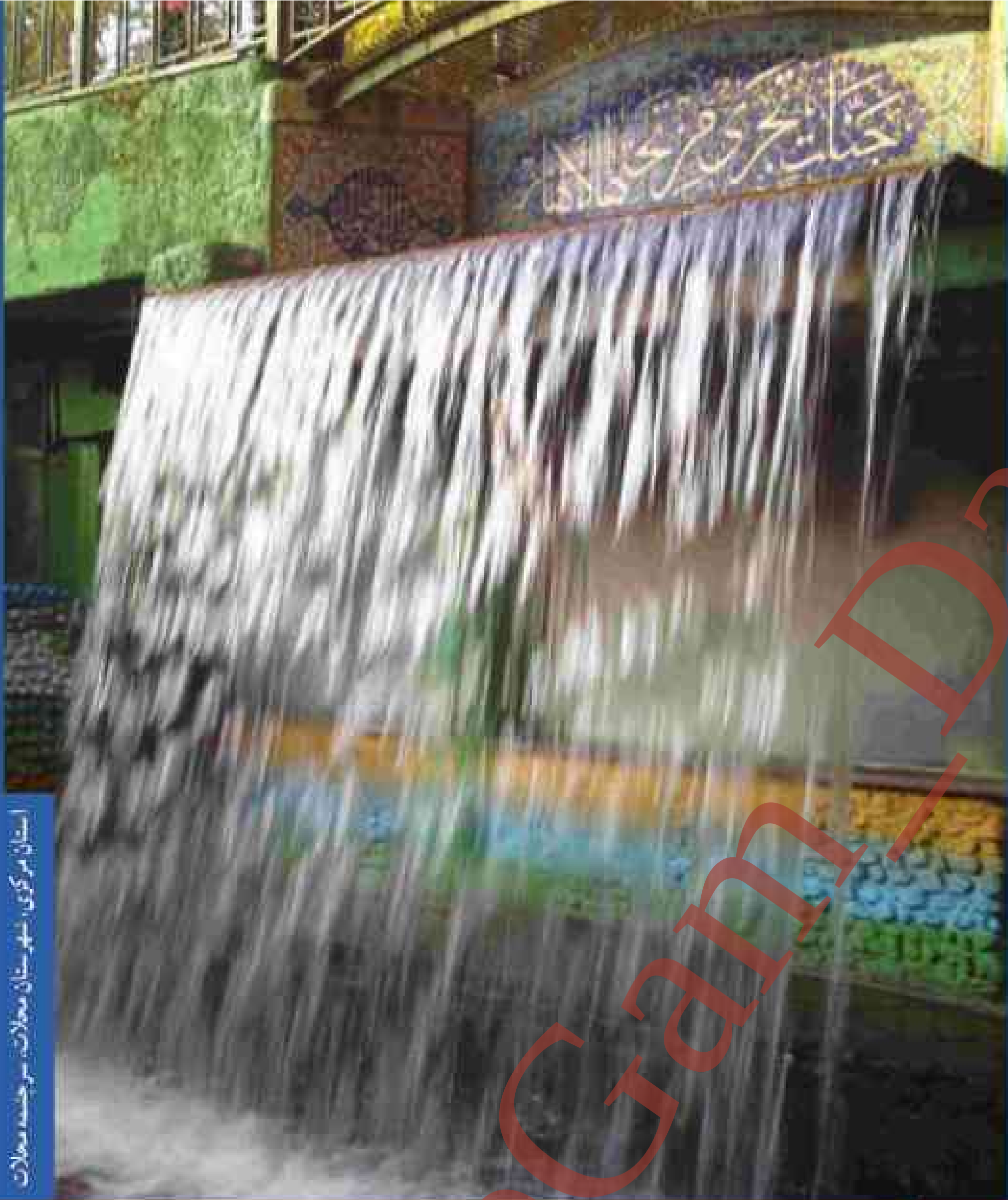


استان مرکزی، شهرستان محلات، سرچشمه محلات

«قُل هاتوا بُرهانَکُم اِن کُنتُم صادقین»
آیه ۶۴ سوره نمل
«بگو اگر راست می‌گویید
دلیل خود را بیاورید»

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها ـ جبر مجموعه‌ها

حل کاردرکلاس ها و فعالیت ها به همراه

پاسخ تمرین های فصل اول کتاب آمار و احتمال

رشته ی ریاضی فیزیک

چاپ تابستان ۱۳۹۶

گروه ریاضی استان خوزستان

تهیه و تنظیم : افشین ملاسعیدی

هزینه ی استفاده ، صلواتی جهت سلامتی امام زمان (عج)

مقدمه :

فایلی که در اختیار شما قرار گرفته توسط اینجانب – افشین ملاسعیدی – در تیرماه ۱۳۹۶ نوشته و تنظیم شده است و امیدوارم دارای کمترین خطا بوده و مفید فایده برای شما باشد .

از همکاران ذیل ، اساتید محترم آقایان **عزیز عسکری ، احمد عامری ، عبدالامیر عباس زاده ، جابر عامری** و خانم ها **ژیلا باقری** و **آزاده حاجی هاشمی** که در تهیه ی این مجموعه با من همکاری داشته اند کمال تشکر می نمایم .

از همکاران عزیز تقاضا می کنم در صورت مشاهده ی هر گونه اشتباه اعم از علمی یا تایپی بنده را مطلع ساخته تا در جهت رفع آن اقدام نموده و بتوانم از تجربیات شما استفاده کنم .

جهت ارتباط می توان به یکی از دو روش زیر عمل کرد :

۱- تلگرام : @sinxcosx

۲- همراه : 09168324500

ایرادات و اشکالات تایپی مربوط به فصل اول

۱- مطرح کردن بعضی از سوالات ریاضی در سطح دانش آموزان پایه ۱۱ درست نیست . که بعضاً یافتن جواب آنها بسیار وقت گیر یا غیر ممکن می باشد .

به طور مثال صفحه ۴ خط سوم : ■ هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.

۲- صفحه ی ۴ : شایسته بود با توجه به تصویر حلزونی عدد π ، در گزاره ی ■ صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است.

به جای صدمین ، پنجمین یا آنچه در شکل قابل رویت بود ، نوشته می شد .

۳- در مثال صفحه ی ۱۰ اشتباه تایپی وجود داشته که بهتر است اصلاح شود :

مثال : ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه ۵<۲» به انتفای مقدم ~~نادرست است.~~ درست است .

۴- در صفحه ۱۵ ، قسمت آموزش نقیض گزاره بهتر است در انشای متن ، تغییر زیر صورت گیرد :

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.
هر آسیایی، ایرانی است.
....

⇐

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید می خواهیم نقیض آن را بنویسیم .
هر آسیایی، ایرانی است.

۵- صفحه ی ۲۵ تمرین ۱۲ اثبات یکی از دو قسمت الف یا ب کافیست و لزومی به خواستن اثبات هر دو نبود .

۶- صفحه ی ۲۶ ، فعالیت ۱ ، اصلاح زیر انجام شود :

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (د) از دو رنگ استفاده کنید). (ت)

۷- صفحه ی ۲۸ کاردرکلاس ۱ ، نوشته نشده که چه چیز را می خواهد ثابت کند . باید به صورت زیر تکمیل گردد:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم : $A\cup B=B\cup A$

همچنین در صفحه ی ۲۸ کار در کلاس ۳ ، باید تغییر زیر صورت گیرد :

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap\cancel{(B\cup C)}\,(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$

۸- صفحه ی ۳۷ ، کار درکلاس الف : بدون هیچ مقدمه ای از برهان خلف استفاده کرده !!!!
دانش آموز در چه مرحله ای با این نوع برهان آشنا شده است ؟!

۹- صفحه ی ۳۸ ، تمرین ۱ : بهتر بود در متن سوال ، به همراه ترکیب عطفی ، اشاره ای نیز به استفاده از ترکیب فصلی نیز می شد .

۱۰- صفحه ی ۳۸ تمرین ۳ ، قسمت الف : نوشتن $X\cup Y\cap Z$ صحیح نیست وباید حتماً به صورت $(X\cup Y)\cap Z$ یا $X\cup(Y\cap Z)$ باشد
البته بنده به صورت زیر اصلاح کرده و پاسخ داده ام :

$$(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A) \quad \Leftarrow \quad (A'\cap B)\cup\left([(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)\right)$$

ضمن تشکر از زحماتی که مولفین محترم ، متحمل شده اند ، امیدوارم قبل از چاپ
اولین نسخه ی کتاب ایرادات فوق برطرف گردد .

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین[1] نیز می‌گویند؛ دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق **استدلال‌ها می‌پردازد** و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به‌کار گرفته می‌شود. در این درس کار ما بسیار شبیه به بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معین است.

گزاره

استدلال سادهٔ زیر را در نظر بگیرید :

تیم ملی فوتبال ایران یا تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی می‌رود.

تیم ملی فوتبال استرالیا به جام جهانی نمی‌رود.

نتیجه : تیم ملی فوتبال ایران به جام جهانی می‌رود.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید. چنانچه دو جملهٔ اول این استدلال را درست درنظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد. در منطق ریاضی به دو جملهٔ خبری نخست، **مفروضات استدلال** و به جملهٔ خبری سوم، **نتیجه استدلال** گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه، مفروضات استدلال هستند.

کار در کلاس

نتیجه استدلال‌های زیر را مشخص کنید.

۱ هیچ عدد مرکّبی، عددی اول نیست.

۴ عددی مرکب است

نتیجه : ۴ عدد اول نیست

---

[1] Symbolic Logic

۲ اگر وضعیت آلودگی هوا به صورت ناسالم باشد آن‌گاه مدارس تعطیل است.

فردا وضعیت آلودگی هوا به‌صورت ناسالم پیش‌بینی شده است.

نتیجه: فردا مدارس تعطیل است

این استدلال‌ها، از جمله‌های خبری تشکیل شده است. به **جملهٔ خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره[1] می‌گوییم**. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست[2] یا نادرست[3] بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است. برای مثال گزاره زیر یک حدس در ریاضیات است.

«هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت[4]»

مانند:

۴=۲+۲ ; ۶=۳+۳ ; ۸=۳+۵ ; ۱۰=۵+۵ ; ۱۲=۵+۷ ; ...

این حدس تاکنون اثبات نشده است؛ از طرفی مثال نقضی هم برای آن یافت نشده است. در هر صورت این گزاره فقط دارای یک ارزش است. اگر ارزش این گزاره درست نباشد، پس ارزش آن حدس نادرست است.

خواندنی

حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل نشده‌ای می‌گویند که پرونده آنها در جهان علم باز است. این گونه مسائل علاوه‌بر اینکه درستی آنها اثبات نشده است، تاکنون مثال نقضی هم برای آنها پیدا نشده است، حدس گلدباخ نمونه‌ای از این مسائل است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند، بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

- چه هوای خوبی! (ابراز احساسات)
- لطفاً درب کلاس را ببندید. (امری)
- اینجا آشپز کیست؟ (پرسشی)

کار در کلاس

از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

- ایران کشور آسیایی است. گزاره ای درست است
- در پرتاب یک تاس احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید برابر با $\frac{۱}{۳}$ است. گزاره ای درست است

۱ـ Proposition　۲ـ Truth　۳ـ False

۴ـ حدس گلد باخ

- ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. **گزاره نیست**
- آیا ۲+۳ برابر با ۵ است؟ **گزاره نیست**
- هر عدد فرد بزرگ‌تر از ۵ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عدد اول نوشت.
گزاره است ولی ارزش آن مشخص نیست
- هر معادله درجه دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. **گزاره ای نادرست است**
- صدمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر با ۵ است. **گزاره ای نادرست است**

جدول ارزش[1] گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزاره p و q، طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

کار در کلاس

ارزش‌های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه‌رو دارای $۸=۲^۳$ حالت است.
جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

ــ به نظر شما جدول ارزش‌های چهار گزاره، دارای چند حالت است؟ **$۲^۴=۱۶$ حالت دارد**

ــ با توجه به اینکه هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش «د» یا «ن» را داشته باشد و با توجه به اصل ضرب، اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش‌های آن گزاره‌ها دارای چند حالت است؟ **۲^n حالت دارد**

۱ــ Truth Table

گزاره‌نما

فعالیت

عبارت‌های خبری زیر را در نظر بگیرید:

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. ($۳x+۲y=۶$)

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟ **ارزش هیچکدام را نمی توان تعیین کرد**

۲ چنانچه به جای متغیر در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت ارزش آن را تعیین کنید؟ **درست است**

اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟ **نادرست است**

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید:

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{۱ ، ۲ ، ۳\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به‌جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

هر زیر مجموعه ی سه عضوی از مجموعه ی اعداد ۱ تا ۶ ، را اگر قرار دهیم ارزش گزاره درست است .

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{۱\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=۲$ و $y=۰$ در این صورت ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=۰$ و $y=۲$ در این صورت ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا اینکه گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، **دامنهٔ متغیر**[1] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اول است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «m عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$۴x^۲+x-۵=۰$» مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان درنظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[2] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم: $S\subseteq D$.

۱ـ Domain of Variable ۲ـ Answer Set

کار در کلاس

دامنهٔ متغیر گزاره‌نماهای زیر داده شده است. مجموعه جواب هریک از آنها را مشخص کنید.

الف) x مضرب ۷ است. $(D=\mathbb{Z})$ $\quad S=\{0,\pm 7,\pm 14,\ldots\}$

ب) $15x^2-7x-8=0$ $(D=\mathbb{R})$ $\quad S=\{1,-\frac{8}{15}\}$

پ) تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{1}{6}$ ، $(D=\{1,2,\ldots,6\})$ $\quad S=\{1,2,3,4,5,6\}$

ترکیب گزاره‌ها

فعالیت

۱ هریک از این جمله‌های زیر، از چند گزاره تشکیل شده است؟

۲ آیا می‌توانید با توجه به ارزش گزاره‌های به‌کار رفته در هر جمله، ارزش آن جمله را تعیین کنید.

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد. یک گزاره با ارزش نادرست است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس. دارای دو گزاره است و ارزش آن را می توان تعیین کرد .

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند.
در ادامه ادات ربط را برای ترکیب گزاره‌ها معرفی می‌کنیم. با در دست داشتن ارزش گزاره‌های p ، q ، r و … و معرفی ادات ربط، می‌توان گزاره‌های مرکب را تعریف کرد که ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های p ، q ، r و … و ادات ربط بین آنها بستگی دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزاره p درست باشد در این‌صورت ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «~» ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.
«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌رو است :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است، در این حالت می‌گوییم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم‌ارز منطقی** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p)\equiv p$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند می‌نویسیم $p\equiv q$ و می‌خوانیم p هم ارز است با q .

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزاره مرکب « $\sqrt{۳}$ عددی حقیقی است یا ۲ عددی اول نیست» که از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p\vee q$» می‌نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» فاصل گفته می‌شود. گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید.»

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزارهٔ مرکب بالا درست است. چنانچه مادر علی هم برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزاره مرکب درست است.

گزاره مرکب بالا وقتی نادرست است که پدر و مادر علی به مدرسه برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین ارزش گزاره مرکب $p\vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات، ارزش $p\vee q$ درست است. جدول ارزش گزاره $p\vee q$ به صورت روبه‌رو است.

p	q	$p\vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند به‌طوری که $a\times b=۰$ در این صورت $a=۰$ یا $b=۰$ یعنی :

$$a,b\in\mathbb{R}\ ,\ a\times b=۰ \Rightarrow (a=۰)\vee(b=۰)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله‌ها استفاده می‌کنیم :

$$x^۲+۷x=۰ \Rightarrow x(x+۷)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x+۷=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=-۷$$

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف گفته می‌شود.

فعالیت

گزاره مرکب زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.»

- آیا ارزش این گزاره مرکب درست است؟ ارزش آن بستگی به ارزش گزاره های تشکیل دهنده ی آن دارد .

فرض کنید :

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- چنانچه ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟ نادرست
- چنانچه ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟ نادرست
- هرگاه ارزش دو گزاره p و q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ چیست؟ درست

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p\wedge q$ نادرست است. جدول ارزش $p\wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است :

$p\wedge q$	q	p
د	د	د
ن	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
هفته هفت روز دارد.	ماه شهریور ۳۱ روز دارد.	د	د	د	د
در تیر ماه هوای آبادان سرد است.	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	۲+۳=۷	د	ن	د	ن
هر ماه ۳۰ روز دارد.	۵<۱	ن	ن	ن	ن
(۷-) اول است	۹ عددی مرکب است	ن	د	د	ن

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزاره $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان هستند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$

به این هم‌ارزی **قانون دمورگان** در منطق ریاضی گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

هم ارز هستند

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$$

حل : چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(2x-y)^2\geq 0$ بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$\left[(2x-y)^2=0\right] \quad \left[(x-1)^2=0\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ \Rightarrow \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow y=2$$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

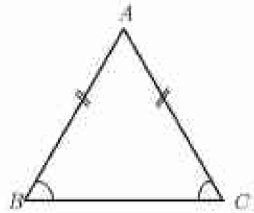
خواندنی

گزاره مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» می‌خوانیم.

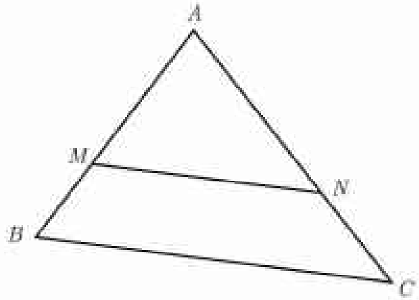
تا به‌حال در ریاضیات و هندسه با گزاره‌های شرطی بسیاری مواجه بوده‌اید، در زیر چند نمونه می‌آوریم.

۱ اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویه مجاور به قاعده برابرند.

$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Rightarrow \hat{B} \quad \hat{C}$



۲ اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.



۳ $a^2 \le b^2 \Rightarrow (a \le b) \vee (a \ge -b)$

۴ $a^2 \ge b^2 \Rightarrow (a \ge b) \wedge (a \le -b)$

۵ اگر A پیشامدی در فضای نمونه S باشد آن‌گاه $A \subseteq S$.

جدول ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است.

با توجه به جدول ملاحظه می‌کنید که :

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزاره مرکب «$p \Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش «$p \Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال : ارزش گزاره «اگر ۲ فرد است آن‌گاه ۵>۲» به انتفای مقدم ~~نادرست است~~. درست است .

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم ارز منطقی هستند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د
ن	د	د	د	د

۲ گزاره «$q \Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p \Rightarrow q$» و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p \Rightarrow q$ است.

با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

هم ارزند

۳ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها و با پرکردن جاهای خالی نشان دهید :

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

هم ارز با T است. (الف)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

هم ارز با T است. (ب)

گزاره‌هایی نظیر $p \Rightarrow p$ یا $p \vee \sim p$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $p \wedge \sim p$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 عددی فرد باشد آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

$(a^2$ عددی زوج است $\Leftarrow a$ عددی زوج است$) \equiv (a$ عددی فرد است $\Leftarrow a^2$ عددی فرد است$)$

چنانچه a عددی زوج باشد، یعنی $a = 2k$، خواهیم داشت :

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\underbrace{(2k^2)}_{k' \in \mathbb{Z}} = 2k'$$

در نتیجه a^2 عددی زوج است.

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم:

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

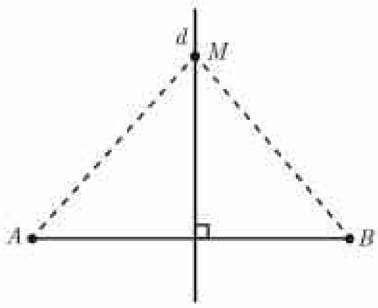
مثال : گزاره‌های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌ها است.

الف) ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۲ > ۵

ب) ۹۹ عدد اول نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

پ) در پرتاب یک تاس شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.



$[M\in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB) $]\Leftrightarrow MA=MB$

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزاره مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزاره $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی $p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است.

ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید :

«همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردو، گرد است». «هر مستطیل یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاع یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دسته برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اول، زوج هستند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل هستند».

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند. این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

پاسخ تمرین ۲ صفحه ی ۱۳ کتاب درسی

@sinxcosx ملاسعیدی
09168324500

الف) قوانین جابجایی :

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب)قوانین شرکت پذیری :

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(P \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	د	ن	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(P \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$(P \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

پ)قوانین توزیع پذیری :

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

خواندنی

سور کلمه‌ای عربی است و به معنای «بارو» حصار یا دیوار گرداگرد شهر است. نام‌گذاری عبارت‌های «به‌ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» با سور به این جهت است که آنها قلمرو اعضای موضوع مورد بحث را مشخص می‌کنند. از نظر منطق‌دانان وجه تشابه سور با دیوار شهر آن است که دیوار گرداگرد شهر محدوده و قلمرو شهر را مشخص می‌کند و الفاظ به‌کار رفته در گزاره‌نماها، مرز و قلمرو اشیاء مورد استفاده در گزاره‌نماها را تعیین می‌کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$[2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in R \; ; \; x^2 \geq 0$
برای هر عدد زوج a داریم $a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\forall a \in E \; ; \; a=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
وجود دارد عدد اول p بطوریکه $p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$	$\exists p \in P \; ; \; p=2k \; (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	$\exists a \in O ; a \in P$

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با E، مجموعه اعداد فرد را با O و مجموعه اعداد اول را با P نمایش داده‌ایم.

گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره نما صدق کند به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثال : گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 \geq x$

نادرست است، زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند.

الف) $\forall x \in \mathbb{Z} \; ; \; x(x+1)=2k$ ب) $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; \tan x \times \cot x=1$

حل الف) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است بنابراین برای هر عضو از دامنه متغیر ($\mathbb{Z}$) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

ب) نادرست است، زیرا $x=\frac{\pi}{2}$، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

> گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد.

مثال : گزاره $\exists x\in\mathbb{Z}; |x|-1<0$
درست است، زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست هستند :

الف) $\exists x\in P; x=2k$ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $\exists x\in\mathbb{R}; x^2+1=0$

حل. الف) درست است؛ زیرا ۲ عددی اول و زوج است، پس مجموعهٔ جواب گزاره‌نما {۲} و ناتهی است.

ب) نادرست است؛ زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعه تهی است.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اول، فرد است. نادرست است زیرا ۲ عددی اول ولی زوج است .

ب) $\exists x\in\mathbb{N}; 2x^2+3x+1=0$ نادرست است . زیرا به ازای هر $x\in\mathbb{N}$ عبارت $2x^2+3x+1$ مقداری طبیعی دارد و نمی تواند صفر شود .

پ) $\exists x\in\mathbb{Z}; 2x^2+3x+1=0$ درست است و مجموعه جواب آن $\{-1\}$ و ناتهی است .

ت) هر عدد زوج، غیر اول است. نادرست است زیرا ۲ عدد زوج ولی اول است .

ث) در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است. درست است . زیرا طبق تعریف ، متغیر ترتیبی نوعی متغیر کیفی است .

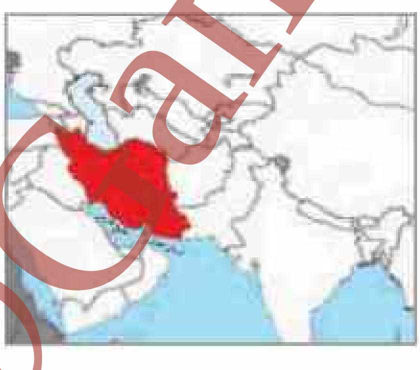
ج) در احتمال؛ هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است. طبق تعریف پیشامد ، درست می باشد .

چ) در فضای نمونه S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$. نادرست است زیرا همواره $P(A)\le 1$ خواهد بود .

ح) طول هر پاره خط عدد حقیقی است. درست است

نقیض گزاره‌های سوری

گزاره «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید. "علی به مدرسه نرفت ."



معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید می خواهیم نقیض آن را بنویسیم .

هر آسیایی، ایرانی است.

در زبان طبیعی معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزاره قبل نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین جمله دوم نمی‌تواند نقیض جمله اول باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزاره نقیض آن یعنی $\sim(\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزاره $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است و لذا ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد. در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim(\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت نقیض گزاره «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که دارای سور وجودی است، به صورت زیر نوشت :

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال : ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$ ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

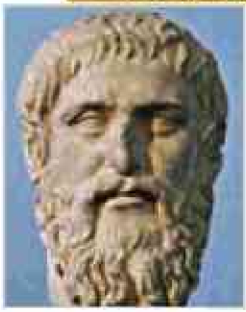
حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است، چون $x = 0$ مثالی نقض برای آن است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$$

ب) درست است، زیرا $y = -1$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعه جواب آن ناتهی است.

$$\sim(\exists y \in \mathbb{R}; y < 0 \wedge y^2 \leq 1) \equiv \forall y \in \mathbb{R}; \sim(y < 0 \wedge y^2 \leq 1)$$
$$\equiv \forall y \in \mathbb{R}; y \geq 0 \vee y^2 > 1$$

تمرین



۱ از جملات زیر کدام یک گزاره است و ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.

الف) خیام پزشک ایرانی است. **گزاره ی نادرست**

ب) افلاطون فیلسوف یونانی است. **گزاره ی درست**

پ) $۳+۵>۶$ **گزاره ی درست**

ت) تخته سیاه را پاک کنید. **گزاره نیست**

ث) $\{۱,۲,۳,۴\} \in \{۱\}$ **گزاره ی نادرست**

ج) چه باران شدیدی می‌آید. **گزاره نیست**

چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ح) $\varnothing \not\subset \mathbb{R}$ **گزاره ی نادرست**

خ) $\sqrt{۲} \in \mathbb{Z}$ **گزاره ی نادرست**

د) عدد $۵^۴+۸$ عددی اول است. **گزاره ی نادرست**

ذ) به امید کامیابی شما. **گزاره نیست**

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است. **گزاره ی درست**

۲ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $-۷ \times \boxed{۱} = -۷$

ب) $۵+\boxed{۰/۱} \notin \mathbb{Z}$

پ) $\frac{۸\times\boxed{۱}}{۴} \in \left\{۲,\frac{۱}{۳}\right\}$

ت) $۵\times۳ \boxed{>} \frac{۱۰\times۹}{۳}$

ث) $\boxed{۰} \times \sqrt{۲} = ۰$

ج) $۱ \boxed{\in} \{۱\}$

چ) $۵(\boxed{۷}-۳)=۲۰$

ح) $۷(\boxed{۸}-۳)=۳۵$

۳ دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعه اعداد صحیح است، مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

الف) x مربع کامل است $S=\{۰,۱,۴,۹,۱۶,...\}$

ب) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. $S=\{...,-۹,-۴,۱,۶,...\}$

پ) $\frac{۲x+۱}{۳} \leq -۱$ $\quad ۲x+۱ \leq -۳ \Rightarrow x \leq -۲ \Rightarrow S=\{-۲,-۳,-۴,...\}$

ت) $\{n(n+1)=۰ \mid n \in W\}$ $\quad S=\{۰\}$

۴ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $۴\leq۳$ $\quad$ $۴>۳$

ب) ابولوفای بوزجانی ریاضی‌دان ایرانی است. **ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی نیست.**

پ) $a\in\{b,c,d\}$ $\quad$ $a\notin\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویا است. **۲عددی زوج نیست وعدد π گویا نیست**

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.
خورشید به دور زمین نمی چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست.

ج) اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+۱$ فرد است.
a زوج است و $a+۱$ فرد نیست $\quad$ "توجه داشته باشید که $\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge(\sim q)$"

۵ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲<۳)\wedge(۴+۳=۱۰)$ $\quad T\wedge F\equiv F$

ب) $(۵>۳)\vee(x^۲+۱=۰)$ $\quad T\vee F\equiv T$

پ) $(\frac{۱}{۲}\neq\frac{۳}{۶})\vee(۱\in\{۲,۳,۴\})$ $\quad F\vee F\equiv F$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست. $\quad F\Rightarrow F\equiv T$

ث) در متوازی‌الاضلاع مفروض دو قطر با هم برابرند.
$F\Rightarrow T\equiv T$ $\quad$ $F\Rightarrow F\equiv T$

ج) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است. $\quad F\Leftrightarrow F\equiv T$

چ) $۲>۳\Leftrightarrow-۲<-۳$ $\quad F\Leftrightarrow F\equiv T$

ح) اگر $a\in\{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و بر عکس. $\quad F\Leftrightarrow F\equiv T$

۶ جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $(p\Rightarrow q)$	ارزش $(p\wedge q)$
عدد ۲ زوج است.	عدد ۲ اول است.	د	د	د	د
عدد ۳ فرد است.	$۱ \nless ۲$	د	ن	ن	ن
$۲\in\{۱,۲\}$	عدد ۱ اول است.	د	ن	ن	ن
$۲+۳=۷$	عدد ۷ اول است.	ن	د	د	ن

پاسخ این قسمت در صفحه ی
بعد نوشته شده است .

۷ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$
ب) $\sim p\wedge p$
پ) $\sim p\vee p$
ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$
ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$
ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۸ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$
ب) $p\vee F\equiv p$
پ) $p\wedge T\equiv p$
ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$
ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$
ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$
چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$
ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

۹ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists,\forall$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.
ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم $a^۲<۰$.
پ) همه اعداد اول فرد هستند.
ت) وجود دارد عدد صحیح مثبتی مانند x به‌طوری که $۱-۲x>۵$
ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش بزرگ تر یا مساوی ۲ است.
ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۱۱ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A; x+۴=۱۰$
ب) $\forall x\in A; x+۲\leq ۹$
پ) $\exists x\in A; x+۳\leq ۴$
ت) $\forall x\in A; x+۱\geq ۶$

۱۲ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R}; \dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$
ب) $\forall n\in\mathbb{N}; (۲^{۲^n}+۱)\in P$
پ) $\forall x\in(-\infty,۰); x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$
ت) $\exists y\in\mathbb{R}; \dfrac{y-۳}{۵}=۰$

ملاسعیدی @sinxcosx
09168324500

۷- الف)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

ب)

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
ن	د	ن

پ)

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
ن	د	د

ت)

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن

ث)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ج)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

۸- الف)

p	$p \Rightarrow p$
د	د
ن	د

بنابراین $p \Rightarrow p \equiv T$ است.

ب)

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

بنابراین $p \vee F \equiv p$ است.

پ)

p	T	$p \wedge T$
د	د	د
ن	د	ن

بنابراین $p \wedge T \equiv p$ است.

ت)

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ است. $\rightarrow$

ث)

p	q	$q \vee p$	$p \wedge (q \vee p)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ است.

ج)

p	q	$q \wedge p$	$p \vee (q \wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

بنابراین $p \vee (q \wedge p) \equiv p$ است.

ج)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	ن	د	د

بنابراین $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ است .

ج)

p	q	$\sim p$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	ن	د	ن	ن
د	ن	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	ن	ن

بنابراین $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ است .

۹- به جای اثبات این حکم ، عکس نقیض آن را ثابت می کنیم . یعنی نشان می دهیم :

برای هر عدد صحیح n اگر n مضرب ۳ نباشد آنگاه n^2 مضرب ۳ نیست .

چنانچه n مضرب ۳ نباشد ، یعنی باقیمانده تقسیم آن بر ۳ برابر ۱ یا ۲ است . به عبارت دیگر :

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 3k' + 1 \Rightarrow$ n^2 مضرب ۳ نیست

$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow n^2 = 3k'' + 1 \Rightarrow$ n^2 مضرب ۳ نیست

پس در هر صورت n^2 مضرب ۳ نیست .

در نتیجه حکم سوال برقرار است .

۱۰- الف) $\forall a \in \mathbb{N}, (a \in E \vee a \in O)$ درست است زیرا اگر عدد زوج باشد ، فرد نخواهد بود و اگر عددی زوج نباشد فرد خواهد بود .
در نتیجه در ترکیب فصلی یکی از گزاره ها درست و یکی نادرست است ، پس در کل درست است .

ب) $\exists a \in W , a^2 < 0$ نادرست است زیرا هیچ عددی وجود ندارد که مربع آن منفی شود به عبارت دیگر مجموعه جواب آن تهی است .

پ) $\forall a \in P , a \in O$ نادرست است زیرا به عنوان مثال نقض ، عدد ۲ اولی بوده ولی فرد نیست .

ت) $\exists x \in \mathbb{Z}^+ , 1-2x > 5$ نادرست است زیرا $1-2x > 5 \Rightarrow x < -2$. یعنی x منفی است و هیچ عدد مثبتی در آن صدق نمی کند .

ث) $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\} , x+\frac{1}{x} \geq 2$ نادرست است به عنوان نمونه $x=-1$ مثال نقض است زیرا $-1+\frac{1}{-1} = -2 \ngeq 2$.

ج) $\exists x \in \mathbb{R} , x^3 = x$ درست است زیرا مجموعه جواب آن $S=\{0,\pm 1\}$ ناتهی است .

۱۱- الف) نادرست است زیرا $x+4=10 \Rightarrow x=6 \notin A$

ب) درست است زیرا $x+2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow S=\{1,2,3,4,5\}=A$ یعنی تمام اعضای دامنه ی تغییر جواب هستند .

پ) درست است زیرا $x+3 \leq 4 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow S=\{1\} \neq \varnothing$

ت) نادرست است زیرا $x+1 \geq 6 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow S=\{5\} \neq A$. فقط برای یک عضو دامنه ی تغییر بر قرار است و اعدادی مثل ۱، ۲،
۳ و ۴ مثال نقض برای آن می باشند .

۱۲- الف) نادرست است زیرا برای $x=1$ تساوی داده شده ، تعریف نمی شود .

نقیض گزاره : $\exists x \in \mathbb{R} , \frac{x^2-1}{x-1} \neq x+1$

ب) نادرست است . در حالت $n=5$ عدد بدست آمده اول نیست ، زیرا بر ۶۴۱ بخش پذیر است .

نقیض گزاره : $\exists n \in \mathbb{N} , 2^{2^n} \notin P$

پ) نادرست است به عنوان نمونه $x=-1$ مثال نقض است زیرا $-1-\frac{1}{-1} = 0 \nleq 2$

نقیض گزاره : $\exists x \in (-\infty,0) , x-\frac{1}{x} > -2$

ت) درست است . زیرا مجموعه جواب آن $S=\{3\}$ ناتهی است .

نقیض گزاره : $\forall y \in \mathbb{R}, \frac{y-3}{5} \neq 0$

۲ مجموعه ـ زیر مجموعه

یادآوری: در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید، برای مثال مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی به صورت زیر است:

$A=\{۲,۳,۵,۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x\in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعه اعداد اول است. چون عضو ۲ متعلق به مجموعه A است، می‌نویسیم $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عضو ۶ به مجموعه A تعلق ندارد.

کار در کلاس

۱ فرض کنید $A=\{a,b\}$، درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{a\}\in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\{a\}$ وجود ندارد

ب) $\varnothing\in A$ نادرست زیرا در مجموعه ی A عضوی به صورت $\varnothing$ وجود ندارد

پ) $\{a\}\subseteq A$ درست است زیرا $a\in A$ است.

ت) $b\subseteq A$ نادرست است زیرا b مجموعه نیست و نمی تواند زیر مجموعه باشد.

ث) $a\in A$ درست است زیرا a درون مجموعه ی A است.

ج) $\{a,b\}\subseteq A$ درست است زیرا a، b هر دو عضو مجموعه ی A هستند.

۲ کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر با تهی و کدام یک ناتهی هستند؟

الف) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۲=۹$ و $۲x=۴\}$ $x^۲=۹\Rightarrow x=\pm۳$ و $۲x=۴\Rightarrow x=۲$، بنابراین هم زمان $x=۲$ و $x=\pm۳$ نمی تواند باشد در نتیجه مجموعه تُهی است.

ب) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x+۸=۸\}$ $x+۸=۸\Rightarrow x=۰$، بنابراین مجموعه برابر $\{۰\}$ بوده و ناتُهی است.

پ) $\{x\in\mathbb{Z} \mid x\neq x\}$ وجود ندارد عددی که با خودش برابر نباشد، بنابراین مجموعه هیچ عضوی ندارد و تُهی است.

ت) $\{x\in\mathbb{N} \mid x^۲=۷x\}$ $x^۲=۷x\Rightarrow x=۰\vee x=۷\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x=۷$، بنابراین مجموعه به صورت $\{۷\}$ بوده و ناتهی است.

۳ مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آنها مشخص کنید.

$B=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳=m\}=\{-۱,۰,۱\}$

$A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\leq۲\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

$D=\{a\in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

$C=\{k\in\mathbb{R} \mid k^۲-۱=۰\}=\{-۱,۱\}$

۴ با توجه به مجموعه‌ها در قسمت ۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$B\subseteq A \longrightarrow$ درست

$A\cap D\subseteq C \xrightarrow{A\cap D=\{۱,۲\}}$ نادرست

$B\subseteq C\cup A \xrightarrow{C\cup A=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}}$ درست

$B\in A \longrightarrow$ نادرست

$B-D\subseteq A \xrightarrow{B-D=\{-۱,۰\}}$ درست

$C\not\subseteq A \longrightarrow$ نادرست

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید. $\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b,c\}$ از مجموعهٔ A را با کد سه رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم، چون $a\notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c\in B$ و b متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعه $\{a\}\subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیه زیرمجموعه‌های A را با کدهای سه رقمی نظیر کنید.

زیر مجموعه	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
کد زیر مجموعه	۰۰۰	۱۰۰	۰۱۰	۰۰۱	۱۱۰	۱۰۱	۰۱۱	۱۱۱

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم اول ۲   رقم دوم ۲   رقم سوم ۲ $\xrightarrow{\times} 2^3=8$

۴ فرض کنید $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲   رقم دوم ۲   رقم سوم ۲   رقم چهارم ۲ $\xrightarrow{\times} 2^4=16$

۵ اگر $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n\}$ در این صورت با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم اول ۲   رقم دوم ۲   رقم سوم ۲   …   رقم nام ۲ $\xrightarrow{\times} 2^n$

فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال: مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{\varnothing\},\{a,\{a\}\},\{a,\varnothing\},\{\{a\},\varnothing\},\{a,\{a\},\varnothing\}\}$$

خواندنی

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

چنانچه A دارای n عضو باشد در این صورت $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

اگر $A\subseteq B$ به‌طوری که $A\neq B$ آن‌گاه A زیرمجموعه محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای 2^n زیرمجموعه است، چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی در این حالت تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با $48+2^n$ است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید برابر است با 2^{n+2} است، بنابراین داریم :

$$2^n+48=2^{n+2}=2^n\times 2^2$$
$$\Rightarrow 2^n+48=4\times 2^n \Rightarrow 4\times 2^n-2^n=48$$
$$\Rightarrow 3\times 2^n=48 \Rightarrow 2^n=16=2^4 \Rightarrow n=4$$

در نتیجه مجموعهٔ A، چهار عضوی است.

افراز یک مجموعه

فعالیت

۱ مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. تمام زیرمجموعه‌های A به غیر از $\varnothing$ را بنویسید.

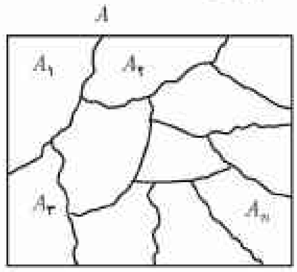
$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$

۲ از بین زیرمجموعه‌های ناتهی A که در بالا نوشتید، دو زیرمجموعه چنان در نظر بگیرید که اولاً اشتراکی نداشته باشند و ثانیاً اجتماع آنها برابر با A شود. $\{c\},\{a,b\}$

۳ همه جواب‌های ممکن برای قسمت قبل را به‌دست آورید. $\{a\},\{b,c\}$ همچنین دو مجموعه ی $\{b\},\{a,c\}$

۴ آیا می‌توان سه زیرمجموعه در قسمت ۱ چنان یافت که اشتراک دوبه‌دوی آنها تهی باشد و اجتماع آنها برابر با A شود؟
بله $\{a\},\{b\},\{c\}$

فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_1,A_2,\dots,A_n$ زیر مجموعه‌های A باشند. مجموعه A به n زیرمجموعه $A_1,A_2,\dots,A_n$ افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد.



I) $\forall\, 1\leq i\leq n;\ A_i\neq\varnothing$

II) $\forall i,j\ (i\neq j;\ A_i\cap A_j=\varnothing)$

III) $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

کار در کلاس

مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\dots,9\}$ را در نظر بگیرید، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای A محسوب می‌شود؟

۱ $\{4,8,9\}$ و $\{2,6\}$ و $\{1,3,5\}$ افراز نیست زیرا ۷ درون هیچکدام قرار ندارد یعنی اجتماع آنها A نخواهد شد .

۲ $\{5,7,9\}$ و $\{2,4,6,8\}$ و $\{1,3,5\}$ افراز نیست زیرا عدد ۵ به عنوان عضو مشترک می باشد و در افراز نباید عضو مشترک وجود داشته باشد .

۳ $\{7,9\}$ و $\{2,4,6,8\}$ و $\{1,3,5\}$ شرایط افراز برقرار است بنابراین افراز می باشد .

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

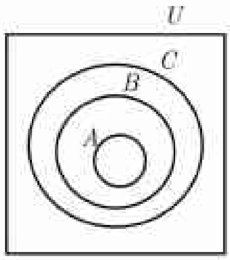
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. چنانچه عضوی در A وجود داشته باشد به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت:

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A\not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x\,;\,(x\in A \wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

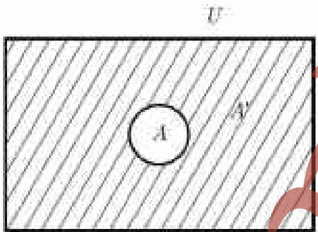
اثبات: برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که: $\forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\,;\,x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$، ثابت کنید $B'\subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعه A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعه A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x\,;\,(x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subseteq A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x:(x\in\varnothing\Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی ارزش مقدم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subseteq A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in A \vee x\in B)\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :
$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید. اولاً گزاره ی $x\in B$ می تواند درست یا نادرست باشد ولی با توجه به درستی گزاره ی $x\in A$ ترکیب فصلی آنها یعنی $x\in A \vee x\in B$ درست می باشد . ثانیاً در اثبات نشان داده شده که هر عضو درون Aعضوی از $A\cup B$ است . در نتیجه $A\subseteq A\cup B$ خواهد بود .

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x\in(A\cup C)]\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow x\in B\ (\text{زیرا } A\subseteq B)\\ \vee \qquad\qquad\qquad\qquad \vee\\ x\in C\Rightarrow x\in D\ (\text{زیرا } C\subseteq D)\end{cases}\Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow x\in B\cup D$$

بنابراین داریم :
$$\forall x;[x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup D$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند ثابت کنید اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

$$\left.\begin{matrix}A\subseteq C\\ B\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup B\subseteq C\cup C\Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت : $A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{1,2\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2-3x+2=0\}$ مساوی A است زیرا: $x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1 \vee x=2\Rightarrow\{1,2\}$

ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x\le 2\}$ مساوی A نیست زیرا این مجموعه شامل تمام اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ می باشد و بی شمار عضو دارد .

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid 2x^2+3x+1=0\}$ مساوی A نیست زیرا: $2x^2+3x+1=0\Rightarrow x=-1 \vee x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\{-1,-\frac{1}{2}\}$

ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid 1\le x\le 2\}$ مساوی A است زیرا این مجموعه شامل اعداد طبیعی از ۱ تا ۲ می باشد که خود اعداد ۱و۲ خواهد بود .

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A \quad (۱) \; ; \quad B\cap A\subseteq A\cap B \qquad (۲)$$

اثبات (۱) :

$$\forall x;\ [x\in(A\cap B)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in B\wedge x\in A \qquad (\text{طبق خاصیت جابه‌جایی } \wedge)$$
$$\Rightarrow x\in B\cap A]$$

به روش مشابه می توان درستی رابطه (۲) را نشان داد.

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

$$A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U\mid x\in B\wedge x\notin B\}=\varnothing \quad (\text{زیرا } A\subseteq B)$$
$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

تمرین

۱ مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید :

$C=\{x\mid \text{یک لوزی است } x\}$ $A=\{x\mid \text{یک چهارضلعی است } x\}$

$D=\{x\mid \text{یک مربع است } x\}$ $B=\{x\mid \text{یک مستطیل است } x\}$

کدام یک از روابط زیر درست است؟(با ذکر دلیل)

الف) $D\subseteq C$ درست ، زیرا مربع نوع خاصی از لوزی است که زوایای داخلی آن قائمه باشد .

ب) $B\subseteq D$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد تمام مستطیل ها مربعند.

پ) $A\subseteq B$ نادرست ، زیرا نمی توان ادعا کرد که همه ی چهار ضلعی ها مستطیلند ، ممکن است ذوزنقه یا ... باشند .

ت) $D\subseteq A$ درست ، زیرا مربعی نوعی چهار ضلعی است .

۲ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۸,۹\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ و $D=\{۳,۴,۵\}$ و $E=\{۳,۵\}$.

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام یک از این مجموعه‌ها باشد؟

الف) X و B عضو مشترکی ندارند. $X=C$ یا $X=E$

ب) $X\subseteq A$ ولی $X\not\subseteq C$ $X=A$ یا $X=B$ یا $X=D$

پ) $X\subseteq D$ ولی $X\not\subseteq B$ $X=D$ یا $X=E$

ت) $X\subseteq C$ ولی $X\not\subseteq A$ چنین مجموعه ای وجود ندارد .

۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $\{\varnothing\}=\varnothing$ نادرست ، زیرا $\{\varnothing\}$ مجموعه ای یک عضوی است ولی $\varnothing$ عضو ندارد .

ب) $\{\varnothing\}\subseteq\varnothing$ درست ، زیرا $\varnothing$ زیر مجموعه ی همه ی مجموعه هاست .

پ) $\{\varnothing\}\notin\varnothing$ نادرست ، زیرا $\varnothing$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه وجود دارد .

ت) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\in\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing\}\}$ درست ، زیرا مجموعه ی $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ دقیقاً به عنوان یک عضو درون مجموعه است .

۴ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^۳=x\}=\{-۱,۰,۱\}$ $A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<۲\}=\{-۱,۰,۱\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۲\leq ۱\}=\{-۱,۰,۱\}$ $C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^۲\leq ۲y\}=\{۰,۱,۲\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^۳+۲m=۳m^۲\}=\{۰,۱,۲\}$

بنابراین نتیجه می شود که : $A=B=D$ و $C=E$

۵ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آنها حکم‌های زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\notin C \Rightarrow A=\{1\}\ ,\ B=\{\{1\},1\}\ ,\ C=\{\{\{1\},1\},2\}$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C \Rightarrow A=\{1\}\ ,\ B=\{\{1\},1\}\ ,\ C=\{\{\{1\},1\},\{1\}\}$

پ) $A\in B$ و $A\subseteq B \Rightarrow A=\{1\}\ ,\ B=\{\{1\},1\}$

۶ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

گیریم مجموعه ی A دارای n عضو باشد در نتیجه $2^{n-2}=2^n-384$ ، بنابراین به حل این معادله می پردازیم :

$$2^n-384=2^n\times\frac{1}{4}\Rightarrow 2^n-2^n\times\frac{1}{4}=384\Rightarrow\frac{3}{4}2^n=384\xrightarrow[\div 3]{\times 4}2^n=512=2^9\Rightarrow n=9\rightarrow$$ مجموعه دارای ۹ عضو است.

۷ اگر $A=\{2\ ,\ x+2y\ ,4\}$ و $B=\{4\ ,5\ ,\ x-y\}$ و $A=B$ در این صورت مقادیر x و y را بیابید.

$$\begin{cases}x-y=2\\ x+2y=5\end{cases}\Rightarrow x=3\ ,\ y=1$$

۸ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

$$\forall x:[x\in A-B]\Rightarrow x\in A\wedge x\notin B\Rightarrow x\in A$$

بنابراین: $A-B\subseteq A$

۹ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ اثبات: $\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ C\subseteq C\end{matrix}\right\}\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$

ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$ اثبات:

$$\forall x\ ,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in C\Rightarrow x\in B\cap C$$

بنابراین: $A\cap C\subseteq B\cap C$

۱۰ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ اثبات:

$$\forall x\ ,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\Rightarrow x\in B\cap D$$

بنابراین: $A\cap C\subseteq B\cap D$

ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$ اثبات:

$$\forall x\ ,\ x\in A\cap C\Rightarrow x\in A\wedge x\in C\xrightarrow[C\subseteq D]{A\subseteq B}x\in B\wedge x\in D\Rightarrow x\in B\vee x\in D$$

$\Rightarrow x\in B\cup D\rightarrow$ بنابراین حکم برقرار است.

? توجه داشته باشید که : اگر $p\wedge q$ درست باشد ، آنگاه p درست و q نیز درست خواهد بود در نتیجه $p\vee q$ درست است . بنابراین از $p\wedge q$ می توان $p\vee q$ را نتیجه گرفت.

۱۱ الف) فرض کنید $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید $A=U$.

اثبات الف) می دانیم تهی زیر مجموعه ی هر مجموعه است بنابراین : $\varnothing\subseteq A\wedge A\subseteq\varnothing\Rightarrow A=\varnothing$

اثبات ب) می دانیم هر مجموعه زیر مجموعه ی مرجع است بنابراین : $A\subseteq U\wedge U\subseteq A\Rightarrow A=U$

۱۲ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ اثبات:

$$\left.\begin{matrix}\forall x\ ,x\in B-A\Rightarrow x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B\rightarrow B-A\subseteq B\\ \forall x\ ,x\in B\xrightarrow{A\cap B=\varnothing}x\in B\wedge x\notin A\Rightarrow x\in B-A\rightarrow B\subseteq B-A\end{matrix}\right\}\Rightarrow B-A=B$$

ب) $A-B=A$ برای اثبات مشابه قسمت الف عمل می کنیم . البته می توان گفت که : این ادعا همان ادعای قسمت الف می باشد و فقط بازی با حروف صورت گرفته است .

۱۳ فرض کنید $X=\{a,b,c,d,e,f,g\}$، کدام یک از حالت‌های زیر یک افراز برای X محسوب می‌شود.

الف) $\{d,g\}$ و $\{b\}$ و $\{a,c,e\}$ افراز نمی باشد زیرا اجتماع آنها مساوی مجموعه ی X نیست .

ب) $\{b,e,f\}$ و $\{c,d\}$ و $\{a,e,g\}$ افراز نمی باشند زیرا دارای عضو مشترک هستند .

پ) $\{d,f\}$ و $\{c\}$ و $\{a,b,e,g\}$ افراز است .

ت) $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ افراز نمی باشد زیرا افراز نمی توان متشکل از یک مجموعه باشد .

ث) $\{e\}$ و $\{f,g\}$ و $\{d\}$ و $\{b,c\}$ و $\{a\}$ افراز است .

۳ قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)

در این درس می‌خواهیم قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک را بررسی کنیم.
شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید یعنی می‌دانیم :

I) $\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ :\ a+b=b+a$ خاصیت جابه‌جایی

II) $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ :\begin{cases}a+(b+c)=(a+b)+c\\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c\end{cases}$ خاصیت شرکت‌پذیری

III) $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}:\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ خاصیت توزیع‌پذیری × نسبت به +

توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست. (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

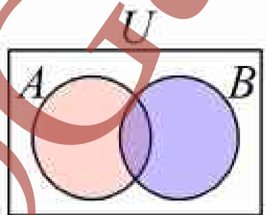
$$\left.\begin{array}{l}۲+(۳\times۵)=۲+۱۵=۱۷\\ (۲+۳)\times(۲+۵)=۵\times۷=۳۵\end{array}\right\}\Rightarrow ۲+(۳\times۵)\neq(۲+۳)\times(۲+۵)$$

در مجموعه‌ها دو عمل ∪ و ∩ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب (∨) و (∧) بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

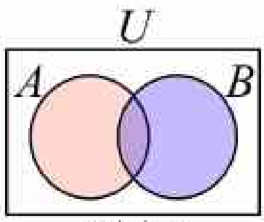
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (ت) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

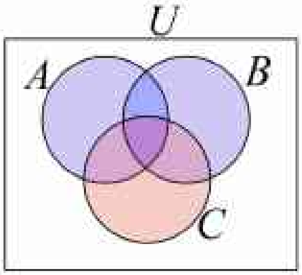


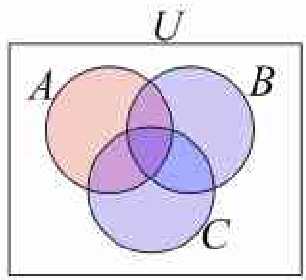
$A\cup B$



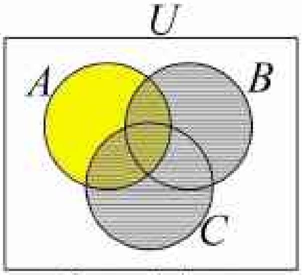
$B\cup A$

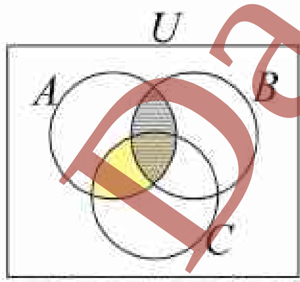
ب)


$(A \cup B) \cup C$

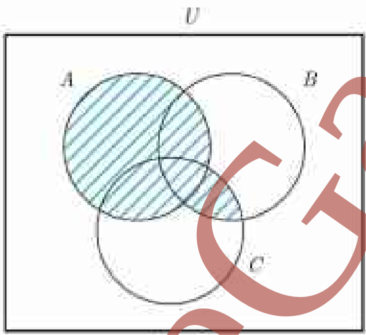

$A \cup (B \cup C)$

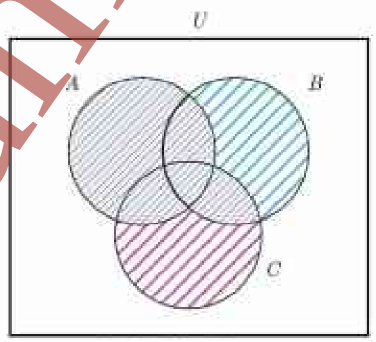
پ)


$A \cap (B \cup C)$


$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ت)


$A \cup (B \cap C)$


$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A \cap B = B \cap A$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = \{۳\} \\ B \cap A = \{۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap B = B \cap A$$

ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = \{۱,۲,۳\} \cap \{۵\} = \varnothing \\ (A \cap B) \cap C = \{۳\} \cap \{۱,۲,۵,۶\} = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = \{۱,۲,۳\} \cap \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = \{۱,۲,۳\} \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{۳\} \cup \{۱,۲\} = \{۱,۲,۳\} \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص با قوانین را برای ∪ و ∩ اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید:

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم: $A\cup B=B\cup A$

$A\cup B=\{x\in U|\ x\in A\vee x\in B\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in B\vee x\in A\}$ جابه‌جایی $\vee$

$=B\cup A$ تعریف اجتماع

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه C، B، A از مجموعهٔ مرجع U، داریم:

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U|x\in A\vee x\in(B\cup C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in A\vee(x\in B\vee x\in C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C\}$ شرکت‌پذیری $\vee$

$=\{x\in U|x\in(A\cup B)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه خاصیت توزیع‌پذیری ∪ نسبت به ∩ را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

[فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$[x\in A\vee(x\in B\cap C)]$ تعریف اجتماع

$[(x\in A\vee(x\in B\wedge x\in C))]$ تعریف اشتراک

$[x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری $\vee$ نسبت به $\wedge$

$[x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C]$ تعریف ∪

$x\in[(A\cup B)\cap A\cup C]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A\cup B)\cap\overset{(A\cup C)}{\cancel{(B\cup C)}}\subseteq A\cup(B\cap C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنی فاکتورگیری از $A\cup$ است.)

> **تذکر**: با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند:
>
> ۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$
>
> ۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$ — الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$

ت) $A-B=A\cap B'$ — پ) $A\cup(B\cup A')=U$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)$ جابه‌جایی

$=(A\cup B)\cap(A\cup B')$

$=A\cup(B\cap B')$ فاکتورگیری (عکس خاصیت توزیع‌پذیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ فاکتورگیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ شرکت‌پذیری

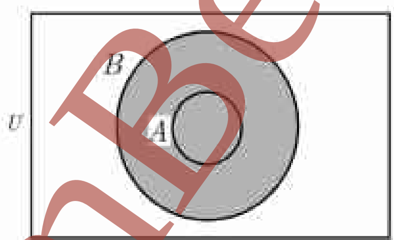
ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}$ تعریف متمم

$=A\cap B'$ تعریف اشتراک

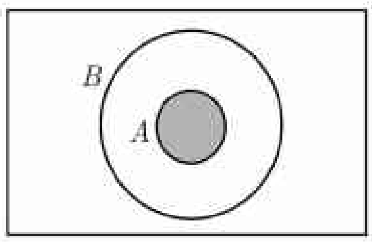
قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U داریم:

ب) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$ — الف) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$

برهان :قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.



$(A\cup B)$



$(A\cap B)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب،قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.

الف) فرض کنیم $A\subseteq B$ و ثابت می‌کنیم $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$.
رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

می‌دانیم: $B\subseteq B$
طبق فرض: $A\subseteq B$
$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cup B = B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(۱) و $(۲) \Rightarrow (A \cup B) = B$

حال فرض کنیم $A \cup B = B$، ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم: $A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cup B = B} A \subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A \subseteq B$، تساوی $A \cap B = A$ را اثبات می‌کنیم:

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم: $(A \cap B) \subseteq A$

(۲) می‌دانیم: $A \subseteq A$ — طبق فرض: $A \subseteq B$ $\Rightarrow (A \cap A) \subseteq (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A \cap B = A$، به‌دست می‌آید.)

(۱) و $(۲) \Rightarrow (A \cap B) = A$

حال فرض می‌کنیم $A \cap B = A$، ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A \cap B) \subseteq B \xrightarrow[\text{فرض}]{A \cap B = A} A \subseteq B$

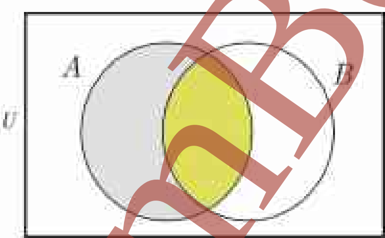
کار در کلاس

(قوانین جذب یا هم پوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند می‌خواهیم تساوی‌های زیر، که به قوانین جذب معروف‌اند را با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم:

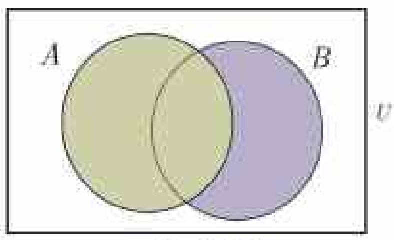
الف) $A \cup (A \cap B) = A$

ب) $A \cap (A \cup B) = A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید:



$A \cup (A \cap B)$



$A \cap (A \cup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C \subseteq D$ در این صورت $(C \cup D) = D$ و $(C \cap D) = C$ است.

طبق تعریف اشتراک می‌دانیم: $(A \cap B) \subseteq A \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cup (A \cap B) = A$ (اثبات الف)

طبق تعریف اجتماع می‌دانیم: $A \subseteq (A \cup B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A \cap (A \cup B) = A$ (اثبات ب)

روش دیگری نیز برای اثبات قوانین جذب وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(U\cup B)$ فاکتورگیری

$=A\cap U=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(\varnothing\cap B)$ فاکتورگیری

$=A\cup\varnothing=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap\underbrace{[(B\cup A)\cap B]}_{\text{جذب}})=(A\cap B)\cup\underbrace{[(B\cup C)\cap B]}_{\text{جذب}}$

$=\underbrace{(A\cap B)\cup B}_{\text{جذب}}=B$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{C})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{C})]$ جابه‌جایی

$=(\underbrace{A\cup B'}_{C})$ جذب

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\varnothing$ (۱)

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

$=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$ شرکت‌پذیری

$=(A\cap\varnothing)\cap A'$ تعریف متمم

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

$=(A\cap C')\cup(B\cap C')$ توزیع‌پذیری $\cap$ در $\cup$

$=(A-C)\cup(B-C)$ تبدیل اشتراک به تفاضل

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$

$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$ — شرکت‌پذیری اجتماع

$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$ — تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[A\cap(B'\cup B)]\cup(B\cap A')$ — عکس عمل توزیع‌پذیری

$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$ — تعریف متمم

$=A\cup(B\cap A')$ — تعریف مرجع

$=(A\cup B)\cap(A\cup A')$ — توزیع‌پذیری

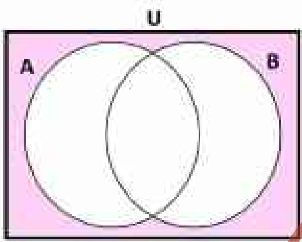
$=(A\cup B)\cap U$ — تعریف متمم

$=A\cup B$ — تعریف مرجع

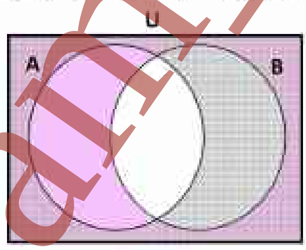
قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند، روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(A\cup B)'=A'\cap B'$



$(A\cup B)'$



$A'\cap B'$

۲ اگر فرض کنیم $U=\{1, 2, \dots, 10\}$ و $A=\{2,3,5,8\}$ و $B=\{3,4,6,8\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$\left.\begin{array}{l} A\cap B=\{3,8\}\Rightarrow (A\cap B)'=\{1,2,4,5,6,7,9,10\} \\ A'\cup B'=\{1,4,6,7,9,10\}\cup\{1,2,5,7,9,10\}=\{1,2,4,5,6,7,9,10\}\end{array}\right\}\Rightarrow (A\cap B)'=A'\cup B'$$

تساوی‌های زیر را که به قوانین دمورگان معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند:

$$\begin{cases} \text{(الف)}\ (A\cup B)'=(A'\cap B') \\ \text{(ب)}\ (A\cap B)'=(A'\cup B') \end{cases}$$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید. (باید ثابت کنید. $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$\forall x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\in(A'\cap B')] \Rightarrow (A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحه قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$ که در این صورت تساوی الف اثبات می‌شود.

$$x\in A'\cap B'\Rightarrow x\in A'\wedge x\in B'\Rightarrow x\notin A\wedge x\notin B\Rightarrow x\notin A\cup B\Rightarrow x\in(A\cup B)'\Rightarrow A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$$

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$ اثبات: $(A-B)'=(A\cap B')'=A'\cup B$

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$ اثبات: $(A-B)-C=(A\cap B')\cap C'=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ اثبات: $A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C)$

مثال : با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$

ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$

حل :

الف) $(A-B)\cap(A-C)$

$=(A\cap B')\cap(A\cap C')$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$ شرکت‌پذیری

$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$ جابه‌جایی

$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$ شرکت پذیری

$=(A\cap B')\cap C'$ $A\cap A=A$

$=A\cap(B'\cap C')$ شرکت‌پذیری

$=A-(B'\cap C')'$ تبدیل اشتراک به تفاضل

$=A-(B\cup C)$ قانون دمورگان

ب) $(A\cap B)-(A\cap C)$

$=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$ تبدیل تفاضل به اشتراک

$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$ قانون دمورگان

$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$ توزیع‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$ قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$ تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم

$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$

$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل متوجه می‌شویم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر دچار مشکل شده و این کار انجام نمی‌شود ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم :

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=\{۱,۲\}$

ت) وقتی می‌نویسیم $C=D$ یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی تساوی بین مجموعه‌ها به کار می‌بریم می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع و یا اشتراک بگیریم یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xrightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup(A\cup B)= A\cup(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xrightarrow{\text{قضیه}} B\subseteq A \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) $\Rightarrow A=B$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفتگو کرده و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B \Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود $A=B$.

کار در کلاس

۱ اگر $\{۱۰$ و ... و ۲ و ۱$\}=A$ و $\{۱۵$ و ... و ۶ و ۵$\}=B$ و $\{۲۰$ و ... و ۲ و ۱$\}=U$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap(B'\cup B)=A\cap U=A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$

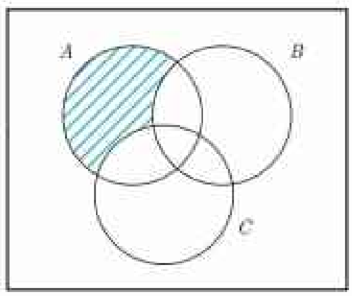
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])=(A-B)\cup((A-B)\cap[(B-A)\cup A'])$

$$\xrightarrow{\text{قانون جذب}} =A-B=\{۱,۲,۳,۴\}$$

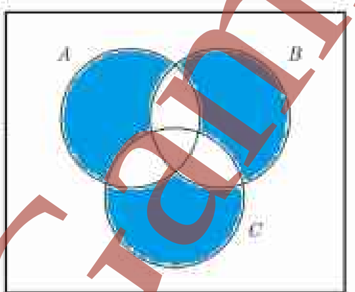
(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.

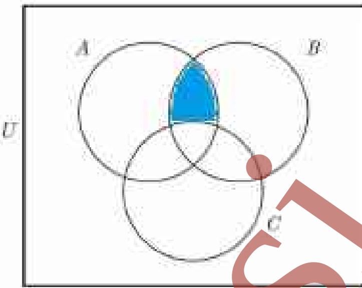
الف) اعضایی که فقط در A باشند.



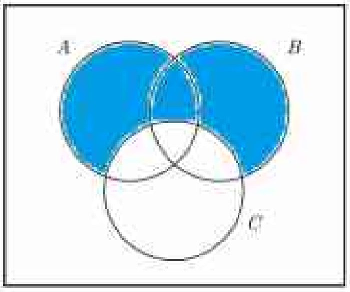
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه هستند.



پ) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند.



ت) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند.



ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب بوده و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین مجموعهٔ حاصل، دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود : $A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختص اول یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),(۴,۴),(۴,۵),(۶,۴),(۶,۵)\}$

$B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۵,۲),(۵,۴),(۵,۶)\}$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند، مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل ۶ زوج مرتب به‌وجود آمد حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

برای نوشتن ضرب دکارتی باید به ازای هر عضو A تمام اعضای مجموعه ی B نوشته شوند ، یعنی برای هر عضو A ، K حالت داریم .

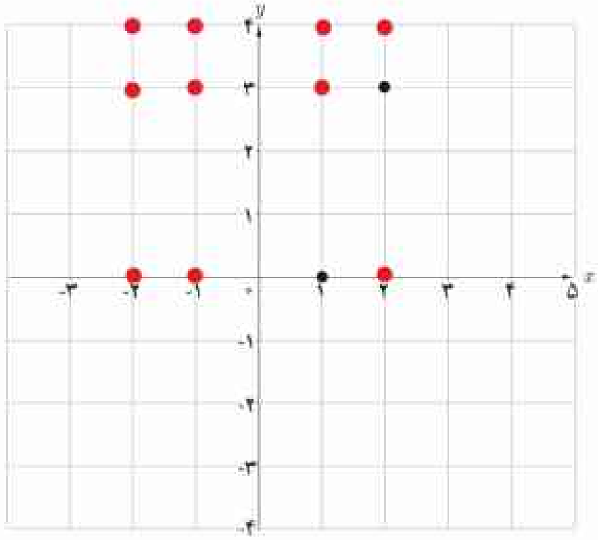
از طرفی A دارای m عضو است ، پس طبق اصل ضرب ، $A\times B$ دارای $m\times k$ عضو است .

فعالیت

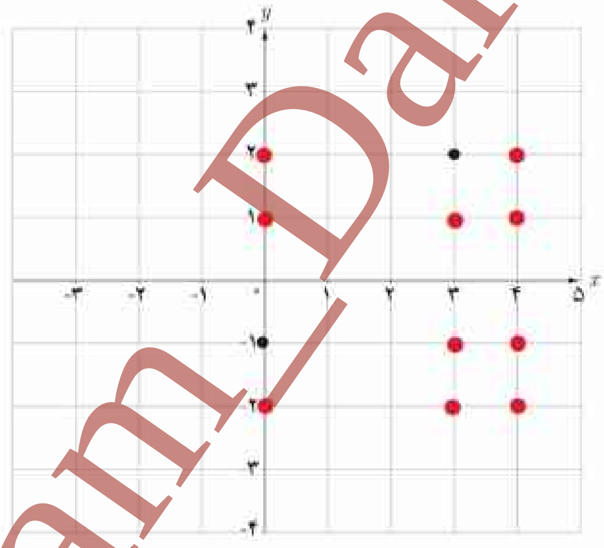
۱ اگر $A=\{۱،-۱،۲،-۲\}$ و $B=\{۰،۳،۴\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل داده و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=\{(1,0),(1,3),(1,4),(-1,0),(-1,3),(-1,4),(2,0),(2,3),(2,4),(-2,0),(-2,3),(-2,4)\}$

$B\times A=\{(0,1),(0,-1),(0,2),(0,-2),(3,1),(3,-1),(3,2),(3,-2),(4,1),(4,-1),(4,2),(4,-2)\}$



نمودار مختصاتی $A\times B$

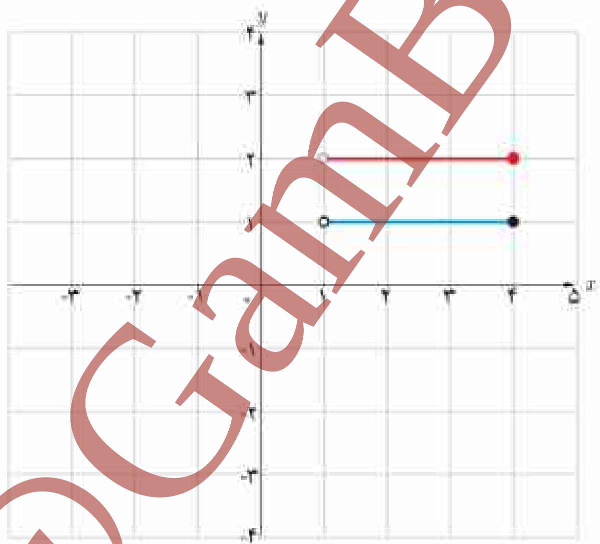


نمودار مختصاتی $B\times A$

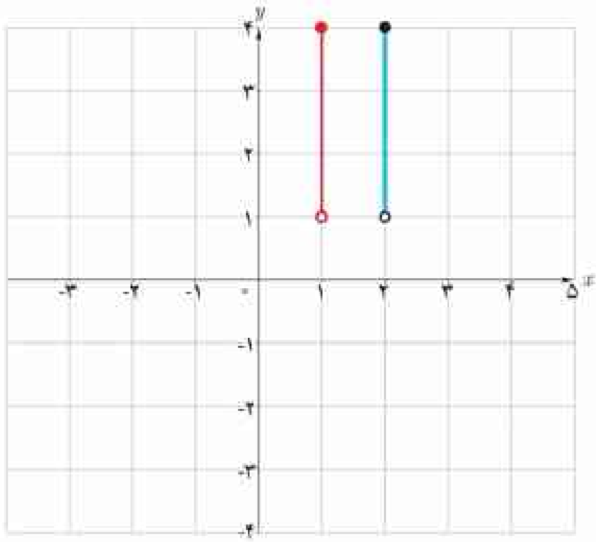
۲ اگر فرض کنیم $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in(1,4]\wedge y\in B\}$

$B\times A=\{(x,y)\,|\,(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$

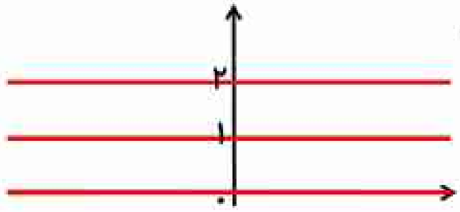


نمودار $A\times B$



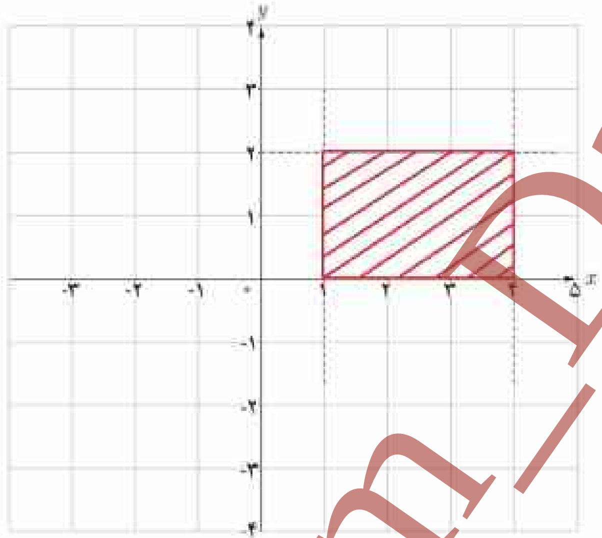
نمودار $B\times A$

۳ اگر فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\{0,1,2\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.



۴ در صورتی که $A=[1,4]$ و $B=[0,2]$ در این صورت نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 4\wedge 0\le y\le 2\}$$



۵ در صورتی که فرض کنیم $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت حاصل‌ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

این مجموعه شامل تمام نقاط صفحه ی مختصات است.

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند در این صورت:

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم:

فرض $A\times\varnothing\neq\varnothing$ کنیم (فرض خلف) در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $A\times\varnothing$ باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x,y)\in A\times\varnothing\xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}}x\in A\wedge\underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

برهان خلف: فرض می کنیم $\varnothing\times A\neq\varnothing$ در این صورت حداقل یک عضو مانند (x,y) در $\varnothing\times A$ باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x,y)\in\varnothing\times A\Rightarrow\underbrace{x\in\varnothing}_{\text{تناقض}}\wedge y\in A$$

پس فرض خلف باطل شده و حکم برقرار است.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرض $A\times B=B\times A$، ثابت می‌کنیم $A=B$.

$$A\neq\varnothing, B\neq\varnothing \Rightarrow \exists x; x\in A\wedge \exists y\in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \exists(x,y);(x,y)\in A\times B$$

$$\xrightarrow{A\times B=B\times A}(x,y)\in B\times A \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge y\in A \Rightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A \Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ با استفاده از تعریف اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

اثبات: $A\cap B=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\}=\{x\in U|x\in B\wedge x\in A\}=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

اثبات: $A\cap(B\cap C)=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B\cap C\}$

$=\{x\in U|x\in A\wedge(x\in B\wedge x\in C)\}=\{x\in U|(x\in A\wedge x\in B)\wedge x\in C\}$

$=\{x\in U|x\in(A\cap B)\wedge x\in C\}=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

اثبات: $x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\cup C$

$\Rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\Rightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$

$\Rightarrow x\in A\cap B\wedge x\in A\cap C\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow\boxed{A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)}$

به طور مشابه ثابت می شود $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

پاسخ این قسمت در صفحه ی بعد نوشته شده است.

۲ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(A'\cap B)\cup[(B\cap A)-B']\cap(B\cup A)$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)$

۴ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$

ت) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge(A\cap B)=(A\cap C)]\Rightarrow B=C$

۵ اگر $A=\{y+2,5,z\}$ و $B=\{x+1,4,-2\}$ در این صورت با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۶ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

الف) $A=\{2,3\}, B=\{2,3,4\}$

ب) $A=\{3,4\}, B=(1,5]$

پ) $A=[2,6], B=[3,8]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[1,4]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{2,3\}$

پاسخ تمرین های صفحه ی ۳۸ کتاب درسی

۲- الف) $(A\cap B)\cup(B'\cap A)=(A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap U=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=(B'\cap A')\cap A=B'\cap(A'\cap A)=B'\cap\varnothing=\varnothing$

پ) $A\cap(B\cap C)=(A\cap A)\cap(B\cap C)=A\cap[A\cap(B\cap C)]=A\cap[(A\cap B)\cap C]$

$$=A\cap[C\cap(A\cap B)]=(A\cap C)\cap(A\cap B)=(A\cap B)\cap(A\cap C)$$

ت) $A\cup(B\cup C)=(A\cup A)\cup(B\cup C)=A\cup[A\cup(B\cup C)]=A\cup[(A\cup B)\cup C]$

$$=A\cup[C\cup(A\cup B)]=(A\cup C)\cup(A\cup B)=(A\cup B)\cup(A\cup C)$$

۳- الف) ابتدا عبارت درون کروشه را ساده می کنیم : $(B\cap A)-B'=(B\cap A)\cap B=B\cap A$

بنابراین : $(A'\cap B)\cup\left(\underbrace{[(B\cap A)-B']}_{B\cap A}\cap(B\cup A)\right)=$

$$=(B\cap A')\cup(B\cup A)=(B-A)\cup(B\cup A)\xrightarrow{(B-A)\subseteq(B\cup A)}=B\cup A$$

ب) $(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}=A-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup(A\cap B)=[(A\cup B)\cap A']\cup(A\cap B)=\left[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup(B\cap A')\right]\cup(A\cap B)$

$$=(B\cap A')\cup(A\cap B)=B\cap\underbrace{(A'\cup A)}_{U}=B$$

۴- الف) $(A\subseteq X)\wedge(A'\subseteq X)\Rightarrow(A\cup A')\subseteq X\Rightarrow U\subseteq X$

از طرفی می دانیم همواره $X\subseteq U$ ، بنابراین $X=U$ است .

ب) $(A-B)\cup(A\cap B)=(A\cap B')\cup(A\cap B)=A\cap\underbrace{(B'\cup B)}_{\varnothing}=A$

پ) $(A-C)\cap(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')=(A\cap B)\cap(C'\cap C')=(A\cap B)\cap C'=(A\cap B)-C$

ت) $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cap B)'=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=[\underbrace{(A\cap A')}_{\varnothing}\cup\underbrace{(B\cap A')}_{B-A}]\cup[\underbrace{(A\cap B')}_{A-B}\cup\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]=(B-A)\cup(A-B)=(A-B)\cup(B-A)$

ث) $(A\cup B)\cap(A'\cap B')=(A\cup B)\cap(A\cup B)'=\varnothing$

ج) $B=B\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=B\cap(A\cup C)=(B\cap A)\cup(B\cap C)$

$\xrightarrow{A\cap B=A\cap C}=(A\cap C)\cup(B\cap C)=C\cap(A\cup B)\xrightarrow{A\cup B=A\cup C}=C\cap(A\cup C)=C$

۵- از $A\times B=B\times A$ نتیجه می شود $A=B$ ، بنابراین : $\{x+۱,۴,-۲\}=\{y+۲,۵,z\}$.

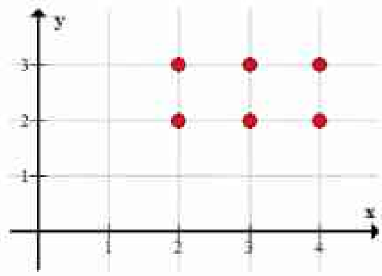
واضح است که ۵ فقط می تواند با $x+۱$ برابر باشد لذا $x=۴$ است . اما در موارد دیگر دو حالت داریم :

$[(y+۲=۴)\wedge(z=-۲)]\vee[(y+۲=-۲)\wedge(z=۴)]$
$\Rightarrow[(y=۲)\wedge(z=-۲)]\vee[(y=-۴)\wedge(z=۴)]\Rightarrow y+z=۰$

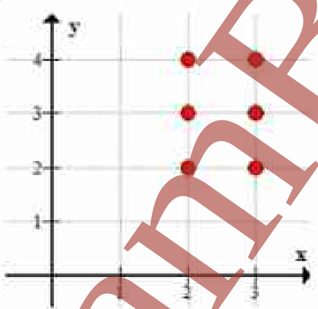
درنتیجه $x+y+z=۴$ خواهد بود .

۶- الف) $A=\{۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴\}$

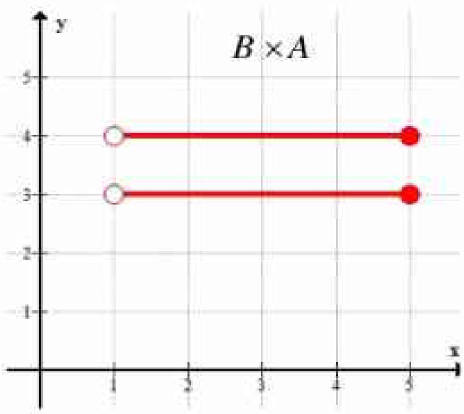
$B\times A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۲),(۴,۳)\}$

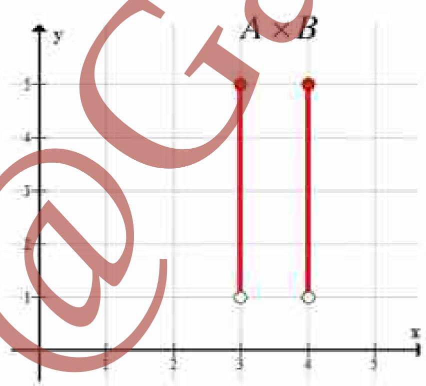


$A\times B=\{(۲,۲,),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴)\}$

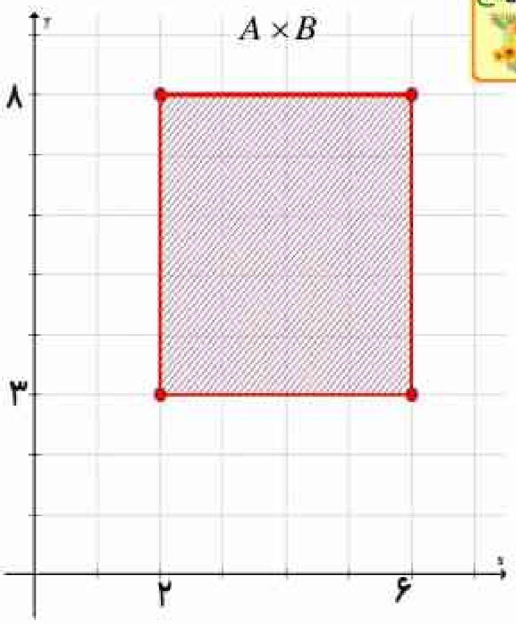


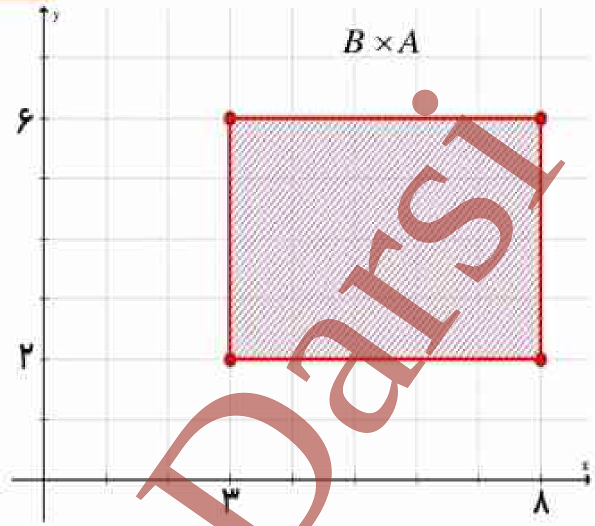
ب) $A=\{۳,۴\}$ و $B=(۱,۵]$



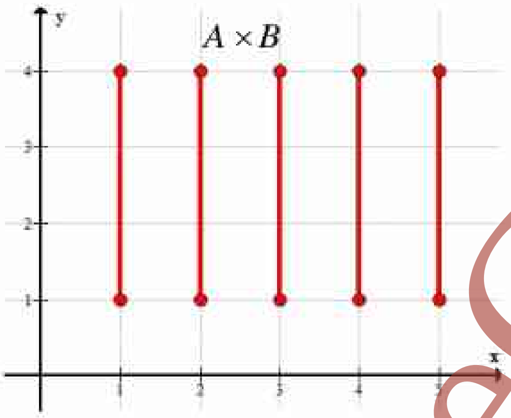


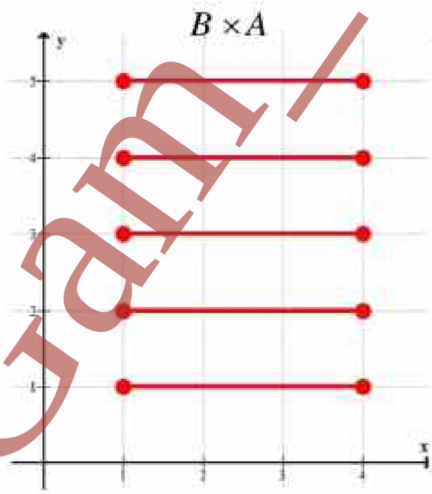
پ) $A=[2,6]$ و $B=[3,8]$





ت) $A=\mathbb{N}$ و $B=[1,4]$





ث) $A=\mathbb{R}$ و $B=\{2,3\}$