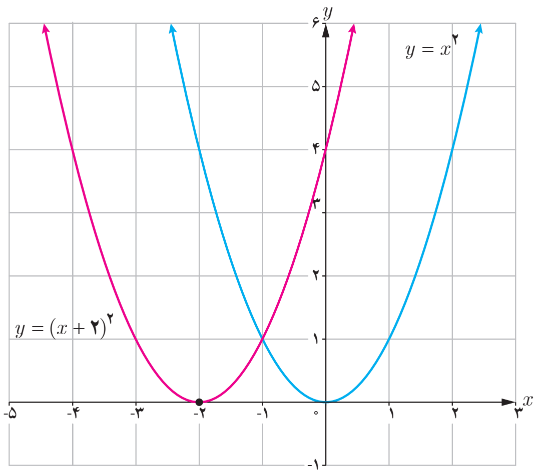
درس ۱

تبدیل نمودار توابع

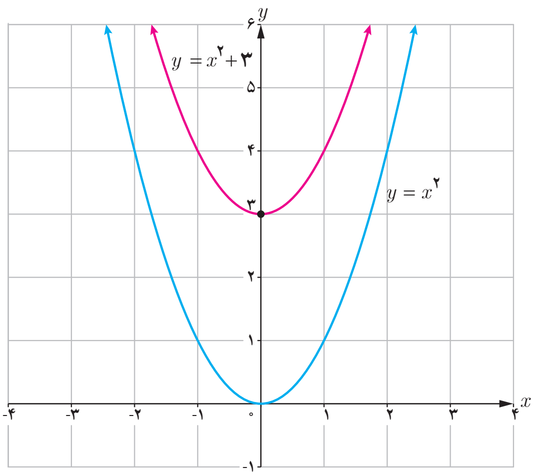
برای رسم بسیاری از توابع، نیاز به روش‌های پیچیده نیست. اگر نمودار یک تابع را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم به کمک برخی از تبدیل‌ها، نمودار توابع دیگری را رسم کنیم.

انتقال‌های عمودی و افقی

در سال‌های قبل با انتقال‌های عمودی و افقی آشنا شده‌اید. به‌عنوان مثال می‌توانید نمودار توابع $y=(x+2)^2$ و $y=x^2+3$ را به کمک نمودار تابع $y=x^2$ رسم کنید.



(الف)



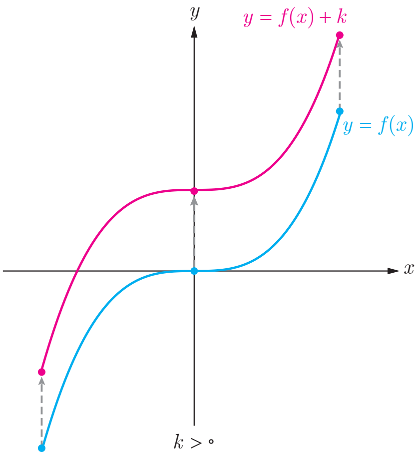
(ب)

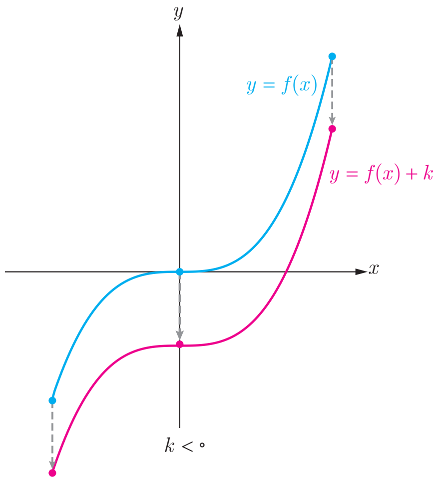
در حالت کلی (مانند مثال بالا، قسمت ب) اگر (x_0,y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به‌صورت $g(x)=f(x)+k$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_0)=f(x_0)+k=y_0+k$$

بنابراین نقطه (x_0,y_0+k) از نمودار تابع g متناظر با نقطه (x_0,y_0) از نمودار f است.

برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k<0$ این انتقال به سمت پایین انجام می‌شود.



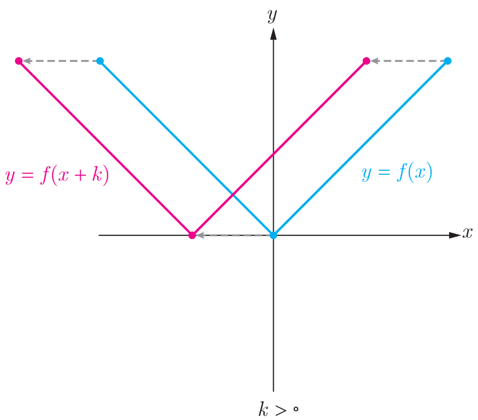


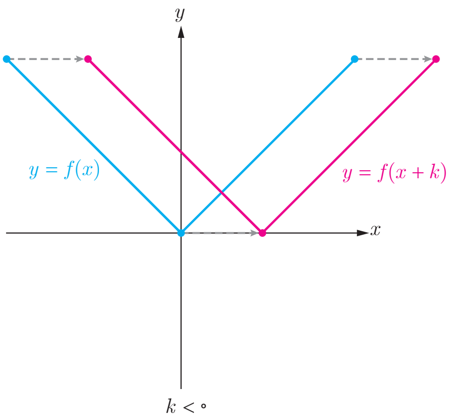
به روش مشابه، اگر (x_0, y_0) یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع h به‌صورت $h(x)=f(x+k)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$h(x_0-k)=f(x_0-k+k)=f(x_0)=y_0$$

بنابراین نقطه $(x_0-k\ ,\ y_0)$ از نمودار تابع h متناظر با نقطه (x_0, y_0) از نمودار تابع f است.

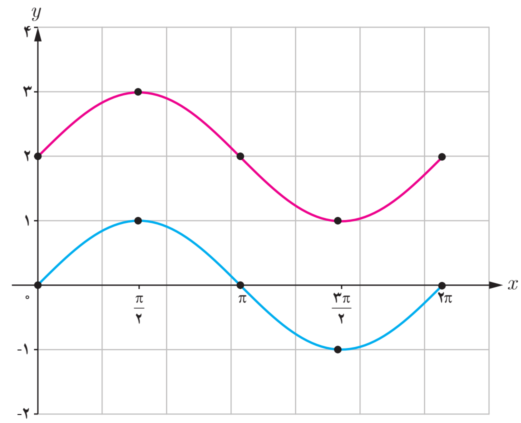
برای رسم نمودار $y=f(x+k)$، اگر $k>0$ باشد، کافی‌است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k<0$، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می‌شود.



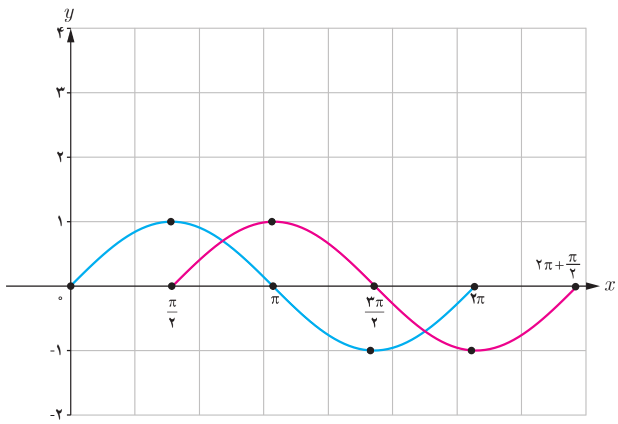


۴

✤ **مثال :** نمودار تابع $y=\sin x$ با دامنه $[\circ,۲\pi]$ رسم شده است. می‌خواهیم نمودار تابع $f(x)=\sin x+۲$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{۲})$ را به کمک انتقال رسم کنیم. با توجه به توضیحات بالا، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را ۲ واحد به بالا انتقال دهیم تا $f(x)$ رسم شود (شکل الف) و اگر آن را $\frac{\pi}{۲}$ واحد به راست انتقال دهیم، $g(x)$ رسم می‌شود. (شکل ب)



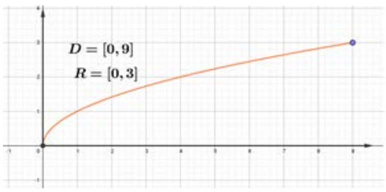
(الف)



(ب)

کار در کلاس

۱

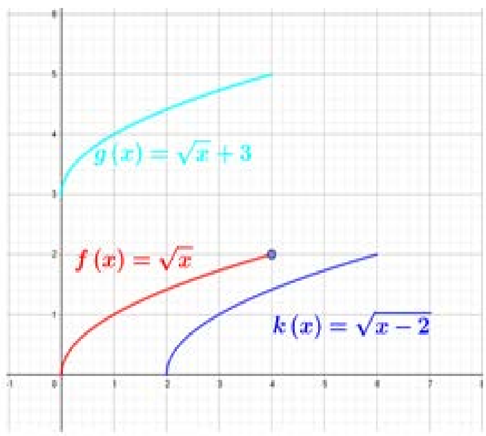


الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را با دامنه $[\circ,۴]$ رسم کنید و برد تابع را مشخص کنید.

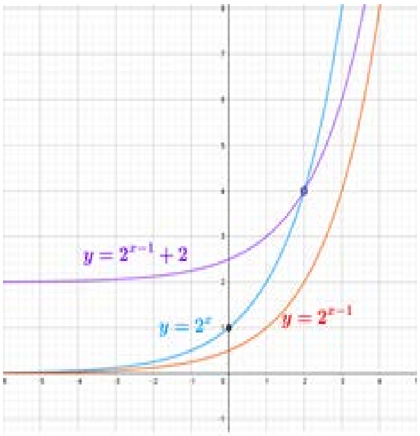
ب) نمودار توابع $k(x)=f(x-۲)$ و $g(x)=f(x)+۳$ را به کمک انتقال رسم کنید.

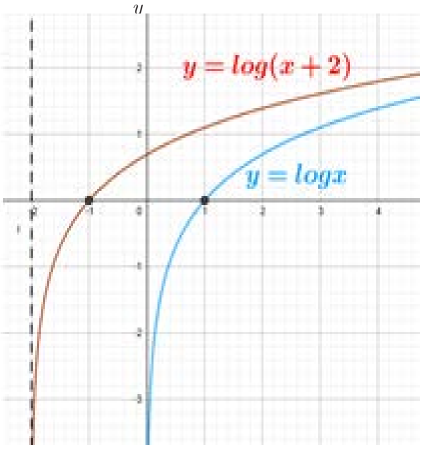
ج) دامنه و برد توابع k و g را محاسبه و با دامنه و برد تابع f مقایسه کنید.

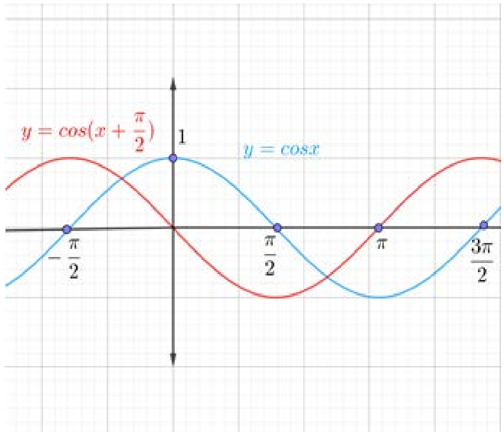
	$f(x)=\sqrt{x}$	$k(x)=f(x-۲)$	$g(x)=f(x)+۳$
دامنه	$[\circ,۴]$	[۲,۶]	[۰,۴]
برد	[۰,۲]	[۰,۲]	[۳,۵]



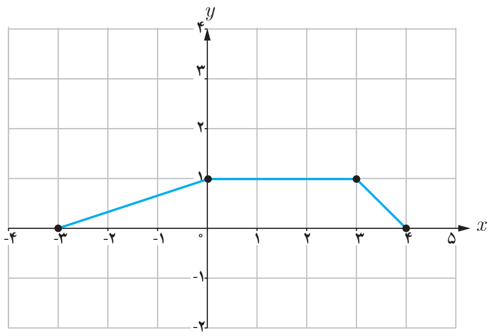
۲ در زیر، نمودار توابع $y=2^x$، $y=\log_2 x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=2^{x-1}+2$، $y=\log_2(x+2)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.



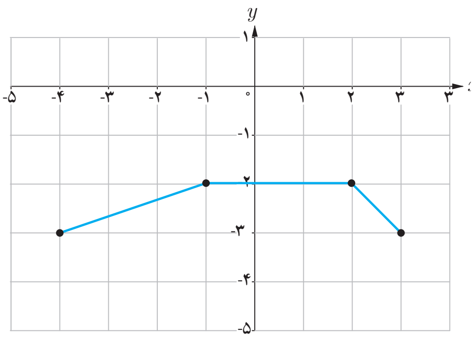


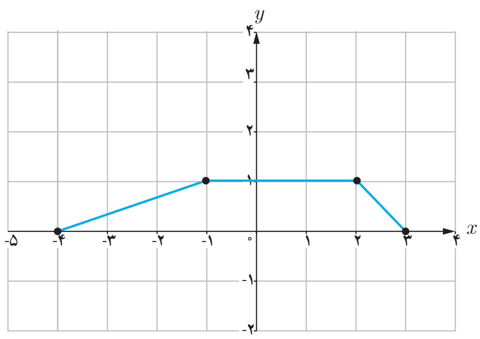


مثال : نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. با انتقال‌های افقی و عمودی، نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ را رسم می‌کنیم.



برای این کار ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)$ رسم شود (شکل الف) و سپس این نمودار را سه واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x+1)-3$ رسم شود (شکل ب).


(ب)

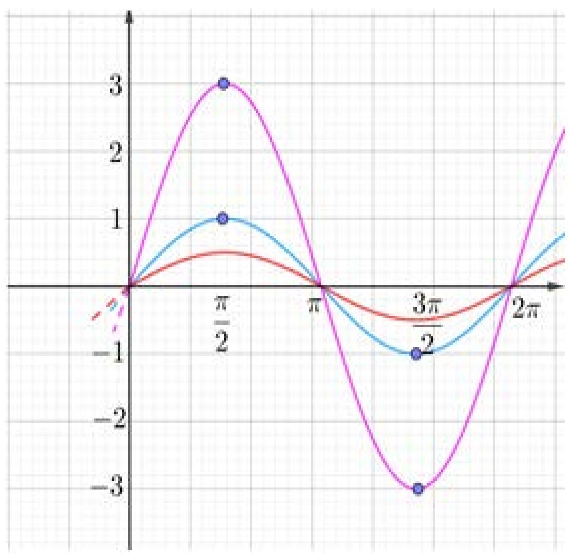

(الف)

انبساط و انقباض عمودی

فعالیت

۱ در جدول زیر، چند نقطه از نمودارهای توابع $y=\sin x$ و $y=۳\sin x$ را مشخص کرده و نمودار آنها را در بازه $[\circ , ۲\pi]$ رسم کرده‌ایم. با تکمیل این جدول، نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نیز در دستگاه زیر رسم کنید.

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$y=\sin x$	$\circ$	۱	$\circ$	-۱	$\circ$
$y=۳\sin x$	$\circ$	۳	$\circ$	-۳	$\circ$
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۰



۲ با مقایسهٔ نمودارهای بالا، نمودارهای توابع $y=۳\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با نمودار تابع $y=\sin x$ دارند؟

عرض نقاط $y=۳\sin x$ سه برابر عرض نقاط $y=\sin x$ است وعرض نقاط $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ نصف عرض نقاط $y=\sin x$ است ولی طول هایشان ثابت است.

۳ دامنه و برد توابع $y=۳\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ چه تفاوتی با دامنه و برد تابع $y=\sin x$ دارند؟

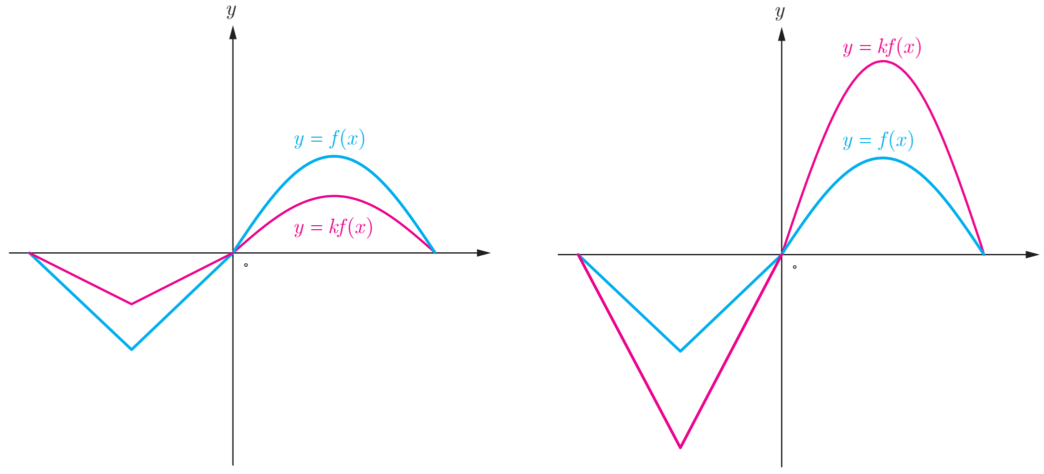
دامنه ها تغییر نکرده ولی برد $y=۳\sin x$ برابر $[-۳,۳]$ وبرد $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ برابر $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$ شده است.در صورتی که برد $y=\sin x$ برابر $[-۱,۱]$ است

در حالت کلی اگر $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x)=kf(x)$ تعریف شده باشد، آنگاه :

$$g(x_\circ)=kf(x_\circ)=ky_\circ$$

بنابراین $(x_\circ , ky_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع g متناظر با نقطه $(x, y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، کافی‌است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. در شکل‌های زیر، نمودار تابع $y = kf(x)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



$0 < k < 1$ $\qquad$ $k > 1$

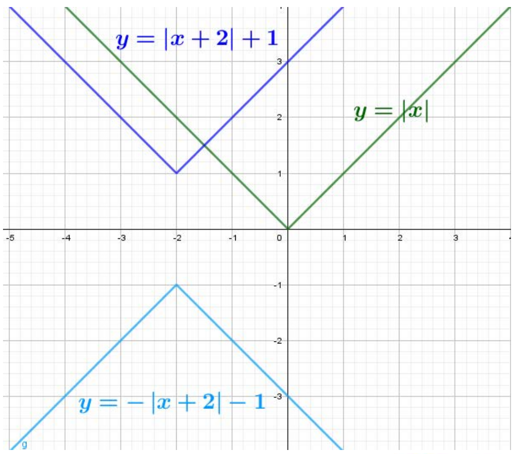
اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انبساط عمودی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از **انقباض عمودی** نمودار $y = f(x)$ به‌دست می‌آید.

اگر عرض نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = -f(x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

کار در کلاس

$y = kf(x)$ $\nearrow k > 1$ $\quad D = [a,b]\ ,R = [kc,kd]$

$\searrow 0 < k < 1$ $\quad D = [a,b]\ ,R = [kc,kd]$



۱ اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y = kf(x)$ را برای $k > 0$ و $k < 0$ تعیین کنید.

۲ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^2$ رسم کنید.

الف) $y = -x^2$

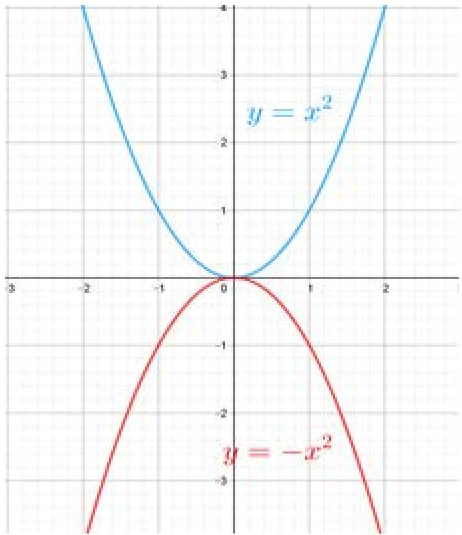
ب) $y = 2x^2 - 1$

پ) نمودار روبه‌رو از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = |x|$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را مشخص کنید.

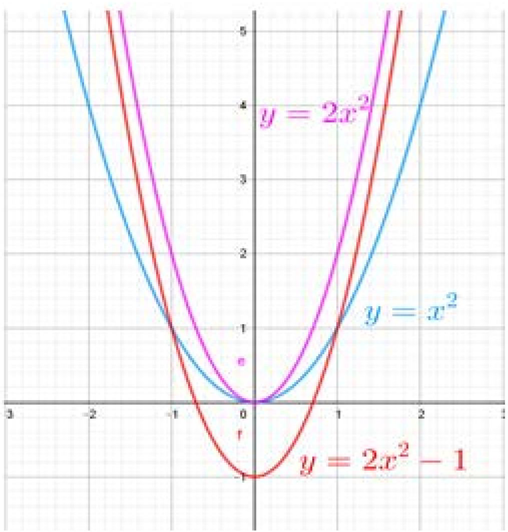
$y = -|x + 2| - 1$

حل کاردرکلاس سوال ۲ صفحه ۷

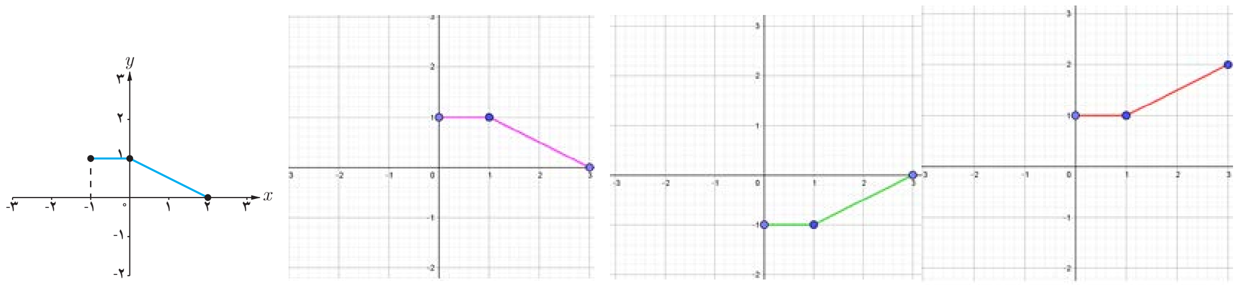
الف)



ب)



۳ نمودار تابع $y = f(x)$ در زیر رسم شده است. با انجام مراحل زیر، نمودار تابع $y = -f(x-۱) + ۲$ را رسم کنید.



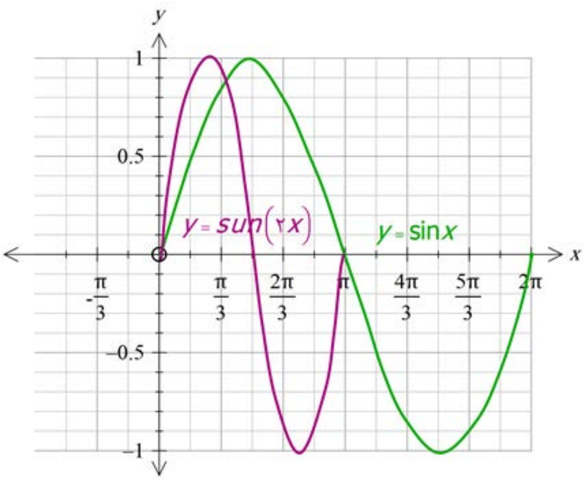
$y = f(x)$ $y = f(x-۱)$ $y = -f(x-۱)$ $y = -f(x-۱)+۲$

انبساط و انقباض افقی

فعالیت

در دستگاه زیر، نمودار تابع $y = \sin x$ در فاصله $[۰, ۲\pi]$ رسم شده است.

۱ با تکمیل جدول زیر، نقاطی از نمودار تابع $y = \sin ۲x$ مشخص می‌شود. با کمک این جدول نمودار این تابع را در فاصله $[۰, \pi]$ رسم کنید.



x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
$y = \sin ۲x$	۰	۱	۰	−۱	۰

۲ با مقایسه نمودارهای توابع $y = \sin x$ و $y = \sin ۲x$ ، چه تفاوتی بین آنها وجود دارد؟

نمودار $y = \sin ۲x$ روی محور طول ها فشرده شده است

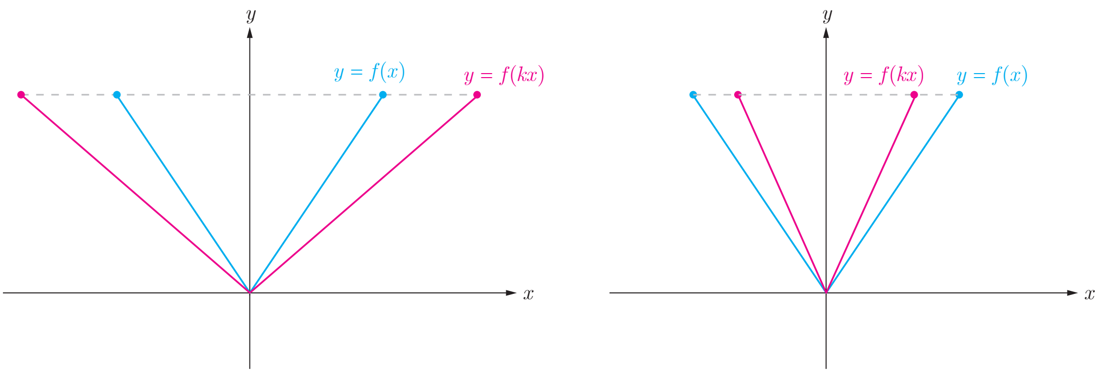
در حالت کلی اگر $(x_\circ , y_\circ)$ یک نقطه دلخواه از نمودارتابع $y = f(x)$ باشد و تابع g به صورت $g(x) = f(kx)$ تعریف شده باشد،

آنگاه :
$$g(\frac{x_\circ}{k}) = f(k\frac{x_\circ}{k}) = f(x_\circ) = y_\circ$$

بنابراین نقطه $(\frac{x_\circ}{k}, y_\circ)$ یک نقطه از نمودار تابع و متناظر با نقطه $(x_\circ , y_\circ)$ از نمودار تابع f است.

برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$، کافی‌است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

در شکل های زیر، نمودارتابع $y = f(kx)$ برای دو حالت $k > 1$ و $0 < k < 1$ رسم شده است.



الف) $k > 1$ ب) $0 < k < 1$

اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از **انقباض افقی** نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از **انبساط افقی** نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.

اگر طول نقاط تابع $y = f(x)$ را قرینه کنیم، نقاط تابع $y = f(-x)$ به‌دست می‌آیند. بنابراین نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

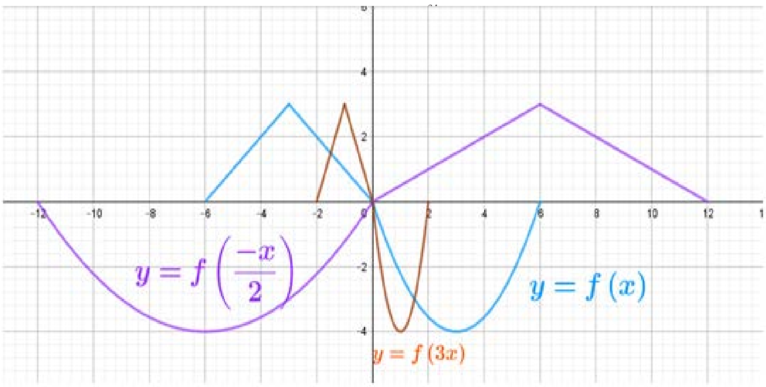
کار در کلاس

۱ اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، دامنه و برد تابع $y=f(kx)$ را برای $k>0$ و $k<0$ تعیین کنید.

$k>0 \quad D_{f(kx)}=\left[\frac{a}{k},\frac{b}{k}\right] \quad R_{f(kx)}=[c,d]$

$k<0 \quad D_{f(kx)}=\left[\frac{b}{k},\frac{a}{k}\right] \quad R_{f(kx)}=[c,d]$

۲ اگر نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد، نمودارتوابع $y=f(3x)$ و $y=f(-\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

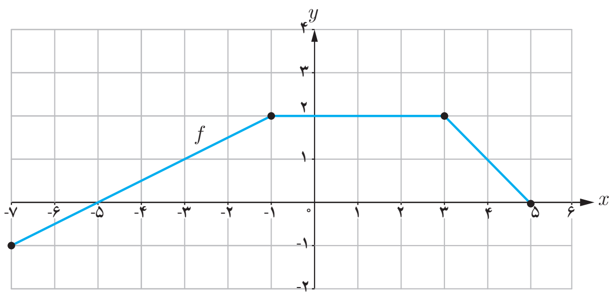


۳ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.

الف) $y=\cos 2x-1$

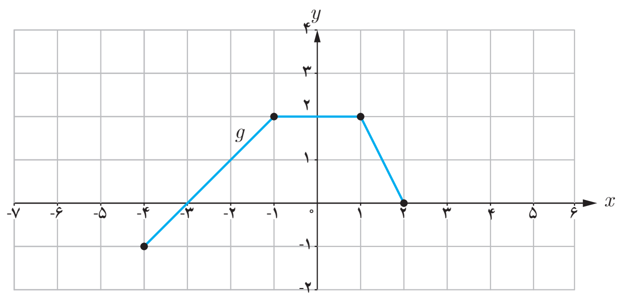
ب) $y=2\cos(\frac{x}{3})$

مثال : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودارتابع $g(x)=f(2x+1)$ را به کمک آن رسم می‌کنیم.



اگر $A=(x_0,y_0)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه متناظر آن روی نمودار تابع g $A'=\left(\frac{x_0-1}{2},y_0\right)$ است، زیرا[1] :

$$g\left(\frac{x_0-1}{2}\right)=f\left(2\left(\frac{x_0-1}{2}\right)+1\right)=f(x_0-1+1)=f(x_0)=y_0$$

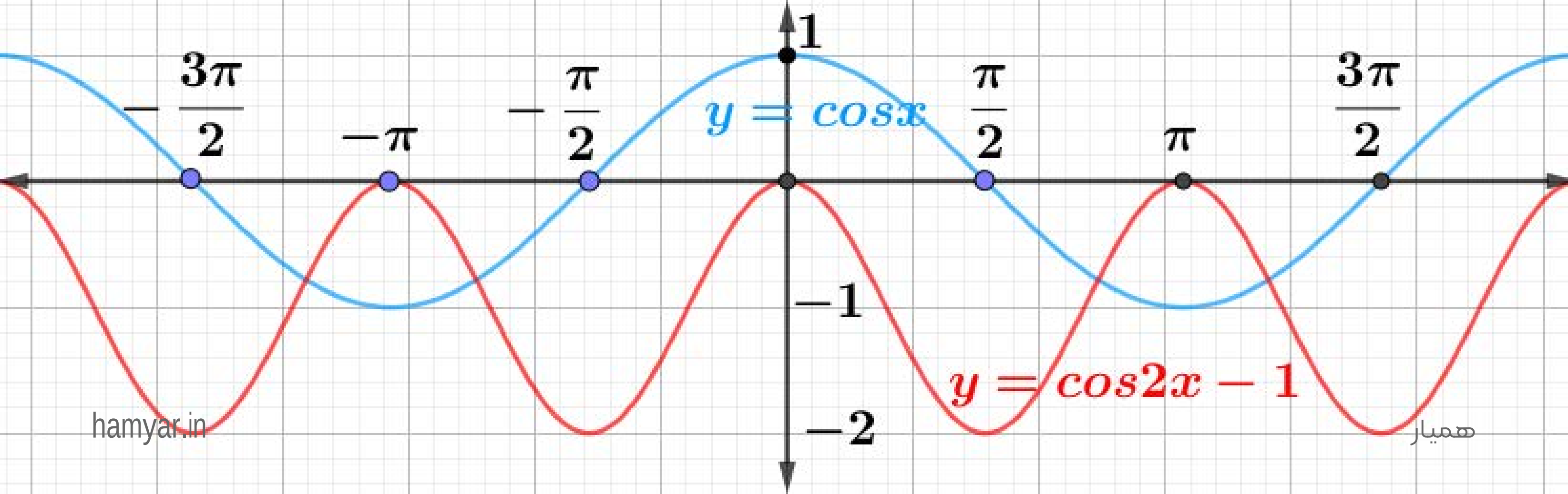


بنابراین نقاط مشخص شده در نمودار f را یک واحد به سمت چپ منتقل کرده و سپس طول آنها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا نقاط متناظر از g به دست آیند.

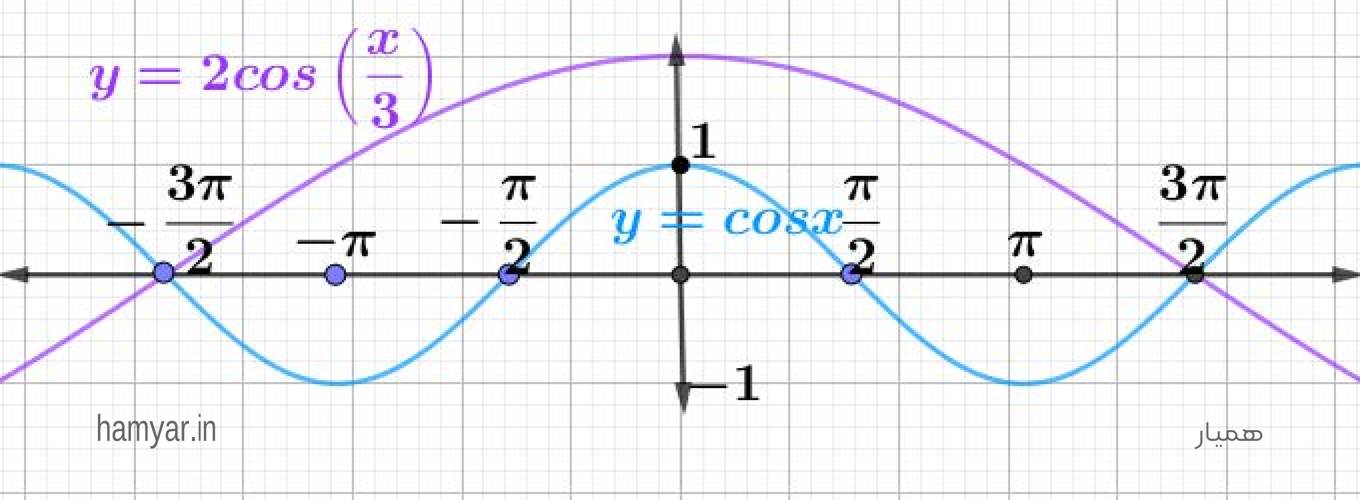
با توجه به اینکه $\frac{x_0-1}{2}=\frac{x_0}{2}-\frac{1}{2}$، آیا می‌توانید روشی دیگر برای رسم نمودار تابع g پیشنهاد کنید؟

آیا می‌توان برای رسم نمودار تابع g، ابتدا نمودار تابع $y=f(2x)$ را رسم کرد و سپس آن را یک واحد به چپ منتقل کرد تا $g(x)=f(2x+1)$ رسم شود؟ چرا؟

۱ــ برای یافتن طول نقطه A'، از معکوس تابع $y=2x+1$ استفاده می‌کنیم.



1
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$y = cosx$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
-1
-2
$y = cos2x - 1$
hamyar.in
همیار



$y = 2cos\left(\frac{x}{3}\right)$
$y = cosx$
1
-1
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
hamyar.in
همیار

تمرین

۱ هر یک از توابع زیر، تبدیل یافته تابع $y=\sqrt{x}$ هستند. هر یک از آنها را به نمودارش نظیر کنید.

الف) $y=\sqrt{۲+x}$ a

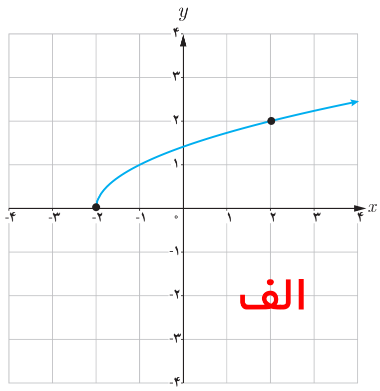
ب) $y=۲+\sqrt{x}$ d

پ) $y=-۲\sqrt{x}$ e

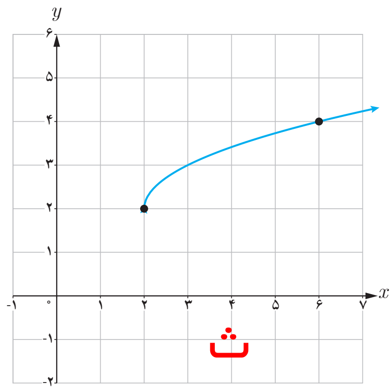
ت) $y=\sqrt{\frac{x}{۲}}$ c

ث) $y=۲+\sqrt{x-۲}$ b

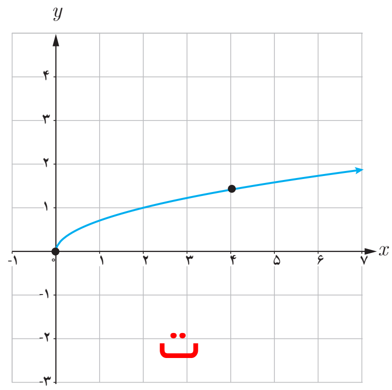
ج) $y=\sqrt{-۲x}$ f



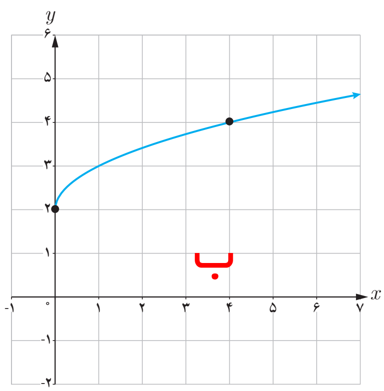
(a)



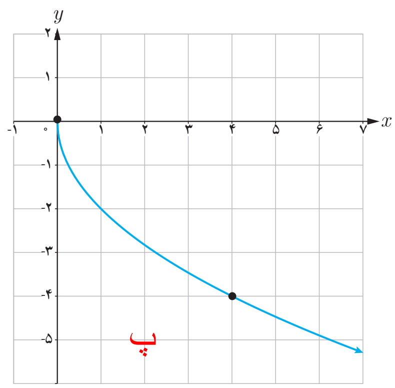
(b)



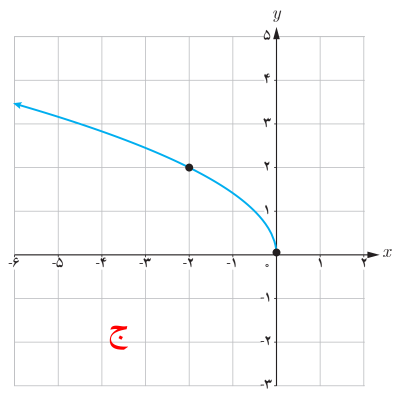
(c)



(d)

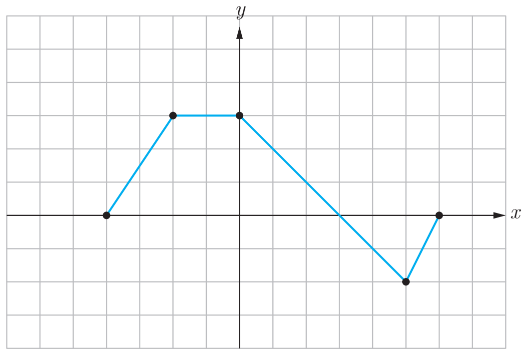


(e)



(f)

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(-x)$

ب) $y = ۲f(x-۱)$

پ) $y = -f(x) + ۲$

ت) $y = f(۲x-۱)$

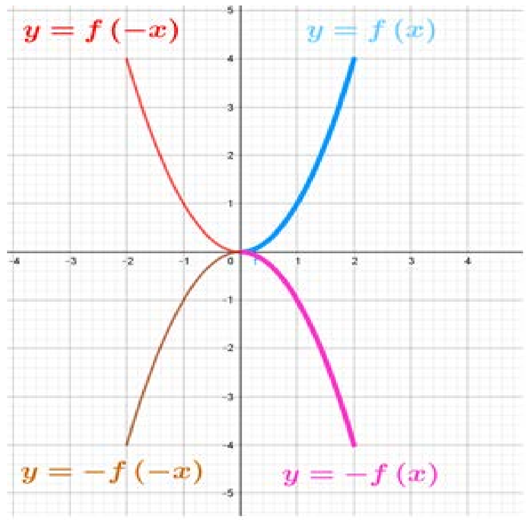
ث) $y = f(۳-x)$

۳ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار توابع زیر را رسم کنید و آنها را با نمودار f مقایسه کنید.

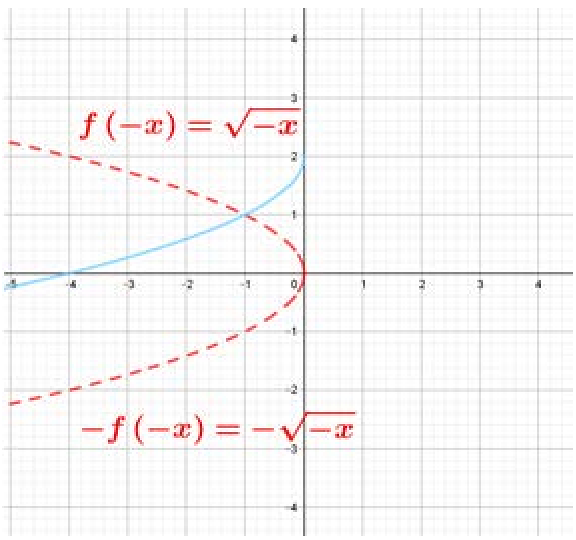
الف) $y = f(-x)$

ب) $y = -f(x)$

پ) $y = -f(-x)$

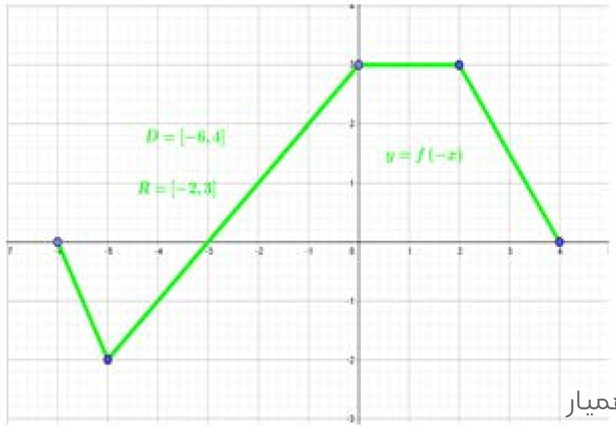


۴ نمودار تابع مقابل فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه این تابع را بنویسید.

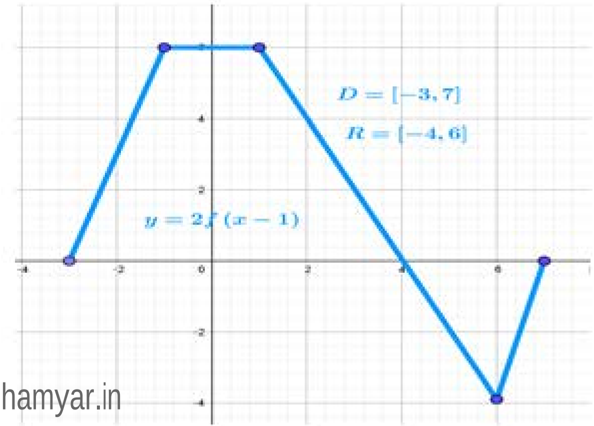


$$-f(-x) + ۲ = -\sqrt{-x} + ۲ \to y = ۲ - \sqrt{-x}$$

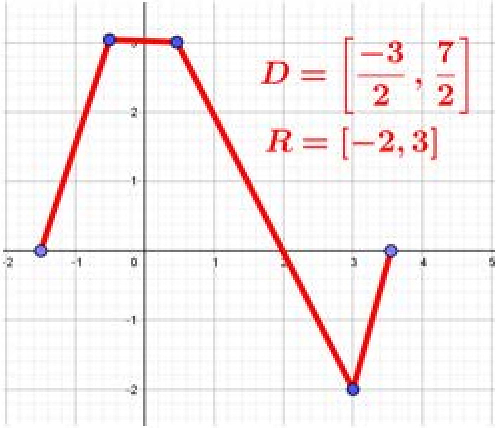
تمرین ۲: الف



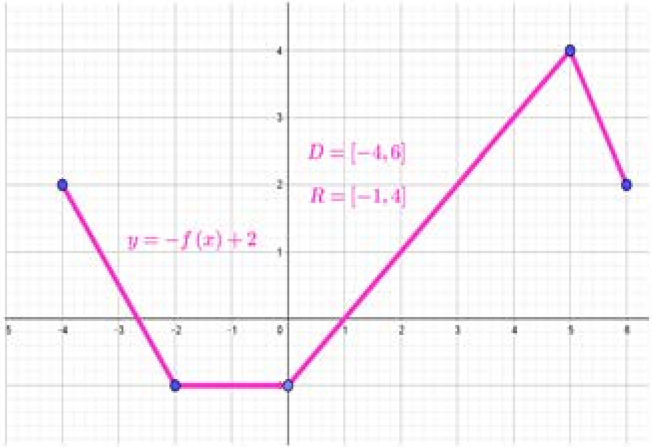
ب

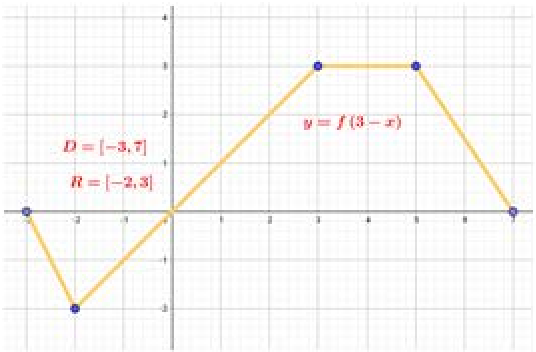


ت



پ





ث