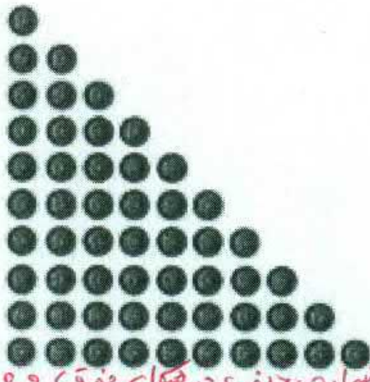
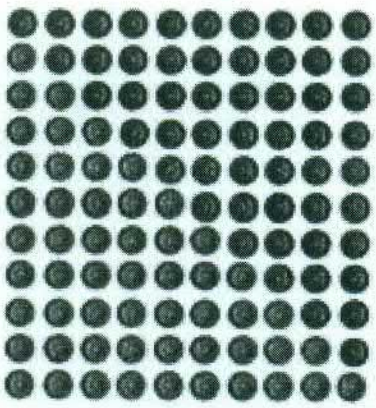
درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

فعالیت





تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.

در این شکل تعداد ردیف‌ها ۱۰ و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف برابر شماره ردیف در شکل فوق و ۱۰ در شکل پایین است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ۱۰۰ است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :

$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{2} = \frac{100}{2} = 55$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ابتدا اعداد طبیعی ۱ تا n را نوشته به ترتیب صعودی سپس n تا ۱ را زیر مجموع ۱ تا n قرار می‌دهیم طوری که مجموع هر دو عدد زیر هم $n+1$ می‌شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما n تا $n+1$ داریم پس $2S=n(n+1)$ می‌شود

$$1+2+3+.....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

مثال : روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

حل : نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$19+18+17+\ldots+2+1=\frac{19}{2}(1+19)=190$$

تذکر : این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+2d\,,\,\ldots\,,\;a+(n-2)d\;,\;a+(n-1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+(a+(n-2)d)+(a+(n-1)d)$$

۱ حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به‌دست آورید. نتیجه خواهید گرفت :

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S=a+(a+d)+\cdots+a+(n-1)d$$
$$S=a+(n-1)d+a+(n-2)d+\cdots+a$$
$$2S=\underbrace{(2a+(n-1)d)+(2a+(n-1)d)+\cdots+2a+(n-1)d}_{n \text{ تا}}$$
$$2S=n[2a+(n-1)d]$$

مثال : مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......, ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ را به‌دست آورید.

حل : جملهٔ اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{100}=\frac{100}{2}\left[(2\times 3)+(99\times 4)\right]=50\times 402=20100$$

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی‌که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : حل شد! معلم با تعجب گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. سپس گفت : اول چنین نوشتم :

$$1+2+3+\ldots+98+99+100$$

و بعد چنین :

$$100+99+98+97+\ldots+3+2+1$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم :

$$101+101+101+\ldots+101+101+101$$

بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ بدست آوردم که حاصل‌ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

کار در کلاس

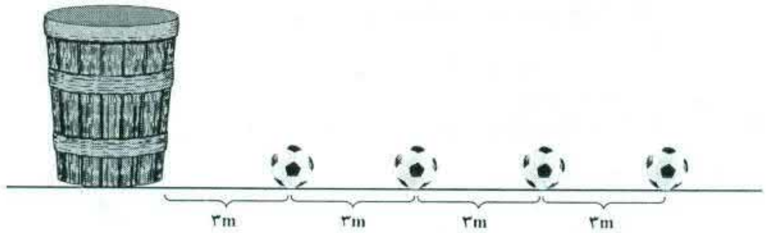
۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به‌ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + \underbrace{a + (n-1)d}_{a_n}] = \frac{n}{2}[a + a_n]$ بنابه صفحه قبل

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

$\underset{a}{12}, 16, 20, \ldots, \underset{a_n}{96}$ $\quad n = \frac{96-12}{4} = 22 \quad S_n = \frac{22 \times [12+96]}{2} = 1188$

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت ۶=۳+۳ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به‌دست آورید. $(a \neq 0)$

$a, a, a, \ldots, a$ $\quad q = 1 \quad S_n = na$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q \neq 1)$

$a, aq, aq^2, \ldots$

الف) جمله nام دنباله چیست؟ $a_n = aq^{n-1}$

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n= a + aq + aq^{۲}+\ldots+ aq^{n-۲}+aq^{n-۱}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_nq = aq + aq^{۲}+\ldots+ aq^{n-۱}+ aq^n$$

اگر S_n-S_nq را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم :

$$S_n =a\frac{۱-q^n}{۱-q}$$

کار در کلاس

مجموع ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\ldots$$

$S_{۱۰} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}}{۱-\frac{۱}{۲}} \simeq ۰/۲۴۹۷۵۵$

❖ **مثال** : برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته لایه‌های محافظی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هریک از آنها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

❖ **حل** : اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند ($\frac{۱}{۴}$) و... بدین ترتیب دنباله‌ای از اعداد به‌دست می‌آید :

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\ldots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. حال می‌خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

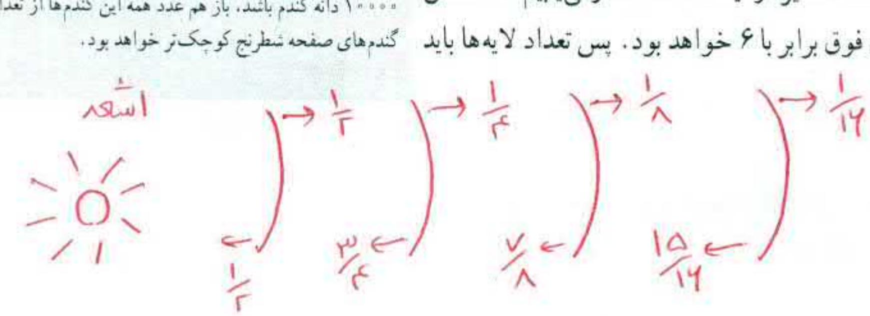
$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\ldots+\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}\Rightarrow ۱-\frac{۱}{۲^n}\geq\frac{۹۷}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{۲^n}\leq\frac{۳}{۱۰۰}\Rightarrow ۲^n\geq\frac{۱۰۰}{۳}$$ $\simeq ۳۳/۳$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $۶۴=۲^۶$ درمی‌یابیم که حداقل مقدار n برای برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه‌ها باید حداقل شش تا باشد.

روش تصویری



خواندنی

در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به‌دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد. شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد : برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $۲^{۶۴}-۱$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم. اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود در طول هر رودخانه ۱۰۰۰۰ قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل ۱۰۰۰۰ قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

سوال ۱ ←

$\frac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64}-1 = 18446744073709551615$

کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

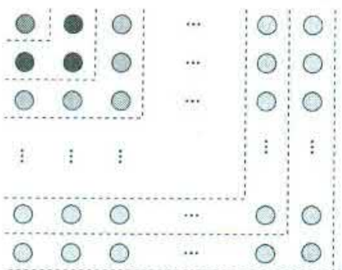
الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟[1] $(1+2+4+8+\cdots+2^{63})$ گرم

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم

$a=1 \quad q=2 \quad n=64 \quad S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \to 1\left(\frac{1-2^{64}}{1-2}\right) = S_{64}$

$S_{64} = 2^{64}-1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$

تمرین



۱ در دنباله حسابی ... , ۱۱ , ۸ , ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$a=5 \quad d=3 \quad S_n > 493 \quad \frac{n}{2}[10+3(n-1)] > 493 \quad 3n^2+7n-986>0$

$\Delta = 11881 \quad n_1 = \frac{-7+109}{6} \Rightarrow n \geq 17 \to n=18 \quad n_2 = \frac{-7-109}{6}$ غ ق ق

۲ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید. صفحه بعد

۳ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟ صفحه بعد

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید. صفحه بعد

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟ صفحه بعد

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟ صفحه بعد

۷ برای عدد حقیقی a $(a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$a^n-1 = (a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$

۱ــ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

سوال ۲ قسمت ب)

$۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=n^{۲}$

$a=۱ \quad d=۲ \quad n=n \qquad S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲+(n-۱)\times ۲\right]=\frac{n}{۲}\times ۲n=n^{۲}$

سوال ۳)

$۱۰۲, ۱۰۸, \dots, ۹۹۸ \qquad a=۱۰۲ \quad a_n=۹۹۶ \quad n=\frac{۹۹۶-۱۰۲}{۶}=۱۴۹+۱=۱۵۰$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]=\frac{۱۵۰}{۲}\left[۲\times ۱۰۲+(۱۵۰-۱)\times ۶\right]=۸۲۳۵۵$

سوال ۴)

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-۱)d\right]$

$۱۵۰+۱۳۵=\frac{۲۰}{۲}\left[۲a+۱۹d\right] \rightarrow \boxed{۲۸۵=۲۰a+۱۹۰d} \rightarrow ۴a+۳۸d=۵۷$

جملات فرد

$a+a+۲d+a+۴d+\dots+a+۱۸d=۱۳۵$

$\boxed{۱۰a+۹۰d=۱۳۵} \rightarrow ۲a+۱۸d=۲۷$

$\left\{\begin{array}{l}۴a+۳۸d=۵۷\\ ۲a+۱۸d=۲۷\end{array}\right. \xrightarrow{-۲} \left\{\begin{array}{l}\cancel{۴a}+۳۸d=۵۷\\ -\cancel{۴a}-۳۶d=-۵۴\end{array}\right.$

$۲d=۳ \qquad \underline{d=۱٫۵}$

$۲a+\underset{۲۷}{۱۸d}=۲۷ \qquad ۲a+۲۷=۲۷ \quad ۲a=۰ \qquad \underline{a=۰}$

سوال ۵)

$a_n=۲^{n-۱} \qquad ۱, ۲, ۴, ۸, \dots$

$S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right] \qquad S_n=۲۵۵ \qquad \left[\frac{۱-۲^n}{-۱}\right]=۲۵۵$

$۲^n-۱=۲۵۵ \qquad ۲^n=۲۵۶$

$۲^n=۲^۸$

$n=۸$

سوال ۶)

$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \dots \qquad S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right]$

$S_n>\frac{۹۹}{۱۰۰} \quad \cancel{\frac{۱}{۲}}\left[\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{\cancel{\frac{۱}{۲}}}\right]>\frac{۹۹}{۱۰۰} \qquad ۱-(\frac{۱}{۲})^n>\frac{۹۹}{۱۰۰}$

$(\frac{۱}{۲})^n<\frac{۱}{۱۰۰} \rightarrow ۲^n>۱۰۰ \quad n_{\text{حداقل}}=۷$

سوال ۷)

$۱+a+a^{۲}+\dots+a^{n-۱}= \qquad a=۱ \quad q=a \quad n=n \qquad S_n=a\left[\frac{۱-q^n}{۱-q}\right]$

$S_n=۱\left[\frac{۱-a^n}{۱-a}\right] \rightarrow ۱+a+a^{۲}+\dots+a^{n-۱}=\frac{۱-a^n}{۱-a}$

$\rightarrow ۱-a^n=(۱-a)(۱+a+a^{۲}+\dots+a^{n-۱})$