادلات (دومعادله و دومجهولی) با استفاده از ماتریس وارون یکی از کاربردهای ماتریس و ماتریس وارون در حل دستگاه های معادلات خطی است که ما در این درس و با استفاده از ماتریس وارون فقط به حل دستگاه های دو معادله و دو مجهول می پردازیم.

فعالیت

دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. می‌توان از ماتریس‌ها کمک گرفت و
دستگاه را به صورت یک تساوی ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 7x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (1)$$

از طرفی با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها داریم:

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 7x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

معادله ماتریسی اخیر معادل با دستگاه دو معادله و دو مجهول مفروض است.

۱- حال اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ را ماتریس ضرایب می‌نامیم در این صورت اولاً نشان دهید ماتریس A وارون دارد (وارون پذیر است) و در ثانی A^{-1} را بیابید.

$$|A| = 2 \cdot 4 - 7 \cdot 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ وارون پذیر است}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

۲- معادله ماتریسی معادل با دستگاه را از سمت چپ در A^{-1} ضرب کنید و با توجه به تعریف تساوی بین دو ماتریس، جواب دستگاه یعنی x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

نتیجه

در حالت کلی اگر $B = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم و $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ماتریس مجهولات دستگاه دو معادله و دو مجهول باشند در این صورت دستگاه مذکور به شکل معادله $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$ ماتریسی $AX = B$ نوشته شده و در صورتی که ماتریس A وارون پذیر باشد یا $|A| \neq 0$ از چپ در معادله فوق می‌توان مجهولات را به صورت زیر بدست آورد:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال: دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل: ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و چون $|A| = 2 \neq 0$ پس A^{-1} وجود دارد. با جایه‌جایی درایه‌های روی قطر اصلی و قرینه کردن درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس A و تقسیم درایه‌های ماتریس حاصل بر $|A| = 2$ ، ماتریس A^{-1} را بدست می‌آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-4}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{معرف تساوی ماتریس ها}} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

تذکر: هدف از حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول، پیدا کردن x و y است که در هر دو معادله دستگاه که هر کدام معادله یک خط هستند، صدق کند و تعبیر هندسی حل دستگاه دو معادله و دو مجهول پیدا کردن مختصات محل برخورد دو خط است.

یادآوری

در واقع یک دستگاه دو معادله دو مجهولی از دو معادله تشکیل شده است که هر یک معادله یک خط هستند. لذا با دیدگاه هندسی می‌توان گفت وقتی صحبت از جواب این دستگاه می‌کنیم منظور یافتن نقطه‌ای است که روی هر دو خط واقع شده باشد. بنابراین سه حالت زیر را برای یک دستگاه می‌توان در نظر گرفت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

الف) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط متقاطع‌اند و دستگاه یک جواب یکتا دارد که مانند مثال قبل به دست می‌آید.

ب) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ در این صورت دو خط موازی‌اند و یکی از دو حالت زیر می‌تواند رخ دهد:

۱- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و هیچ نقطه مشترکی ندارند لذا دستگاه هیچ جوابی ندارد.

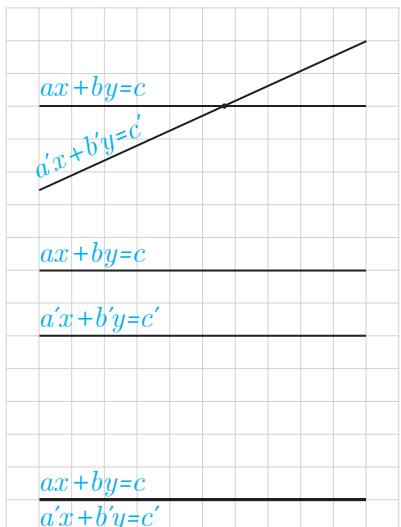
۲- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در این حالت دو خط موازی‌اند و روی یکدیگر واقع‌اند یا به عبارتی هر دو معامله یک خط را نشان می‌دهند؛ لذا دستگاه تعداد بی‌شمار جواب دارد و هر نقطه‌ای که در یکی از معادلات صدق کند، در دیگری هم صدق می‌کند.

نتیجه

اگر ماتریس ضرایب دستگاه را $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ در نظر بگیریم در این صورت با توجه به (الف) و (ب) می‌توان گفت:

(I) اگر $|A| \neq 0$ آنگاه دستگاه دارای یک جواب منحصر به فرد است (دو خط متقاطع‌اند).

(II) اگر $|A| = 0$ در این صورت یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی‌اند) و یا اینکه دستگاه بی‌شمار جواب دارد (دو خط برهم منطبق هستند).



ایران تولید

کاردرکلاس

دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -4x + 6y = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

۱- هریک از معادلات دستگاه معادله یک خط در صفحه است. شبیه هریک از این دو خط را معلوم کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا این دو خط بر هم منطبق هستند؟

۲- ماتریس ضرایب دستگاه را تشکیل دهید، آیا این ماتریس وارون پذیر است؟ چرا؟

۳- سوال‌های ۱ و ۲ را در مورد دستگاه $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ -3x + 9y = -6 \end{cases}$ پاسخ داده و اگر A ماتریس ضرایب یک دستگاه باشد و $|A| = 0$ برای تعداد جواب‌های آن دستگاه دو حالت نتیجه بگیرید.

سوال ۱:

$$\begin{cases} ۴x - ۳y = ۳ \Rightarrow m = \frac{۴}{۳} \\ -۴x + ۵y = ۱ \Rightarrow m = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

$\frac{۴}{۳} = \frac{-۳}{۵} \neq \frac{۳}{۱} \Rightarrow$ دو خط با هم موازی نباشند

سوال ۲:

ایران تو شه

توضیحاتی برای موقوعیت

$|A| = ۴ \times ۵ - (-۳)(-۴) = ۲۰ - ۱۲ = ۸ \Rightarrow$ ماتریس دارون بزرگ است

سوال ۳:

$$\begin{cases} x - \mu y = \mu \Rightarrow m = \frac{1}{\mu} \\ -\mu x + q y = -6 \Rightarrow m = \frac{1}{\mu} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\mu \\ -\mu & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \times q - (-\mu)(-\mu) = q - \mu^2 = 0 \Rightarrow$$

ماتریس وارون پذیر نیست

$$\frac{1}{-\mu} = \frac{-\mu}{q} = \frac{\mu}{-6}$$

د خط ماقم موازند و رسم مطبق بستند

ایران تو شو

چون د خط بیشتر مطبق بستند پل دستگاهی فتحای جواب دارد

دترمینان و کاربردهای آن

وقتی به تاریخ پیدایش مفهوم ماتریس برمرگردیم مشاهده می‌کنیم که مفهوم دترمینان که امروزه به عنوان بخشی از مفهوم ماتریس مطرح می‌شود، اندکی پیش از مفهوم ماتریس به وجود آمده است. نظریه دترمینان در نیمه دوم قرن هجدهم و نیمه اول قرن نوزدهم، با بررسی‌ها و پژوهش‌های «گابریل کرام» ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۵۲-۱۷۰۴) در مسائل مربوط به حل و بحث دستگاه‌های معادلات خطی پدید می‌آید.

به هر ماتریس مربعی می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که دترمینان آن ماتریس نامیده می‌شود. دترمینان یک ماتریس اطلاعات مفیدی راجع به خود ماتریس و خواص آن به ما خواهد داد، از جمله اینکه: وارون‌پذیری یک ماتریس از مقدار دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود. همان‌طور که ملاحظه شد، در حل دستگاه‌ها و بحث در وجود یا عدم وجود جواب برای دستگاه از دترمینان استفاده می‌شود. دترمینان در هندسه برای محاسبه مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار به کار می‌رود. به کمک دترمینان ماتریس‌های 3×3 می‌توان حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار را به دست آورد و نیز در محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده کرد که در این درس به بعضی از این کاربردها خواهیم پرداخت.

تعريف: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبه n باشد ($1 \leq n \leq 3$) در این صورت

دترمینان ماتریس A را با نماد $\det(A) = |A|$ نمایش می‌دهیم و داریم:
(ما در این کتاب دترمینان را برای ماتریس‌های حداکثر از مرتبه ۳ تعریف می‌کنیم).

$$\text{I) } A = [k]_{1 \times 1} \Rightarrow |A| = k \quad \text{II) } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$\text{III) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} \times (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{برای هر ماتریس } 3 \times 3 \text{ دلخواه می‌توان دترمینان } A \text{ بر حسب سطر اول} \\ \text{به دست آورد که همواره حاصل، عددی حقیقی و منحصر به فرد است.}$$

در واقع دترمینان ماتریس‌های 2×2 را می‌توان تابعی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه ماتریس‌های 2×2 و هم‌دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی یعنی \mathbb{R} است.

$$\det: M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

منظور از $M_{2 \times 2}$ مجموعه ماتریس‌های 2×2 است.

مثال: دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید :

$$\text{(الف) } A = [-7] \rightarrow |A| = -7$$

$$\text{(ب) } A = [\sqrt{2}] \rightarrow |A| = \sqrt{2}$$

$$\text{(پ) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = [(4 \times 4) - (2 \times 8)] = 0$$

$$(ت) A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow |A| = (-1)^0 - (1^2) = -22$$

$$(ث) A = \begin{bmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

مثال: دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را بحسب یک سطر و یک ستون دلخواه به دست آورید:

$$(الف) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر اول

$$|A| = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (0 - 12) + (0 + 6) + 2 \times (8 + 2) = (-12) + 6 + 20 = 14$$

برحسب ستون سوم

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (8 + 2) - 3 \times (4 - 2) + 0 = 20 - 6 = 14$$

تذکر: همان‌طور که در قسمت (الف) مشاهده کردید وقتی در یک ماتریس روی یک سطر یا یک ستون، درایه‌های صفر هستند دترمینان آن ماتریس برحسب همان سطر یا ستون راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$(ب) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر دوم

$$|A| = 0 + 0 + 4 \times (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -4 \times (8 - 3) = -20$$

برحسب ستون اول

$$|A| = 2 \times (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (-3) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (0 - 16) - 3 \times (-4 - 0) = -32 + 12 = -20$$

(درایه ۲) روی سطر اول و ستون اول قرار دارد و درایه (۳) روی سطر سوم و ستون اول واقع است.

دترمینان ماتریس زیر را باید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 13 + 6 = 19$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3

در این روش (فقط برای ماتریس‌های 3×3 قابل استفاده است). دو ستون اول و دوم ماتریس را در کارش می‌نویسیم و $|A|$ برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو قطر موازی آن (مطابق شکل)، منهاج مجموع حاصل ضرب های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو قطر موازی با آن به صورت زیر:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

$$|A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

بی‌شمار ماتریس می‌توان ساخت

مثال: دترمینان ماتریس A را برحسب سطر سوم و با استفاده از دستور ساروس به دست آورید (کدام روش راحت‌تر است؟).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

برحسب سطر سوم

$$|A| = (-1) \times (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-2) \times (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = -1 \times (9 - 8) + 2 \times (6 - 4) + 1 \times (4 - 3) = -1 + 4 + 1 = 4$$

$$\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{array}$$

$$|A| = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = -13 + 17 = 4$$

توضیحاتی برای موفقیت

کاردکلاس

۱- ماتریس‌های $A \times B$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس A را به دست آورده و برقراری تساوی $|AB| = |A||B|$ را بررسی کنید.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 25 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 2 \times 11 - 0 \times 25 = 22$$

$$|A| = 2 \times 4 - (-1) \times 3 = 8 + 3 = 11 \Rightarrow |AB| = |A||B|$$

$$|B| = 3 \times 2 - 1 \times 4 = 2$$

۲- ماتریسی 3×3 چون A بنویسید طوری که $= -6 = |A|$ ، سپس ماتریس A^* را محاسبه و $|A^*|$ را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A^*| = 2 \times 9 \times 1 = 18 \Rightarrow |A^*| = |A|^*$$

$$|A| = -6 \Rightarrow |A^*| = 36$$

-۳ اگر $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را بحسب سطر اول یا دستور ساروس محاسبه کنید و عدد حاصل را با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی A مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{a \cdot b} |A| = (abc + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = abc$$

نتیجه

اگر A ماتریسی 3×3 و اسکالر باشد و $a_{11} = 4$ در این صورت $|A|$ را باید.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{4 \cdot 0} |A| = (64 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = 64$$

۱- دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با جاصل پیرب اعداد روی قطر اصلی

۲- دترمینان ماتریس مربعی صفر، ... صفر است.

-۴ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ در این صورت $|A|$ را به دست آورید.

$$A = F \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2 \times 5 \times 10 = 100$$

تمرین

۱- اگر $[A \ B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $|AB| = 1$ در این صورت $|A|$ و $|BA|$ را به دست آورید.

۲- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ در این صورت $|A^T|$ را به دست آورید.

ایران تولید

توشه‌ای برای موفقیت

-۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 5|A| & |A| \\ 5 & 4|A|^2 \end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $-2 - |A|^3$ را باید.

-۴- دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ را بحسب سطر سوم باید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

-۵- ماتریسی 3×3 چون $|A| = 3$ باید که A

تمرین ۱:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \left[-2 + (-2) + (-9) \right] = [-13] = -13 \Rightarrow |AB| = -13$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$|BA| = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = (-36 - 36 + 36) - (-36 - 36 - 36) = 0$$

توضیح ایجاد نویسنده:

$$|A|^2 = |A|^2 = (-30)^2 = 900$$

تمرین ۲:

تمرین ۳:

$$|A| = \mu \circ |A|^{\mu} - \delta |A| \Rightarrow \mu \circ |A|^{\mu} - \delta |A| = 0 \Rightarrow |A| (\mu \circ |A|^{\mu} - \delta) = 0$$

$$|A| = 0 \Rightarrow |A|^{\mu} - \mu = 0 - \mu = -\mu$$

$$\Rightarrow \mu \circ |A|^{\mu} - \delta = 0 \Rightarrow |A|^{\mu} = \frac{\mu}{1-\mu} \Rightarrow |A| = \pm \sqrt{0/\mu} \Rightarrow |A|^{\mu} - \mu = \pm \left(0/\mu \sqrt{0/\mu} \right) - \mu$$

تمرین ۴:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$|A| = d \times \begin{vmatrix} b & c \\ b & c \end{vmatrix} - e \times \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} + f \times \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = d(bc - cb) - e(ac - ac) + f(ab - ab) = 0$$

اگر ماتریسی دارایی دو سطر برابر باشد و تریان آن صفر است

۶- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ حاصل عبارت $(2A^{-1} - 3B^{-1})$ را باید.

۷- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ابتدا ماتریس A^{-1} را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-1}|$ مقایسه کنید.

۸- الف) ماتریس های $B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید
و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

ب) قسمت (الف) را برای دو ماتریس $B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بررسی کنید.

۹- برای ماتریس 2×2 مانند A دو مقدار $|A|$ و $|KA|$ را با هم مقایسه کنید.
چه نتیجه ای می گیرید؟

۱۰- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = 5$ در این صورت حاصل $||A|A|$ را باید.

$$||A|A| = |A|^3 |A| = |A|^4 = 5^4 = 625$$

۱۱- دستگاه معادلات خطی تشکیل دهید که $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه بوده و
 $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات آن باشد و سپس جواب دستگاه را با استفاده از A^{-1} باید.

۱۲- به ازای چه مقادیری از k دستگاه $\begin{cases} kx + 3y = 4 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد.

ابزار تولید

توشه ای برای موفقیت

۱۳- روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب های هر یک از دستگاه های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} باید.

(الف)

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$$

(ب)

$$\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \times \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} - 3 \times \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{-2}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{-9}{17} \\ \frac{15}{17} & \frac{6}{17} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} \frac{85+21}{119} & \frac{-51-63}{119} \\ \frac{-34+105}{119} & \frac{68+42}{119} \end{bmatrix} = \frac{1}{119} \begin{bmatrix} 106 & -114 \\ 71 & 110 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

تمرین ۷:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{-3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$|A| = 10 - 6 = 4$$

$$|A| \times |A^{-1}| = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ایران تو شو

تو شه ای برای

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} a \cdot b - \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} d \cdot e \Rightarrow |A| = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} ka \cdot kb - \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} d \cdot e \Rightarrow |B| = (kaei + kbfg + kcdh) - (kceg + kafh + kbdi)$$

$$= k(aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) = k|A|$$

$$\Rightarrow |B| = k|A|$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$B = \begin{bmatrix} ka & kb \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = kad - kbc = k(ad - bc) = k|A|$$

توشهه ای برای موفقیت

(ب)

اگر یک سطر از ماتریس داریم که در آن نیز در جان عدد ضرب می شود

تمرین:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ad - bc$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow |kA| = k^2ad - k^2bc = k^2(ad - bc) = k^2|A|$$

ایران تو شو

اگر ماتریسی در عددی ضرب شود و بینان آن دو مجذور بجان عدد ضرب می شود

تمرين ۱۱:

$$\begin{cases} \text{م}x - \Delta y = 1 \\ \text{م}x + \text{م}y = 10 \end{cases} \quad |A| = \text{م} \times \text{م} - (-\Delta) \times \text{م} = \text{م} + \text{م}0 = 26$$

$$A^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} \text{م} & \Delta \\ -\Delta & \text{م} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{\Delta}{26} \\ -\frac{\Delta}{26} & \frac{\text{م}}{26} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{\Delta}{26} \\ -\frac{\Delta}{26} & \frac{\text{م}}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \Delta 0}{26} \\ \frac{-\Delta + \text{م}0}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{م} \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمرين ۱۲:

$$\left| \begin{array}{cc} k & \text{م} \\ 1 & -\text{م} \end{array} \right| \neq 0 \Rightarrow -k - \text{م} \neq 0 \Rightarrow k \neq -\frac{\text{م}}{\text{م}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13 \neq 0$$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-5}{1} \Rightarrow$$

دستگاه جواب نخست نفر و دارو

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+40}{13} \\ \frac{2+24}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3 \\ y = 2$$

$$\frac{-2}{4} = \frac{3}{-6} = \frac{2}{-4} \Rightarrow$$

دو خط برهم ممطبقند پس دستگاهی شمار جواب دارد

(ب)

$$\frac{1}{-2} = \frac{3}{-6} \neq \frac{5}{-1} \Rightarrow$$

دو خط با هم موازند پس دستگاه جواب ندارد

(پ)

ایران توشه

توضه ای برای موفقیت



فصل دوم

آشنایی با مقاطع مخروطی



برج طغرل در شرق آرامگاه ابن‌بابویه شهری و از آثار به جامانده از دوره سلجوقیان است. ارتفاع برج حدود ۲۰ متر است و به عقیده برخی کارشناسان این برج مانند یک ساعت آفتابی عمل می‌کند و می‌توان از روی تابش آفتاب بر روی کنگره‌های آن، زمان را تشخیل داد.

شکل این برج به صورت یک مخروط ناقص توخالی است و در نتیجه در ساعت‌های مختلف روز خورشید به درون آن تابیده و سطح داخلی آن را تاحدودی روشن می‌کند. مرز بین سایه و روشنایی، بخشی از محیط یک بیضی است! (چرا؟)

درس اول

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

■ مقاطع مخروطی

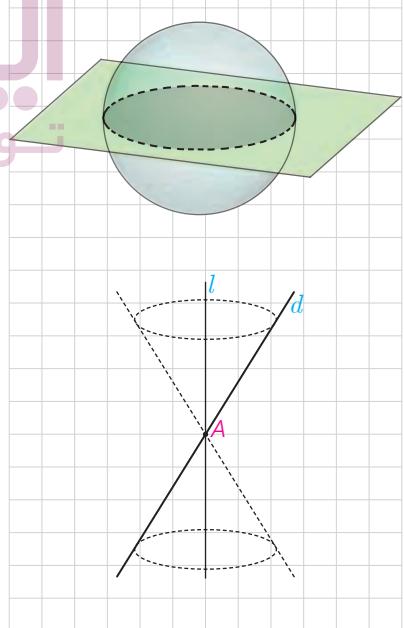


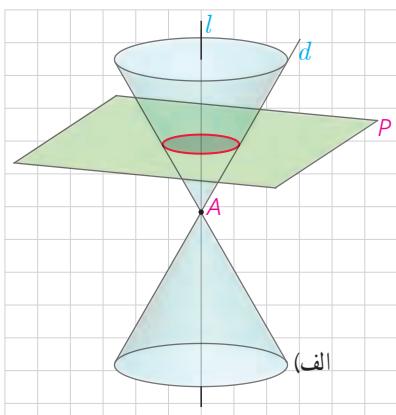
در پایه دهم با سطح مقطع صفحه با برخی اجسام هندسی آشنا شدیم. فرض کنید یک کره را (مانند شکل) توسط یک صفحه قطع کنیم (برش دهیم). منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند. به نظر شما فصل مشترک یک صفحه و یک کره چه شکلی می‌تواند باشد؟

دایره توخالی - نقطه صفحه مماس باشد

رویه مخروطی: فرض کنید دو خط d و l در نقطه A (مانند شکل) متقاطع (غیرعمود) باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط l را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد این سطح مخروطی می‌نامیم.

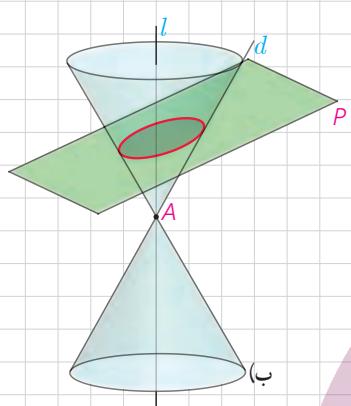
حال می‌خواهیم به طور شهودی با فصل مشترک یک صفحه و یک سطح مخروطی، با توجه به حالت‌های مختلف صفحه و سطح مخروطی نسبت به هم، آشنا شویم. از تصاویر ارائه شده برای درک بهتر شکل حاصل کمک بگیرید.



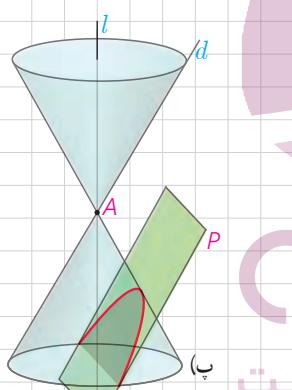


الف) در حالتی که صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

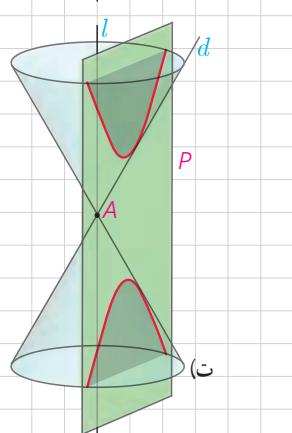
- در چه حالتی فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی تنها نقطه A خواهد بود؟



ب) در حالتی که صفحه P بر محور l عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



پ) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آنها یک خط است).



ت) اگر صفحه P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور l نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. در این کتاب به تعریف دقیق و بررسی خواص هذلولی نخواهیم پرداخت.

توشه‌ای برای موفقیت

با تعریف دایره آشناشی قبلی دارید. توجه داشته باشید که بیضی، سهمی و هذلولی نیز هر کدام تعاریف دقیق و مشخص دارند، اما اینکه چرا فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی مطابق با آنچه گفته شد دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی است، قابل اثبات است ولی ما در این کتاب به این اثبات‌ها نمی‌پردازیم. حال که با دایره، بیضی، سهمی و هذلولی (مقاطع مخروطی) به صورت شهودی آشنا شدیم، برای تعریف دقیق این اشکال، ابتدا مفهوم مکان هندسی را معرفی می‌کنیم.

■ مکان هندسی

طریقه رسم و ویژگی های عمود منصف یک پاره خط را از کتاب هندسه ۱ به خاطر دارید. دو ویژگی زیر را یادآوری می کنیم:

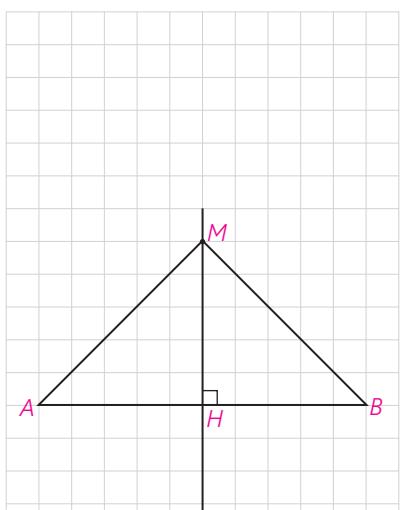
- هر نقطه روی عمود منصف پاره خط، از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
- هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، حتماً روی عمود منصف آن است.

اگر خط d عمود منصف پاره خط AB باشد، در این صورت

$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

به طور خلاصه، یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می گوییم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله اند.



به طور کلی مفهوم مکان هندسی به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف: مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضای) است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

۱ فعالیت

در کتاب هندسه ۱ با ویژگی ها و طریقه رسم نیمساز زاویه آشنا شدیم. دو قضیه مهم در مورد نیمساز زاویه را یادآوری کنید:

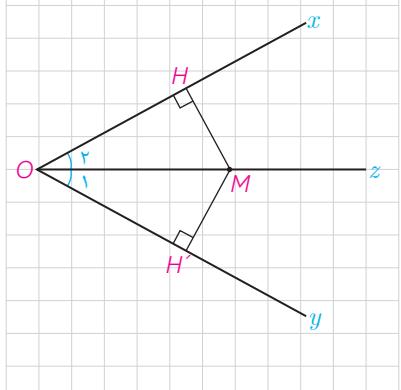
- ۱- هر نقطه روی نیمساز زاویه باشد. فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه است
- ۲- هر نقطه که روی نیمساز زاویه است.

فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد

اکنون گزاره زیر را کامل کنید:

یک نقطه روی نیمساز زاویه است، اگر و تنها اگر فاصله آن از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد

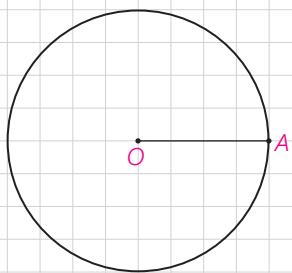
$$(\hat{O}_1 = \hat{O}_2) \quad M \in OZ \Leftrightarrow MH = MH'$$



بنابراین می توان گفت:

نیمساز هر زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که

فعالیت ۲



دایره C به مرکز O و شعاع r را در نظر بگیرید.
 الف) هر نقطه دلخواه A روی دایره، از O چه فاصله‌ای دارد؟
 شعاع
 ب) اگر B ، یک نقطه در صفحه باشد و از O به فاصله r باشد ($OB=r$) با برهان خلف نشان دهید، B روی دایره است و از (الف) و (ب) نتیجه بگیرید:
 $A \in C \Leftrightarrow OA=r$

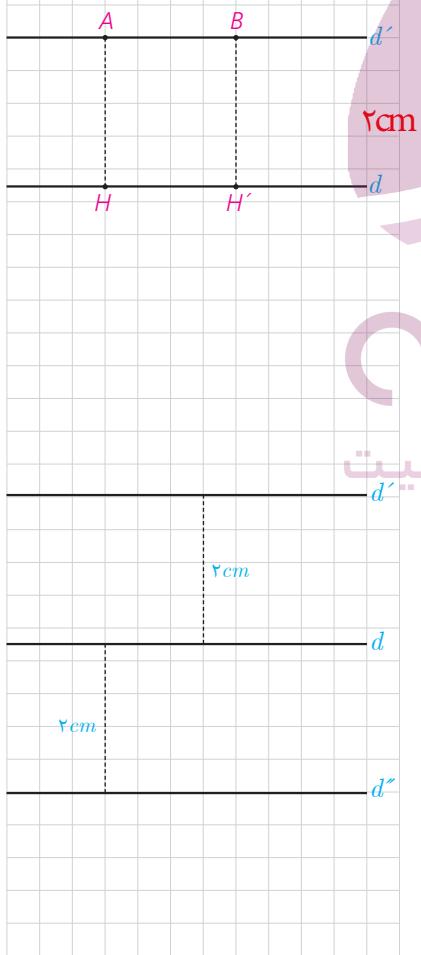
نتیجه

نقطه A روی دایره $C(O,r)$ است، اگر و فقط اگر **فاصله آن تا مرکز برابر با شعاع باشد**

نتیجه

دایره $C(O,r)$ مکان هندسی نقاطی از صفحه است که **از یک نقطه ثابت بفاصله ثابت باشد**

فعالیت ۳



دو خط موازی d و d' را که فاصله آنها از هم ۲ سانتی‌متر است، در نظر بگیرید. آیا نقطه‌های دلخواه A و B روی d' ، از خط d فاصله یکسانی دارند؟ **بله** این فاصله چقدر است؟ آیا می‌توانید نقطه (یا نقاط) دیگری مشخص کنید که از d به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند و روی d' نباشند؟ همه نقاطی که از d به فاصله ۲ سانتی‌متر واقع‌اند، روی چه شکلی قرار دارند؟ **خطی موازی با خط d در طرف دیگر**

ایران‌نوشته

آیا گزاره زیر درست است؟ **بله**

یک نقطه در صفحه، از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر است، اگر و تنها اگر روی یکی از دو خط d' و d'' که موازی d هستند، واقع باشد.

آیا نتیجه‌گیری زیر درست است؟ **بله**

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر هستند، دو خط راست موازی d (در دو طرف آن) و به فاصله ۲ سانتی‌متر از آن می‌باشد.

■ مکان های هندسی مهم در صفحه:

- مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه ثابت A و B در صفحه به یک فاصله اند، عمود منصف AB است.
- مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند، نیمساز آن زاویه است.
- مکان هندسی نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت k قرار دارند، دایره ای به مرکز O و به شعاع k است.
- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله ثابت k قرار دارند، دو خط موازی d ، به فاصله k از آن و در دو طرف آن است.

■ کاربرد مکان هندسی

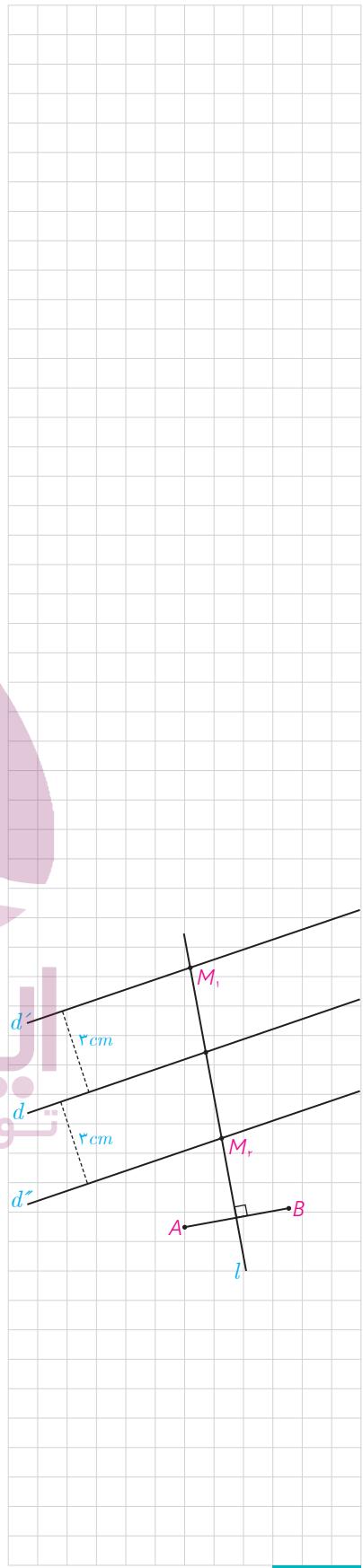
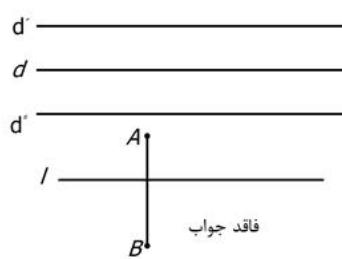
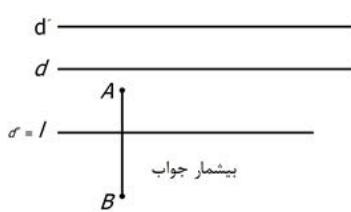
یکی از مهم ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. بدیهی است که اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند. بنابراین برای یافتن نقاطی که این دو ویژگی را داشته باشند، باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آورد.

مثال: دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض اند.

نقطه ای باید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد.

حل: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، عمود منصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی متر باشد، دو خط موازی d به فاصله ۳ سانتی متر از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد خط l (عمود منصف AB) و دو خط موازی d' و d'' جواب مسئله است (نقاط M_1 و M_2).

بحث در وجود جواب: اگر l یکی از دو خط d' و d'' را قطع کند دیگری را هم قطع می کند و مسئله مانند شکل ۲، جواب دارد. اگر l با دو خط موازی باشد، مسئله جواب ندارد و اگر l بر یکی از دو خط d' و d'' منطبق باشد، مسئله بی شمار جواب دارد.





۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید:

الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقطع d و d' به یک فاصله اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌های در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس اند.

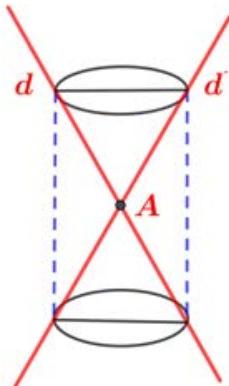
پ) مرکزهای همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس اند.

ت) مرکزهای همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی اند.

۲- نقاط C, B, A و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای در این صفحه باید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۳- نقاط C, B, A و D در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای باید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).

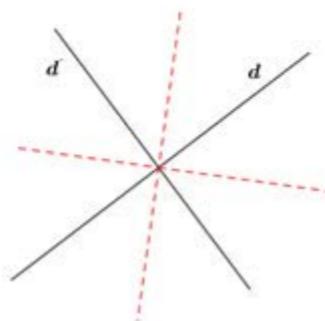
۴- نقطه A و خط d در صفحه مفروض اند. نقطه‌ای باید که از A به فاصله ۲ سانتی متر و از d به فاصله ۳ سانتی متر باشد (بحث کنید).



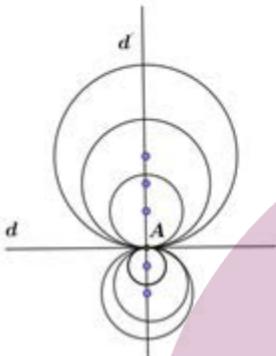
۵- هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک (قطع) حاصل چه شکل است؟ **دو خط متقطع** ای برای موفقیت

۶- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحه P ، یک سطح استوانه‌ای را قطع کند. در حالت‌های مختلف درباره سطح قطع حاصل بحث کنید (چهار حالت).

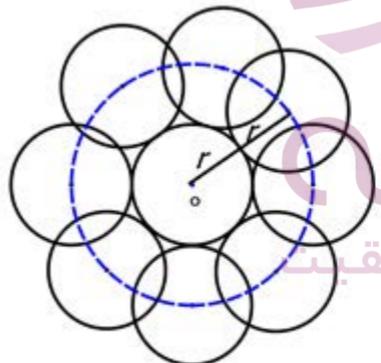
تمرین ۱ (الف) دو تا نیمساز میں دو خط



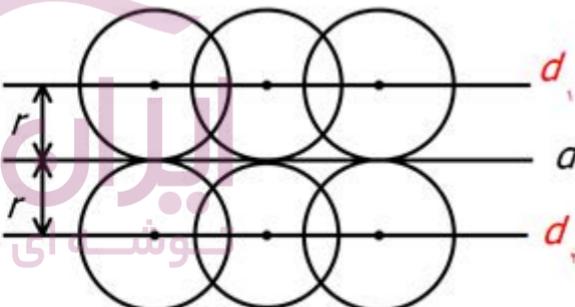
ب) اروی خط عمود بر d در نقطه A (خود جواب نیست)



و) دایره ای به مرکز O و به شعاع r



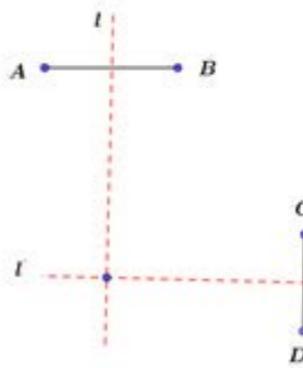
ج) دو خط موازی با خط d به فاصله r



بران تویس
توضیحاتی برای موفقیت

تمرین ۲: عمود مصنف A, B و عمود مصنف C, D را رسم می کنیم و آنها را $1,1'$ می نامیم مثل عکس '۱,۱' (در صورت وجود) جواب مسد

است که ممکن است یک نقطه یا بی شمار بینج نقطه ای بست نیاید

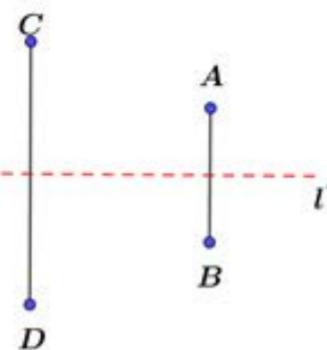


یک جواب دارد

ایران نوشت

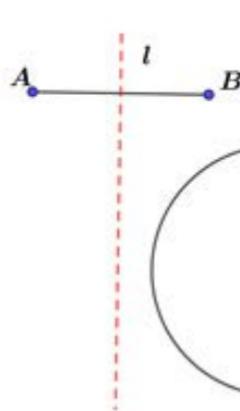
توشه‌ای برای موفقیت

جواب مدارو

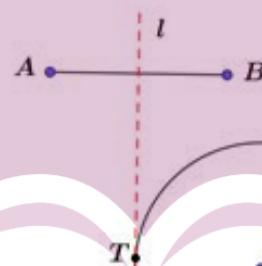


بی شمار جواب دارد

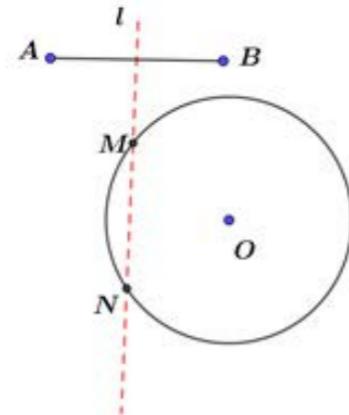
تمرین ۳: عمود مختص AB و دایره ای به مرکز O و بشاعر آسانی متر را سمی کنیم محل تقاطع (در صورت وجود) جواب منداست که ممکن است دو نقطه، یک نقطه یا نقطه ای بدهست نباشد.



نقطه مشترک دارند



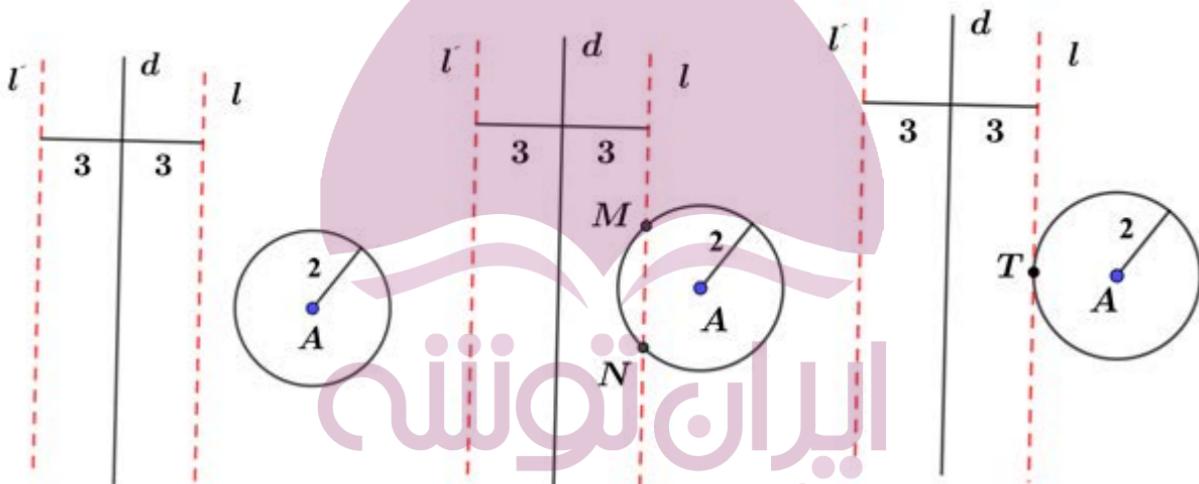
توشه
یک نقطه مشترک دارند موفقیت



دو نقطه مشترک دارند

تمرین ۴: دایره ای به مرکز A و به شعاع ۲سانچی متر را سمی کنیم و دو خط موازی l و فاصله ۲سانچی متر دو طرف آن رسم می کنیم محل

تغطیه (در صورت وجود) جواب ممکن است و نقطه های تغطیه و مانعه ای نباشد.



ایران نوین

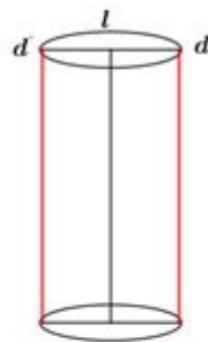
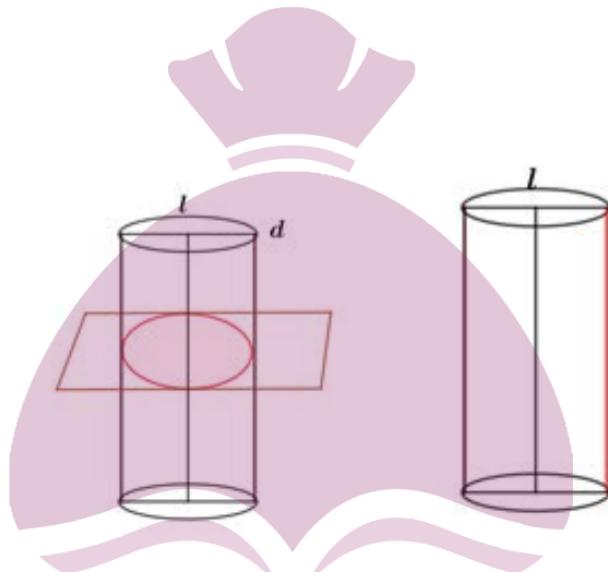
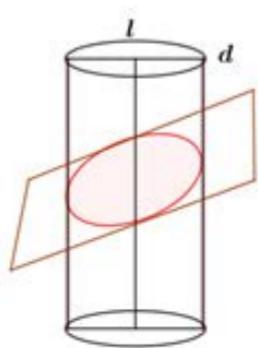
نقطه مشترک ندارند

دو نقطه مشترک دارند

یک نقطه مشترک دارند

توشه ای برای موفقیت

تمرين عز:



صخمه p بر سطح استوانه می‌باشد و معمود بر محور α باشد که سطح صخمه p امحور α متقاطع باشد ولی بر آن عمود نباشد که

صخمه p از α بگذرد (و خط موازی با

باشد (یک خط به فاصله شعاع ایستوانه ای r از محور α می‌شود) موفقیت سطح متقاطع $\beta\gamma$ می‌شود

که فاصله شعاع ایستوانه از α)

(استوانه از α)

درس دوم

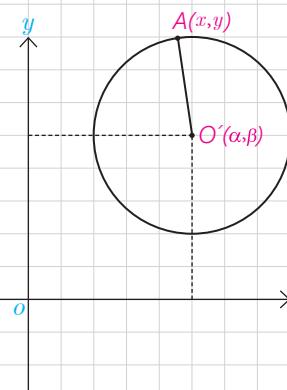
دایره

معروف‌ترین مقطع مخروطی، دایره است و چنانچه قبل‌آمدیم، دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ای ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند. حال می‌خواهیم ویژگی‌های دایره را به صورت تحلیلی در دستگاه مختصات دو بعدی با هم مرور کنیم.

معادله دایره: دایره $C(O', r)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر می‌گیریم. اگر مرکز دایره باشد و $A(x, y)$ یک نقطه دلخواه روی آن باشد، با توجه به تعریف دایره، همواره $O'A = r$ و با توجه به دستور تعیین فاصله بین دو نقطه می‌توان نوشت:

$$|O'A| = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r \Rightarrow (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

و این معادله دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع r است، که به آن معادله استاندارد دایره نیز می‌گوئیم.



مثال: معادله دایره‌ای به مرکز $O(-1, 2)$ و شعاع ۲ را بنویسید و مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات به دست آورید.

حل: به کمک دستور بالا معادله استاندارد دایره فوق نوشته می‌شود:

$$(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = 4$$

اگر در این معادله، $y = 0$ قرار دهیم، نقاط برخورد دایره با محور x را به دست می‌آید:

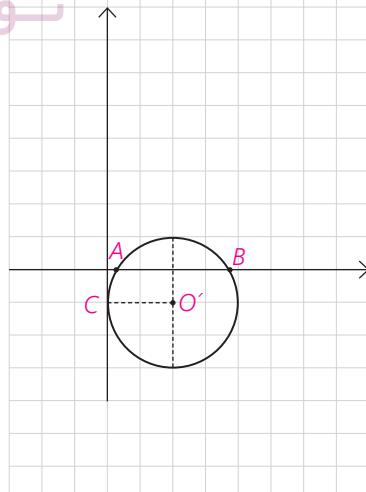
$$(x - (-1))^2 + 1^2 = 4 \Rightarrow (x + 1)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x - (-1) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

لذا دایره فوق محور x را در نقاط $A(2 - \sqrt{3}, 0)$ و $B(2 + \sqrt{3}, 0)$ قطع می‌کند و

اگر در معادله دایره، $x = 0$ قرار دهیم نقاط برخورد با محور y را پیدا می‌شوند:

$$0 - (-1) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$



بنابراین دایره فوق محور y را فقط در یک نقطه $(-1, 0)$ قطع می‌کند و می‌دانیم که اگر یک خط دایره‌ای را فقط در یک نقطه قطع کند، در آن نقطه بر آن مماس است. پس همان‌طور که در شکل هم دیده می‌شود، دایره در نقطه C بر محور y را مماس است. در معادله دایره می‌توانیم به کمک اتحادها، عبارت‌های درجه دوم را ساده کنیم، مثلاً در معادله فوق داریم:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow$$

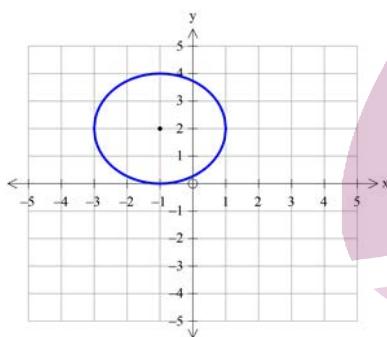
$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$$

که این معادله را معادله ضمنی دایره می‌نامیم.

— تبدیل معادله ضمنی دایره به معادله استاندارد:

در حالت کلی معادله‌ای به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ممکن است معادله دایره‌ای باشد. برای این منظور عبارت‌های $ax^2 + by^2$ را به مریع کامل تبدیل می‌کنیم.



مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 4y = -1 &\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 = -1 \\ &\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(-1, 2), r=2 \end{aligned}$$

۱

فعالیت

می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را در حالت کلی بدست آوریم. با پرکردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\Rightarrow \left(x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \right) + \left(y^2 + by + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \right) + c = 0 \Rightarrow \\ &\quad \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0 \Rightarrow \\ &\quad \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \\ &\Rightarrow O\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \end{aligned}$$

با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر را دیگر چه نتیجه‌ای درباره a, b, c بدست می‌آید؟

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow a^2 + b^2 > 4c$$

رابطه ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^2 + b^2 > 4c$ باشد و اگر $a^2 + b^2 < 4c$ باشد، این معادله هیچ نقطه از صفحه را مشخص نمی‌کند و اگر $a^2 + b^2 = 4c$ باشد، این معادله تنها یک نقطه به مختصات $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ را در صفحه مشخص می‌کند (چرا؟)

$$\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{a}{2} \\ y = -\frac{b}{2} \end{cases}$$

نتیجه

با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، می‌توان معادله آن را تعیین کرد و بر عکس با داشتن معادله دایره می‌توان مختصات مرکز و طول شعاع آن را به دست آورد.

کار در کلاس

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, 1)$ و شعاع آن ۳ واحد باشد.

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

۲- معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r به چه صورت است؟

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

۳- کدام یک از روابط زیر می‌تواند معادله یک دایره باشد؟ مختصات مرکز و طول شعاع دایره‌ها را به دست آورید و دایره را رسم کنید.

الف $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$

ایران توشه

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $M(-2, -1)$ مرکز آن و $O(1, 1)$ یک نقطه از آن باشد.

روش دوم:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$$

$$\left. \begin{array}{l} M \\ \hline \end{array} \right| \rightarrow \begin{array}{l} (-2, -1) \\ \hline r^2 \end{array} \rightarrow r^2 = 13$$

$$\rightarrow r^2 = 13$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

حل: مرکز دایره را داریم، پس باید طول شعاع آن را داشته باشیم تا معادله آن را بنویسیم. روشن است که $OM = r$ پس طول OM را به دست می‌آوریم:

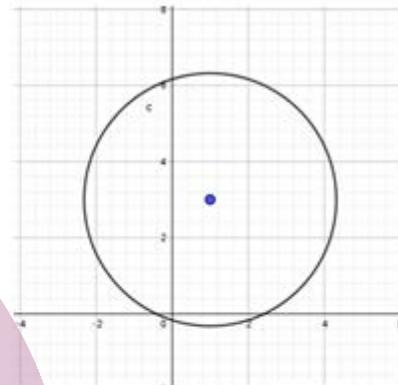
$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1 + 2)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{13}$$

و معادله دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$$

الف)

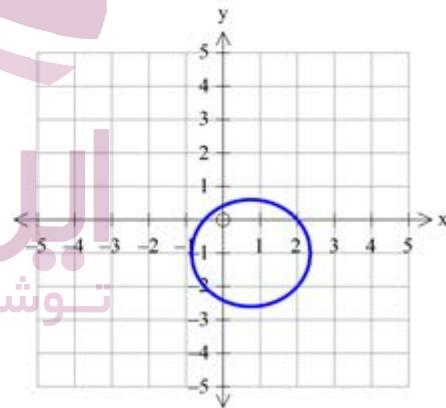
$$a^2 + b^2 > |c| \rightarrow |c| + \mu c > -|c| \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} 1 \\ \mu \end{array} \right. , r = \frac{\sqrt{|c|}}{\mu} = \sqrt{1}$$



ب)

$$\xrightarrow{+y^2} x^2 + y^2 - \frac{\mu}{\mu}x + \mu y - 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 > |c| \rightarrow \frac{q}{|c|} + |c| > -|c| \rightarrow 0 \left| \begin{array}{l} -\frac{\mu}{|c|} \\ -1 \end{array} \right. , r = \frac{\sqrt{|c|}}{|c|} = \frac{\sqrt{|c|}}{|c|} = 1$$



ایران توشی
توضیحاتی برای موفقیت

فعالیت ۲

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $(1, -1)$ مرکز آن بوده و بر خط به معادله $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.

۱- با توجه به آنچه از هندسه ۲ به یاد دارید، شعاع دایره در نقطه تماس (H) بر خط ... عمود است.

۲- طول شعاع دایره برابر است با فاصله مرکز دایره از خط d .

$$r = OH = \frac{\sqrt{...+...}}{\sqrt{...+...}} = \dots$$

۳- به کمک دستور فاصله نقطه از خط داریم:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

۴- معادله دایره را با داشتن مختصات مرکز و شعاع آن می‌نویسیم:

کاردرکلاس

معادله دایره‌ای را بنویسید که $(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $x + y = 2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند.

(راهنمایی: می‌دانیم که عمودی که از مرکز دایره بر یک وتر رسم می‌شود، آن وتر را نصف می‌کند.)

$$OB = R = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \frac{10}{4}$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $(1, 1)$ بوده و بر دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ از مماس بیرونی باشد.

حل: مختصات مرکز و شعاع دایره فوق را به دست می‌آوریم:

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2 \Rightarrow O'(1, -1), r' = \sqrt{2}$$

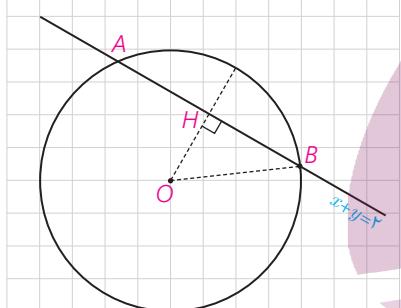
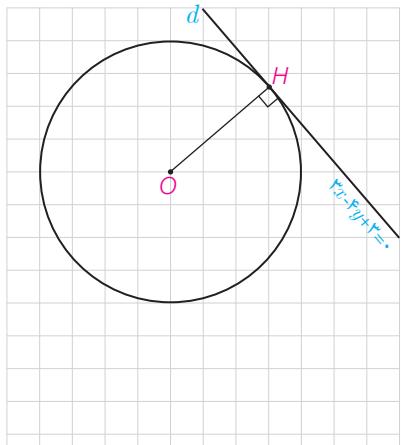
و چنانچه از هندسه ۲ می‌دانیم اگر $d = OO'$ طول خط المکزین دو دایره مماس خارج باشد، $d = r + r'$ بنابراین داریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

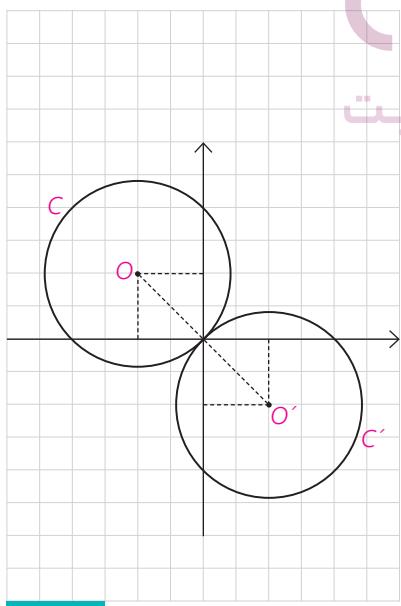
$$d = 2\sqrt{2} = r + \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره C را می‌نویسیم:

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$



$$OH = \frac{|1 \times 0 + 1(-1) - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



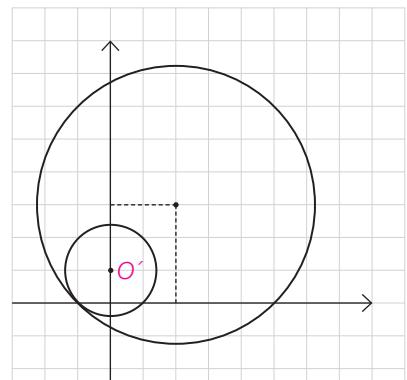
فعالیت ۳

معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1, 0)$ بوده و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ مماس داخل باشد.

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 - 13 = 0 \rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$$

$$\rightarrow O(2, 3), r = \sqrt{13}$$

۱- معادله دایره فوق را به صورت استاندارد تبدیل کنید و از آنجا مختصات مرکز و طول شعاع آن را باید.

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13 \Rightarrow O'(2, 3), r' = \sqrt{13}$$


۲- طول خط المركzin دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$d = OO' = \sqrt{(1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۳- با توجه به آنچه از هندسه ۲ می‌دانیم، داریم:

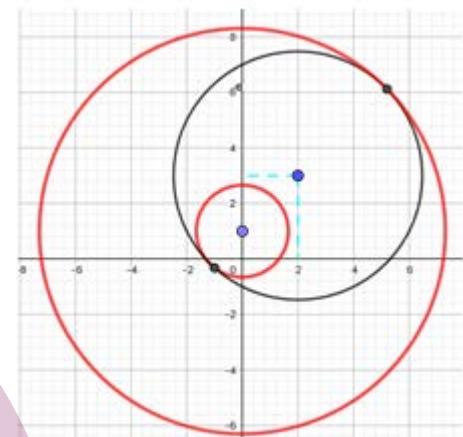
$$d = |r - r'| \Rightarrow |r - \sqrt{13}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow r - \sqrt{13} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{13} \pm 2\sqrt{2}$$

۴- با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{13} \pm 2\sqrt{2})^2 \quad (13 \pm 2\sqrt{2})^2 = 13 + 8 \pm 16\sqrt{2} = 21 \pm 16\sqrt{2}$$

چرا مسئله دو جواب دارد؟

چون برای شعاع دو مقدار پیدا شده است



کار در کلاس

وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید:

(الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$ ، $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

توشه‌ای برای موفقیت

(ب) $x^2 + y^2 - 2x = 1$ ، $x^2 + y^2 = 1$

(ج) $x^2 + y^2 = 9$ ، $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$

(د) $x^2 + y^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$

(راهنمایی: مختصات مرکز و طول شعاع‌های هر دو دایره را به دست آورده و پس

از تعیین طول خط المركzin از اطلاعات خود از هندسه ۲ استفاده کنید.)

$$x^r + y^r - px - py = \mu \rightarrow x^r - px + p + y^r - py + q - \mu = \mu \rightarrow (x-p)^r + (y-p)^r = 15$$

$$\rightarrow o(p, \mu), r = p$$

$$x^r + y^r - ox - oy + \gamma\mu = 0 \rightarrow x^r - ox + \mu\delta + y^r - oy + \mu q - \gamma p + \gamma\mu = 0 \rightarrow (x-\delta)^r + (y-\gamma)^r = 1$$

$$\rightarrow o'(\delta, \gamma), r' = 1$$

$$oo' = \sqrt{(p-\delta)^r + (\mu-\gamma)^r} = \sqrt{q+15} = \delta \quad oo' = r + r' \rightarrow$$

ووایرده ماس خارج بستند

ب

$$x^r + y^r - px = 1 \rightarrow x^r - px + 1 + y^r - 1 = 1 \rightarrow (x-1)^r + y^r = \mu$$

$$\rightarrow o(1, o), r = \sqrt{\mu}$$

$$x^r + y^r = 1 \rightarrow o'(o, o), r' = 1$$

توشه‌ای برای موقوفه

$$oo' = \sqrt{(1-o)^r} = 1 \rightarrow |r - r'| < oo' < r + r' \rightarrow$$

ووایرده متعاطع بستند

ج)

$$x^r + y^r = 9 \rightarrow O(0,0), r = 3$$

$$\begin{aligned} x^r + y^r - px + py + 1 &= 0 \rightarrow x^r - px + 1 + y^r + py + 1 - p + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^r + (y+1)^r = 1 \\ &\rightarrow O'(1, -1), r' = 1 \end{aligned}$$

$$OO' = \sqrt{(0-1)^r + (0+1)^r} = \sqrt{p} \quad OO' < r - r' \rightarrow \text{ووایرو متد اخل هستند}$$

ج

$$x^p + y^p = 16 \rightarrow O(0,0), r = 4$$

$$\begin{aligned} x^p + y^p - px - py + 16 &= 0 \rightarrow x^p - px + 16 + y^p - py + 16 - p + 16 = 0 \rightarrow (x-4)^p + (y-4)^p = 16 \\ &\rightarrow O'(4, 4), r' = 1 \end{aligned}$$

اباره جیجی

$$OO' = \sqrt{(0-4)^p + (0-4)^p} = \sqrt{p \cdot 0} = 4\sqrt{5} \quad OO' > r + r' \rightarrow \text{ووایرو متعارج هستند}$$

می خواهیم وضعیت خط به معادله $x+y=4$ و دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ را تعیین کنیم.

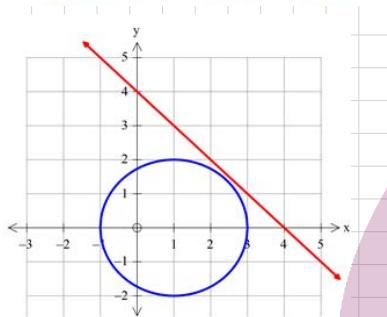
روش اول: از معادله خط، $x+y=4$ را در معادله دایره جایگزین می کنیم (با این کار در صورت برخورد خط و دایره، مختصات نقطه های برخورد از معادله حاصل به دست می آید):

$$x^2 + (4-x)^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow 2x - 16x + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 104 = -4 < 0$$

با ساده کردن معادله حاصل و تعیین علامت Δ ، نشان دهید معادله فوق ریشه حقیقی ندارد و در نتیجه خط و دایره نقطه برخوردی ندارند.

روش دوم: معادله دایره را استاندارد کنید و مختصات مرکز و طول شعاع آن را بیابید. سپس فاصله مرکز دایره از خط را بیابید. چگونه تشخیص می دهید خط و دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

با رسم شکل خط و دایره در یک دستگاه مختصات، درستی نتیجه گیری تان را بینید.



سؤال: اگر در معادله حاصل از برخورد خط و دایره، $\Delta > 0$ یا $\Delta = 0$ شود وضع دایره و خط نسبت به هم چگونه است؟ در این حالت ها فاصله مرکز دایره از خط چگونه است؟

مثال: در نقطه $A(2, 3)$ روی دایره $x^2+y^2-2x-3=0$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید.

حل: با توجه به اینکه شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است، با تعیین مختصات مرکز دایره شیب OA را تعیین می کنیم و از آنجا شیب مماس را به دست آورده و معادله آن را تعیین می کنیم.

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow O(1, 1) \Rightarrow m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2 \Rightarrow$$

$$m_d = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$



تمرین

۱- معادله دایره‌ای را بنویسید که :

الف) $O(1,1)$ مرکز آن و $A(3,2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

ب) $O(2,1)$ مرکز آن بوده و برخط $3x+4y=0$ مماس باشد.

پ) $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=1$ وتری به طول ۲ ایجاد کند.

ت) خطوط $x-y=1$ و $x+y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

ج) از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x+1$ شامل قطري از آن باشد.

۲- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \rightarrow 34 - 4a > 0 \rightarrow a < \frac{17}{2}$$

۳- وضعیت هر یک از نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,-2)$ و $C(2,3)$ و $D(4,-1)$ را

نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+4y-5=0$ تعیین کنید.

۴- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^2+y^2=4$ ، $x^2+y^2-2x=4$

ب) $x^2+(y-1)^2=1$ ، $(x-1)^2+y^2=1$

ج) $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$

د) $x^2+y^2=1$ ، $x^2+y^2-6x-2y+9=0$

ایران توشه

تشوه‌ای برای موفقیت

۵- نقاط $A(-1,-1)$ و $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادله

دایره محیطی مثلث ABC را بنویسید. سپس معادله مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۶- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $3x+4y=0$ ، $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$ ، $x^2+y^2=2$

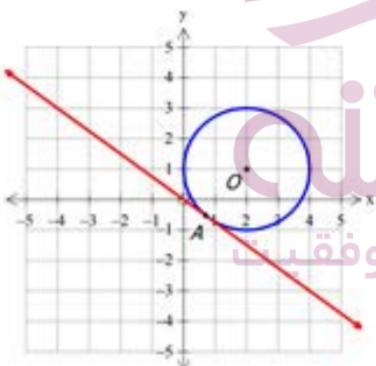
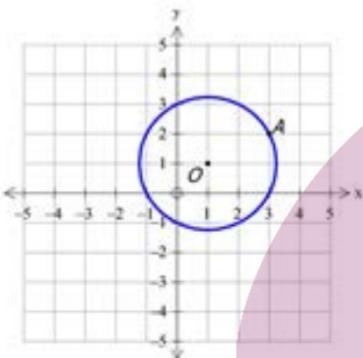
ج) $x+y=1$ ، $x^2+y^2-2x-2y=2$

حل تمرینات صفحه ۴۶

تمرین ۱: (الف)

$$r = OA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$



ایران توشه

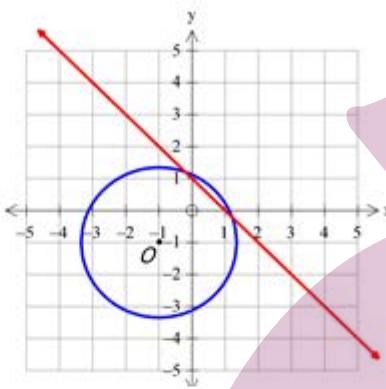
توضیحاتی برای موفقیت

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

ب)

$$r = \frac{|w(1) + v(1) + o|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

(۴)

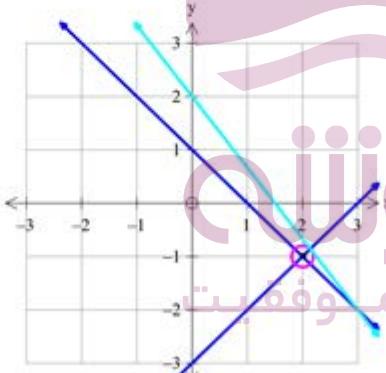


$$OH = \frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2}$$

$$r^2 = 1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \frac{4}{2}$$

(۵)



$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

O(1, -1)

$$r = \frac{|1(1) + 1(-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2}$$

(ج)

$$O \begin{array}{|c} \alpha \\ \hline 2\alpha - 1 \end{array}$$

$$OA = OB = r = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 1 - 0)^2}$$

$$\cancel{\alpha^2 - 4\alpha + 1} + \cancel{4\alpha^2} - 12\alpha + 9 = \cancel{\alpha^2 - 5\alpha + 9} + \cancel{4\alpha^2} - 14\alpha + 1$$

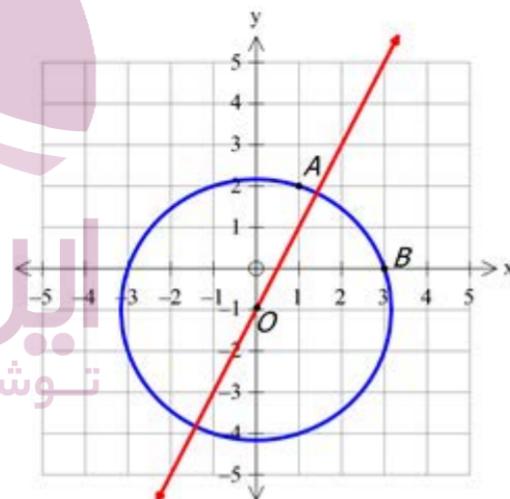
$$-14\alpha + 10 = -10\alpha + 10 \rightarrow \alpha = 0$$

$$O(0, -1) \Rightarrow OA = OB = r = \sqrt{10}$$

$$x^2 + (y + 1)^2 = 10$$

ابران نویس

توضیه‌ای برای موفقیت



حل تمرین ۳:

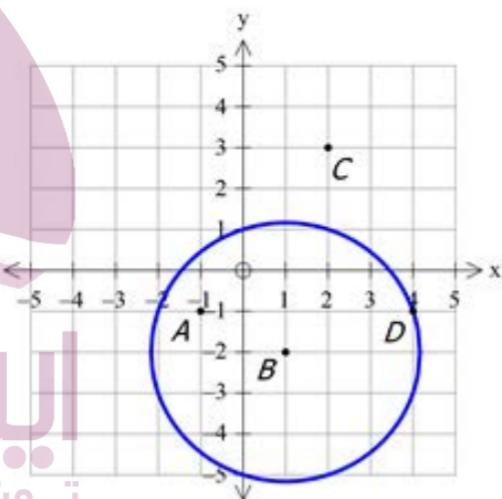
$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 16 = 0 \rightarrow 0 \quad r = \frac{\sqrt{16+16+40}}{4} = \sqrt{10}$$

$OA = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} < r \rightarrow$ نقطه روی داخل دایره است

$OB = \sqrt{0+0} = 0 < r \rightarrow$ نقطه روی مرکز دایره است

$OC = \sqrt{1+25} = \sqrt{26} > r \rightarrow$ نقطه بیرون دایره است

$OD = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = r \rightarrow$ نقطه روی محیط دایره است



$$x^r + y^r = r \quad O \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \circ \\ \circ \end{array} \right. \quad r = r$$

$$x^r + y^r - rx = r \quad O' \left| \begin{array}{l} -1 \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right. \quad r' = \frac{1}{r} \sqrt{(-r)^r + o^r - r(-r)} = \frac{1}{r} \times r \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$OO' = 1 \rightarrow |r - \sqrt{5}| < 1 < r + \sqrt{5} \rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \rightarrow$$

دو دایره متعالج هستند

$$x^r + (y-1)^r = 1 \quad O \left| \begin{array}{l} \bullet \\ 1 \\ \circ \end{array} \right. \quad r = 1$$

$$(x-1)^r + y^r = 1 \quad O' \left| \begin{array}{l} 1 \\ \bullet \\ \circ \end{array} \right. \quad r' = 1$$

$$OO' = \sqrt{r} \rightarrow |1-1| < \sqrt{r} < 1+1 \Rightarrow |r - r'| < OO' < r + r' \rightarrow$$

ب:

ابران توشه

ج:

$$x^r + y^r = 1 \quad O \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \circ \\ \circ \end{array} \right. r=1$$

$$x^r + y^r - \mu\sqrt{r}x - \mu\sqrt{r}y + \delta = 0 \quad O' \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \circ \\ \circ \end{array} \right. r' = \frac{1}{\mu} \sqrt{18 + 18 - 2\delta} = 2$$

$$OO' = \sqrt{\frac{18}{\mu} + \frac{18}{\mu}} = \sqrt{9} = \mu \rightarrow \mu = 1+2 \rightarrow OO' = r + r' \rightarrow$$

و دایره های مماس خارج هستند

؛

$$x^r + y^r = 1 \quad O \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \circ \\ \circ \end{array} \right. r=1$$

$$x^r + y^r - 5x - 2y + 9 = 0 \quad O' \left| \begin{array}{l} \bullet \\ \circ \\ \circ \end{array} \right. r' = \frac{1}{\mu} \sqrt{36 + 16 - 36} = 1$$

$$OO' = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \rightarrow \sqrt{10} > 1+1 \rightarrow OO' > r+r' \rightarrow$$

و دایره های مماس خارج هستند

تمرین ۵: روش اول به روش حل دستگاه

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\begin{cases} 1+1-a-b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \\ 1+1+a-\mu b+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a-b+c=-\mu & (1) \\ a+b+c=\mu & (2) \\ a-\mu b+c=1 & (3) \end{cases} \xrightarrow{(1)+(2)} c=-\mu \xrightarrow{(2),(3)} \begin{cases} a+b-\mu=-\mu \\ a-\mu b-\mu=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-\mu, b=\mu$$

$$x^2 + y^2 - \mu x + \mu y - \mu = 0$$

$$0 \left| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad r = \frac{1}{\mu} \sqrt{\mu + \mu + 1} = \mu$$

$$0 \left| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad B \left| \begin{array}{r} 1 \\ 1 \end{array} \right. \quad m_{OB} = \text{تعريف نشده} \rightarrow m = 0$$

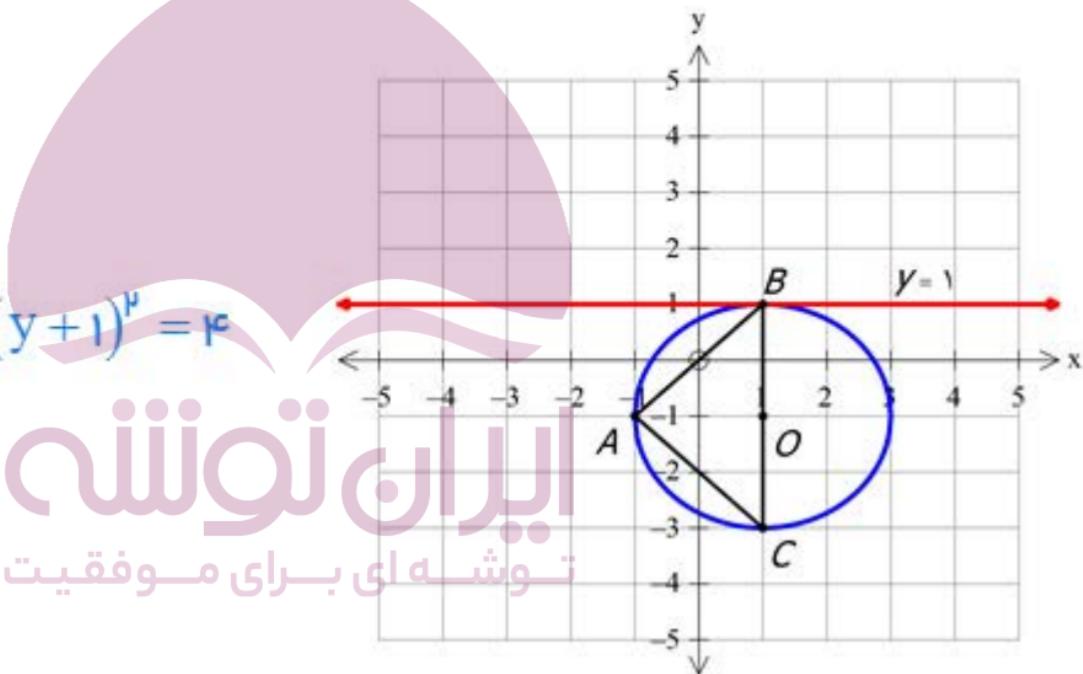
معادله مماس در B

$$\frac{m=0}{y=y_B} \rightarrow y=1$$

معادله خط‌گذرانده از B

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

روش دوم: روش رسم



$$O \left| \begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad r = 2 \quad (x-1)^p + (y+1)^p = 4$$

ایران نویس
تو شهادی برای موفقیت

روش سوم به روش عمود منصف

$$A \left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right. , B \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right. \quad M \left| \begin{array}{c} \frac{-1+1}{\mu} = 0 \\ \frac{-1+1}{\mu} = 0 \\ \mu \end{array} \right. \quad m_{AB} = \frac{1+1}{1+1} = 1 \rightarrow m' = -1 \rightarrow y - 0 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x \quad (1)$$

$$A \left| \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \right. , C \left| \begin{array}{c} 1 \\ -\mu \end{array} \right. \quad N \left| \begin{array}{c} \frac{-1+1}{\mu} = 0 \\ \frac{-1+\mu}{\mu} = -1 \\ \mu \end{array} \right. \quad m_{AC} = \frac{-1+\mu}{-1-1} = -1 \rightarrow m' = 1 \rightarrow y + \mu = 1(x - 0) \rightarrow y = x - \mu \quad (2)$$

(۱) و (۲) عمود منصف های وترهای AB, AC هستند (اقطاع دایره)

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x - \mu \end{cases} \Rightarrow O \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right. \quad OA = r = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+1)^2} = \mu$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \mu^2 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

تمرین ع: (الف) روش اول

$$\begin{cases} \mu x + \nu y = 0 \\ x^r + y^r - \mu x + \nu y + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$0 \left| \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \right.$$

$$r = \frac{1}{\mu} \sqrt{16 + 16 - 28} = 1$$

$$d = \frac{|\mu(\mu) + \nu(\nu)|}{\sqrt{9+16}} = \frac{14}{5} > 1 \quad d > r$$

غیر متعاط

$$\mu x + \nu y = 0 \rightarrow x = -\frac{\nu}{\mu} y$$

$$\left(-\frac{\nu}{\mu} y\right)^r + y^r - \nu \left(-\frac{\nu}{\mu} y\right) - \nu y + \gamma = 0 \xrightarrow{\times \nu} 1 \nu y^r + \nu y^r + 148y - \mu \nu y + 6 \mu = 0$$

توضیه ای برای موفقیت

جواب ندارد پس خط و دایره همیگر را قطع نمی کنند

$$25y^r + 12y + 6\mu = 0 \rightarrow \Delta = 144 - 4 \times 25 \times 6\mu < 0$$

روش دوم:

ب) روش اول

$$\begin{cases} x + y = p \\ x^r + y^r = p \end{cases}$$

$$d = \frac{|l(o) + l(o) - p|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{p} \quad d = r$$

$$o | o$$

$$r = \sqrt{p}$$

خط بردايره ماس است

$$x + y = p \rightarrow x = p - y$$

$$(p - y)^r + y^r = p \rightarrow y^r + y^r - py + p = p \rightarrow py^r - py + p = 0 \rightarrow y^r - py + 1 = 0$$

$$\rightarrow (y - 1)^r = 0 \rightarrow y = 1$$

معادله ریشه مصنوعی دارد پس خط بردايره ماس است

روش دوم:

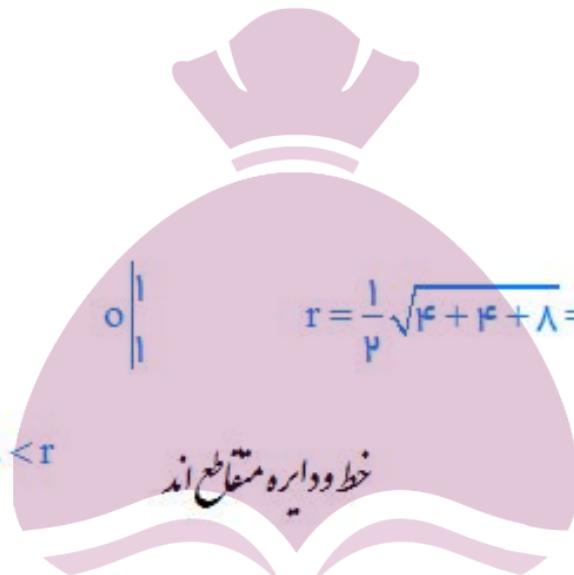
ج) روش اول:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^r + y^r - rx - ry = \mu \end{cases}$$

$$d = \frac{\| (1) + i(1) - 1 \|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{r}}{\mu} \quad d < r$$

خط و دایره متعاطع نمود

$$r = \frac{1}{\mu} \sqrt{r + r + \lambda} = \mu$$



روش دوم:

$$x + y = \mu \rightarrow y = 1 - x$$

$$x^r + (1-x)^r - rx - \mu(1-x) = \mu \rightarrow rx^r - rx - \mu = 0$$

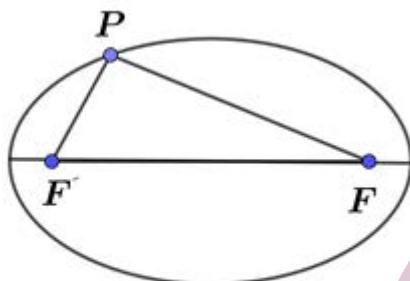
ایران تویس

چون C مختلف اعلامه، سند پس محاذه دوریزه صنایر دار و یعنی خط و دایره دو نقطه مشترک دارند

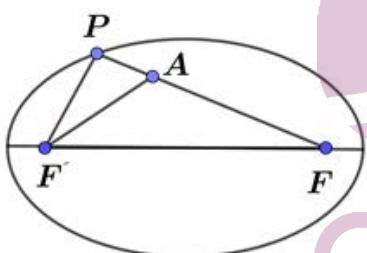
بیضی و سهمی

بیضی

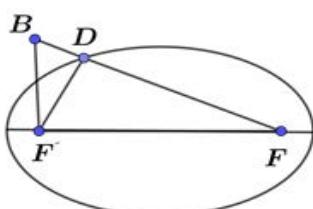
فعالیت ۱



$$FF' < FP + F'P$$



$$\begin{aligned} \triangle PAF': AF' &< PF' + PA \\ AF + AF &< PF' + PA + AF \\ AF + AF &< PF' + PF = 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \triangle BDF': BF' + BD &> DF' \\ BF' + BD + DF &> DF' + DF \\ BF' + BF &> DF' + DF = 1 \end{aligned}$$

یک تکه نخ درنظر گرفته و دوسر آن را مطابق شکل در دو نقطه F و F' ثابت کنید. فرض کنید طول نخ a باشد و $FF' = b$. یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دوطرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته‌ای خواهد بود که بیضی نام دارد.

۱- یک نقطه دلخواه روی شکل رسم شده درنظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطه از دو نقطه ثابت F و F' برابر چیست؟

۲- یک نقطه دلخواه مانند A در درون بیضی رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطه ثابت F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقاط مورد نظر از F و F' بزرگتر از a است.

(راهنمایی: پاره خط FA را از سمت A افتاده دهید تا بیضی را قطع کند. سپس از نامساوی مثلثی استفاده نمایید)

توشه‌ای برای موفقیت

۳- یک نقطه دلخواه مانند B بیرون بیضی رسم شده درنظر بگیرید و آن را به دو نقطه F و F' وصل کنید و نشان دهید مجموع فواصل نقاط مورد نظر از F و F' بزرگتر از a است.

(راهنمایی: اگر نقطه D محل برخورد FB با بیضی باشد، $F'D$ را رسم کنید و از نامساوی مثلثی استفاده نمایید.)

۴- از مراحل (۱) تا (۳) متوجه وجود چه ویژگی مشترکی در همه نقاط بیضی شدید که هیچ نقطه دیگری از صفحه، آن ویژگی را ندارد؟

۵- با توجه به آنچه گفته شد تعریف بیضی را که با استفاده از مکان هندسی در زیر آمده است تکمیل نمایید.

بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطه ثابت یک مقدار ثابت است.

دو نقطه ثابتی که با توجه به آنها، بیضی را به دست آوردمیم و آنها را F و F' نامیدیم کانون‌های بیضی نام دارند.

فعالیت ۲

بیضی مقابل را در نظر بگیرید. AA' قطر بزرگ (قطر کانونی) و BB' قطر کوچک بیضی نامیده می‌شود. F و F' کانون‌های بیضی هستند و نقطه O ، وسط پاره خط FF' مرکز بیضی است. فرض کنید اندازه پاره خط‌های OA ، OB و OF را به ترتیب با a ، b و c نمایش دهیم. بنابراین فاصله دو کانون بیضی برابر $2c$ است.

۱- در ترسیم بیضی بانخ و مداد دو وضعیتی را که مداد در نقاط A و A' قرار می‌گیرد در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که $FA = F'A' = OA = a$ و از آن نتیجه بگیرید $OA' = 2a$ و لذا اندازه قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ است.

(ب) نشان دهید طول نخ موردنظر برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

$$OA - c = OA' - c \Rightarrow OA = OA' = a \Rightarrow AA' = 2a \rightarrow AF + AF' = 1 \rightarrow AF + A'F = 1 \rightarrow AA' = 1$$

۲- (الف) در رسم بیضی وضعیتی را که مداد در نقطه B قرار دارد در نظر بگیرید و نشان دهید

$$BF + BF' = 2a \Rightarrow BF = a \Rightarrow BF'' = OB'' + OF'' \Rightarrow a^r = b^r + c^r \Rightarrow b^r + c^r = a^r$$

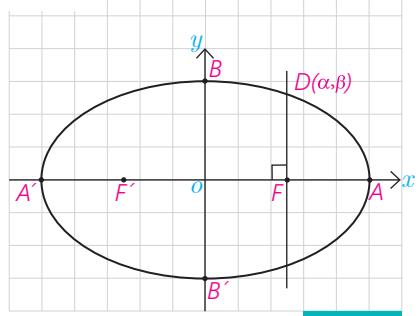
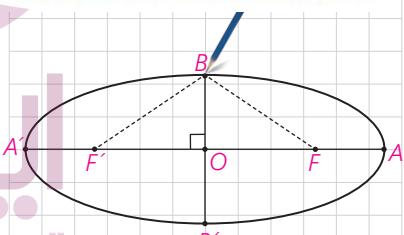
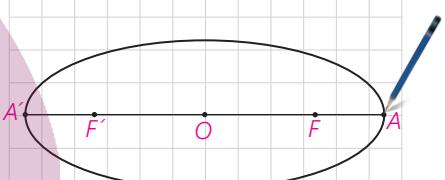
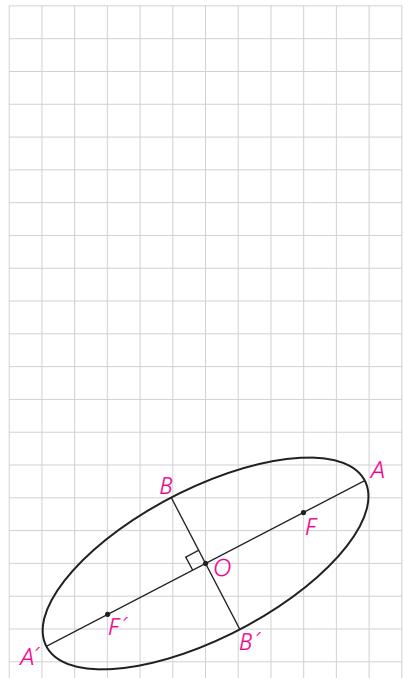
(ب) با انجام همین کار برای نقطه B' نتیجه بگیرد $a^r = b^r + c^r$

تو شو و با توجه به آن نتیجه بگیرید $OB' = OB = b$ و لذا اندازه قطر کوچک بیضی برابر $2b$ است.

$$\begin{aligned} a^r &= b^r + c^r \\ a^r &= OB'^r + c^r \Rightarrow b^r + c^r = OB'^r + c^r \Rightarrow b^r = OB'^r \Rightarrow b = OB' \Rightarrow BB' = 2b \end{aligned}$$

کاردر کلاس

۱- مرکز بیضی مقابل بر مبدأ مختصات و قطرهای آن مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر 4 است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کردہ ایم بیضی را در نقطه $D(\alpha, \beta)$ قطع کرده باشد، مختصات D را به دست آورید.



$$D \begin{vmatrix} \kappa \\ \beta \end{vmatrix} \quad A \begin{vmatrix} \wedge \\ \circ \end{vmatrix}$$

$$A' \begin{vmatrix} -\wedge \\ \circ \end{vmatrix}$$

$$F \begin{vmatrix} \kappa \\ \circ \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} -\kappa \\ \circ \end{vmatrix}$$

$$DF + DF' = pa$$

$$\sqrt{(\kappa - \kappa)^2 + (\beta - \circ)^2} + \sqrt{(\kappa + \kappa)^2 + (\beta - \circ)^2} = p \times \wedge$$

$$|\beta| + \sqrt{\kappa^2 + \beta^2} = 16 \Rightarrow \sqrt{\kappa^2 + \beta^2} = 16 - |\beta| \Rightarrow \kappa^2 + \beta^2 = 256 - 32|\beta| + \beta^2$$

$$|\beta| = 6 \Rightarrow \beta = \pm 6$$

$$D \begin{vmatrix} \kappa \\ 6 \end{vmatrix} \quad D' \begin{vmatrix} \kappa \\ -6 \end{vmatrix}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت خود

فعالیت

در این فعالیت با انتخاب مقادیر مختلفی برای a و c بیضی موردنظر را رسم می‌کنیم.
می‌دانیم که $a \leq c \leq a + c$. وقت کنید که چگونگی میزان کشیدگی بیضی
چه ارتباطی با مقدار کسر $\frac{c}{a}$ دارد. در رسم بیضی به صورت تقریبی ابتدا دو کانون F و F'
را به فاصله $2c$ از هم در نظر بگیرید، سپس نقاط A و A' را بر خط FF' به گونه‌ای
انتخاب کنید که فاصله AF تا F و فاصله $A'F'$ تا F' برابر $a - c$ و اندازه AA' برابر $2a$ باشد،
سپس با استفاده از رابطه $b^2 = a^2 - c^2$ نقاط B و B' را مشخص کنید و بیضی را به طور
تقریبی رسم کنید:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{4}; a = 4 \text{ و } c = 1 \quad 1$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{4}; a = 8 \text{ و } c = 2 \quad 2$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}; a = 2 \text{ و } c = 1 \quad 3$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}; a = 4 \text{ و } c = 2 \quad 4$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}; a = 4 \text{ و } c = 3 \quad 5$$

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4}; a = 8 \text{ و } c = 6 \quad 6$$

ایجاد بیضی

با توجه به آنچه دیدید هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به یک تزدیک شود شکل بیضی کشیده‌تر شده
و شکل بیضی به پاره خط تزدیک تر می‌شود و هرچه مقدار $\frac{c}{a}$ به صفر تزدیک شود کشیدگی
شکل بیضی کمتر شده و شکل بیضی به دایره تزدیک‌تر می‌شود. به این سبب مقدار $\frac{c}{a}$ را
خروج از مرکز بیضی می‌نامیم.

- در حالتی که $\frac{c}{a} = 0$ بیضی تبدیل به یک پاره خط و در حالتی که $\frac{c}{a} = 1$ بیضی تبدیل
به یک دایره می‌شود. چرا؟

$$\frac{c}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow b \Rightarrow a \approx b \Rightarrow$$

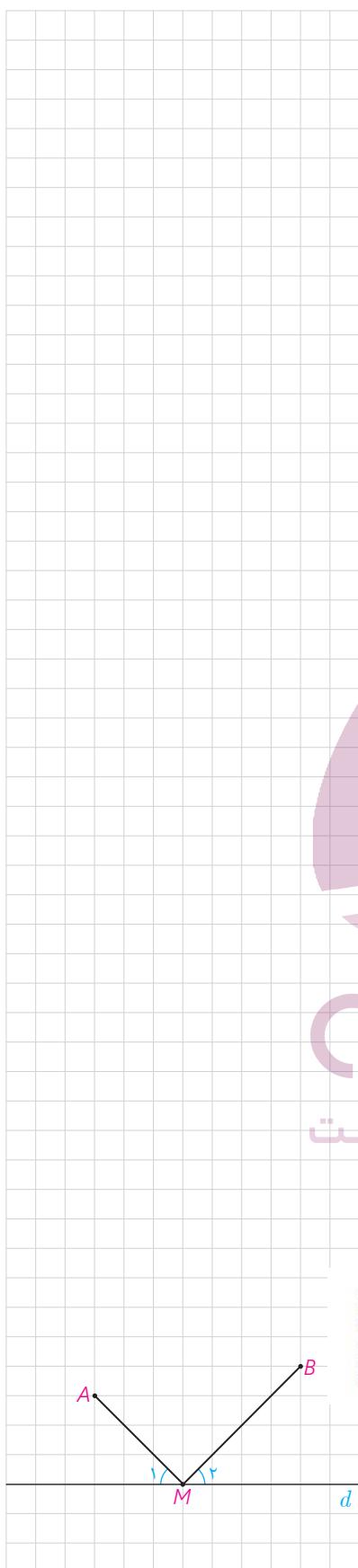
شکل به دایره شبیه می‌شود

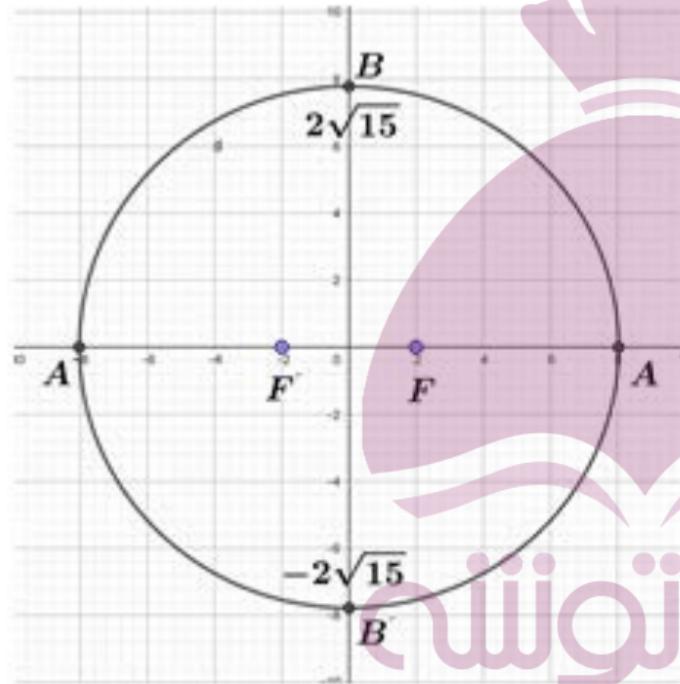
$$\frac{c}{a} \rightarrow 1 \Rightarrow c \rightarrow a \Rightarrow c \approx a \Rightarrow b \rightarrow 0 \Rightarrow$$

بیضی به پاره خط شبیه می‌شود

یادآوری 

در پایه یازدهم دیدیم که کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A به نقطه B و با عبور از نقطه‌ای از خط d ،
از نقطه‌ای مانند M روی خط d می‌گذرد، به گونه‌ای که دو زاویه ایجاد شده M و M باهم
برابرند.

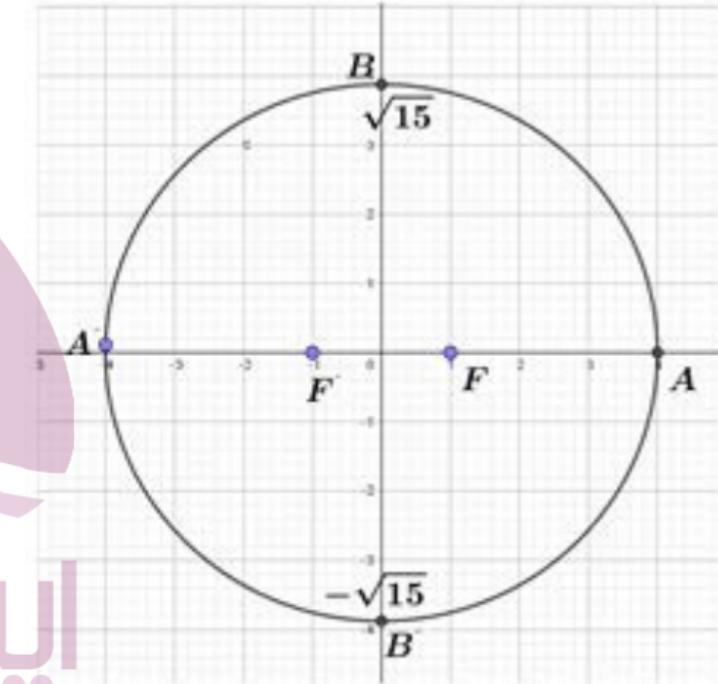




ایران توپش

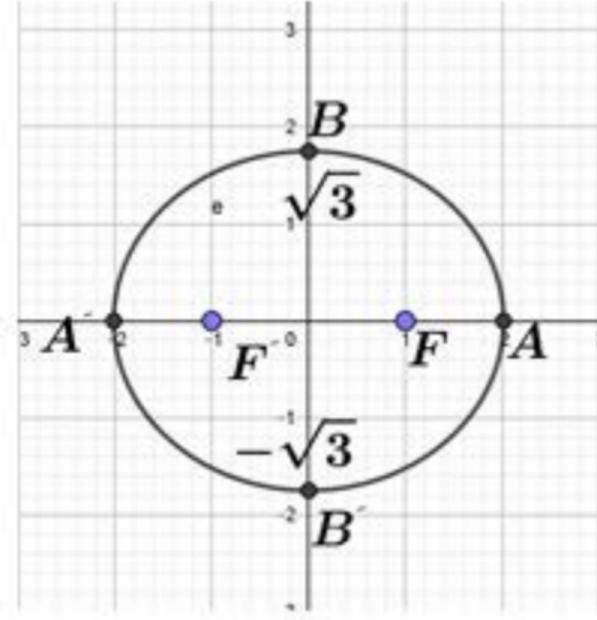
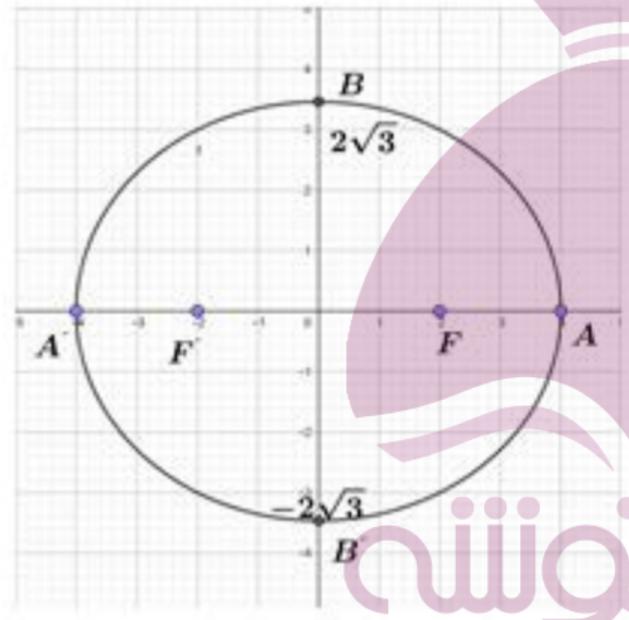
توشه‌ای برای موفقیت

$$b^2 = A^2 - M^2 = 5^2 - 4^2 = 5 - 4 = 1 \rightarrow b = \sqrt{1}$$



$$b^2 = M^2 - A^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = \sqrt{9}$$

۳



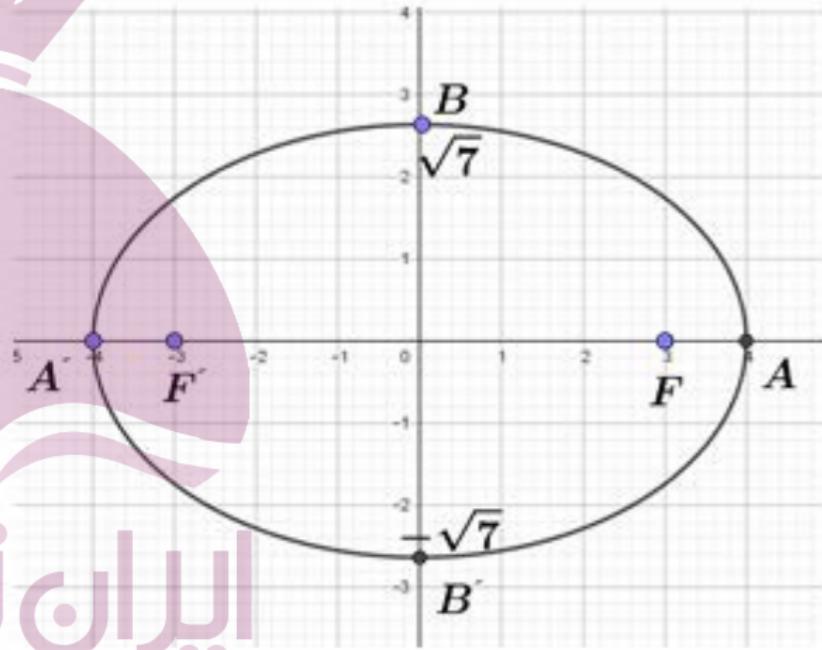
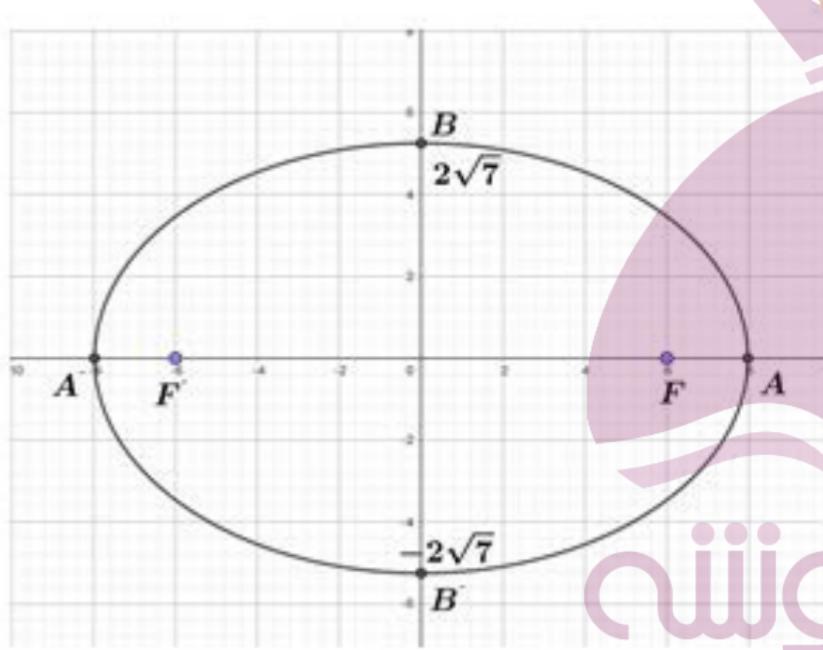
ایران تویس

توضیحاتی برای موفقیت

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12 \rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$$

۶



ایران توش

توضیحاتی برای موفقیت

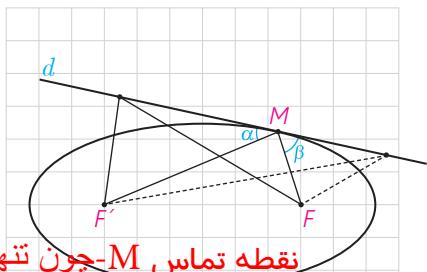
$$b^2 = A^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3\sqrt{7}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7 \rightarrow b = \sqrt{7}$$

فعالیت ۴

فرض کنیم خط d مانند شکل مقابل در نقطه M بر یکی مماس باشد.

- ۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F و F' کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟



نقطه تماس M -چون تنها نقطه M از خط d است که روی بیضی قرار دارد و بقیه نقاط خارج بضی هستند

- ۲- دو زاویه α و β نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

باهم برابرند طبق یادآوری صفحه قبل

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های یکی از کانون‌های بیضی نوری بر بدنه داخلی یکی از کانون‌های بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

از کانون نور به خط راست حرکت می‌کند یعنی اگر پرتو بتواند از بدنه یکی از کانون‌های بیضی رد شود از نقطه قرینه کانون دیگر نسبت به خط مماس می‌گذرد.
سهمی

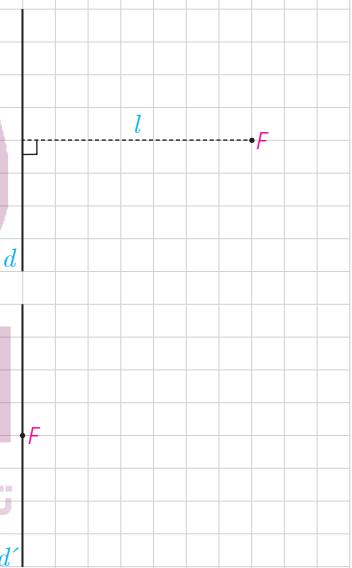
با سهمی در سال‌های گذشته تا حدی آشنا شده‌ایم. اکنون قصد داریم آن را به عنوان یک شکل هندسی مورد بررسی قرار دهیم.

فعالیت ۵

یک خط ثابت مانند d و یک نقطه ثابت مانند F خارج آن درنظر بگیرید و فرض کنید فاصله F از خط d برابر a باشد.

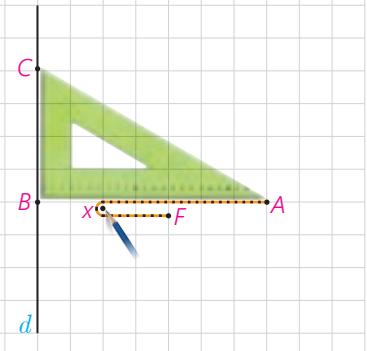
– یک نقطه بیابید که فاصله آن از خط d و نقطه F یکسان باشد.

– آیا می‌توانید نقطه دیگری با همین خاصیت بیابید؟ برای این کار از نقطه F خطی موازی خط d رسم کنید و آن را d' بنامید. تمام نقاط واقع بر خط d' فاصله‌شان از خط d برابر a است. حال توضیح دهید چگونه می‌توانید نقاطی بر خط d' بیابید که از نقطه F و خط d به یک فاصله باشند.



به مرکز F و شعاع اکمانی میزندیم تا خط d را در دو نقطه قطع کند.
– اگر مسئله پیدا کردن تمام نقاطی از صفحه باشد که به فاصله یکسانی از خط d و نقطه F قرار دارند، آیا می‌توانید راهکاری ارائه دهید؟ در زیر روشی برای یافتن نقاط موردنظر ارائه می‌گردد.

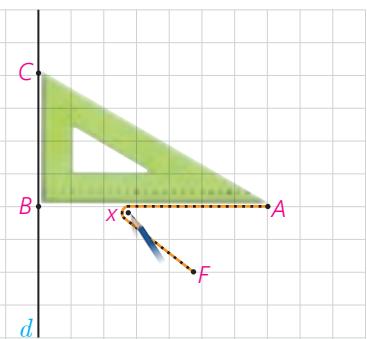
فرض کنید سه رأس مثلث یک گونیا مانند شکل به نام‌های A ، B و C باشند. یک سر یک تکه نخ به طول AB را در رأس A از گونیا و سر دیگر نخ را در نقطه F ثابت کنید و گونیا را در حالتی قرار دهید که ضلع BC بر خط d واقع باشد و نقطه F بر ضلع AB قرار داشته باشد. یک مداد را مانند شکل به گونه‌ای به نخ گیردهید که هر دو قسمت نخ کاملاً کشیده باشد. در این حالت فاصله نقطه‌ای که نوک قلم در آن قرار دارد از خط d و از نقطه F نسبت به هم چگونه است؟



$$Ax + xB = AB$$

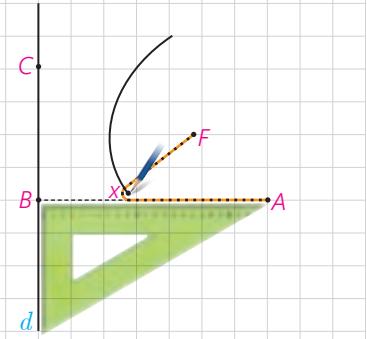
$$Bx = xF \quad \text{مساوی است}$$

زهرا شمسی



حال در حالتی که ضلع BC کماکان بر خط d واقع است گونیا را حرکت دهید. دقت کنید که نوک قلم به ضلع AB چسبیده باشد و هر دو تکه نخ در حالت کاملاً کشیده شده باشند. فرض کنید نقطه در حال حرکت نوک مداد را در هر حالت با X نمایش دهیم. پاره خط‌های BX و FX هر کدام نمایانگر چه خصوصیتی از نقطه X هستند و بین آنها چه ارتباطی برقرار است؟ چرا؟

توضیح دهید که با ادامه این کار نقاطی که توسط مداد رسم می‌شوند چه ویژگی مشترکی دارند؟ (دقت کنید که گونیا را با منطبق کردن ضلع BC بر خط d در هر دوطرف نقطه می‌توان حرکت داد.)

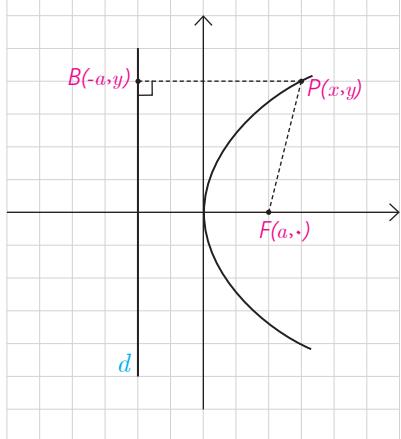


شکل حاصل از فعالیت قبل سهمی نام دارد. در این حالت نقطه F را کانون سهمی و خط d را خط هادی سهمی می‌نامیم و اگر از F بر خط d عمود رسم کیم سهمی را در نقطه‌ای قطع می‌کند که به آن رأس سهمی می‌گوییم. حال با توجه به آنچه دیدیم می‌توان گفت:

سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

■ معادله سهمی

با توجه به آنچه گفته شد با سهمی به صورت هندسی آشنا شدیم. حال به دنبال این هستیم که برای یک سهمی داده شده معادله آن را به دست آوریم؛ یعنی معادله‌ای به دست آوریم که مختصات هر نقطه از سهمی در آن معادله صدق کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در معادله صدق کند روی سهمی موردنظر باشد. دقت کنید که این کار را فقط برای سهمی‌هایی انجام می‌دهیم که خط هادی آنها موازی با یکی از محورهای مختصات باشد.



■ فعالیت ۶

۱- فرض کنید نقطه $F(a, 0)$ ، که در آن a مثبت است، کانون سهمی و خط هادی d موازی محور y ‌ها به معادله $x = -a$ باشد و نقطه $P(x, y)$ نقطه‌ای دلخواه واقع بر سهمی باشد. داریم: $|PF| = |PB|$. چرا؟
بنابراین

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+a)^2 + (y-0)^2}$$

با به توان ۲ رساندن دو طرف و ساده کردن عبارات خواهیم داشت: $y^2 = 4ax$

دقت کنید که a برابر با فاصله کانون تا رأس سهمی و همچنین فاصله رأس سهمی تا خط هادی است و فاصله کانون تا خط هادی برابر $2a$ است. در این حالت عدد مثبت a را فاصله کانونی سهمی می‌نامند و چنان که دیده می‌شود خطی که از کانون به خط هادی سهمی عمود می‌شود که در اینجا محور x هاست محور تقارن سهمی است که به آن محور کانونی سهمی یا محور سهمی هم می‌گوییم.

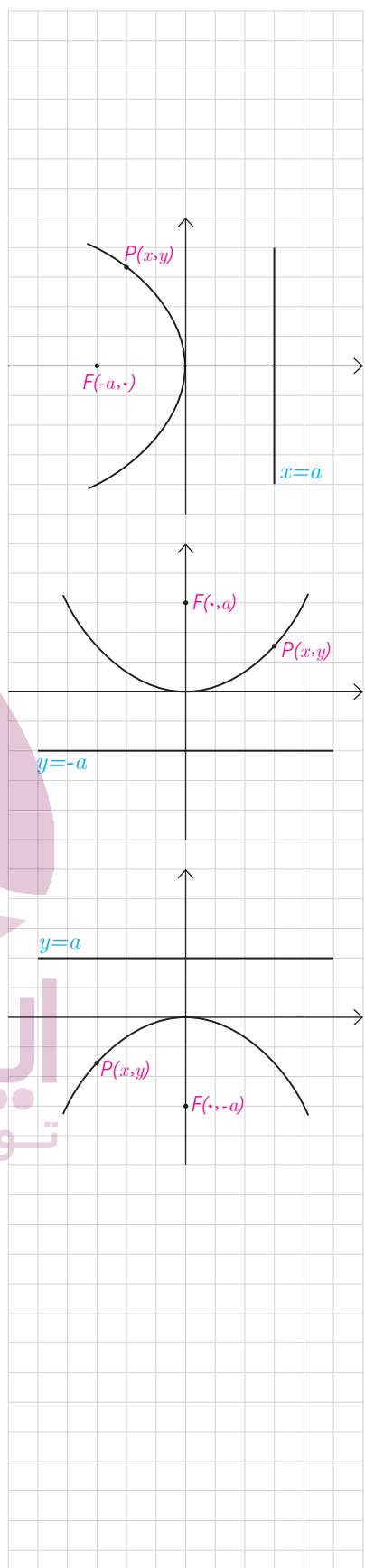
۲- در حالتی که خط هادی d موازی محور y ها به معادله $x = a$ باشد ولی کانون $F(-a, 0)$ در سمت چپ آن قرار داشته باشد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت $y^2 = -4ax$ است. در این حالت محور x هاست محور سهمی است.

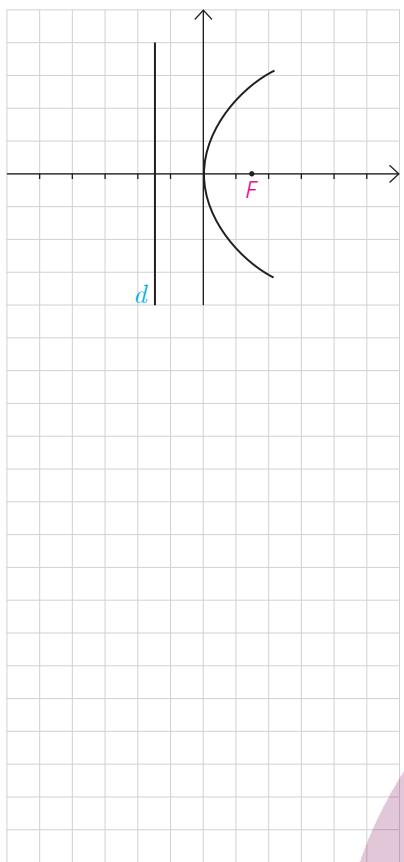
۳- در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله $y = -a$ و کانون $(0, a)$ در بالای آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید که در این حالت معادله سهمی به صورت $x^2 = 4ay$ است. در این حالت محور y هاست محور سهمی است.
 (در واقع این معادله همان $y = \frac{1}{4a}x^2$ است که در پایه دهم به عنوان معادله سهمی با آن آشنا شدید)

۴- در حالتی که خط هادی d موازی محور x ها به معادله $y = a$ و کانون $(0, -a)$ در زیر آن قرار دارد با انجام مراحل قسمت (۱) نشان دهید در این حالت معادله سهمی به صورت $x^2 = -4ay$ است. در این حالت محور y هاست محور سهمی است.

مطالب فوق درباره سهمی با رأس واقع در مبدأ مختصات را می‌توان در جدول زیر خلاصه کرد.

معادله سهمی ($a > 0$)	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$y^2 = 4ax$	$(a, 0)$	$x = -a$	محور x	رو به راست
$y^2 = -4ax$	$(-a, 0)$	$x = a$	محور x	رو به چپ
$x^2 = 4ay$	$(0, a)$	$y = -a$	محور y	رو به بالا
$x^2 = -4ay$	$(0, -a)$	$y = a$	محور y	رو به پایین





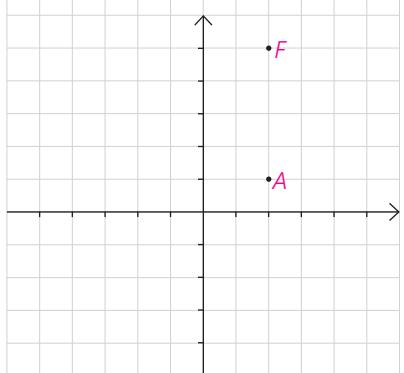
مثال: معادله $x = 6y^2$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را مشخص نماید.
حل: این معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به راست است و محور آن محور x هاست. با قرار دادن $y = ax$ داریم $a = \frac{3}{2}$. لذا کانون آن $(0, \frac{3}{2})$ و خط هادی آن موازی محور y ها و به معادله $x = -\frac{3}{2}y^2$ است و رأس آن مبدأ مختصات است. شکل تقریبی آن به صورت مقابل است.

انتقال (محورها)

دیدیم که $y = 4ax^2$ معادله یک سهمی است که رأس آن واقع بر مبدأ مختصات، کانون آن $(0, 0)$ ، خط هادی آن موازی محور y ها به معادله $x = -a$ ، محور آن محور x (خط $y = 0$) و دهانه آن رو به راست است. حال با توجه به آنچه درباره انتقال می‌دانیم می‌توان گفت معادله $y = 4a(x-h)^2$ معادله همان سهمی است که به اندازه h به سمت راست (در صورت منفی بودن h به سمت چپ) و به اندازه k به سمت بالا (در صورت منفی بودن k به سمت پایین) انتقال یافته است. لذا رأس آن به مختصات (h, k) ، کانون آن $F(a+h, k)$ ، خط هادی آن موازی محور y ها به معادله $x = -a + h$ ، محور آن خط $y = k$ و دهانه آن کماکان رو به راست است.

معادله سهمی	کانون	خط هادی	محور سهمی	دهانه سهمی
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	$(a+h, k)$	$x = -a + h$	$y = k$	رو به راست
$(y-k)^2 = -4a(x-h)$	$(-a+h, k)$	$x = a + h$	$y = k$	رو به چپ
$(x-h)^2 = 4a(y-k)$	$(h, a+k)$	$y = -a + k$	$x = h$	رو به بالا
$(x-h)^2 = -4a(y-k)$	$(h, -a+k)$	$y = a + k$	$x = h$	رو به پایین

همان طور که گفته شد رأس این سهمی‌ها نقطه‌ای به مختصات (h, k) است. لذا این حالت‌ها، حالت‌های کلی معادلات است که با قراردادن $(0, 0) = (h, k)$ به حالت‌های خاص، که در جدول قبل مطرح شد، خواهیم رسید. معادلات سهمی را در جدول فوق، معادلات استاندارد یا متعارف می‌گوییم.



مثال: معادله سهمی به رأس $A(2, 1)$ و کانون $F(2, 5)$ را بیابید و معادله خط هادی آن را بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

$a = 4$ (چرا؟) **فاصله طولی F تا A** ، چهار واحد است

۱) معادله خط هادی آن $y = -3x - 1$ است. چرا؟

(۳) دهانه سهمی رو به بالاست. چرا؟ چون F بالای A واقع شده است

لذا معادله آن به صورت $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ است و خواهیم داشت:

$$(x-2)^2 = 16(y-1)$$

مثال: مختصات کانون و همچنین معادله سهمی را به رأس $A(4,6)$ و خط هادی $x=9$ بنویسید.

حل: با توجه به جایگاه رأس و خط هادی سهمی در دستگاه مختصات، خواهیم داشت:

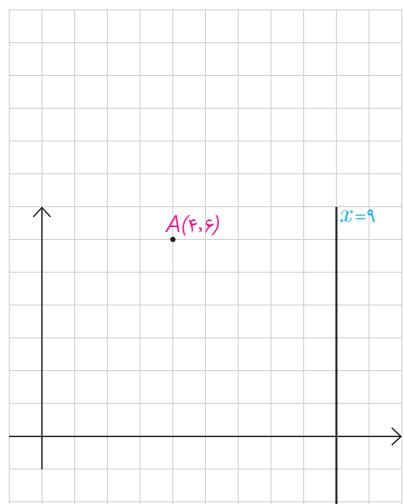
$$1) \quad a = 5 \quad \text{چرا؟} \quad 9 - 4 = 5$$

$$2) \quad \text{کانون آن به مختصات } F(-1,6) \text{ است، چرا؟} \quad F(4-5,6) \rightarrow F(-1,6)$$

(۳) دهانه سهمی رو به چپ است. چرا؟ چون F سمت چپ راس واقع شده است

لذا معادله آن به صورت $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ است و خواهیم داشت:

$$(y-6)^2 = -20(x-4)$$



■ تبدیل معادله یک سهمی به صورت متعارف

چهار حالت معادله سهمی را که در جدول دوم مطرح شد، ۴ حالت شناخته شده (متعارف) درنظر می‌گیریم. اما در سال‌های قبل معادلاتی با عنوان معادله سهمی مطرح شدند که برخی از آنها در ظاهر به شکل معادلات مطرح شده در جدول نبودند. به طور مثال در پایه دهم معادله‌ای به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ معادله یک سهمی نامیده شد. دقت کنید که ویژگی معادله سهمی این است که نسبت به یکی از دو متغیر x و y از درجه ۱ و نسبت به دیگری از درجه ۲ است. در ادامه نشان می‌دهیم معادله مطرح شده قابل تبدیل به یکی از ۴ حالت متعارف خواهد بود.

مثال: معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 + 3x + 5$ داده شده است. آن را به یکی از حالت‌های متعارف تبدیل کنید و کانون و خط هادی و محور سهمی را مشخص نمایید.

حل: داریم

$$x^2 + 3x = y - 5$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = y - 5 + \frac{9}{4} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = y - \frac{11}{4}$$

لذا معادله یک سهمی است که دهانه آن رو به بالا، رأس آن $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4})$ و

در نتیجه $a = \frac{1}{4}$ است. بنابراین $F(h, a+k) = (-\frac{3}{2}, 3)$ کانون آن و خط هادی آن

به معادله $y = -a + k = \frac{5}{2}$ است. معادله محور سهمی به صورت $x = h = -\frac{3}{2}$ است.

با روش مشابه آنچه در مثال دیدید معادلات سهمی‌ها را می‌توان به یکی از حالات استاندارد نوشت.

رسم سهمی

رسم دقیق یک منحنی توسط نرم افزارهای ریاضی انجام می‌گیرد. طبیعی است که در رسم منحنی‌ها با کاغذ و قلم، شکل حاصل شکل تقریبی منحنی مورد نظر خواهد بود. برای رسم یک سهمی ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد می‌نویسیم و با توجه به آن، مختصات رأس سهمی، مقدار a (فاصله کانونی)، مختصات F (کانون) و خط هادی آن را بدست می‌آوریم و نیز در می‌باییم که دهانه سهمی رو به کدام طرف است.

یکی از مهم‌ترین نقاطی که باید در رسم سهمی جایگاه آن را مشخص نماییم، رأس سهمی است. اگر کانون سهمی را نیز مشخص نماییم در این صورت خطی که از رأس و کانون سهمی عبور می‌کند محور تقارن سهمی است.

حال اگر خطی را که در نقطه F بر محور تقارن سهمی عمود است رسم کنیم و روی آن دو نقطه، مثلاً B و B' را که به فاصله a از F هستند مشخص نماییم، در این صورت نقاط B و B' بر سهمی واقع‌اند. چرا؟

حال با داشتن رأس و دو نقطه دیگر از سهمی و دانستن شکل کلی آن می‌توان شکل سهمی را به صورت تقریبی رسم کرد. قبل از رسم می‌توان نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات را نیز مشخص نمود.

مثال: نمودار معادله $y^2 - 2y + 8x + 9 = 0$ را رسم کنید.

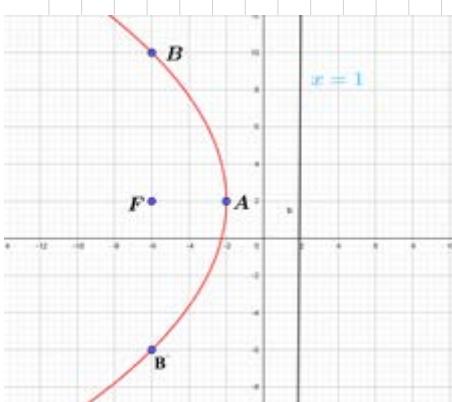
حل: ابتدا معادله را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1)$$

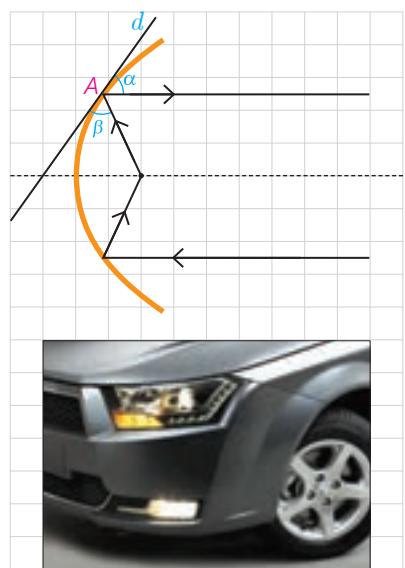
لذا معادله فوق یک سهمی با رأس $A(h, k) = (-1, 1)$ است که دهانه آن رو به چپ است. داریم: $F(-a+h, k) = (-3, 1)$ و بنابراین $-4a = -8 \Rightarrow a = 2$ و معادله خط هادی آن به صورت $x = a + h = 1$ است.

در این صورت نقاط B و B' که هم طول با F و به فاصله $2a = 4$ از F باشند یعنی $(5, -3)$ و $(-3, -3)$ نیز بر سهمی واقع‌اند. فاصله هر یکی از آنها را از کانون و خط هادی بررسی کنید. حال با وصل کردن نقاط B و A و B' به صورت یک منحنی و ادامه آن، شکل تقریبی سهمی موردنظر را بدست آورید.

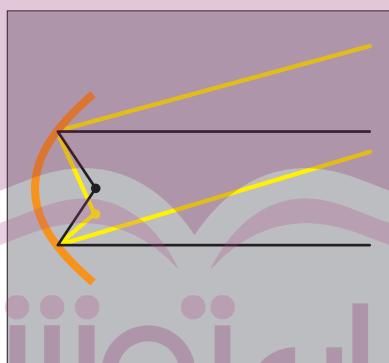
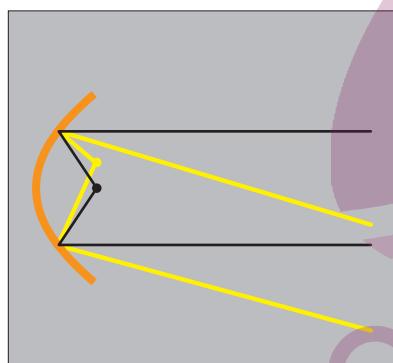


■ ویژگی بازتابندگی سهمی‌ها و کاربردهای آن

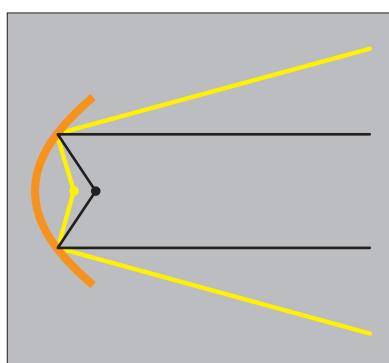
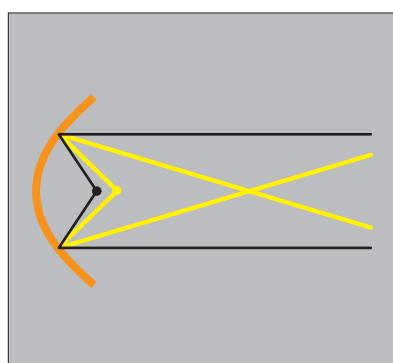
یکی از ویژگی‌های مهم سهمی این است که هر شعاع نوری که از کانون آن به بدن سهمی بتابد بازتاب آن موازی با محور سهمی بازخواهد گشت و برعکس هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدن سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت. درواقع اگر خط d بسهمی مماس و نقطه A نقطه تماس آن باشد زاویه‌های α و β برابرند. از این ویژگی در ساخت سیاری از وسایل استفاده شده است. به طور مثال چراغ جلوی اتومبیل‌ها را معمولاً به گونه‌ای می‌سازند که جداره پشت لامپ به حالت سهمی باشد و جنس آینه‌ای داشته باشد و لامپ را در کانون این سهمی قرار می‌دهند. در این صورت حتی شعاع‌های نوری که به عقب تابیده می‌شوند پس از برخورد به جداره سهمی پشت لامپ به صورت شعاع‌هایی موازی با محور سهمی به جلو بازتاب می‌یابند و روشنایی بیشتری به وجود می‌آورند.



با قرار گرفتن لامپ در راستای عمودی یکسان با کانون سهمی اما کمی بالاتر یا پایین‌تر، شعاع‌های نور کماکان موازی باهم (نه موازی با محور) اما رو به بالا یا پایین خارج می‌شوند که اصطلاحاً نور بالا یا نور پایین ایجاد می‌کنند.



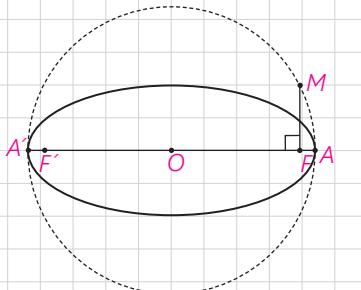
اگر لامپ در راستای افقی کانون قرار گیرد و کمی جلوتر یا کمی عقب‌تر قرار گیرد شعاع‌های نور باهم موازی خارج نمی‌شوند.



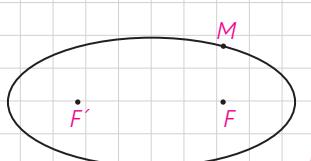


۱- دو نقطه A و B روی یک بیضی و F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF' = BF$ باشد، نشان دهید:
(الف) در حالتی که دو پاره خط AF و BF یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

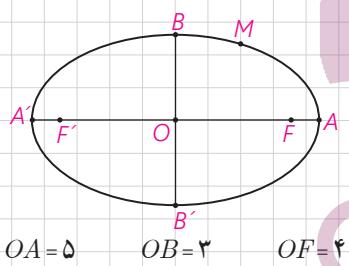
(ب) در حالتی که AF و BF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.



۲- قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی e است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



۳- در شکل مقابل نقطه M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$



۴- نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و 10° واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

(الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$.

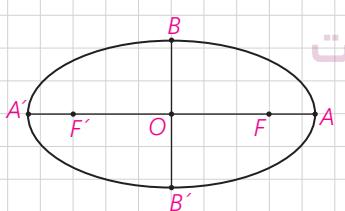
(ب) نشان دهید مثلث $MF'F$ قائم الزاویه است.

(ج) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

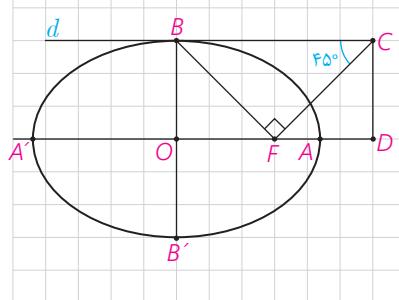
بران توشه

توشه‌ای برای موفقیت

۵- در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویه FBF' چند درجه است؟

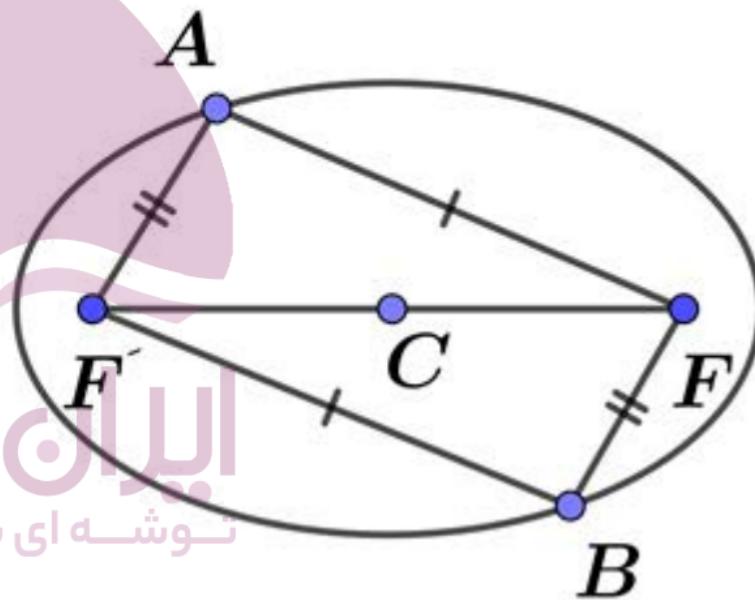


۶- در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطر‌اند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF را رسم می‌کیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کیم تا خط d را در نقطه C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\frac{AD}{AF} = 45^{\circ}$ ، مقدار $\hat{BCF} = 45^{\circ}$ را به دست آورید.



تمرین ۱: (الف)

$$\left. \begin{array}{l} AF' + AF = \mu a \\ BF' + BF = \mu a \\ BF = AF' \end{array} \right\} \Rightarrow AF = BF'$$



چهار ضلعی که اضلاع آن دو به دو مساوی باشند

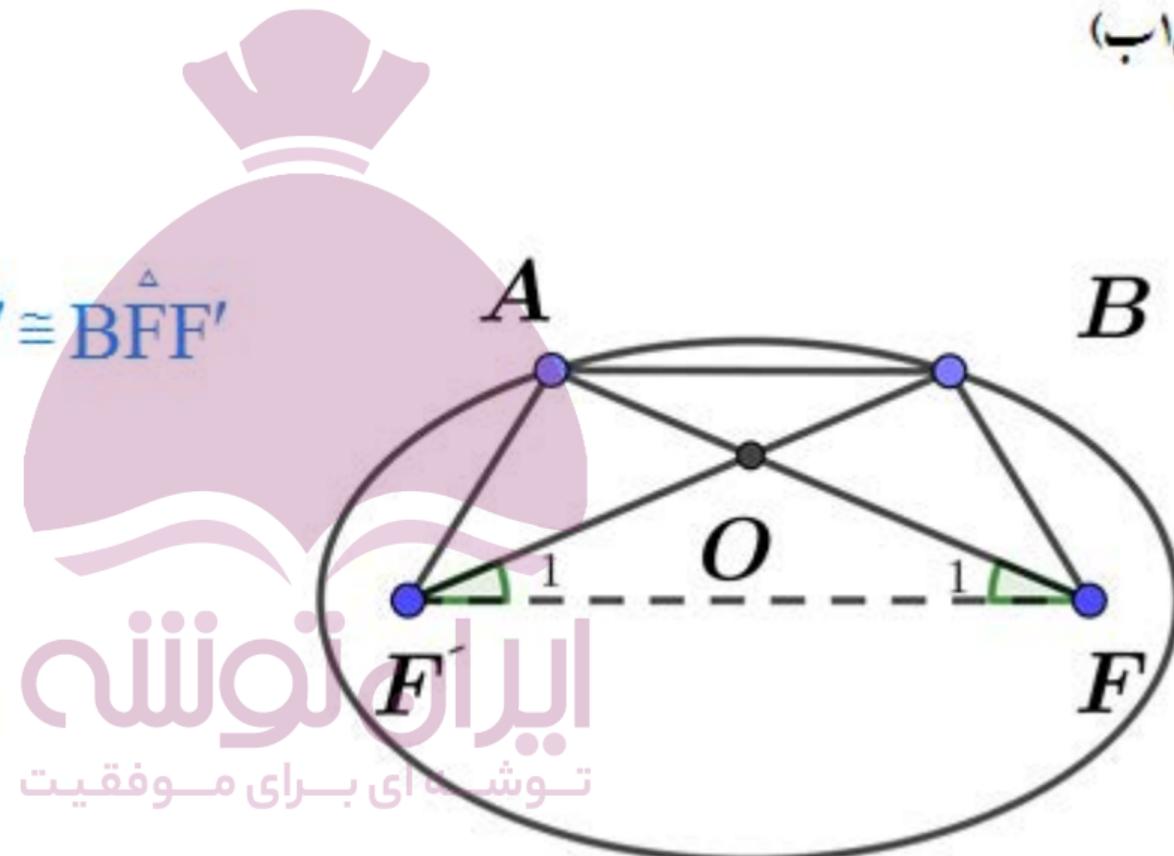
توشههای برای متوازی الاضلاع است پس

تمرين ۱۷

$$\begin{aligned} & AF' + AF = \rho a \\ & BF' + BF = \rho a \\ & BF = AF' \end{aligned} \quad \left. \Rightarrow \right\} \triangle AFF' \cong \triangle BFF'$$

$\Rightarrow AF = BF', \angle F_1 = \angle F'_1$

$\Rightarrow \triangle OFF'$ متساوي الساقين است



تمرین ۲:

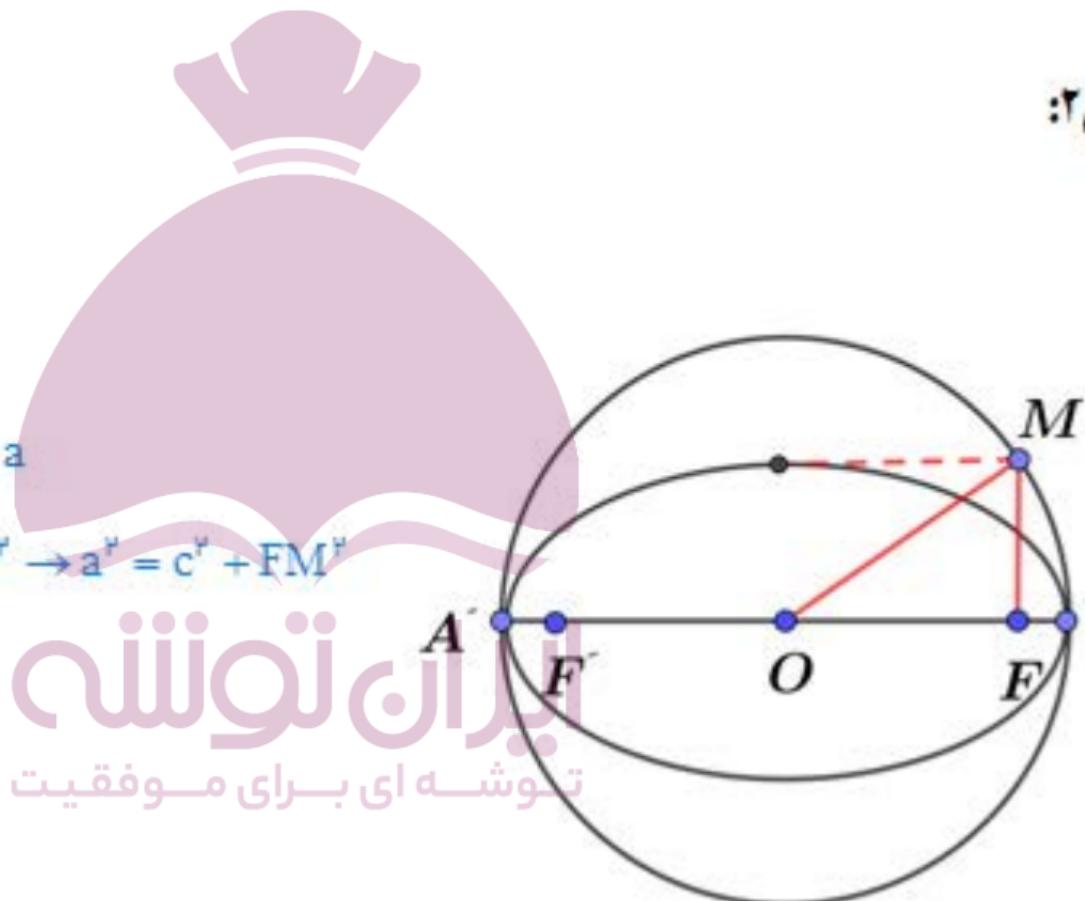
$$OA = a, OF = c, OM = R = a$$

$$\triangle OMF: OM^2 = OF^2 + FM^2 \rightarrow a^2 = c^2 + FM^2$$

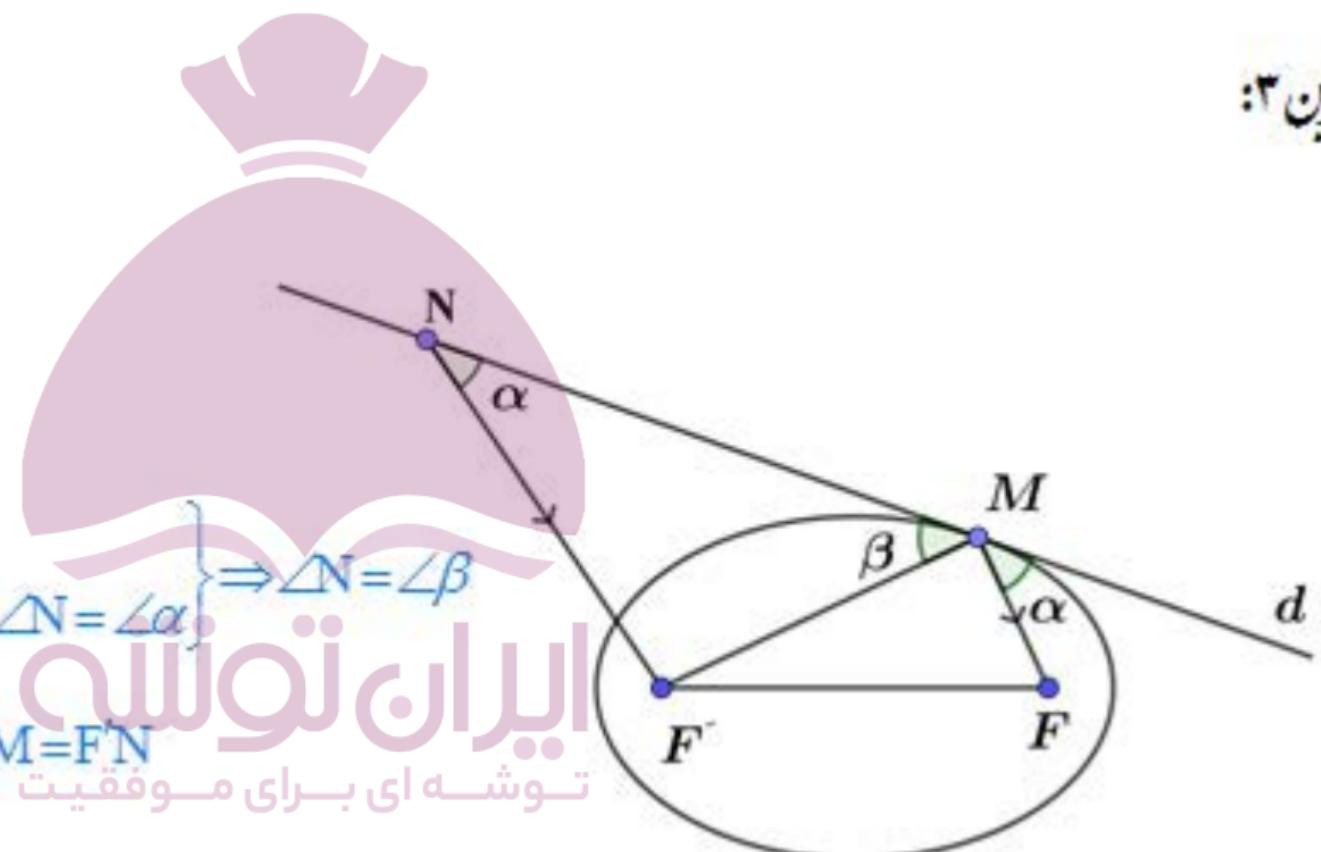
$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 - FM^2 \\c^2 &= a^2 - b^2\end{aligned}\left.\right\} \Rightarrow FM = b$$

ایران توشه

توضیحاتی برای موفقیت



تمرين ۳:



در بیضی و خط مماس

$$\angle \alpha = \angle \beta$$

$MF \parallel NF', d$ مورب

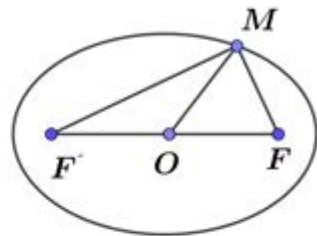
$$\Rightarrow \angle N = \angle \alpha \quad \Rightarrow \angle N = \angle \beta$$

$$\triangle FMN: \angle N = \angle \beta \Rightarrow FM = FN$$

ایران توشه ای برای موفقیت

$$OM = OF = OF'$$

$$c^r = a^r - b^r = 25 - 9 = 16 \rightarrow c = 4 = OF = OF'$$



ب) داشتی که میان تقریک ضلع آن نصف آن ضلع باشد قائم الزاویه است در اس روبرو ب ضلع نصف شده است.

(ج)

$$x + y = 5a = 10 \Rightarrow y = 10 - x$$

$$x^r + y^r = FF'^r = 8^r \Rightarrow x^r + (10 - x)^r = 64 \Rightarrow 2x^r - 20x + 100 = 0 \Rightarrow x^r - 10x + 50 = 0$$

$$x_1, x_2 = 5 \pm \sqrt{5}$$

توشه‌ای برای موفقیت

$$x = 5 + \sqrt{5} \Rightarrow y = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow MF' = 5 + \sqrt{5}, MF = 5 - \sqrt{5}$$

$$x = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow y = 5 + \sqrt{5}$$

تمرین ۵:

$$a = \mu b$$

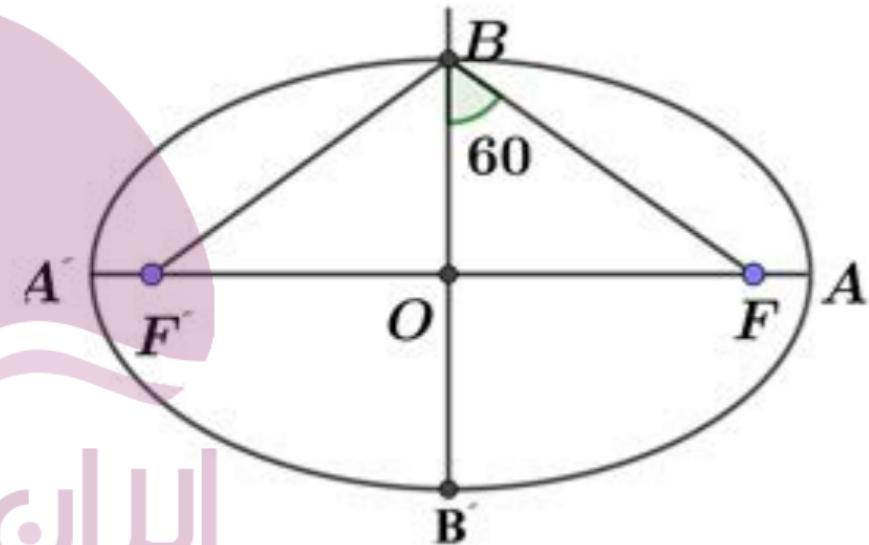
$$c^2 = a^2 - b^2 = \mu b^2 - b^2 = \mu b^2 \rightarrow c = \sqrt{\mu} b$$

$$\tan(\hat{OBF}) = \frac{OF}{OB} = \frac{\sqrt{\mu} b}{b} = \sqrt{\mu} = \tan 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{OBF} = 60^\circ \rightarrow \boxed{\hat{FBF'} = 120^\circ}$$

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



تمرین ۶:

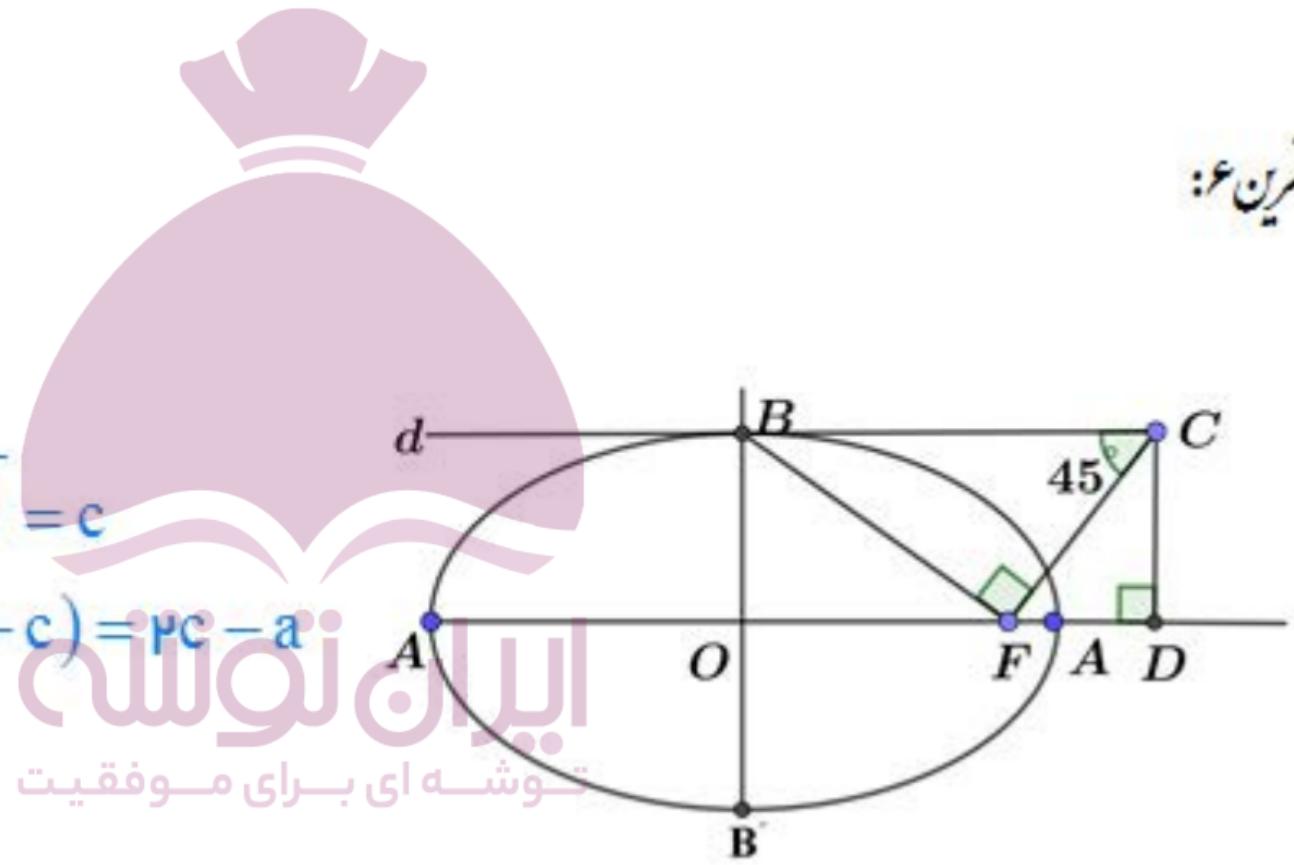
$$AF = a - c$$

$$FD = b = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{c^2} = c$$

$$AD = FD - FA = c - (a - c) = 2c - a$$

$$\rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{2c - a}{a - c}$$

ایران نویس
تکوشه‌ای برای موفقیت



۷- سهمی $y=2x-4$ مفروض است. مختصات رأس و کانون سهمی را یافته و آن را رسم کنید. همچنین نقاط برحورد سهمی و محورهای مختصات را بیابید.

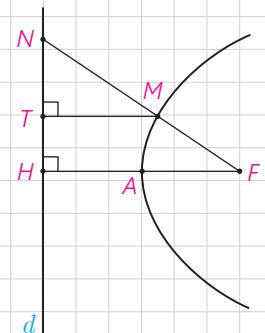
۸- مختصات رأس و کانون سهمی به معادله $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) را به دست آورید.

۹- معادله سهمی را بنویسید که $S(1,2)$ رأس و $F(-2,1)$ کانون آن باشد.

۱۰- سهمی $y=4x-4$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کیم، مختصات نقاط برحورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱- سهمی P با کانون F و خط هادی d مفروض است. ثابت کنید مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد روی سهمی است و بر عکس هر نقطه روی سهمی، مرکز یک دایره است که از F گذشته و بر d مماس است. با توجه به این موضوع تعریف دیگری از سهمی ارائه دهید.

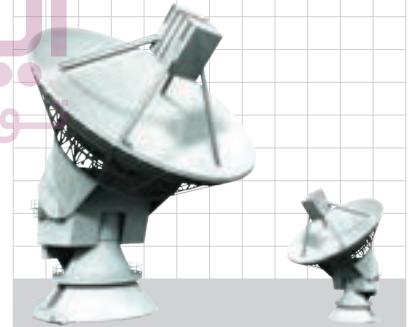
۱۲- در شکل سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا d را در N قطع کند و از نقطه M , MT , MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{NT}{TH}$$


۱۳- یک دانش آموز با دیدن دو دیش مخابراتی با ابعاد متفاوت و مشاهده فاصله کانونی متفاوت آنها به این فکر افتاد که چگونه می‌توان با داشتن یک دیش فاصله کانونی آن را به دست آورد. او از معلم خواست که فرمولی برای محاسبه فاصله کانونی یک دیش به او بگوید. معلم به او گفت: باید قطر دهانه دیش را

در خودش ضرب کرد و حاصل ضرب را بر اندازه گودی (عمق) دیش تقسیم کرد و عدد حاصل را بر ۱۶ تقسیم کرد. حاصل فاصله کانونی دیش است. دلیل درستی این دستور را با توجه به سهمی رسم شده در شکل مقابل و فرمول سهمی توضیح دهید.

۱۴- فرض کنید از مثلث ABC , اندازه ضلع BC و ارتفاع AH و محیط مثلث، داده شده باشد، با استفاده از خواص بیضی شیوه رسم این مثلث را توضیح دهید.



$$y'' + \gamma y = \gamma x \rightarrow y'' + \gamma y + \frac{\gamma}{2} = \gamma x + \frac{\gamma}{2} \rightarrow (y + \frac{\gamma}{2})'' = \gamma(x + \frac{\gamma}{2})$$

سهمی افقی و دهانه به راست

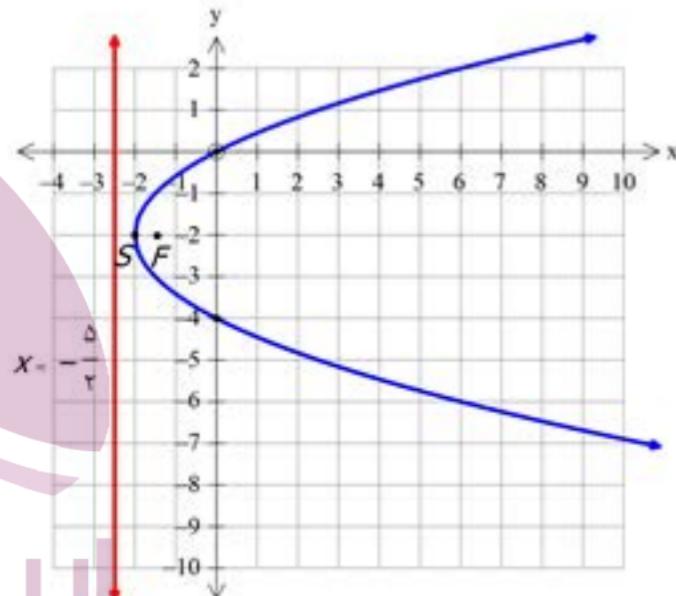
$$\begin{array}{|c|c|} \hline S & -\gamma \\ \hline -\gamma & \gamma a = \gamma \rightarrow a = \frac{1}{\gamma} \rightarrow F & \left| \begin{array}{l} \alpha + a = -\gamma + \frac{1}{\gamma} = -\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \\ \beta = -\gamma \end{array} \right. \\ \hline \end{array}$$

$$x = \alpha - a = -\gamma - \frac{1}{\gamma} = -\frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \quad \text{خط هادی}$$

$$x = 0 \rightarrow y'' + \gamma y = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \\ \vdots \\ -\gamma \end{cases} \quad \text{نقاط برخورد با محور } z\text{ها}$$

ایران توییل
توشه‌ای برای موفقیت



$$y = ax^r + bx + c = a\left(x + \frac{b}{ra}\right)^r - \frac{b^r}{ra} + c = a\left(x + \frac{b}{ra}\right)^r + \frac{-b^r + fac}{ra}$$

$$y - \frac{-b^r + fac}{ra} = a\left(x + \frac{b}{ra}\right)^r \rightarrow \frac{1}{a}\left(y - \frac{-b^r + fac}{ra}\right) = \left(x + \frac{b}{ra}\right)^r$$

سهمي قائم

$$S \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{ra} \\ \hline \frac{b^r - fac}{ra} \end{array} \right. \quad rp = \frac{1}{a} \rightarrow p = \frac{1}{ra} \rightarrow F \left| \begin{array}{l} -\frac{b}{ra} \\ \hline \frac{b^r - fac}{ra} + \frac{1}{ra} \end{array} \right.$$

ابراج توشه

چون عرض تغيير کرده پس سهمي قائم است
 توشه اي برای $a = \frac{1}{rp}$ $\Rightarrow a = \frac{1}{rp}$

$$(x-1)^r = -1 \cdot r(y-1)$$

$$y^r = f(x-1) \quad S \Big|_o^1$$

$$f(a) = f \rightarrow a = 1 \rightarrow F = O \begin{cases} \alpha + a = 1 + 1 = 2 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$(x-2)^r + (y-0)^r = 9 \rightarrow x^r + y^r - fx - dy = 0$$

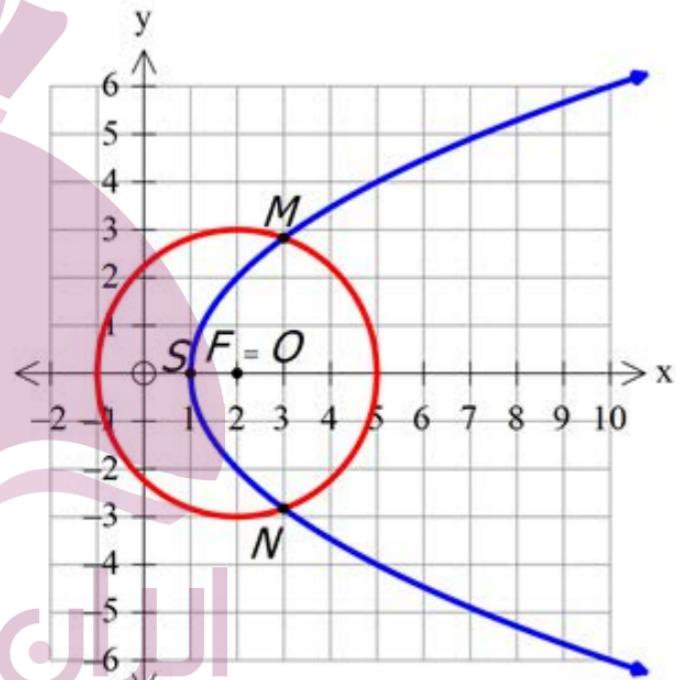
$$\begin{cases} y^r = fx - f \\ y^r = -x^r + fx + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow fx - f = -x^r + fx + d \Rightarrow x^r = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x = 3 \rightarrow y^r = 1 \rightarrow y = \pm \sqrt{3}$$

$$x = -3 \rightarrow y^r = -1 \rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$M \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \quad N \Big|_{-\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}}$$



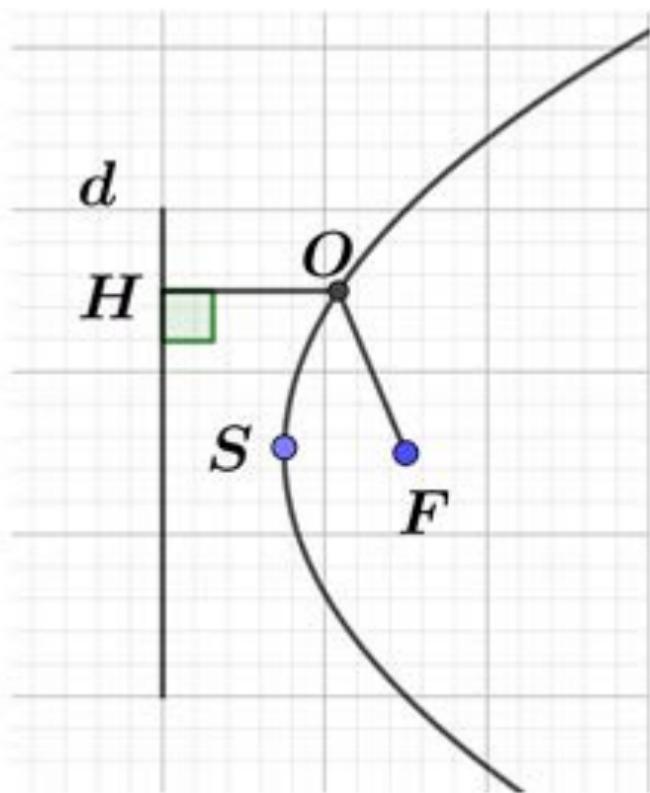
ابان توشه‌ای
توضیحاتی برای موفقیت

تمرین ۱۱: چون دایره برخط m_1 هاست و میتوان از F می‌گذرد

$$پس OH = OF = r \text{ یعنی فاصله مرکز دایره از این دو برابر است}$$

و طبق تعریف سمی، O (مرکز) دایره بروی سمی واقع است.

۱- سمی کان هندسی مرکز «ولبری» است که برخط m_1 و m_2 عرض خطی گذارد
توضیحاتی برای موفقیت



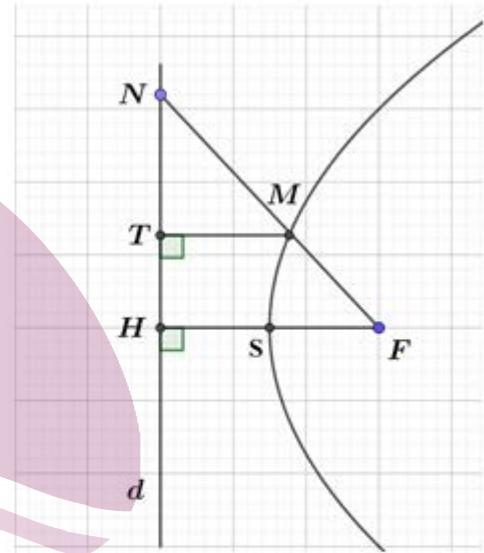
$$MF = MT, FS = SH$$

$$\Delta NMT \sim \Delta NFH \Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MT}{FH}$$

$$\Rightarrow \frac{NM}{NF} = \frac{MF}{\mu FS} \rightarrow \frac{NM}{MF} = \frac{NF}{\mu FS} \quad (1)$$

$$MT \parallel FH \xrightarrow{\text{تأسی}} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{NF}{\mu FS} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times \mu} \frac{NF}{FS} = \frac{\mu NT}{TH}$$



ایران توشه

توشه‌ای ای توشه

نقطه‌ای روی سهمی

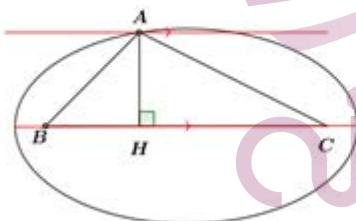
$$\xrightarrow{(x_0, y_0)} x_0^r = \mu a y_0 \Rightarrow a = \frac{x_0^r}{\mu y_0}$$

تمرین ۱۲: با توجه به مثال معادله سهمی قائم بصورت زیر است:

طریقه رسم بیضی با داشتن \mathbf{BC} (کانونهای به فاصله \mathbf{BC} از هم قرار دارند) وسط آنها را \mathbf{O} مرکز بیضیدر نظر گرفته. از دو طرف به اندازه $(p - c)$ (یعنی نصف محیط منهای نصف \mathbf{BC}) روی امتداد \mathbf{BC} انتخاب کرده تا دور آن بیضی پدید آیند. با داشتن a می‌توان b را هم محاسبه کرد و بیضی را رسم کرد.

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = (p - c)^2 - c^2 \rightarrow b = \sqrt{p^2 - pc}$$

$$AB + AC + BC = 2p \rightarrow AB + AC = 2p - BC \Rightarrow 2a = 2p - BC$$

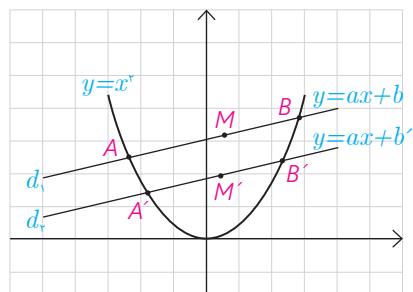


اگر $h < AH$ باشد مسئله ۴ تا جواب دارد

اگر $h = AH$ باشد مسئله ۲ تا جواب دارد

اگر $h > AH$ باشد مسئله جواب ندارد

توضیحاتی برای موقوفیت
بیضی با کانون های \mathbf{B}, \mathbf{C} و راس \mathbf{A} نقطه ایی از بیضی که قطر بزرگ بیضی $2a$ است رسم می کنیم خط موازی \mathbf{BC} به فاصله AH از آن رسم می کنیم.



۱۵- سهمی $y = x^r$ و دو خط موازی d_1 و d_2 : $y = ax + b$ را که با سهمی متقاطع‌اند، در نظر بگیرید.

(الف) معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن طول نقاط برخورد خط d_1 و سهمی $y = x^r$ باشد.

$$\begin{cases} y = x^r \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^r = ax + b \rightarrow x^r - ax - b = 0$$

(ب) فرض کنید A و B نقاط برخورد خط d_1 و سهمی باشند و نقطه M وسط پاره خط AB باشد، مختصات نقطه M را بدست آورید.

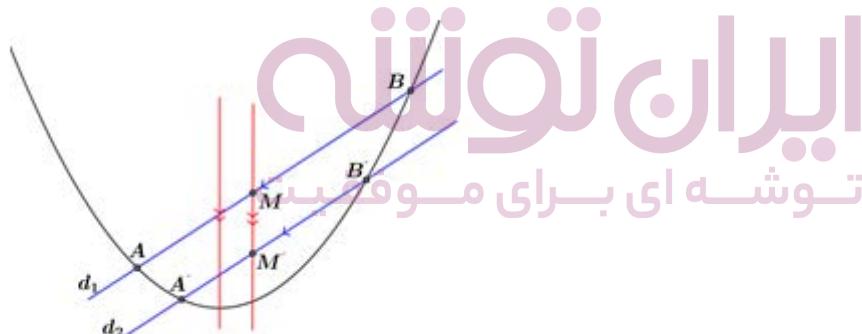
(پ) مراحل (الف) و (ب) را با جایگذاری خط d_1 به جای d_2 انجام دهید و مختصات نقطه M' (نقطه وسط پاره خط حاصل از نقاط تلاقی خط d_2 و سهمی) بدست آورید.

(ت) خط MM' نسبت به محور y ها چه وضعی دارد؟

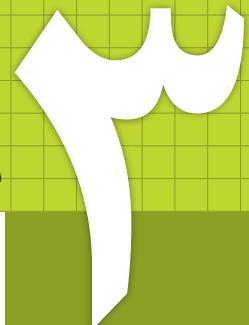
$$m_{MM'} = \text{تغییر نشده} \Rightarrow MM' \parallel oy$$

(ث) با استفاده از نتایج قسمت‌های قبل روشنی برای رسم محور تقارن یک سهمی با داشتن نمودار آن ارائه دهید و با این روش محور تقارن سهمی مقابل را رسم کنید.

ابتدا دو خط d_1 و d_2 را رسم می‌کنیم بطوریکه سهمی را قطع کنداوساط را M و M' نامیم. سهمی MM' موازی محور تقارن است. از راس S رسم می‌کنیم که محور تقارن است.







فصل سوم

بردارها



بنابراین گزارشات هوانوردی، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هوایپیما را خود دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی غیر همراه است با خط فرود می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هوایپیما را در جهتی قرار دهد که برآیند بردارهای نیروی محرکه هوایپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار گیرد. به این نوع نشستن هوایپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.

درس اول

معرفی فضای \mathbb{R}^3

با صفحه و دستگاه مختصات دو بعدی آشنایی داریم و می‌دانیم هر نقطه از صفحه دقیقاً توسط یک زوج مرتب مانند (a,b) که $a,b \in \mathbb{R}$ مشخص می‌شود و هر زوج مرتب دقیقاً یک نقطه را مشخص می‌کند. با توجه به اینکه هر نقطه از صفحه را به صورت زوج مرتب (x,y) نمایش می‌دهند در این صورت مجموعه $\{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$ شامل همه نقاط صفحه می‌باشد و آن را با \mathbb{R}^2 نمایش می‌دهند، یعنی:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R}\}$$

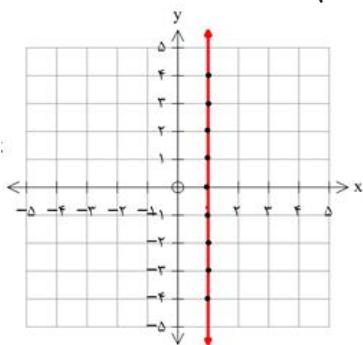
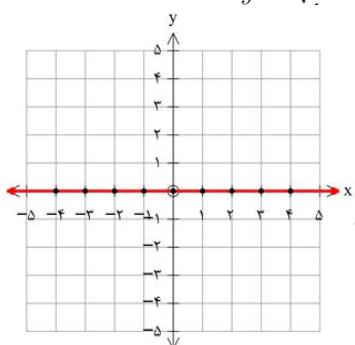
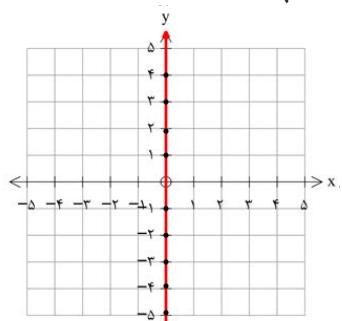
همچنین با معادله خط در صفحه آشنایی دارید و می‌دانید که حالت کلی آن به صورت $ax + by = c$ است که در آن $a,b,c \in \mathbb{R}$ و a و b هم‌زمان صفر نیستند.

به طور کلی هر وقت گفته می‌شود رابطه یا معادله‌ای نمودار G را مشخص می‌کند یعنی مختصات هر نقطه از نمودار G در آن رابطه یا معادله صدق می‌کند و برعکس هر نقطه که مختصات آن در رابطه یا معادله مذکور صدق کند روی نمودار G قرار دارد.

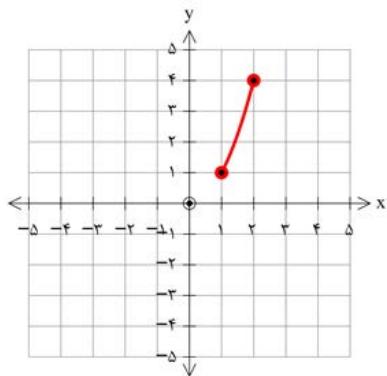
با توجه به آنچه گفته شد می‌خواهیم در \mathbb{R}^2 یا همان صفحه، با داشتن برخی روابط شکل‌های متناظر با آنها را و یا برعکس با داشتن برخی شکل‌ها، روابط مرتبط با آنها را مشخص نماییم.

کاردر کلاس

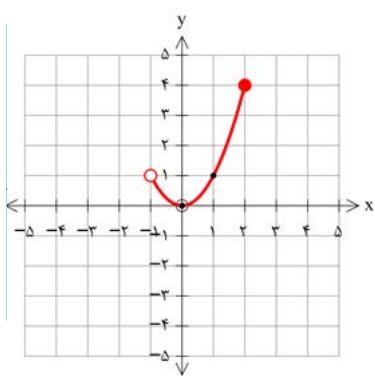
- ۱- برای هر یک از روابط زیر ابتدا چند نقطه از صفحه که در آن رابطه صدق می‌کند را مشخص کنید و سپس شکل کلی مربوط به آن رابطه را تعیین نمایید.

ب) $x=1$ ب) $y=0$ الف) $x=0$ 

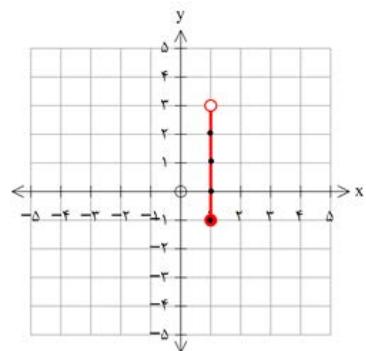
(ج) $y = x^2$, $1 \leq x \leq 2$



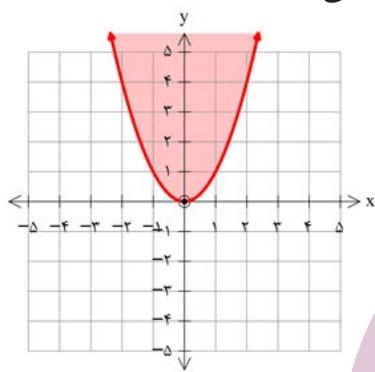
(ث) $y = x^2$, $-1 < x \leq 2$



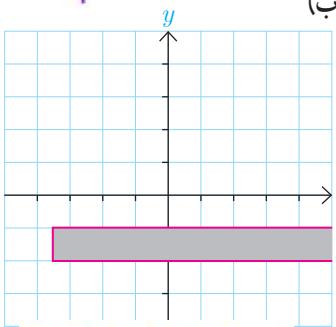
(ت) $x = 1$, $-1 \leq y < 3$



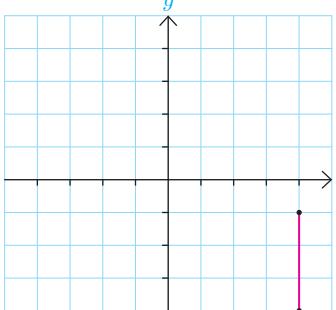
(خ) $y \geq x^2$



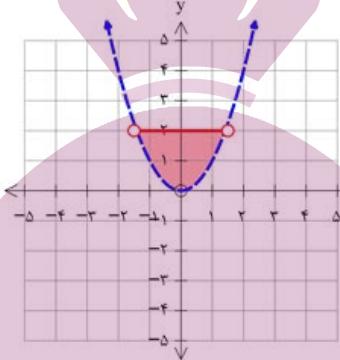
(ب) $x \geq \frac{-y}{2}$, $-4 \leq y \leq -1$



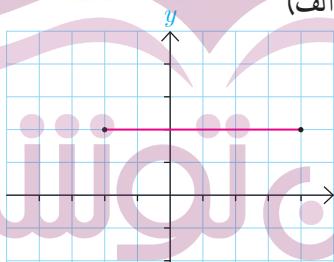
(ت) $x = 4$, $-4 \leq y \leq -1$



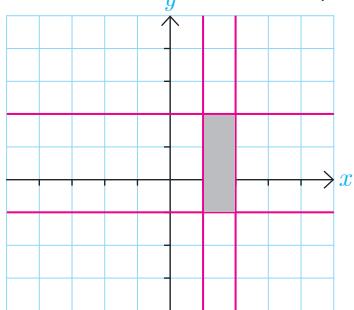
(ز) $x^2 < y \leq 2$



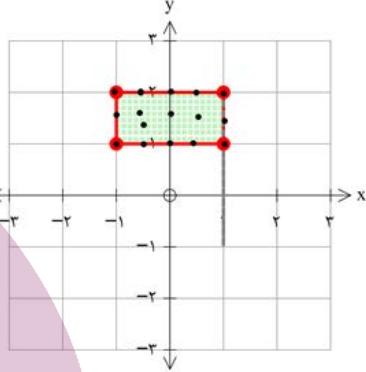
(ف) $y = 2$; $-4 \leq x \leq 4$



(پ) $1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$



(چ) $-1 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$



توضیحات برای موفقیت

۱- صرفاً ناحیه‌های مدنظر است که مرزهای آنها خطوط موازی محورهای مختصات باشد.
۲- در هر یک از شکل‌های رو به رو ابتدا مختصات چند نقطه از آن شکل را مشخص نمایید و سپس با توجه به ویژگی‌های مشترک نقاط مشخص شده و ویژگی‌های دیگری که از شکل دریافت می‌کنید رابطه مربوط به آن شکل را بنویسید.^۱

حال به سراغ فضای \mathbb{R}^3 می‌رویم. ابتدا با مختصات یک تناظر بین مجموعه نقاط فضای \mathbb{R}^3 و مجموعه تمام سه‌تایی‌های (a, b, c) که در آن $a, b, c \in \mathbb{R}$ برقرار می‌نماییم و سپس ارتباط بین برخی معادلات (یا روابط) و شکل‌های مربوط به آنها را بررسی خواهیم کرد. باید توجه داشته باشیم از آنجا که ماستگاه مختصات سه بعدی را در صفحه که خود دو بعدی است رسم می‌کنیم لذا در این حالت برای تصویر بسته شکل‌ها باید از قدرت تجسم خود کمک بگیرید.

■ معرفی فضای \mathbb{R}^3

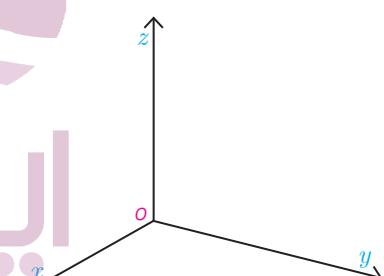
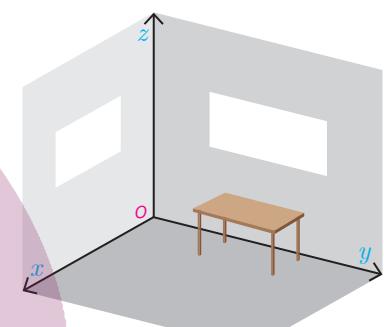
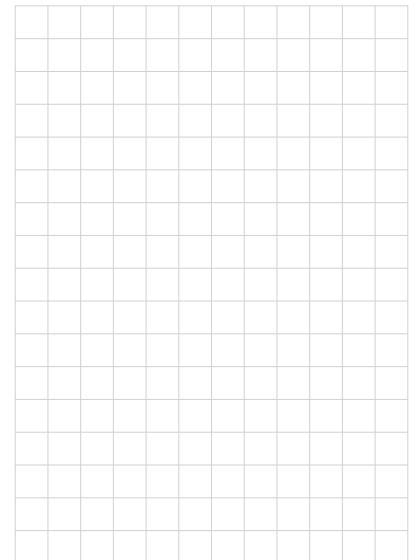
مشابه \mathbb{R}^2 می‌توان مجموعه تمام سه‌تایی‌های مرتب (x, y, z) که در آنها x, y, z اعداد حقیقی‌اند را به صورت زیر در نظر گرفت که به آن فضای \mathbb{R}^3 می‌گویند.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

به یاد می‌آوریم که برای نمایش نقاط \mathbb{R}^3 از یک دستگاه مختصات متشکل از دو محور عمود بر هم x -ها و y -ها استفاده می‌شود. به طور مشابه می‌توان فضای \mathbb{R}^3 را نیز با استفاده از یک دستگاه مختصات متشکل از سه محور دو به دو عمود بر هم که در نقطه‌ای مانند O متقاطع اند نمایش داد. این محل تقاطع، مبدأ مختصات دستگاه می‌باشد و فاصله در امتداد هر سه محور با یک واحد طول سنجیده می‌شود. وضعیت سه محور دو به دو عمود بر هم شبیه به فصل مشترک دو دیوار و کف یک اتاق می‌باشد که در شکل دیده می‌شود و در واقع تشکیل یک کنج^۱ می‌دهند.

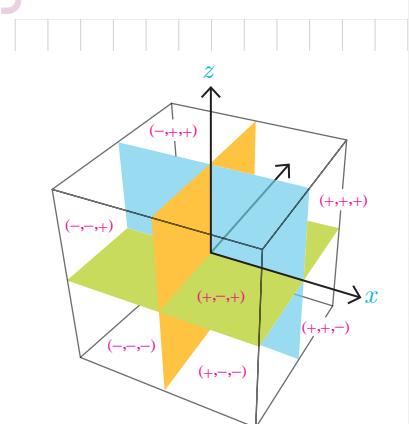
محورهای Ox , Oy , Oz به ترتیب محور x -ها، محور y -ها و محور z -ها نامیده می‌شوند. محورهای فوق تشکیل دهنده سه صفحه می‌باشند. صفحات مختصات عبارت اند از صفحه xy (کف اتاق) شامل محور x و y -ها، صفحه yz (دیوار سمت راست) شامل محور y -ها و z -ها، صفحه xz (دیوار سمت چپ) شامل محور x و z -ها هستند. جهت مثبت هر یک از محورها با پیکان مشخص شده است. اگر محورها را از مبدأ مختصات (نقطه O) در خلاف جهت ادامه دهیم تا مقادیر منفی برای محورها ظاهر شوند آنگاه این دستگاه \mathbb{R}^3 به هشت ناحیه که چهار ناحیه آن بالای صفحه xy و چهار ناحیه دیگر زیر صفحه xy هستند تقسیم می‌شود. چهار ناحیه بالای صفحه xy مطابق با شماره گذاری استاندارد یک دستگاه

\mathbb{R}^2 شماره گذاری می‌شوند.



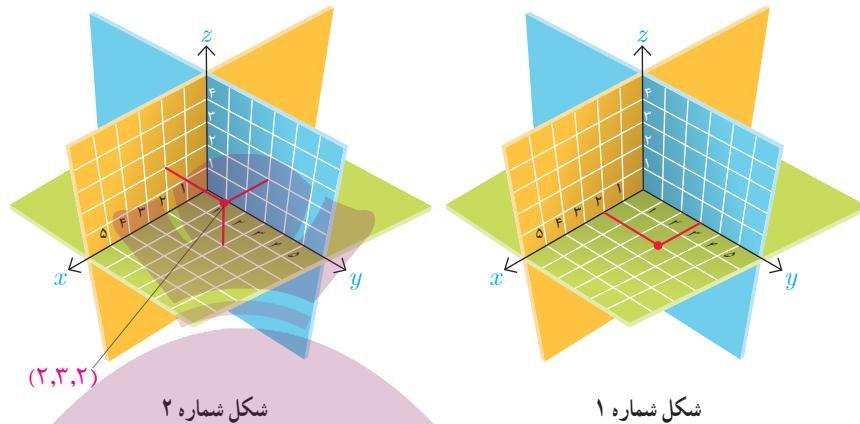
شماره ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	-	+	+
۳	-	-	+
۴	+	-	+
۵	+	+	-
۶	-	+	-
۷	-	-	-
۸	+	-	-

مثالاً ناحیه‌ای که در آن مقادیر روی هر سه محور مثبت هستند ناحیه شماره ۱ می‌باشد. به طریق مشابه چهار ناحیه پایین صفحه xy از ۵ تا ۸ شماره گذاری می‌شوند. شماره هر ناحیه و وضعیت محورها در شکل‌ها و جدول رو به رو مشخص شده‌اند.



۱- از برخورد سه صفحه دو به دو متقاطع، یک کنج تشکیل می‌شود.

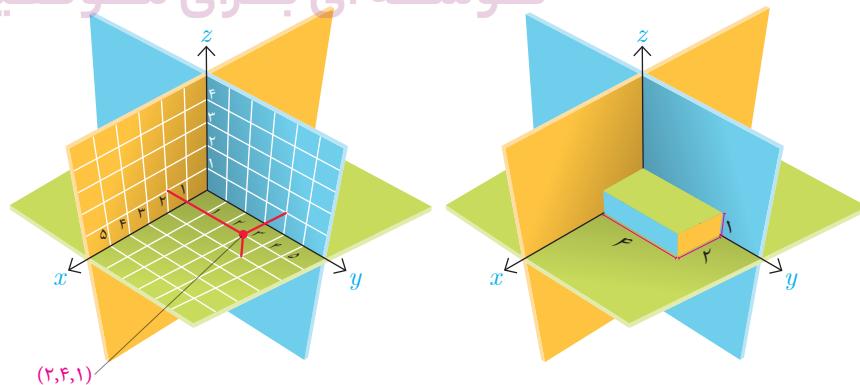
برای نمایش سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) در دستگاه مختصات \mathbb{R}^3 کافی است ابتدا همانند شکل ۱ نقطه (x_0, y_0, z_0) را در صفحه xy بیابیم و سپس ارتفاع آن را به اندازه z_0 در راستای موازی با محور z (یعنی به طور عمودی) تغییر دهیم تا شکل شماره ۲ حاصل شود.



در واقع، می‌توان سه نقطه به طول‌های x_0, y_0, z_0 به ترتیب بر روی محورهای x, y, z در نظر گرفت و سپس صفحه گذرنده از x و موازی با صفحه yz ، صفحه گذرنده از y و موازی با صفحه xz و صفحه گذرنده از z و موازی با صفحه xy را در نظر بگیریم. محل تقاطع این سه صفحه یک نقطه به طول x_0 ، عرض y_0 و ارتفاع z_0 است که نمایش‌دهنده سه‌تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) می‌باشد. مثلاً نقطه P در شکل زیر متناظر با سه‌تایی مرتب $(2,4,1)$ است.

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



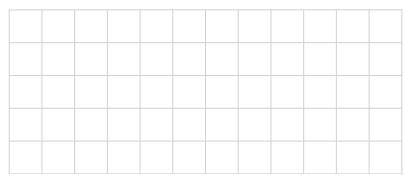
همچنین نقطه O که مبدأ مختصات است متناظر سه تابی مرتب (x_0, y_0, z_0) می‌باشد.

دو نقطه $P = (x_1, y_1, z_1)$ و $Q = (x_2, y_2, z_2)$ را برهم منطبق گوییم و می‌نویسیم

هرگاه مختصات آنها نظیر به نظیر مساوی باشند یعنی $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

برای یافتن فاصله یک نقطه از \mathbb{R}^3 مانند $P = (x_0, y_0, z_0)$ از مبدأ مختصات کافی است از نقطه P عمودی بر صفحه xy رسم کرده و پای عمود را P' بنامیم. در این صورت با توجه به شکل مقابل از قضیه فیثاغورس طول پاره خط OP' به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$|OP'| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

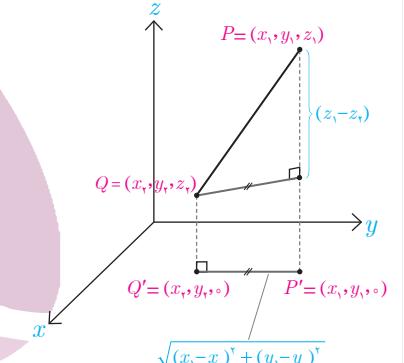


اکنون در مثلث قائم الزاویه OPP' از قضیه فیثاغورس برای محاسبه طول وتر OP استفاده می‌کنیم. پس داریم :

$$|OP| = \sqrt{|OP'|^2 + z_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

رابطه فوق را می‌توان با توجه به شکل برای فاصله دو نقطه دلخواه از \mathbb{R}^3 مانند $Q = (x_1, y_1, z_1)$ و $P = (x_0, y_0, z_0)$ به صورت زیر تعیین داد.

$$|PQ| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}$$

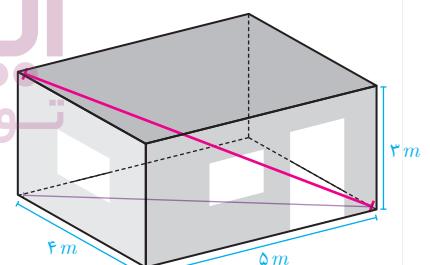


مثال: در این شکل اتاقی به طول ۵ متر و عرض ۴ متر و ارتفاع ۳ متر مشاهده می‌شود. طول قطر این اتاق از یک گوشه آن به گوشه مقابلش چقدر است؟

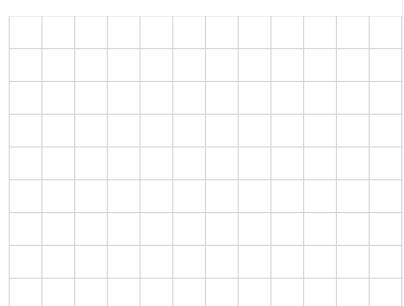
$$\text{قطر اتاق} = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{41 + 25} = \sqrt{66} = 5\sqrt{2}$$

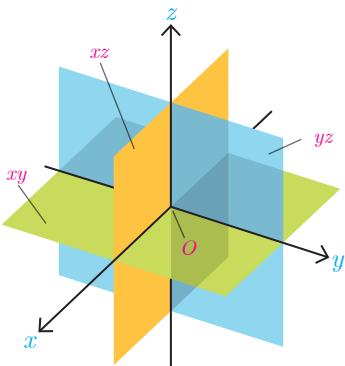
توضیحاتی برای موفقیت

حال که با دستگاه مختصات سه بعدی آشنا شدیم با داشتن برخی معادلات یا روابط به بررسی نمودارهای مربوط به آنها و یا برعکس، با داشتن برخی نمودارها به بررسی رابطه یا معادله مربوط به آنها می‌پردازیم.



مثال: فرض کنید معادله $x = 0$ داده شده باشد و ما بخواهیم شکل یا نمودار مربوط به آن را مشخص کنیم. با توجه به آنچه گفته شد باید تمام نقاطی را مشخص کنیم که در این معادله صدق می‌کنند و این یعنی تمام نقاطی که مؤلفه اول آنها یعنی x برابر صفر باشد. همواره با داشتن چنین معادلاتی باید دقت کنید که فضای مورد نظر در مسئله \mathbb{R}^3 است یا \mathbb{R}^2 .

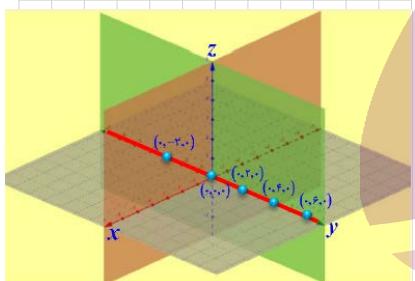




قبل‌اً در کار کلاس دیدیم که شکل مربوط به این معادله در \mathbb{R}^2 محور yz است. حال می‌خواهیم تمام نقاطی از \mathbb{R}^3 را مشخص نماییم که مؤلفه اول آنها برابر صفر است، یعنی تمام سه تابی‌هایی به صورت (x, y, z) به طوری که $y, z \in \mathbb{R}$. همان‌گونه که دیده می‌شود مقدار y و z هرچه باشد در صورتی که مؤلفه اول صفر باشد آن نقطه در معادله مذکور صدق می‌کند و به عبارتی برای یافتن نقاطی که در معادله $x = 0$ صدق می‌کنند در انتخاب مقادیر y و z آزاد هستیم. مثلاً نقاط $(-1, -3, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$ و $(0, 1.5, -1)$ همگی در معادله $x = 0$ صدق می‌کنند. تمام این نقاط در معادله $x = 0$ صدق می‌کنند و این همان صفحه yz است.

فعالیت ۱

در مثال قبل دیدیم که نمودار مربوط به معادله $x = 0$ در \mathbb{R}^3 تمام نقاط صفحه yz است (به عبارتی $x = 0$ معادله صفحه yz است) و دیدیم که نقاط مختلفی با y و z ‌های دلخواه (مؤلفه‌های دوم و سوم دلخواه) وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. حال اگر در بین تمام نقاط صفحه yz به دنبال نقاطی باشیم که مؤلفه سوم آنها نیز برابر صفر باشد؛ یعنی علاوه بر $x = 0$ شرط $z = 0$ را نیز داشته باشیم چه شکلی خواهیم داشت؟ (با در نظر گرفتن صفحه yz سعی کنید نقاطی از این صفحه را تصور کنید که برای آنها $z = 0$ باشد).



۱- مختصات چند نقطه را که در رابطه $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ صدق کنند را مشخص کنید و مکان آنها را در دستگاه مختصات تعیین نمایید.

۲- نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ چه شکلی است و چه ارتباطی با نمودار معادله $x = 0$ دارد؟ $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ همان محور yz است اما $x = 0$ همان صفحه yz است که شامل محور yz است.

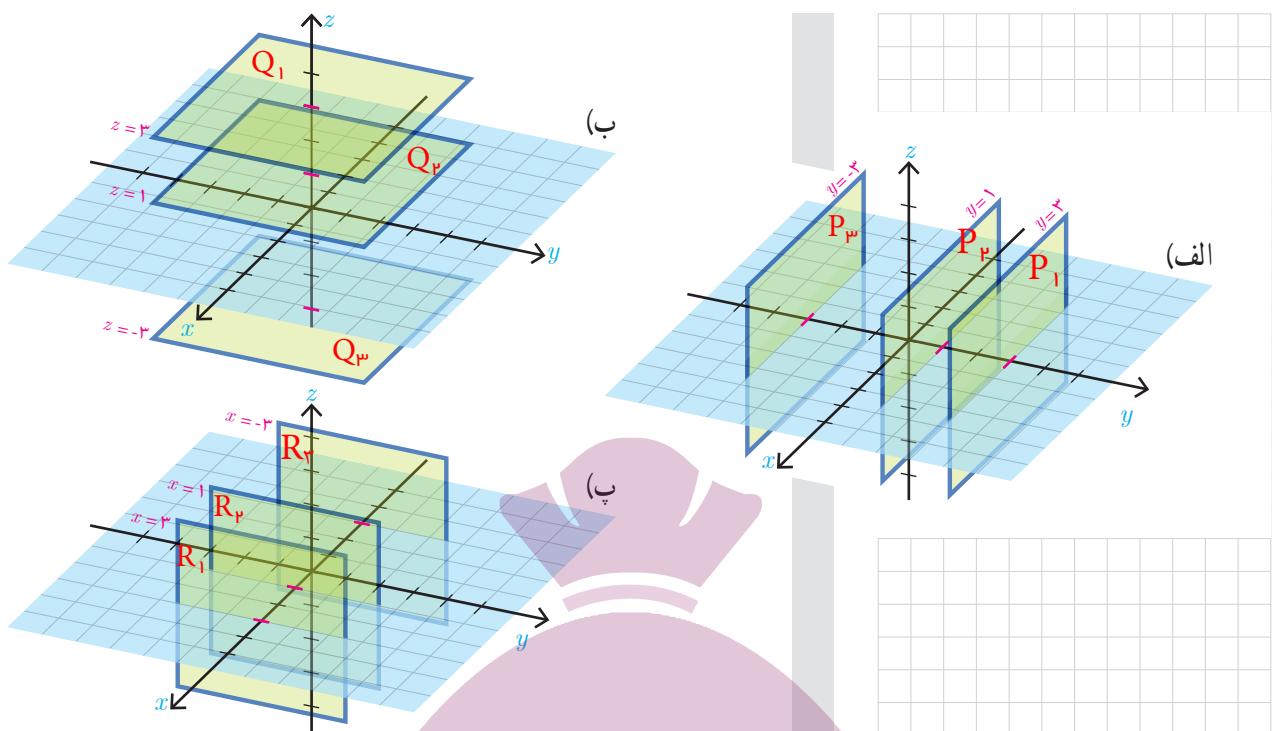
مثال: روی صفحه $z = 1$ نقاط $A = (1, 2, 1)$, $B = (2, 2, 1)$ و $C = (3, 2, 1)$ را در

نظر می‌گیریم، مؤلفه دوم هر سه نقطه برابر ۲ است. اگر روی صفحه $z = 1$ تمام نقاطی که مؤلفه دوم آنها ۲ است را در نظر بگیریم یک خط تشکیل می‌دهند (نمودار آن

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

کار در کلاس

۱- در دستگاه مختصات صفحه بعد شکل و معادله چند صفحه مشخص شده است. برای هر کدام از صفحات دو نقطه را مشخص کنید که در آن صفحه قرار دارند.



۲- وجه‌های مکعب مستطیل مشخص شده در شکل قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=1$ ، $y=4$ ، $z=-2$ و $z=2$ هستند.

(الف) در هر یک از شش وجه، مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که بر هیچ وجه دیگری قرار نداشته باشد.

(ب) مختصات سه نقطه را مشخص کنید که دقیقاً بر دو تا از وجه‌ها قرار دارند.

(پ) معادلات مربوط به هر یک از یال‌های این مکعب مستطیل را بنویسید. (دقت کنید که یال‌ها پاره خط‌اند و نه خط)

(ت) مختصات رأس‌های این مکعب مستطیل را بنویسید.

(ث) روابط مشخص کننده یکی از وجه‌های مکعب را نوشته‌ایم. روابط مشخص کننده

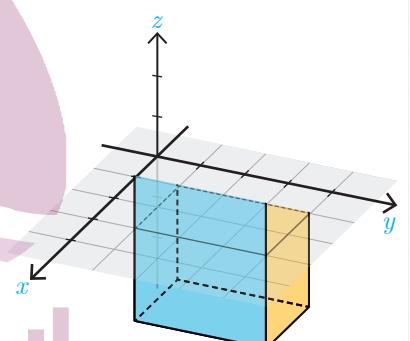
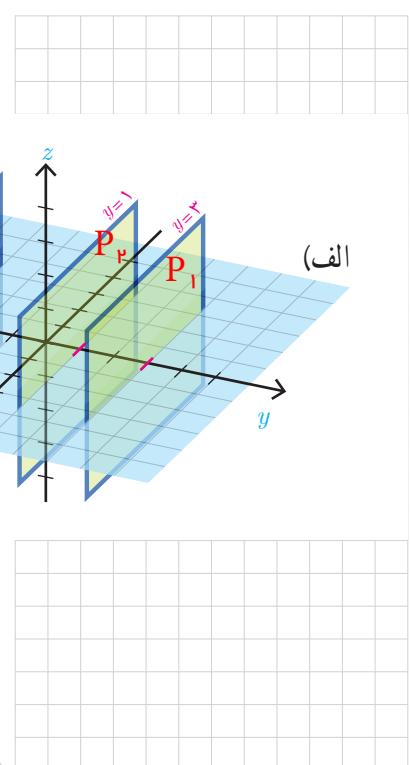
$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

(ج) مختصات نقطه‌ای را مشخص کنید که درون مکعب باشد و سپس مختصات نقطه‌ای را بباید که روی یکی از وجه‌های آن و غیر واقع بر یال‌ها باشد.

(چ) شرط اینکه نقطه‌ای درون این مکعب یا روی یکی از وجه‌های آن باشد چیست؟

(ح) روابطی را بنویسید که مشخص کننده حجم محدود شده به درون و روی سطح مکعب داده شده باشند.

۱- طرح چنین سوال‌هایی تنها برای سطوحی که هر مرز آن موازی با یکی از محورهای مختصات است و حجم‌هایی که هر وجه آنها موازی با یکی از صفحات دستگاه مختصات است، مجاز می‌باشد.



$p_1 : y = \mu \rightarrow (-\gamma, \mu, -\epsilon) \in p_1, (\circ, \mu, 1) \in p_1$

$p_r : y = 1 \rightarrow (-1, 1, \delta) \in p_r, (\gamma, 1, \epsilon) \in p_r$

$p_\mu : y = -\mu \rightarrow (\delta, -\mu, -1) \in p_\mu, (1, -\mu, \gamma) \in p_\mu$

ب

$Q_1 : z = \mu \rightarrow (1, \gamma, \mu) \in Q_1, (\epsilon, -1, \mu) \in Q_1$

$Q_r : z = 1 \rightarrow (\mu, 1, 1) \in Q_r, (-\delta, \mu, 1) \in Q_r$

$Q_\mu : z = -\mu \rightarrow (\gamma, \epsilon, -\mu) \in Q_\mu, (-1, \circ, -\mu) \in Q_\mu$

پ

ایران تو شه

$R_1 : x = \mu \rightarrow (\mu, -1, \epsilon) \in R_1, (\mu, \epsilon, 1) \in R_1$

$R_r : x = 1 \rightarrow (1, 1, 1) \in R_r, (1, \epsilon, \gamma) \in R_r$

$R_\mu : x = -\mu \rightarrow (-\mu, 1, \gamma) \in R_\mu, (-\mu, \circ, \delta) \in R_\mu$

کار در کلاس ۲: (الف)

$$(I, \mathbb{P}, I) - (\mathbb{M}, \mathbb{M}, o) - (\mathbb{P}, I, I) - (\mathbb{M}, \mathbb{P}, o) - (\mathbb{P}, \mathbb{P}, -\mathbb{P}) - (\mathbb{P}, \mathbb{M}, \mathbb{P})$$

$$(I, I, o) - (\mathbb{M}, \mathbb{P}, I) - (I, \mathbb{P}, -\mathbb{P})$$

ب)

ب)

$$\begin{cases} X = I \\ Y = I \\ -\mathbb{P} \leq Z \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = I \\ Y = \mathbb{P} \\ -\mathbb{P} \leq Z \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \mathbb{M} \\ Y = I \\ -\mathbb{P} \leq Z \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \mathbb{M} \\ Y = \mathbb{P} \\ -\mathbb{P} \leq Z \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = I \\ Z = -\mathbb{P} \\ I \leq Y \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = I \\ Z = \mathbb{P} \\ I \leq Y \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \mathbb{M} \\ Z = -\mathbb{P} \\ I \leq Y \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \mathbb{M} \\ Z = \mathbb{P} \\ I \leq Y \leq \mathbb{P} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = I \\ Z = \mathbb{P} \\ I \leq X \leq \mathbb{M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \mathbb{P} \\ Z = \mathbb{P} \\ I \leq X \leq \mathbb{M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = \mathbb{P} \\ Z = -\mathbb{P} \\ I \leq X \leq \mathbb{M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = I \\ Z = -\mathbb{P} \\ I \leq X \leq \mathbb{M} \end{cases}$$

ایرانی

توشهه رای و فقیت

ت

$$\begin{array}{cccc} (1,1,-2) & (3,1,2) & (1,4,2) & (3,4,2) \\ (1,1,2) & (3,1,-2) & (1,4,-2) & (3,4,-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ z = -2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 1 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ y = 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{array} \right. \\ \text{ش} \end{array}$$

ج) نقطه $(2,3,1)$ درون مکعب و نقطه $(1,2,0)$ روی وجه قرار دارد

چ) درون مکعب: یک کدام از مختصات مساوی ندارد و میتواند دو عدد داده شده باشد

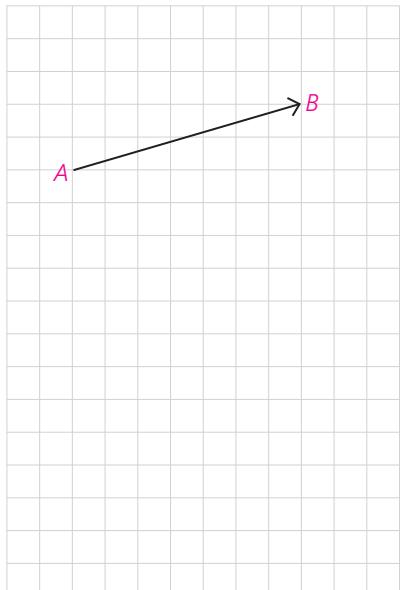
روی یک وجه: یکی از مختصات مساوی داشته باشد و دو تایی مختصات دیگر مینموده و دو متغیر را نداشته باشد

کوشله‌ای برای موفقیت

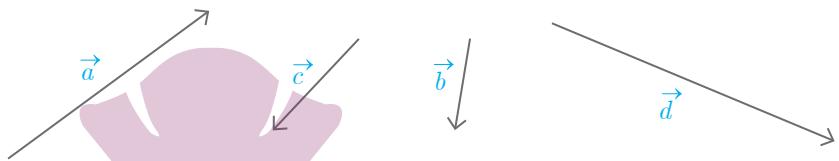
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 4 \\ -2 \leq z \leq 2 \end{array} \right.$$

ج)

بردارها در \mathbb{R}^2



در سال‌های گذشته با بردارها در صفحه آشنا شدید. هر پاره خط جهت‌دار مانند AB در شکل مقابل، یک بردار را مشخص می‌کند که ابتدای آن A و انتهای آن B می‌باشد. این بردار را با \vec{AB} و اندازه آن را با $| \vec{AB} |$ نشان می‌دهند. اغلب جهت سهولت، بردارها را با حروف کوچک لاتین مانند \vec{a} و اندازه طول آن را با $| \vec{a} |$ نمایش می‌دهند. در شکل زیر چند بردار مختلف رسم شده‌اند. در این کتاب از هر دو شیوه نگارش، بسته به زمینه مورد بحث استفاده می‌گردد.



دو بردار را مساوی یا همسنگ گوییم هرگاه اندازه و جهت آنها یکسان باشند. با توجه به این تعریف لزومی ندارد که دو بردار مساوی از یک نقطه شروع شده باشند. در شکل مقابل بردارها با هم مساوی هستند. همواره می‌توان هر بردار را با برداری مساوی آن، که از مبدأ مختصات شروع می‌شود یکی دانست، چرا که جهت و اندازه آنها برابر است.

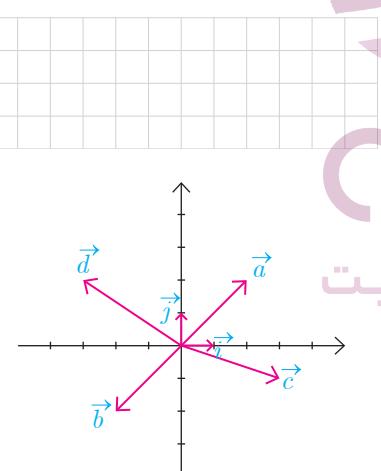
واضح است که می‌توان بی‌شمار بردار دیگر که مساوی هستند را در صفحه درنظر گرفت. به این بردارهای برابر، در اصطلاح، بردارهای هم‌ارز گفته می‌شود.

برای سهولت معمولاً برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات باشد را به عنوان نماینده بردارهای همسنگ درنظر می‌گیرند. مثلاً در شکل قبل بردار قرمز رنگ نماینده همه بردارهای همسنگ \vec{a} می‌باشد. به همین جهت معمولاً ابتدای بردارهای هم‌ارز گفته می‌گیرند.

با توجه به اینکه ابتدای بردارها را مبدأ مختصات در نظر گرفته‌ایم، مؤلفه‌های یک بردار با مختصات نقطه انتهای آن برابر می‌شود. بنابراین هر نقطه از صفحه متناظر با یک بردار است و برعکس. از این‌رو هر بردار مانند \vec{a} را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کند نمایش می‌دهند. یعنی $\vec{a} = (a_1, a_2)$ که a_1 و a_2 مختصات انتهای بردار \vec{a} می‌باشد.

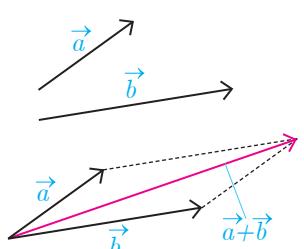
مثال: بردارهای $(2, 2)$, $\vec{j} = (0, 1)$, $\vec{i} = (1, 0)$, $\vec{d} = (-3, 2)$, $\vec{c} = (2, -1)$ و $\vec{b} = (-2, -2)$ را با زوج مرتبی که انتهای بردار را مشخص می‌کنند.

در دستگاه مختصات روبرو رسم شده‌اند.



از سال‌های قبل به یاد می‌آوریم که جمع دو بردار \vec{a} , \vec{b} از روش موازی‌الاضلاع به صورت زیر به دست می‌آید و به آن برایند دو بردار \vec{a} , \vec{b} می‌گویند.

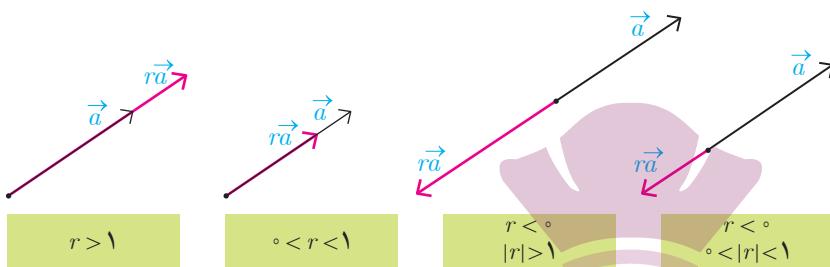
و نیز اگر داشته باشیم $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ می‌توان نوشت:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$


همچنین اگر $r \in \mathbb{R}$, و \vec{a} یک بردار باشد، آنگاه بردار $\vec{r}\vec{a}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{r}\vec{a} = r(a_1, a_2) = (ra_1, ra_2)$$

می‌توان نشان داد دو بردار \vec{a} و $\vec{r}\vec{a}$ همواره با هم موازی‌اند و برعکس اگر دو بردار مانند \vec{a} و \vec{b} موازی باشند، آنگاه یکی از آنها مضرب دیگری است. در شکل‌های زیر وضعیت دو بردار \vec{a} و $\vec{r}\vec{a}$ در حالت‌های مختلف نشان داده شده‌اند.



به طور خاص وقتی $r = -1$ بردار $\vec{a} = (-a_1, a_2)$ حاصل می‌شود که آن را قرینه بردار \vec{a} می‌نامند. با توجه به تعریف قرینه یک بردار می‌توان برای تفاضل دو بردار نوشت:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

بنظر شما تعبیر هندسی تفاضل دو بردار به کمک جمع بردارها چگونه است؟

جمع اولی با قرینه دومی

معمولًاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می‌گیرند و با $\vec{O} = (0, 0)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به اینکه ابتدای هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت، با استفاده از رابطه فاصله دو نقطه از صفحه، اندازه (طول) بردار \vec{a} به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

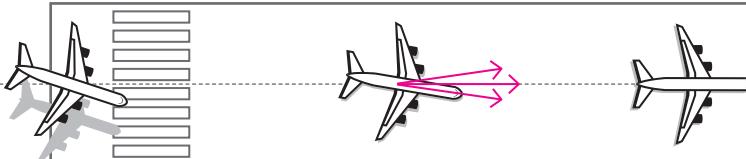
بردارها، کاربردهای فراوانی در محاسبات مهندسی و نیز مدل‌سازی‌های دارند. به طور نمونه بنا به گزارشات هوایوردي، بیشترین سوانح هوایی هنگام برخاستن و فرود هواپیماها رخ می‌دهد. یکی از سخت‌ترین شرایط فرود هنگامی است که باد شدید در جهتی اریب (غیر هم راستا) با خط فرود (مسیر باند فرود) می‌وزد. در این شرایط خلبان می‌بایست هواپیما را در جهتی قرار دهد که برایند نیروی محرکه هواپیما و نیروی باد در مسیر خط فرود قرار



گیرد (به شکل زیر رجوع کنید). به این نوع نشستن هواپیما، فرود خرچنگی می‌گویند.
بردارها برای مدل‌سازی وضعیت فرود هواپیما در چنین شرایطی بسیار مناسب می‌باشند.
اکنون به مثال بعد در این رابطه دقت کنید.



هواپیما در حال نزدیک شدن به باند فرود

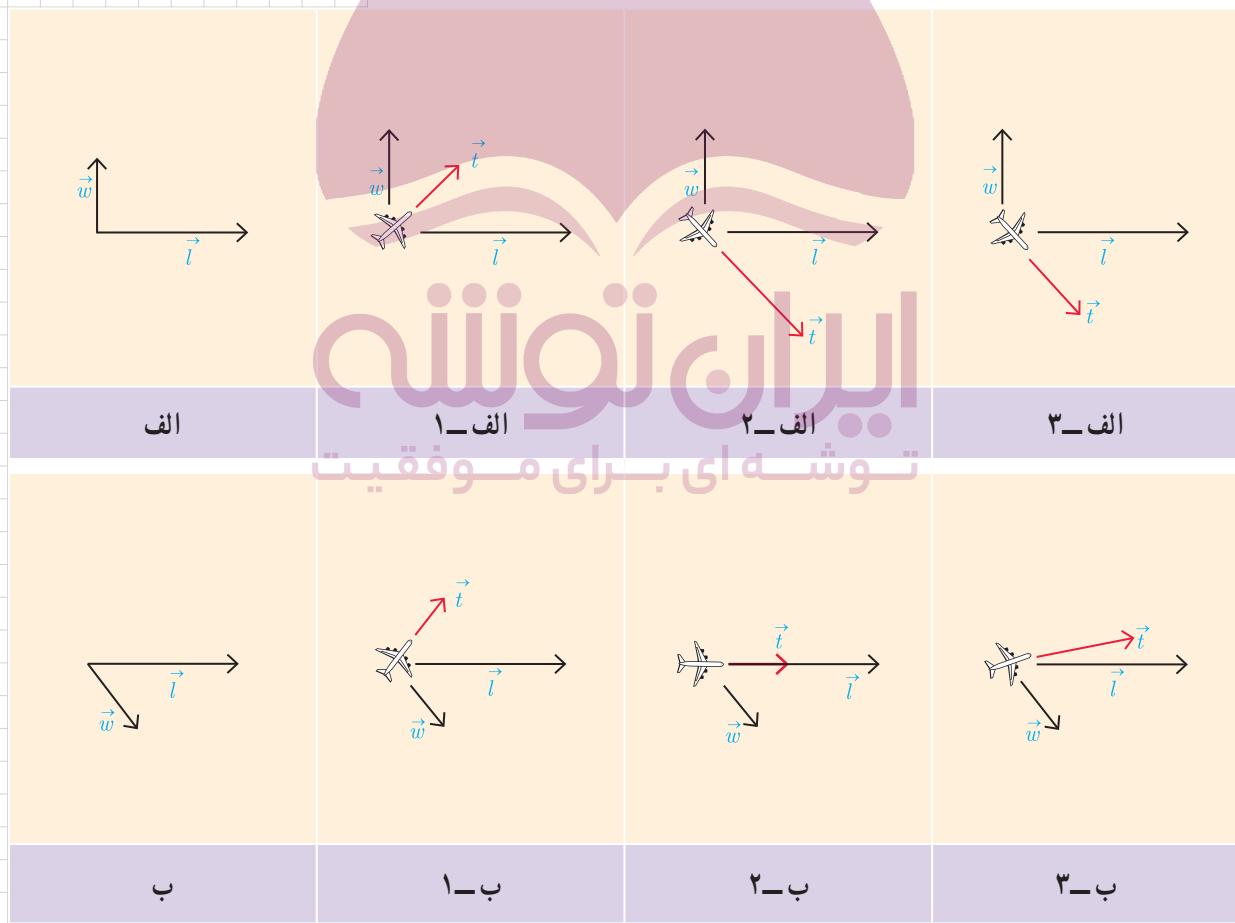


اولین برخورد هواپیما با باند فرود

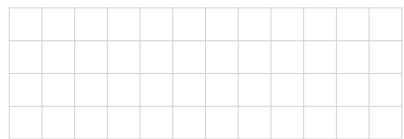
هواپیما بر روی باند فرود و در حال کاهش سرعت

توقف کامل

مثال: فرض کنید مسیر فرود (خط فرود) در جهت بردار \vec{l} و حداقل نیروی قابل کنترل در لحظه فرود با اندازه این بردار برابر باشد. همچنین باد نیروی در جهت بردار \vec{w} به هواپیما وارد می‌کند. در هریک از دو وضعیت زیر خلبان، هواپیما را در هنگام فرود در جهت کدام بردارهای داده شده می‌تواند قرار دهد، به طوری که یک فرود ایمن داشته باشد یعنی برایند نیروی محرکه \vec{t} و نیز \vec{w} در جهت \vec{l} باشد.



پاسخ: در مورد وضعیت الف برایند بردارهای \vec{w} (نیروی باد) و \vec{t} (نیرو محرکه هواپیما) به صورت زیر است.



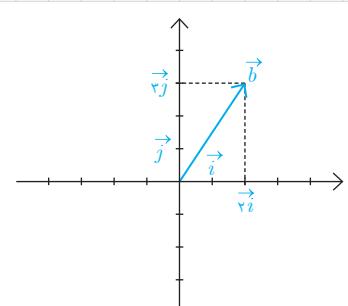
الف_۱	الف_۲	الف_۳

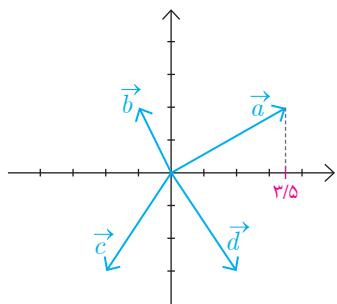
در مورد وضعیت ب برایند بردارهای \vec{w} (نیروی باد) و \vec{t} (نیرو محرکه هواپیما) به صورت زیر است.

ب_۱	ب_۲	ب_۳

معمولًاً بردار به طول واحد در جهت محور x را با \vec{i} و بردار به طول واحد در جهت مثبت محور y را با \vec{j} نمایش می‌دهند. در شکل مقابل بردار $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$ و نیز بردار $\vec{c} = (2, 3)$ به صورت حاصل جمع مضاربی از \vec{i} و \vec{j} نمایش داده شده‌اند. به طور کلی می‌توان هر بردار دلخواه مانند $\vec{a} = (a_1, a_2)$ را به صورت زیر نمایش داد.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

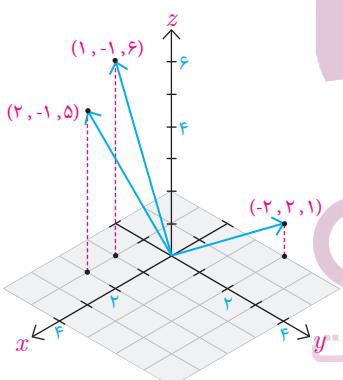




- ۱- در این دستگاه مختصات چند بردار داده شده است.
- الف) مختصات بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را یافته و آن را رسم کنید.
- ب) قرینه بردارهای \vec{c} و \vec{b} را رسم کرده و مختصات آنها را به دست آورید.
- ج) مؤلفه های بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{c} - \vec{d}$ را یافته، آنها را رسم کنید و اندازه هر یک را به دست آورید.
- د) هریک از بردارهای $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ و $\vec{c} - \vec{d}$ را بحسب بردارهای واحد \vec{j}, \vec{i} به دست آورید.

بردارها در \mathbb{R}^3

مشابه بردارهای \mathbb{R}^2 می توان به هر نقطه از \mathbb{R}^3 ، برداری که از مبدأ شروع می شود نظری کرد. مثلاً فرض کنید $A = (a_1, a_2, a_3)$ = a نقطه ای غیر از مبدأ \mathbb{R}^3 باشد. در این صورت پاره خط جهت داری که از مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ شروع شده و در نقطه A پایان می یابد یک بردار در \mathbb{R}^3 را مشخص می کند و آن را با $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ نشان می دهیم. در بردار \vec{a} مقادیر a_1, a_2, a_3 و a را مؤلفه های بردار \vec{a} می گویند. همچنین قرارداد می کنیم که مبدأ مختصات یعنی $O = (0, 0, 0)$ نمایشگر بردار $\vec{O} = (0, 0, 0)$ است که بردار صفر نامیده می شود. به عنوان مثال در شکل مقابل، چند بردار در \mathbb{R}^3 نمایش داده شده است.



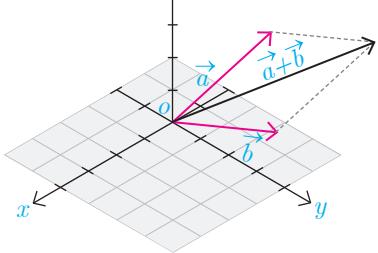
با توجه به رابطه فاصله دو نقطه از \mathbb{R}^3 ، طول هر بردار ماتند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ در \mathbb{R}^3 از رابطه زیر به دست می آید.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

حاصل جمع دو بردار در \mathbb{R}^3 توشیه ای برای موفقیت

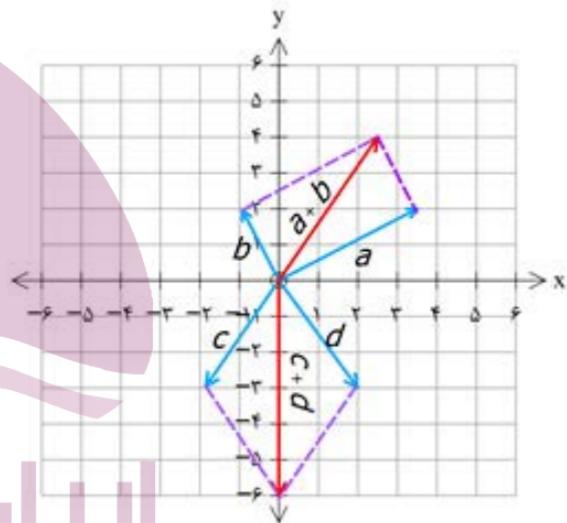
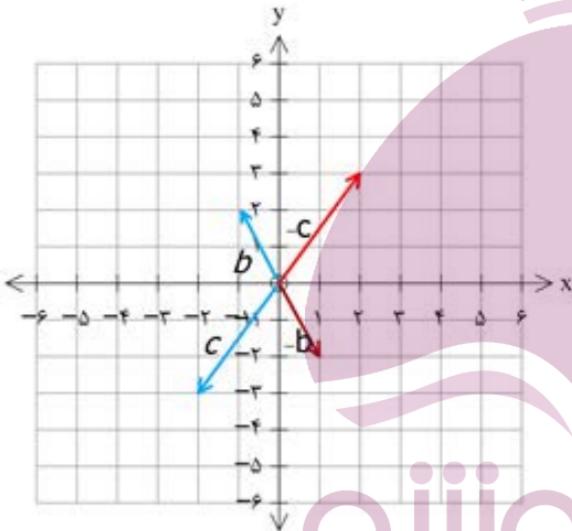
حاصل جمع دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ به صورت زیر تعریف می شود که به آن بردار برایند نیز می گویند.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



این شکل بردارهای \vec{a} , \vec{b} و $\vec{a} + \vec{b}$ را در دستگاه \mathbb{R}^3 نشان می دهد. همان طور که از شکل رو به رو پیداست برای هر دو بردار غیر صفر \vec{a}, \vec{b} می توان روش متوازی الاضلاع را در صفحه ای که از آن دو بردار می گذرد به کار برد و بردار برایند $\vec{a} + \vec{b}$ را یافت.

ب

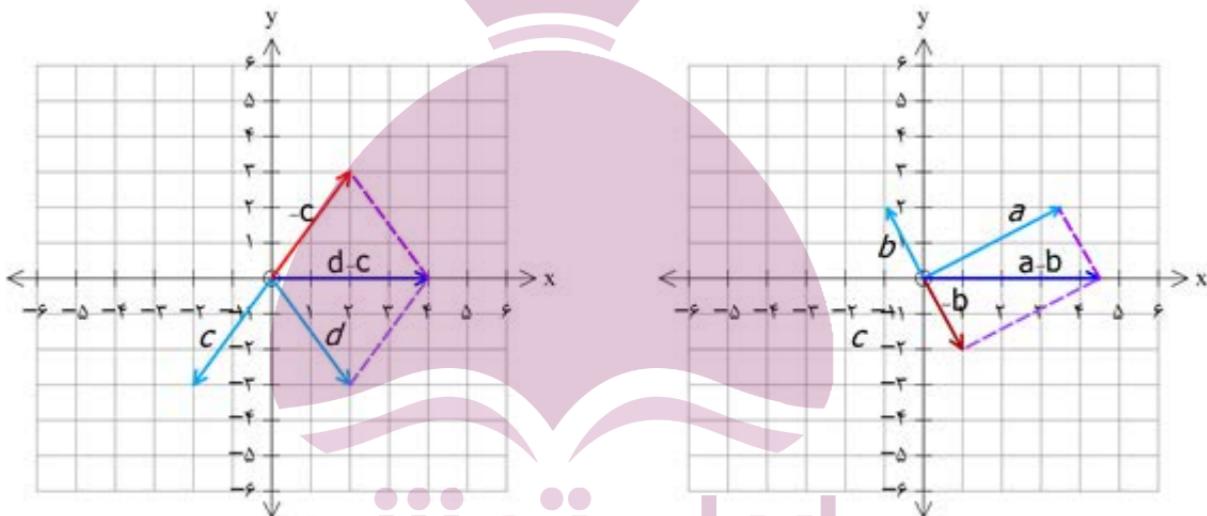


ایران جی

$$\vec{c} = (-\mu, -\nu) \Rightarrow -\vec{c} = (+\mu, +\nu)$$

$$\vec{b} = (-1, +\mu) \Rightarrow -\vec{b} = (+1, -\mu)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\mu/5, \nu) + (-1, \mu) = (\mu/5, 2\nu)$$



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (\frac{3}{5}, 2) + (1, -2) = (\frac{4}{5}, 0) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \frac{4}{5}$$

توضیحاتی برای موفقیت

$$\vec{d} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c}) = (+2, -3) + (+1, +3) = (1, 0) \Rightarrow |\vec{d} - \vec{c}| = 1$$

(،

$$\vec{a} = (\mu / \delta, \nu) = \mu / \delta \vec{i} + \nu \vec{j}$$

$$\vec{d} = (+\nu, -\mu) = \nu \vec{i} - \mu \vec{j}$$

$$\vec{d} - \vec{c} = (\nu, 0) = \nu \vec{i}$$

$$\vec{b} = (-1, \nu) = -\vec{i} + \nu \vec{j}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\mu / \delta, \nu) = \mu / \delta \vec{i} + \nu \vec{j}$$

ایران توکل
توشهه ای برای موفقیت

$$\vec{c} = (-\nu, -\mu) = -\nu \vec{i} - \mu \vec{j}$$

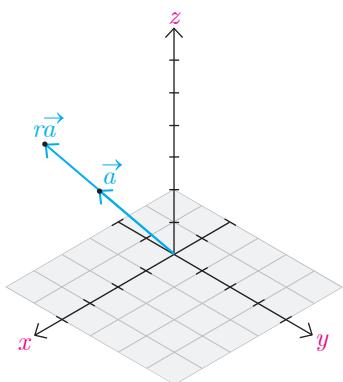
$$\vec{a} - \vec{b} = (\nu / \delta, 0) = \nu / \delta \vec{i}$$

برای هر عدد حقیقی r , حاصل ضرب r در بردار \vec{a} را به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$r\vec{a} = r(a_1, a_2, a_3)$$



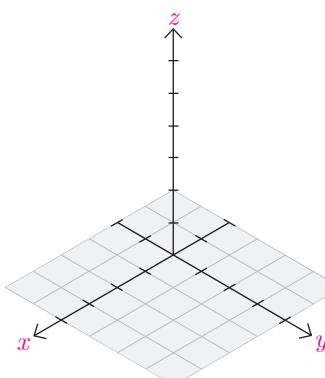
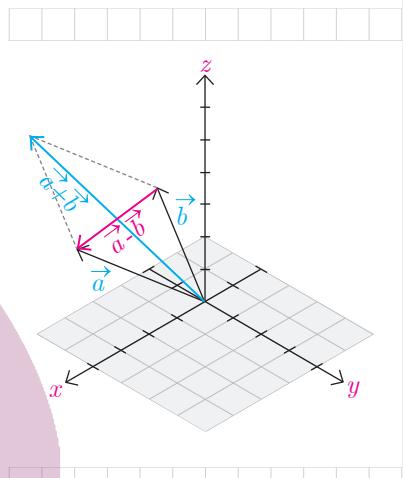
این شکل دو بردار $r\vec{a}$, \vec{a} که در آن $r > 1$ را نشان می‌دهد.
آیا راستای $r\vec{a}$, \vec{a} با هم متفاوت‌اند؟



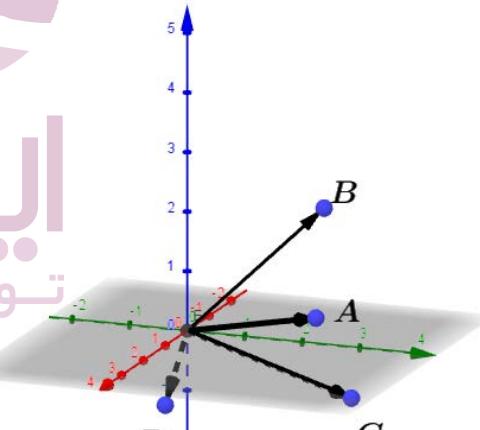
به طور خاص بردار $\vec{a} - \vec{a}$ را که با \vec{a} نشان می‌دهند قرینه \vec{a} می‌گویند یعنی $(\vec{a} - \vec{a}) = (-a_1, -a_2, -a_3)$. این بردار هم اندازه با \vec{a} (چرا؟) ولی در خلاف جهت آن می‌باشد. اکنون تفاضل بردار $\vec{b} - \vec{a}$ از \vec{a} یعنی $\vec{b} - \vec{a}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

در شکل بردارهای \vec{a} , \vec{b} و قرینه آن و نیز $\vec{a} - \vec{b}$ نمایش داده شده‌اند.



کار در کلاس
نقاط $A = (2, 3, 1)$, $B = (-1, 2, 2)$ و $C = (3, 4, 0)$ و $D = (1, 0, -1)$ در \mathbb{R}^3 را در یک دستگاه در نظر بگیرید، اگر بردارهای $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ انتهایی به ترتیب A, B, C, D باشند آنگاه آنها را در دستگاه فوق نشان دهید و هر یک از بردارهای زیر را به دست آورید.



$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, 3, 1) + (-1, 2, 2) = (0, 7, 3)$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (2, 3, 1) + [(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = (2, 3, 1) + (4, 6, 2) = (6, 9, 3)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = [(2, 3, 1) + (-1, 2, 2)] + (3, 4, 0) = (1, 5, 1) + (3, 4, 0) = (4, 9, 1)$$

$$-2(\vec{b} + \vec{c}) = -2[(-1, 2, 2) + (3, 4, 0)] = -2(2, 6, 2) = (-4, -12, -4)$$

$$-2\vec{b} - 2\vec{c} = -2(-1, 2, 2) - 2(3, 4, 0) = (2, -4, -4) + (-6, -8, 0) = (-4, -12, -4)$$

■ خواص جمع بردارها

در کار در کلاس قبل درستی برخی روابط و اعمال بین بردارها را بررسی کردیم.
به طور کلی اگر $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار دلخواه و $\vec{O} = (0, 0, 0)$ بردار صفر و نیز r و s دو عدد حقیقی باشند روابط زیر همواره برقرارند.

$$1 - \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{خاصیت جابه جایی جمع})$$

$$2 - \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری در جمع})$$

$$3 - \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{O} \quad (\text{عضو قرینه})$$

$$4 - \vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a} \quad (\text{عضو خشی})$$

$$5 - r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$6 - (r+s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

$$7 - (rs)\vec{a} = r(s\vec{a})$$

$$8 - \text{اگر } \vec{b} = r\vec{a} \text{ آنگاه } |\vec{b}| = |r| |\vec{a}| \text{ (قدر مطلق } r \text{ است)}$$

■ بردارهای یکه

با بردارهای یکه $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ در صفحه \mathbb{R}^2 به ترتیب در جهت محور x و y آشنا شدید.
به طور مشابه در \mathbb{R}^3 بردارهای زیر را با طول واحد در جهت محورهای مختصات \mathbb{R}^3
در نظر می‌گیرند.

$$\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$$

ابران آنلاین

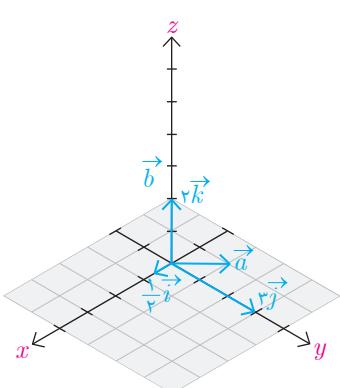
پوششی برای موفقیت

به این ترتیب \vec{i} بردار یکه در جهت محور طول ها، \vec{j} بردار یکه در جهت محور عرض ها و \vec{k} بردار یکه در جهت محور ارتفاع ها می‌باشند.
همچنین با استفاده از روابط بین بردارها به سادگی می‌توان نشان داد که هر بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ به صورت ترکیبی از بردارهای یکه \vec{i}, \vec{j} و \vec{k} قابل بیان است. در واقع داریم:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

مثال: بردار $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, 3, 2\right)$ را بر حسب بردارهای یکه \vec{i}, \vec{j} و \vec{k} نشان دهید.

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$





تمرین

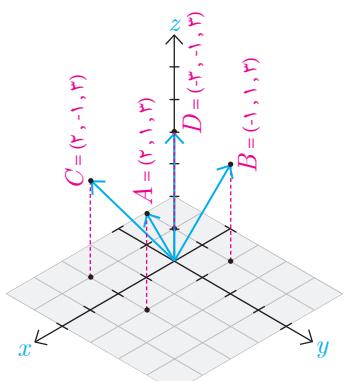
ABDC

۱- چهار نقطه در دستگاه مختصات مقابل مشخص شده‌اند.

الف) معادلات مشخص کننده سطح محدود شده به چهارضلعی $ABCD$ را بنویسید.

ب) معادلات یکی از سطوحی که با سطح $ABCD$ هم مساحت و موازی هستند را بنویسید.

ABDC

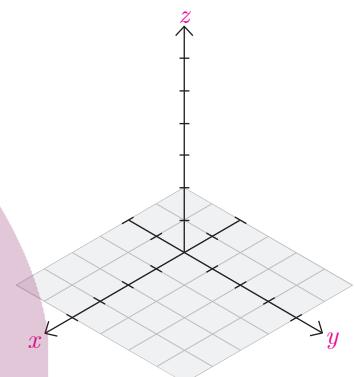


۲- نقاط با مختصات $S=(-2,-2,-2)$ ، $R=(3,0,-1)$ ، $Q=(0,-1,-2)$ ، $P=(1,1,1)$ و R را در یک دستگاه مختصات نمایش دهید.

--	--	--

۳- در سؤال قبل طول پاره خط‌های PQ ، RQ و PS را بایابید.

۴- فرض کنید $Q=(x_1, y_1, z_1)$ و $P=(x_0, y_0, z_0)$. مختصات نقطه M وسط پاره خط PQ را بایابید.



۵- در هر کدام از حالات زیر بردار خواسته شده را بایابید.

ایران آفیش

$$r\vec{a} - \vec{b} = ? \quad , \quad r=3 \quad , \quad \vec{b} = (\sqrt{2}, 1, 1) \quad , \quad \vec{a} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 2\right)$$

$$r\vec{a} + \vec{b} = ? \quad , \quad r=-1 \quad , \quad \vec{b} = (3, 1, -1) \quad , \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = ? \quad , \quad \vec{b} = 3\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{a} = \sqrt{2}\vec{i} - \vec{k} \quad (ج)$$

$$r\vec{a} + \vec{b} = ? \quad , \quad r=\frac{1}{5} \quad , \quad \vec{b} = -\vec{k} + \vec{i} \quad , \quad \vec{a} = 5\vec{k} + \vec{j} \quad (د)$$

۶- طول بردار \vec{a} را در هر یک از حالات سؤال قبل بایابید.

(الف)

$$A = (\mu, 1, \mu) \quad B = (-1, 1, \mu) \quad C = (\mu, -1, \mu) \quad D = (-\mu, -1, \mu)$$

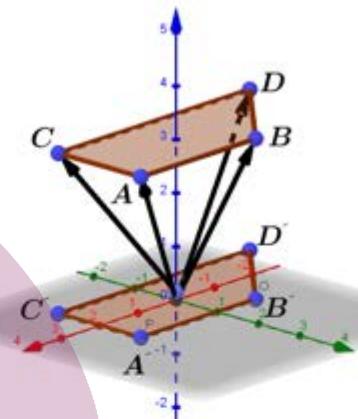
$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases} \quad BD = \begin{cases} -\mu \leq x \leq -1 \\ y = x + 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$DC = \begin{cases} -\mu \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases} \quad CA : \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$A' = (\mu, 1, \circ) \quad B' = (-1, 1, \circ) \quad C' = (\mu, -1, \circ) \quad D' = (-\mu, -1, \circ)$$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = \circ \end{cases} \quad B'D' = \begin{cases} -\mu \leq x \leq -1 \\ y = x + 1 \\ z = \circ \end{cases}$$

$$D'C' = \begin{cases} -\mu \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = \circ \end{cases} \quad C'A' : \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \circ \end{cases}$$



(ب)

ابزار نوشتہ

توضیحاتی برای موفقیت

پاسخ تمرین ۱ اگر مختصات نقطه D را تغییر دهیم یعنی به صورت $D = (-1, -1, \mu)$ باشد

$$A = (\mu, 1, \mu) \quad B = (-1, 1, \mu) \quad C = (\mu, -1, \mu) \quad D = (-1, -1, \mu)$$

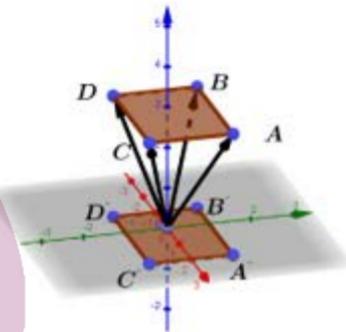
$$AB = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$BD = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$CD = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$AC = \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow ABCD = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \mu \end{cases}$$



$$A' = (\mu, 1, \circ) \quad B' = (-1, 1, \circ) \quad C' = (\mu, -1, \circ) \quad D' = (-1, -1, \circ)$$

$$A'B' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = 1 \\ z = \circ \end{cases}$$

$$B'D' = \begin{cases} x = -1 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \circ \end{cases}$$

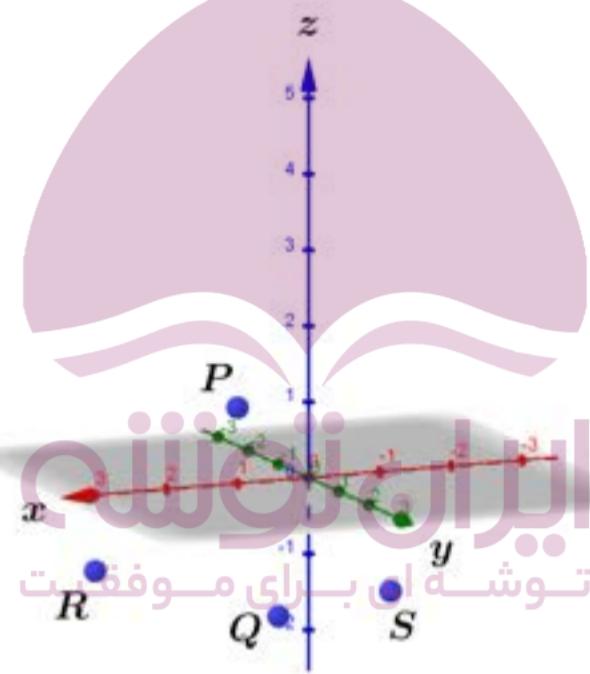
$$C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ y = -1 \\ z = \circ \end{cases}$$

$$A'C' = \begin{cases} x = \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'B'C'D' = \begin{cases} -1 \leq x \leq \mu \\ -1 \leq y \leq 1 \\ z = \circ \end{cases}$$

$$\text{ایران جشن} \quad \text{توشمند برای موفقیت}$$

تمرین ۲:



تمرين ٣:

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$RQ = \sqrt{(x_Q - x_R)^2 + (y_Q - y_R)^2 + (z_Q - z_R)^2} = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (-1 + 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2}$$

$$PS = \sqrt{(x_S - x_P)^2 + (y_S - y_P)^2 + (z_S - z_P)^2} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (-1 - 0)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

تمرين ٤:

ابرار اللہ

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}, y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}, z_M = \frac{z_P + z_Q}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{x_P + x_Q}{2}, \frac{y_P + y_Q}{2}, \frac{z_P + z_Q}{2} \right)$$

تمرین ۵: انت

$$r\vec{a} - \vec{b} = 5\left(\frac{-1}{5}, 0, 2\right) - (2\sqrt{2}, 1, 1) = (-1, 0, 2) - (2\sqrt{2}, 1, 1) = (\sqrt{2} - 1, -1, 1)$$

(ب)

$$r\vec{a} + \vec{b} = -1(2, 2, -1) + (2, 1, -1) = (-2, -2, 1) + (2, 1, -1) = (0, -1, 0)$$

(ج)

$$\vec{a} + \vec{b} = (2\sqrt{2}, 0, -1) + (0, 2, 1) = (2\sqrt{2}, 2, 0)$$

$$r\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{5}(0, 1, 2) + (1, 0, -1) = \left(0, \frac{1}{5}, 1\right) + (1, 0, -1) = \left(1, \frac{1}{5}, 0\right)$$

(د)

تمرین ع: (الف)

$$\vec{a} = \left(\frac{-1}{\mu}, 0, \mu \right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\mu} \right)^2 + 0^2 + \mu^2} = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{\mu^2}} = \sqrt{\frac{1 + \mu^2}{1}} = \sqrt{1 + \mu^2}$$

(ب)

$$\vec{a} = (\mu, \mu, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\mu^2 + \mu^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

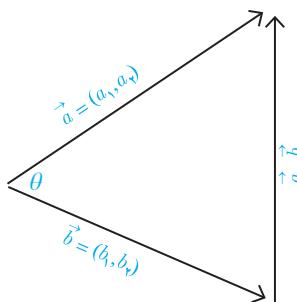
(ج)

$$\vec{a} = (\sqrt{\mu}, 0, -1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(\sqrt{\mu})^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{\mu + 1} = \sqrt{\mu + 1}$$

ابراهیمی
توضیحاتی برای مکانیک

ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها

فرض کنید دو بردار $\vec{a} = (a_1, a_2)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2)$ همانند شکل داده شده اند.
می خواهیم زاویه بین این دو بردار (θ) را پیدا کنیم.
برای این منظور بردار تفاضل $\vec{a} - \vec{b}$ را نیز در این شکل رسم کرده ایم تا مثلثی به طول اضلاع زیر به دست آید.



$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوس ها که سال گذشته آموخته اید می توان نوشت.

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \\ \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \\ \cos\theta &= \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|} \end{aligned} \quad (1)$$

توضیحاتی برای موفقیت

از طرفی صورت کسر فوق را می توان با توجه به اندازه های اضلاع مثلث که قبل از محاسبه شده اند به صورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (1) به صورت زیر به دست می آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است.)

با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار $\pi \leq \theta \leq 0$ به دست می آید.
کمیتی که در صورت این کسر سمت راست است را معمولاً با $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نشان می دهند
و به آن حاصل ضرب داخلی یا حاصل ضرب نقطه ای دو بردار a, b , همی گویند. بنابراین
می توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

به طور مشابه حاصل ضرب داخلی دو بردار در \mathbb{R}^3 نیز قابل تعریف است.

تعريف: اگر $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ دو بردار در \mathbb{R}^3 باشند؛

در این صورت ضرب داخلی \vec{a} در \vec{b} را که با نماد $\vec{a} \cdot \vec{b}$ نمایش می دهیم
به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر $\pi \leq \theta \leq 0$ زاویه بین دو بردار ناصفر

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار b , همی باشند آنگاه

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ هر چند که در این حالت زاویه θ بین دو بردار تعریف نمی شود.

ایران توجیه توشه‌ای برای موفقیت

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = (2, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, -1, 0)$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر $\pi \leq \theta \leq 0$ زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow 3 = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

■ خواص ضرب داخلی

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{--- ۱}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{اثبات:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad \text{--- ۲}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2 \quad \text{اثبات:}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{--- ۳}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned} \quad \text{اثبات:}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \quad \text{و } b \text{ عمود } a \quad : \quad \text{--- ۴}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \frac{|\vec{a}| \neq 0}{|\vec{b}| \neq 0} \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{o} = 0, \vec{o} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{--- ۵}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{(نامساوی کشی شوارتز) منظور از } |\vec{a} \cdot \vec{b}| \text{ قدر مطلق مقدار}$$

\vec{b} . است.

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta = |\vec{a}||\vec{b}||\cos \theta| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

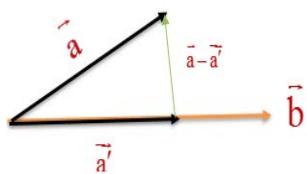
که در آخرین نامساوی از $|\cos \theta| \leq 1$ استفاده شده است.

ابران توجیهی نوسه‌ای برای موفقیت

■ تصویر قائم بردار \vec{b} بر بردار \vec{a}

دو بردار غیرصفر \vec{b} , \vec{a} که زاویه بین آنها θ است با فرض $\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تصویر قائم بردار \vec{a} را بر امتداد بردار \vec{b} که آن را با \vec{a}' نمایش داده ایم به دست آوریم. از روی شکل مشخص است که برای یک r حقیقی $\vec{a}' = r \vec{b}$ با توجه به اینکه بردار تفاضل \vec{a} از \vec{a}' بر بردار \vec{b} عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r \vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$



بنابراین بردار تصویر قائم \vec{a} بر امتداد بردار \vec{b} به صورت زیر به دست می آید.

$$\vec{a}' = r \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار $\vec{b} = (1, -1, 2)$ را بر امتداد بردار $\vec{a} = (2, -1, 1)$ بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (1)(2) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{2}$$

$$a' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{b} = \frac{3}{2} (1, -1, 2) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 3 \right)$$

کار در کلاس

۱- تصویر بردار $(1, 0, 0) = i$ بر امتداد بردار $(0, 1, 0) = j$ را بیابید.

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0 \quad \vec{j}^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1$$

$$P_j \vec{i} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{j}}{\vec{j}^2} \vec{j} = \frac{0}{1} (0, 1, 0) = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = 0 (b_1, b_2, b_3) = \vec{0}$$

۲- نشان دهید که اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} بر هم عمود باشند، آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

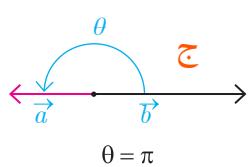
۳- نشان دهید که اگر دو بردار \vec{a} و \vec{b} در یک راستا باشند آنگاه تصویر \vec{a} بر \vec{b} برابر خود \vec{a} می شود.

ایران روشن

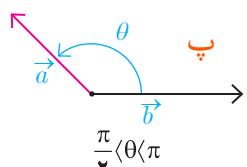
توشه‌ای برای موفقیت

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظری کنید.

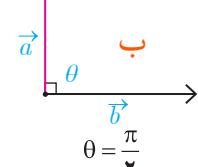
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|a||b| \quad (\text{ج})$$



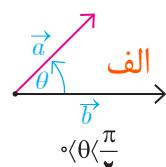
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a||b| \quad (\text{ت})$$



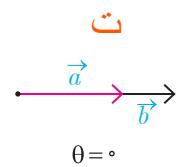
$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \quad (\text{پ})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\text{ب})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \quad (\text{الف})$$



الف) هرگاه a, b موازی وهم جهت باشند پس $\theta = 0$

$$\Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos 0^\circ \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \times 1 = |\bar{a}| |\bar{b}|$$

$$P_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{|\bar{a}| |\bar{b}|}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = |\bar{a}| \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|} \xrightarrow{|\bar{b}|=1} P_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| = \bar{a}$$

بردار $\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که هم جهت با \bar{b} است

ب) هرگاه a, b موازی و در خلاف جهت هم باشند پس $\theta = \pi$

$$\Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \pi \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \times (-1) = -|\bar{a}| |\bar{b}|$$

$$P_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = \frac{-|\bar{a}| |\bar{b}|}{|\bar{b}|^2} \bar{b} = |\bar{a}| \frac{-\bar{b}}{|\bar{b}|} \xrightarrow{|\bar{b}|=1} P_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| = \bar{a}$$

بردار $\frac{-\bar{b}}{|\bar{b}|}$ برداری به طول ۱ می باشد که در خلاف جهت با \bar{b} است

ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است. می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل ضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعريف: فرض کنیم (b_1, b_2, b_3) و (a_1, a_2, a_3) دو بردار باشند.

ضرب داخلى \vec{a} و \vec{b} را که با نماد $\vec{a} \times \vec{b}$ نمایش مى دهیم به صورت زیر تعریف مى شود:

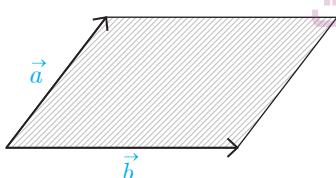
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار غیر صفر و θ زاویہ بین آنها باشد
اندازه بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ می شود:

$$\begin{aligned}
|\vec{a} \times \vec{b}| &= |(a_\tau b_\tau - a_\gamma b_\gamma, a_\tau b_\gamma - a_\gamma b_\tau, a_\gamma b_\gamma - a_\tau b_\gamma)| \\
&= (a_\tau b_\tau - a_\gamma b_\gamma) + (a_\tau b_\gamma - a_\gamma b_\tau) + (a_\gamma b_\gamma - a_\tau b_\gamma) \\
&= a_\tau b_\tau - a_\gamma a_\gamma b_\tau b_\gamma + a_\tau b_\gamma + a_\gamma b_\tau - a_\gamma a_\gamma b_\tau b_\gamma + \\
&\quad a_\tau b_\gamma + a_\gamma b_\tau - a_\gamma a_\gamma b_\tau b_\gamma + a_\gamma b_\gamma \\
&= (a_\tau + a_\gamma + a_\gamma)(b_\tau + b_\gamma + b_\gamma) - (a_\tau b_\tau + a_\gamma b_\gamma + a_\gamma b_\tau) = |a| |b| - (a \cdot b) \\
&= |\vec{a}| |\vec{b}| - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = |\vec{a}| |\vec{b}| (1 - \cos \theta) = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta =
\end{aligned}$$

$$|a \times b| = |a||b|\sin \theta$$

از هندسه سال قبل می دانیم که **تتمت عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اندازه اضلاع آن برابر \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} است.**



مثال: بردارهای \vec{i} و \vec{j} در \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید. حاصل $\vec{j} \times \vec{i}$ و $\vec{i} \times \vec{j}$ را به دست آورید.

$$\vec{i} \times \vec{j} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$$

$$=((\circ)(\circ)-(\circ)(1), (\circ)(\circ)-(\circ)(\circ), (1)(1)-(\circ)(\circ)) = (\circ, \circ, 1) = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = (\circ, \backslash, \circ) \times (\backslash, \circ, \circ)$$

$$= ((1)(o) - (o)(1), (o)(1) - (o)(o), (o)(o) - (1)(1)) = (o, o, -1) = -\vec{k}$$

همان طور که مشاهده شد حاصل ضرب خارجی دو بردار \vec{i} و \vec{j} برابر با بردار \vec{k} شد که بر هر دوی \vec{i} و \vec{j} عمود می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

خاصیت ۱: فرض کنید $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند. در

این صورت

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

این خاصیت گویای این مطلب است که $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ و بنابراین با توجه به آنچه تاکنون به دست آمده است می توان گفت ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع ایجاد شده توسط آن دو بردار است. در واقع می توان نشان داد که بردار حاصل از ضرب خارجی دو بردار بر صفحه شامل آن دو بردار عمود است. اثبات این خاصیت در ادامه می آید.

اثبات:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

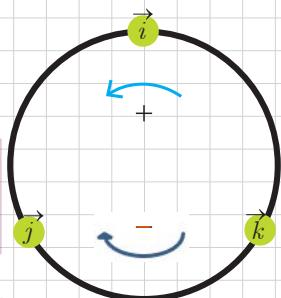
$$\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

می توان نشان داد که برای سه برداری که \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} روابط زیر برقرار است:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

معمولان روابط را به صورت نمودار چرخشی نیز نمایش می دهند.



خاصیت ۲: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

خاصیت ۳: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

خاصیت ۴: اگر r عددی حقیقی باشد، آنگاه: $r \vec{a} \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times r \vec{b}$

خاصیت ۵: برای سه بردار $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ داریم:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

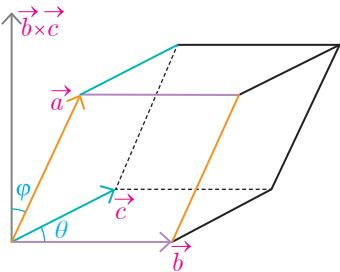
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر \vec{a}, \vec{b} باهم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \neq 0$$

اثبات:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0^\circ \text{ یا } \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$



■ حجم متوازی السطوح

اگر \vec{b} ، \vec{a} و \vec{c} سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه می‌توان به کمک آنها متوازی السطوحی همانند شکل زیر تولید کرد.

همان طور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با اندازه تصویر قائم بردار \vec{a} بر روی بردار $\vec{b} \times \vec{c}$ یعنی

$$=\frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|^2} \text{ ارتفاع}$$

باتوجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای \vec{b} و \vec{c} تولید شده مساحت آن برابر است با $|\vec{b} \times \vec{c}|$. با استفاده از دترمینان نیز می‌توان مساحت متوازی الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow S = |\vec{b} \times \vec{c}|$$

بهتر است به این شکل نوشته شود

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{b} \times \vec{c}| = \text{اندازه ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم متوازی السطوح}$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$. حجم متوازی السطوح پدید آمده توسط سه بردار $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ با استفاده از دترمینان زیر نیز به دست می‌آید.

$$K = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow V = |K|$$

$$. K = a \cdot (b \times c)$$

اگر $K = 0$ در این صورت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ سه بردار در یک صفحه واقعند

مثال: حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (0, 1, 1)$ و $\vec{c} = (1, 0, 1)$ تولید می‌شود.

حل: با استفاده از ضرب خارجی b در بردار c به دست می‌آید.

$$\vec{b} \times \vec{c} = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می‌آید.

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(1, 1, 0) \cdot (1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیشتر اشاره شد که اگر سه بردار \vec{a} , \vec{b} و \vec{c} در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی السطوح و نیز $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ برابر صفر می‌شود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می‌شود.

مثال: آیا بردارهای $(1, -1, 3)$, $(1, 1, -1)$, $(1, 1, 1)$ در یک صفحه‌اند؟

حل: برای این منظور کافی است $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ را به دست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولید شده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه‌اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند.

$$\text{سه بردار در یک صفحه هستند.} \Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = (-16, 14, 10) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -32 + 42 - 10 = 0$$

تمرین

۱- برای هر یک از بردارهای \vec{a} و \vec{b} که در زیر آمده است تصویر قائم \vec{a} را بر امتداد \vec{b} به دست آورید.

الف) $\vec{a} = (3, 2, 1)$ ب) $\vec{a} = (2, 2, 1)$ ج) $\vec{b} = (-1, 2, 4)$ د) $\vec{a} = (1, 1, 0)$

۲- فرض کنید \vec{b} , \vec{a} و \vec{c} بردارهای باشند به ترتیب به طول های ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. مقدار $\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ را محاسبه کنید.

۳- سه بردار \vec{b} , \vec{a} و \vec{c} مثال بزنید که برای آنها $\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$.

۴- اگر $(1, 1, 4)$, $(3, -4, 2)$, $(-1, -3, 4)$ و $(1, -1, 2)$ باشند آنگاه تصویر قائم بر امتداد \vec{c} را به دست آورید.

۵- برداری عمود بر دو $(-5, -3, 2)$, $(-2, 1, -5)$, $(1, -3, 2)$ را به دست آورید.

۶- سه بردار \vec{b} , \vec{a} و \vec{c} مثال بزنید که برای آنها $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ ولی $\vec{b} \neq \vec{c}$. آیا امکان حذف در ضرب خارجی بردارها برقرار است؟ در این باره در کلاس بحث کنید.

۷- بردارهای \vec{a} و \vec{b} مفروض اند به طوری که $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. مقدار $a \cdot b$ را محاسبه کنید.

۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط $(7, 5, 5)$, $(3, 5, 5)$, $(-4, 5, 4)$ باشند آنرا بیابید.

تمرين: (الف)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, -1, 1) \\ \vec{b} &= (1, 0, 0)\end{aligned}\xrightarrow{\begin{array}{l}\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 0 = 1 \\ |\vec{b}|^2 = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1\end{array}} P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{1}{1} (1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

(ب)

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, 1, 1) \\ \vec{b} &= (1, 1, 1)\end{aligned}\xrightarrow{\begin{array}{l}\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3 \\ |\vec{b}|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3\end{array}} P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{3} (1, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

(ج)

ابران توشه

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1, 1, 0) \\ \vec{b} &= (-1, 1, 1)\end{aligned}\xrightarrow{\begin{array}{l}\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0 \\ |\vec{b}|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3\end{array}} P_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{0}{3} (-1, 1, 1) = \left(0, 0, 0 \right)$$

تمرین ۲) روش اول

$$|\vec{a}| = \mu, |\vec{b}| = l, |\vec{c}| = \omega$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{(\vec{a})} \vec{a}^\perp + a\cdot\vec{b} + a\cdot\vec{c} = \vec{0}$$

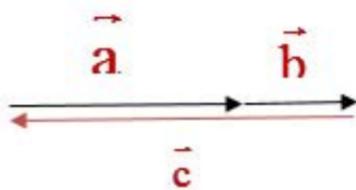
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{(\vec{b})} \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^\perp + \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{0}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{(\vec{c})} \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^\perp = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}^\perp + \vec{b}^\perp + \vec{c}^\perp + \mu \vec{a}\cdot\vec{b} + \mu \vec{b}\cdot\vec{c} + \mu \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \mu^\perp + l^\perp + \omega^\perp + \mu (\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -\gamma$$

روش سوم تمرین ۲:

$$|\vec{a}| = \mu, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \mu$$



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \mu \times 1 \times 1 = \mu \\ \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \pi = 1 \times \mu \times (-1) = -\mu \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \mu + (-\mu) + (-\mu) = -\nu \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \pi = \mu \times \mu \times (-1) = -\mu \end{aligned}$$

ابران نجاشی

روش سوم تمرین ۲:

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \cdot \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \mu \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{b} \cdot \vec{c} + \mu \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \underbrace{\mu^2 + 1^2 + \mu^2}_{1 F} + \mu (\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c} = -\nu$$

تمرين ۳:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = \vec{i} \\ \vec{b} = \vec{j} \\ \vec{c} = \vec{k} \end{array} \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} \neq \vec{j} = \vec{k}$$

تمرين ۴:

$$\vec{m} = \vec{b} + \vec{c} = (1 - 1, -1 + 1, 2 + 1) = (0, -1, 3)$$

$$\vec{m} \cdot \vec{a} = (1)(0) + (-1)(-1) + (3)(1) = 0 + 1 + 3 = 4$$

$$|\vec{m}|^2 = 0^2 + (-1)^2 + 3^2 = 1 + 1 + 9 = 11$$

$$P_{\vec{b} + \vec{c}} \vec{a} = P_{\vec{m}} \vec{a} = \frac{\vec{m} \cdot \vec{a}}{|\vec{m}|^2} \vec{m} = \frac{4}{11} (0, -1, 3) = \left(\frac{0}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{12}{11} \right)$$

تمرین ۵:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k} \Rightarrow \vec{c} = (1, 1, -1), \vec{c} \perp \vec{b}, \vec{c} \perp \vec{a}$$

تمرین ۶:

$$\vec{a} = (1, 1, 1) \quad \vec{b} = (1, 1, 1) \quad \vec{c} = (1, 1, 1)$$

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{o}} = \underbrace{\vec{a} \times \vec{c}}_{\vec{o}} = \vec{o} \neq \vec{b} = \vec{c}$$

با توجه به مثال نقض بالا، قاعده حذف همواره برقرار نبیست

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{o} \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b} - \vec{c}| \sin \theta = 0$$

اگر بخواهیم $\vec{c} = \vec{b}$ در نظر بگیریم

$$\xrightarrow{\left\{ \begin{array}{l} |\vec{a}| \neq 0 \\ \sin \theta \neq 0 \end{array} \right\}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{o} \\ |\vec{a}| |\vec{b} - \vec{c}| \end{array} \right.$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \Rightarrow \gamma \varphi = \omega \times \nu \varsigma \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{14}}{14} = \frac{1\sqrt{14}}{14}$$

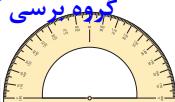
$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1\sqrt{14}}{14} \right)^2 = \frac{15}{14} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{15}}{14}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \omega \times \nu \varsigma \times \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{14} \right) = \pm \omega \nu \varsigma \sqrt{15}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\omega, \nu, -\varsigma) \quad \overrightarrow{AC} = (-\varsigma, -\varsigma, -\omega)$$

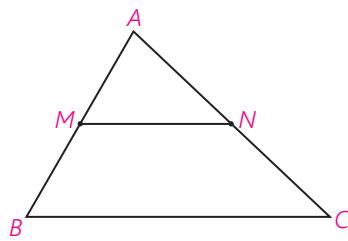
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega & \nu & -\varsigma \\ -\varsigma & -\varsigma & -\omega \end{vmatrix} = -\omega \alpha i + \omega \alpha j - \nu k \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-\omega \alpha)^2 + \omega \alpha^2 + (-\nu)^2} = \sqrt{4\omega \alpha}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{4\omega \alpha} = \frac{\omega \sqrt{14}}{2}$$



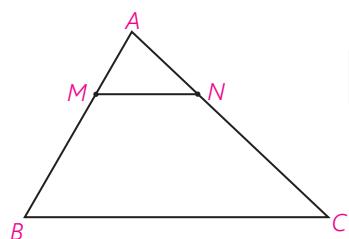
در این فصل با بردارها و خواص جالبی از آنها آشنا شدید. جالب است بدانید بردارها در حل بسیاری از مسائل هندسی که در سال های گذشته با آنها آشنا شده اید می توانند کاربرد داشته باشند و اثبات برخی قضایا را راحت تر می کنند. در ادامه چند مثال از این گونه مسائل آورده شده است که مطالعه آنها به علاقه مندان پیشنهاد می گردد.

مثال ۱: ثابت کنید پاره خطی که وسط های دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می کند، موازی ضلع سوم و مساوی نصف آن است.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AN} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \\ \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

پس طول \overrightarrow{BC} دو برابر طول \overrightarrow{MN} است و چون \overrightarrow{MN} مضری از \overrightarrow{BC} است لذا $MN \parallel BC$ است.



$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{BC}}$$

مثال ۲: در مثلث $MN \parallel BC, ABC$ ثابت کنید :

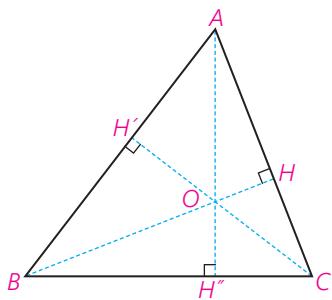
(قضیه تالس)

$$\begin{aligned} BC &= K''.MN \quad AC = K'.AN \quad BA = K.MA \\ \overrightarrow{BA} &= K.\overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{AC} = K'.\overrightarrow{AN}, \quad \overrightarrow{BC} = K''.\overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{MN}, \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \\ K.\overrightarrow{MA} + K'.\overrightarrow{AN} &= K''.\overrightarrow{MN} = K''(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \\ K''.\overrightarrow{MA} + K''.\overrightarrow{AN} &\Rightarrow (K - K'')\overrightarrow{MA} + (K' - K'')\overrightarrow{AN} = 0. \end{aligned}$$

ولي $\overrightarrow{b} AN$ و $\overrightarrow{a} MA$ بردارهایی در راستا و جهت های مختلف اند، پس مجموع آنها نمی تواند صفر شود مگر آنکه :

$$K - K'' = K' - K'' = 0.$$

و در نتیجه : $K = K' = K''$ و از آنجا حکم ثابت می شود.



مثال ۳: ثابت کنید در هر مثلث، سه ارتفاع در یک نقطه همسرند.

اثبات: فرض کنیم ارتفاع‌های BH و CH' هم‌دیگر را در نقطه O قطع کنند.

در این صورت داریم:

$$BH \perp AC \Rightarrow BH \cdot AC = 0, BO \cdot AC = 0$$

$$CH' \perp AB \Rightarrow CH' \cdot AB = 0, CO \cdot AB = 0$$

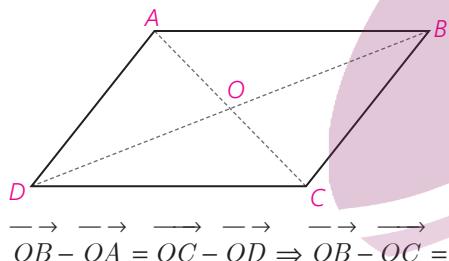
$$\Rightarrow AO \cdot BC = AO \cdot (AC - AB) = AO \cdot AC - AO \cdot AB$$

$$= (BO - BA) \cdot AC - (CO - CA) \cdot AB = \underbrace{BO \cdot AC}_{\circ} - BA \cdot AC$$

$$- \underbrace{CO \cdot AB}_{\circ} + CA \cdot AB = - AB \cdot CA + CA \cdot AB = 0$$

بنابراین $AO \perp BC$ و لذا امتداد AO برعکس BC عمود است و ارتفاع رأس A هم از O می‌گذرد.

مثال ۴: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن با هم موازی و مساوی باشند، متوازی‌الاضلاع است.



اثبات: در شکل مقابل، با فرض اینکه $AB \parallel CD$ و $AB = CD$

نتیجه می‌شود:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

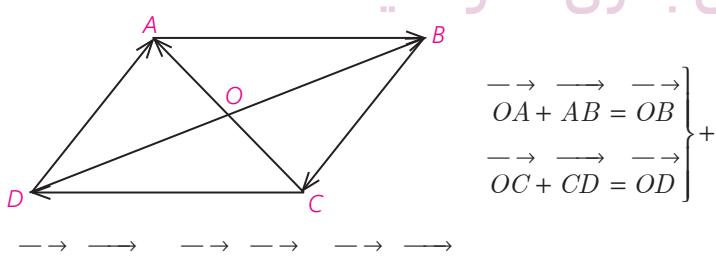
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$$

و بنابراین: $ABCD$ و $CB = DA$ متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۵: ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

توشه‌ای برای موفقیت

اثبات:



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \end{array} \right\} +$$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}_{\circ}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

اکنون استدلال را خودتان کامل کنید.

منابع

- ۱- پورنگی، محمدرضا، تاجبخش، یحیی (۱۳۸۱)، کتاب درسی هندسه تحلیلی و جبر خطی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
 - ۲- غبور، حسین، مجذوب زنجانی، حسین، معیری، محمد طاهر (۱۳۷۳). کتاب درسی هندسه تحلیلی، تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
 - ۳- فیروزنا، احمد، یاوری، احمد رضا (۱۳۷۰). هندسه تحلیلی، تهران، نشر فردوس.
 - ۴- ایرانمش، علی، جمالی، محسن و ... (۱۳۸۸) کتاب درسی ریاضیات ۲، تهران سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
 - ۵- امیری حمیدرضا، ماتریس و دستگاه‌های معادلات خطی (۱۳۷۸) انتشارات مدرسه
 - ۶- شهریاری، پرویز، محاسبه برداری (۱۳۶۹) انتشارات تهران.
- ۷- T. Grenfell, Analytical Geometry for beginners Nabu Press zolo.
- ۸- Mittal & Shanti Narayan, Analytical Solid Gedretry international Book Distributing Company 2005.
- ۹- Larson, R. & Falvo, D.C. (2009). Elementary Linear Algebra, Sixth Edition. Houghron Mifflin Harcourt Publishing Company, Boston, MA.
- ۱۰- Larson, R. (2017) Elementary Linear Algebra, Eighth Edition. Cengage Learning, Boston, MA

ایران توشه

توشه‌ای برای موفقیت



سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به داشت آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوا ای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دیرخانه راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسمی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوا این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسمی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب هندسه ۳ با کد ۱۱۲۲۱۳

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	احمد تقی عجمی	آذربایجان شرقی	۲۷	جابر عامری	خوزستان
۲	پیمان خاوندی	آذربایجان شرقی	۲۸	میترا سلامی	خراسان شمالی
۳	فرشته قرامحمدی	شهر تهران	۲۹	سیدعلی حسینی	خراسان جنوبی
۴	محمد رمضانپور	فارس	۳۰	محمد مهدی قلندری	هرمزگان
۵	شادی حبیب پور	هرمزگان	۳۱	میثم محمدیان	زنجان
۶	فرزانه فروزانفر	کردستان	۳۲	سیما حقیقی آذر	گلستان
۷	علی نصیری	قزوین	۳۳	کیان سهرابی	كرمانشاه
۸	زهرا اصلانی	شهرستانهای تهران	۳۴	نورالله جمالی	بوشهر
۹	حکیمه محمدی	البرز	۳۵	لیلی حاتم زاده	اصفهان
۱۰	فاطمه نصیری	ایلام	۳۶	لیلا محرابی نسب	خراسان شمالی
۱۱	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	مائده ملاحسنسی	البرز
۱۲	کامران کاظمی	خوزستان	۳۸	ذالله اخوان	شهرستانهای تهران
۱۳	الناز رابری	آذربایجان غربی	۳۹	علی رضا پیات	همدان
۱۴	رضا کاظمی	قزوین	۴۰	فاطمه دولت خواه	گیلان
۱۵	قاسم شبانی چاواسر	مازندران	۴۱	مذهب روستائی	بوشهر
۱۶	کیانوش کمانی	مرکزی	۴۲	وحید سجادپور و پور احمد	کهگیلویه و بویر احمد
۱۷	فرزانه کدخدایی	لرستان	۴۳	سالم بزرگر	اردبیل
۱۸	محمد رضا نجعی	خراسان رضوی	۴۴	سعید تاجان	فارس
۱۹	مجتبی مرسلی	شهر تهران	۴۵	فرشته واشق	کرمان
۲۰	مهردی روناسی	سیستان و بلوچستان	۴۶	حسن فتاحی	کرمانشاه
۲۱	مریم امیر محمدی	گیلان	۴۷	رضاعلیوند	اردبیل
۲۲	قباد خالدی کوره	آذربایجان غربی	۴۸	زهرا خاتمی	زنجان
۲۳	سلیمان موحدی راد	مازندران	۴۹	جمال نوین	بزد
۲۴	مریم امامی	همدان	۵۰	محمد نیازی	چهارمحال و بختیاری
۲۵	علی مراد سبزه کار	خراسان جنوبی	۵۱	زهرا صیدی	ایلام
۲۶	سکینه حبیبی	لرستان	۵۲	علیرضا عمرانی	مرکزی

ایران تووشه

- دانلود نمونه سوالات امتحانی

- دانلود گام به گام

- دانلود آزمون های وحدتی و نجات

- دانلود فیلم و مقاله آنلاین

- تبلور و مثاواه



IranTooshe.Ir



@irantoooshe



IranTooshe

