

درس اول

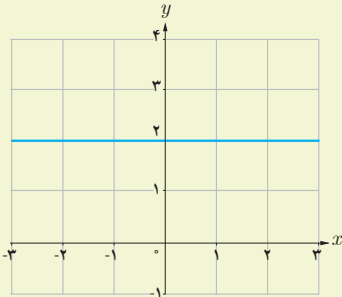
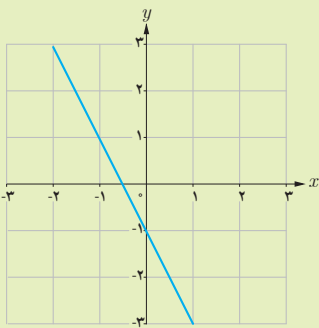
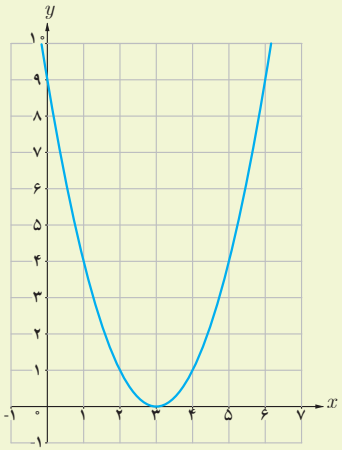
توابع چند جمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

توابع چند جمله‌ای:

در سال‌های گذشته با تابع خطی آشنا شدیم. هر تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a = 0$ ، تابع به صورت $f(x) = b$ در می‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامیم. توابع ثابت و توابع خطی، مثال‌هایی از توابع چند جمله‌ای با درجه‌های ۰ و ۱ هستند. هر تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ را که در آن $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ اعداد حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq 0$ باشد، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است. مثال: توابع زیر نمونه‌ای از توابع چند جمله‌ای به ترتیب از درجه ۱، ۲، ۳ و ۵ هستند.

$$y = 3x + 5, \quad y = -8x^2 + 2x - \frac{1}{4}, \quad y = \sqrt{2}x^3 - \frac{3}{4}x, \quad y = 2x^5 - 4x^3 + \sqrt{5}x^2$$

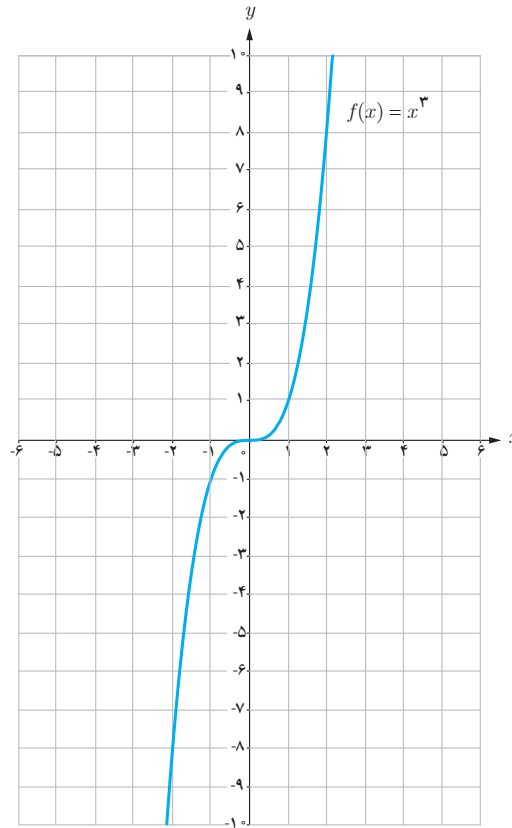
انواع توابع چند جمله‌ای که تا به حال با آنها آشنا شده‌ایم به صورت زیر است:

درجه تابع	۰	۱	۲
نام تابع	ثابت	خطی	درجه دوم
ضابطه کلی	$f(x) = b$	$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)	$f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)
مثال	$f(x) = 2$ 	$f(x) = -2x - 1$ 	$f(x) = x^2 - 6x + 9$ 

تابع درجه ۳:

تابع چند جمله‌ای با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) یک تابع درجه ۳ است که در اینجا به طور خاص تابع $f(x) = x^3$ را بررسی می‌کنیم. دامنه و برد این تابع \mathbb{R} است. ابتدا به کمک نقطه‌یابی نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

x	$f(x) = x^3$
-۲	-۸
-۱	-۱
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
۰	۰
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
۱	۱
۲	۸



خواندنی

الگوی کلی لانه زنبور عسل به صورت یک شش ضلعی است که در دور اول با شش تا شش ضلعی دیگر احاطه شده است، در دور دوم با دوازده تا شش ضلعی احاطه می‌شود و به همین ترتیب در دورهای دیگر تعداد شش ضلعی‌ها با الگوی خاصی افزایش می‌یابد.

تعداد کل این شش ضلعی‌ها را می‌توان با تابع درجه دوم $f(r) = 3r^2 - 3r + 1$ به دست آورد که r تعداد دورهاست. آیا می‌توانید تعداد کل شش ضلعی‌ها را برای $r = 1, 2, 3$ به دست آورید؟

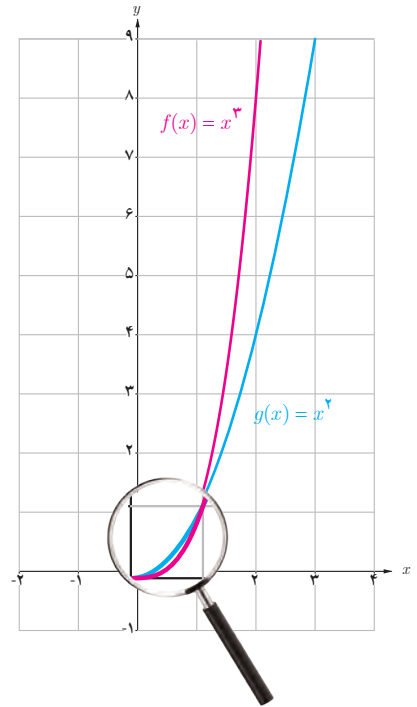
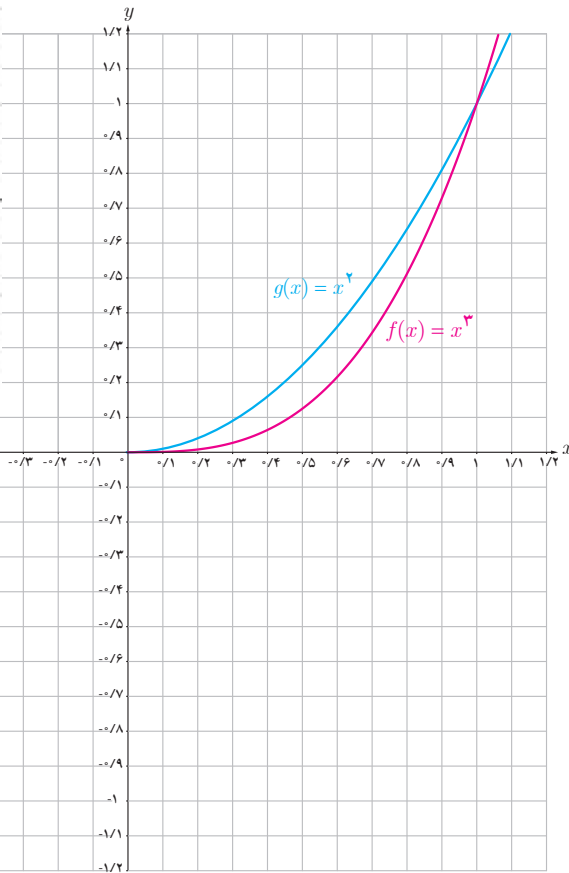
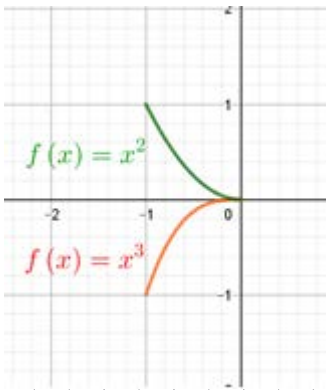
الف: خیر، برای مقادیر بین صفر و یک نمودار x^3 پایین نمودار x^2 قرار دارد



فعالیت

با توجه به نمودار توابع $f(x) = x^3$ و $g(x) = x^2$ که برای اعداد نامنفی رسم شده اند:

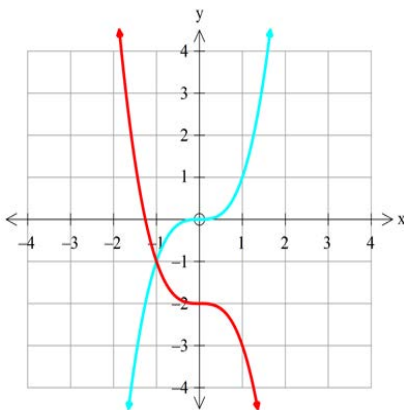
الف) آیا برای تمام x های نامنفی، نمودار $f(x) = x^3$ بالای نمودار $g(x) = x^2$ قرار دارد؟ (ب) نمودار این دو تابع را در بازه $[-1, 0]$ رسم کنید.



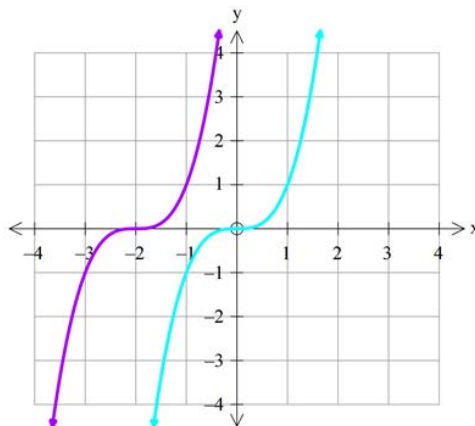
فعالیت

با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^3$ ، نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آنها را مشخص کنید.

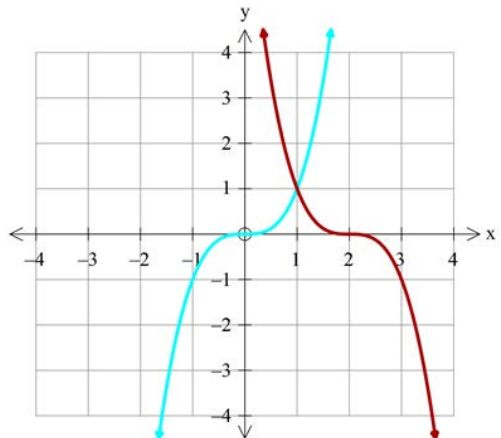
الف) $y = -x^3 - 2$



ب) $y = (x + 2)^3$



پ) $y = -(x - 2)^3$



به کمک نمودار تابع $y = x^3$ ، ضابطه هر تابع را به نمودار آن نظیر کنید.

الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ۶

ب) $y = (x-2)^3$ ۹

پ) $y = -x^3 + 1$ ۸

ت) $y = (x+1)^3 - 1$ ۷

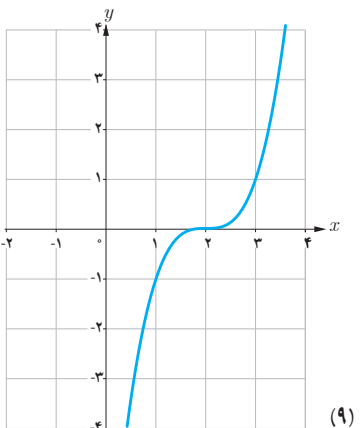
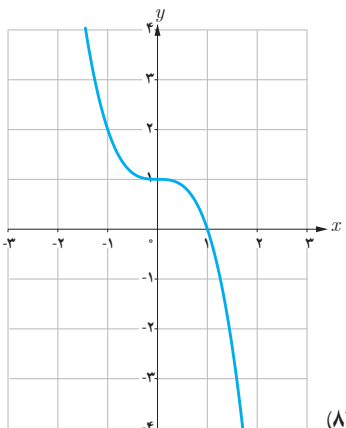
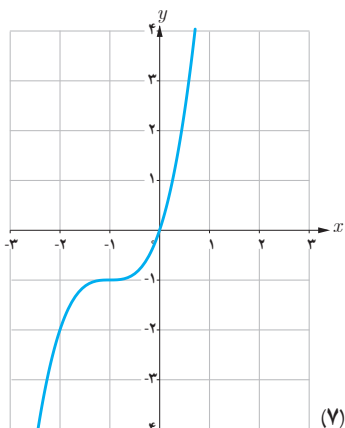
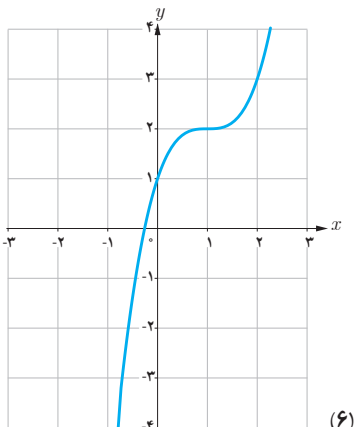
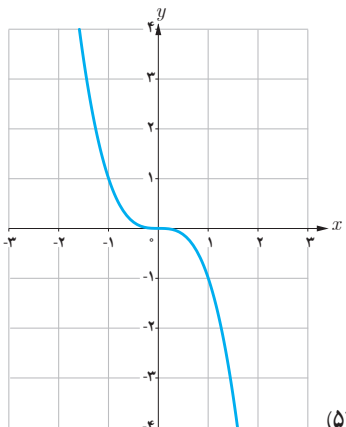
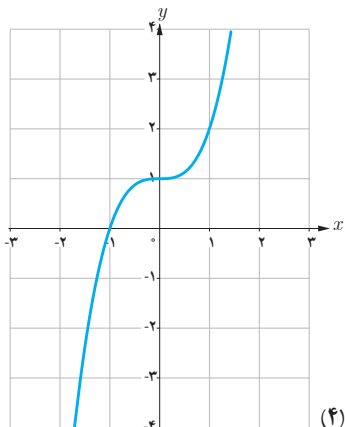
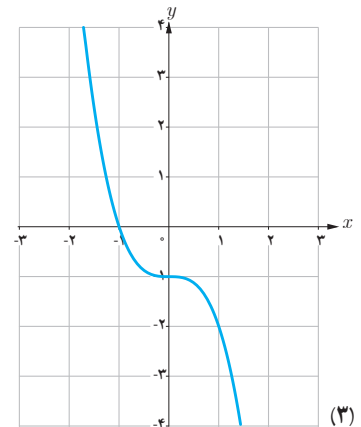
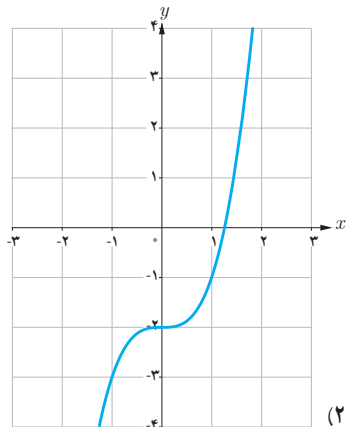
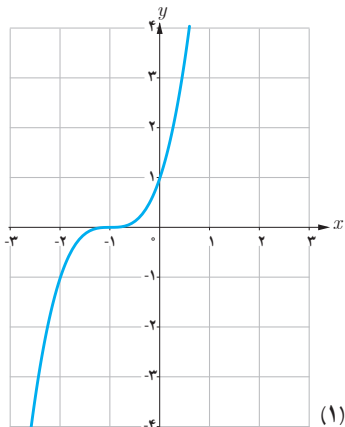
ث) $y = -x^3$ ۵

ج) $y = (x+1)^3$ ۱

ج) $y = x^3 + 1$ ۴

ح) $y = -x^3 - 1$ ۳

خ) $y = x^3 - 2$ ۲



توابع صعودی و توابع نزولی:

فعالیت

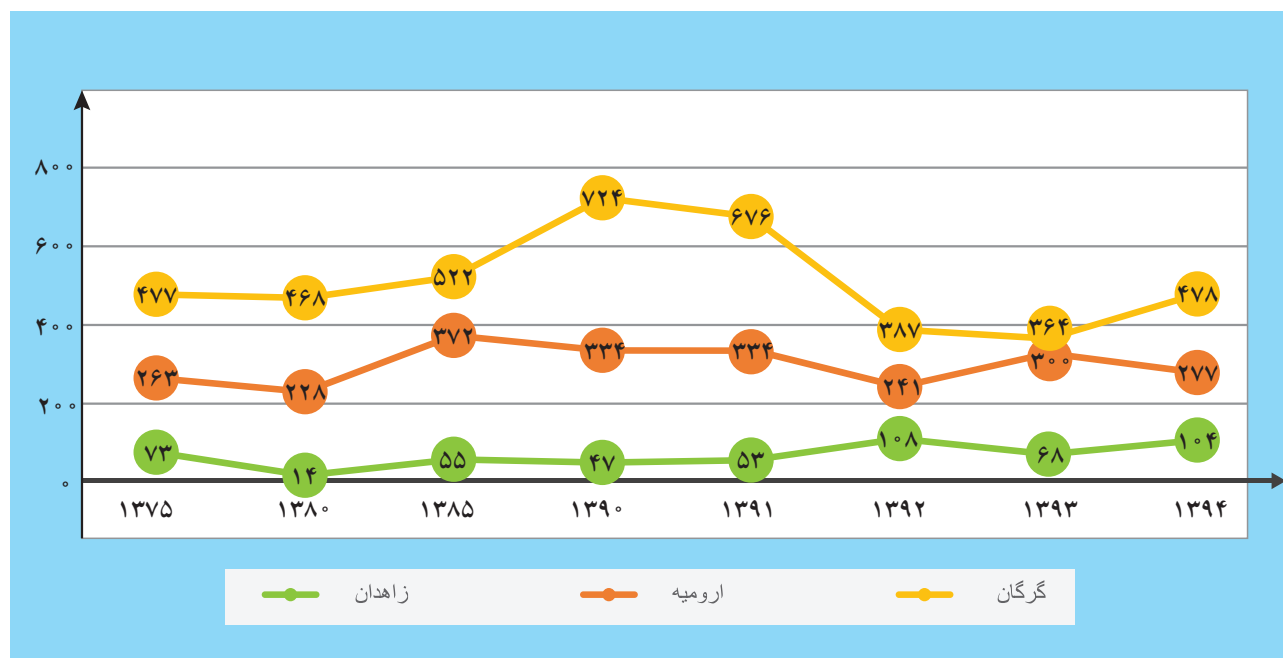
یکی از دغدغه‌های این روزها بحث کاهش بارندگی در کشورمان است که خسارات بسیاری را به بار می‌آورد. در نمودار زیر میزان بارندگی سالانه سه شهر گرگان، زاهدان و ارومیه از سال ۱۳۷۵ تا سال ۱۳۹۴ (برحسب میلی‌متر) آورده شده است. به طور مثال در شهر ارومیه در سال ۸۵، میزان بارندگی ۳۷۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۳۳۴ میلی‌متر بوده است که روند نزولی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. همچنین در شهر گرگان در سال ۸۵، میزان بارندگی ۵۲۲ میلی‌متر و در سال ۹۰، ۷۲۴ میلی‌متر بوده است که روند صعودی بارندگی را در این شهر نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار به سؤال‌های زیر پاسخ دهید:

الف) از سال ۷۵ تا ۹۱، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر گرگان روند صعودی داشته است؟

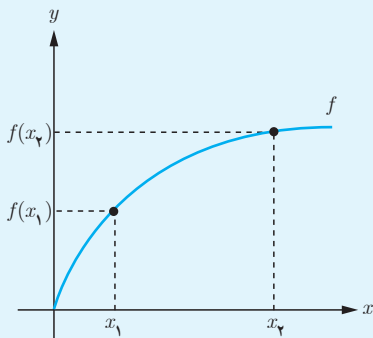
از سال ۱۳۸۰ تا سال ۱۳۹۰

ب) از سال ۹۱ تا ۹۴، در چه فاصله‌های زمانی، میزان بارندگی در شهر ارومیه روند نزولی داشته است؟

در بازه زمانی ۹۱ تا ۹۲ و بازه زمانی ۹۳ تا ۹۴

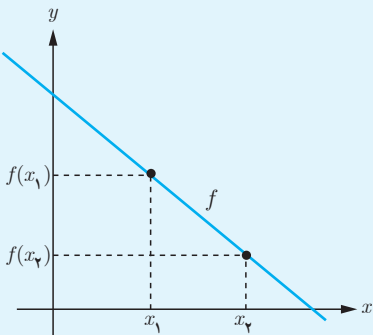


میزان بارندگی سالانه شهرهای گرگان، زاهدان و ارومیه (میلی‌متر)^۱



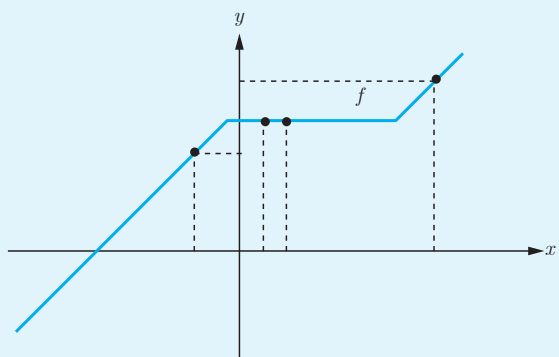
تابع اکیداً صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



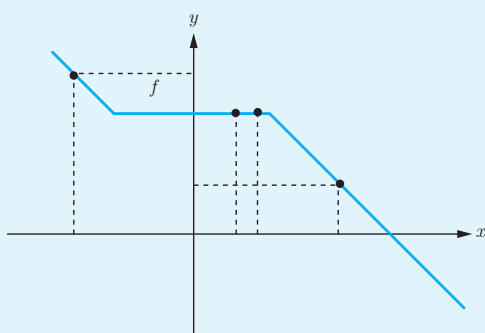
تابع اکیداً نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع صعودی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

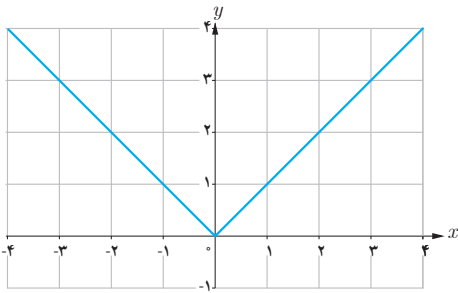


تابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ ، داشته باشیم $f(x_1) \geq f(x_2)$ ، آنگاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.

تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته: به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوئیم. همچنین به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، تابع یکنوا گوئیم. توابع اکیداً یکنوا همواره یکنوا هستند. آیا عکس این مطلب صحیح است؟ توضیح دهید.



ممکن است تابعی در یک بازه صعودی (اکیداً صعودی) و در بازه دیگر نزولی (اکیداً نزولی) باشد.

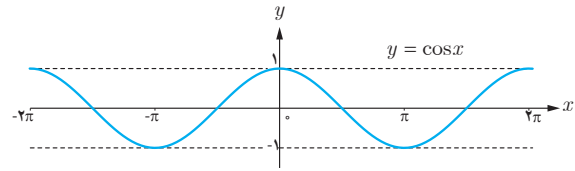
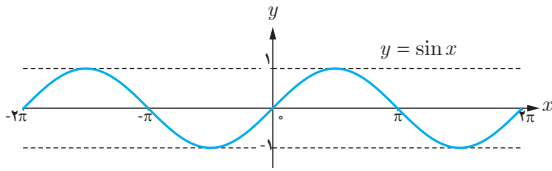
مثال: تابع $f(x) = |x|$ در بازه $(-\infty, 0)$ اکیداً نزولی و در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است، اما در \mathbb{R} نه صعودی است نه نزولی.

کار در کلاس

هر کدام از توابع زیر در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

<p>اکیداً صعودی $x \in (-\infty, 2]$</p> <p>اکیداً صعودی $x \in [2, +\infty)$</p>	<p>(الف)</p>	<p>اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$</p>	<p>اکیداً نزولی $\rightarrow (-\infty, 0]$</p> <p>اکیداً صعودی $\rightarrow [0, +\infty)$</p>	<p>(پ)</p>
<p>اکیداً صعودی $(-\infty, +\infty)$</p>	<p>(ت)</p>	<p>اکیداً صعودی $(0, +\infty)$</p>	<p>اکیداً نزولی (نزولی) $(-\infty, 0)$</p> <p>اکیداً نزولی (نزولی) $(0, +\infty)$</p>	<p>(ج)</p>
<p>اکیداً صعودی $(-\infty, 0]$</p> <p>اکیداً نزولی $[0, +\infty)$</p>	<p>(ح)</p> <p>$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$</p> <p>$x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$</p> <p>$x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$</p>	<p>اکیداً صعودی</p> <p>اکیداً نزولی</p> <p>اکیداً نزولی</p>	<p>اکیداً صعودی $(-2, +\infty)$</p>	<p>(ز)</p>

نمودار توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ رسم شده است. صعودی یا نزولی بودن آنها را در بازه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

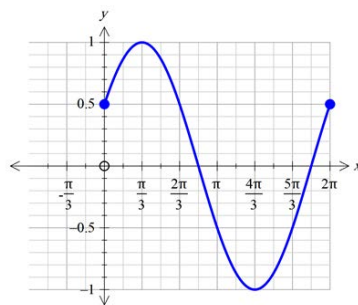


x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \sin x$	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی

x	$[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}]$	$[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$	$[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$	$[-\frac{\pi}{2}, 0]$	$[0, \frac{\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$[\pi, \frac{3\pi}{2}]$	$[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
$y = \cos x$	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی	نزولی	نزولی	صعودی	صعودی

نمودار توابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$



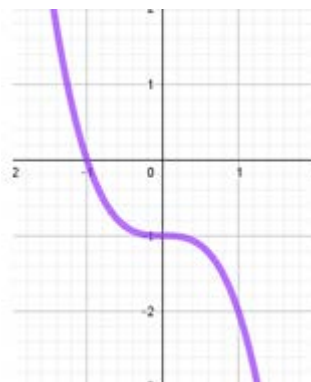
در بازه‌های $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ صعودی و در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$ نزولی

ب) $g(x) = x + |x|$



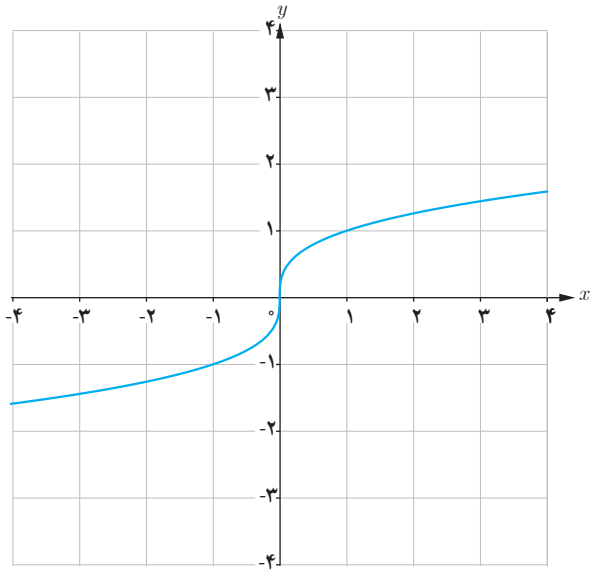
در \mathbb{R} صعودی
ب: در $\mathbb{R} \geq 0$ اکیداً صعودی
در $\mathbb{R} \leq 0$ ثابت

پ) $t(x) = -x^2 - 1$



اکیداً نزولی

فعالیت



الف) این تابع اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟ **اکیداً صعودی**

ب) این تابع یک به یک است؟ **بله**

پ) آیا تابعی جواد درد کا هکیده صعودی یا اکیداً نزولی باشد ولی

کمی به نباشد؟

خیر، طبق تعریف دو ایکس متمایز دارای تصاویر متمایز هستند پس یک به یک می باشند

تمرین

۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را مشخص نمایید.

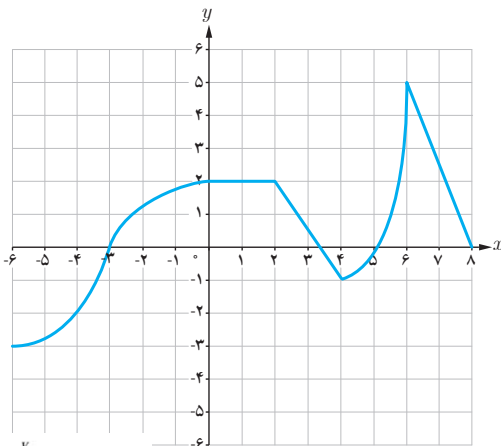
الف) $y = (x-1)^3 - 1$

ب) $y = (x+2)^3 - 2$

۲ نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه‌هایی را که در آنها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است، مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < -4 \\ 3 & -4 \leq x < 2 \\ 3x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

۳ با استفاده از نمودار تابع زیر مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است؟



$x \in [-6, 0]$ صعودی اکید

$x \in [-6, 2]$ صعودی

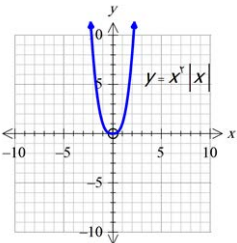
$x \in [0, 2]$ ثابت

$x \in [0, 4]$ نزولی

$x \in [2, 4]$ نزولی اکید

$x \in [4, 6]$ صعودی اکید

$x \in [6, 8]$ نزولی اکید



۴ تابع نمایشی $y = 2^x - 2$ و تابع لگاریتمی $y = -\log_2 x + 2$ را رسم کنید و در مورد یکنوایی آنها در کلاس بحث کنید.

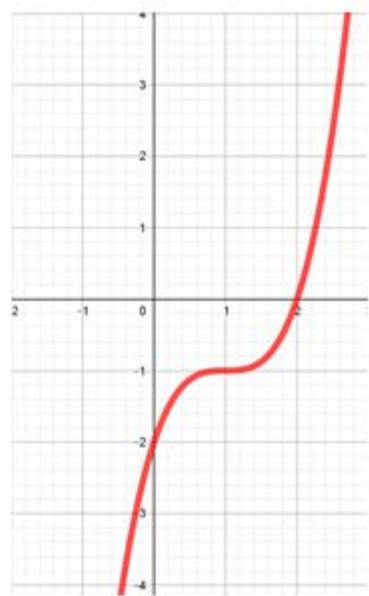
۵ تابع $y = x^a |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a چقدر است؟ **صفر**

۶ تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً صعودی و تابعی مثال بزنید که در دامنه خود اکیداً نزولی باشد.

$\begin{cases} y = 3^x \\ y = x^3 \end{cases}$ اکیداً صعودی

$\begin{cases} y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \\ y = -x^3 \end{cases}$ اکیداً نزولی

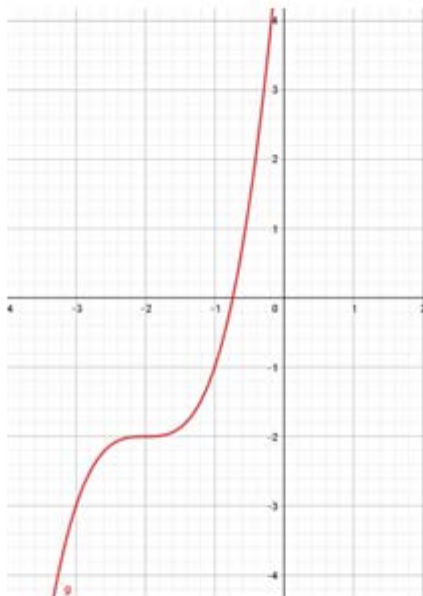
تمرین ۱: الف



$$D_f = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

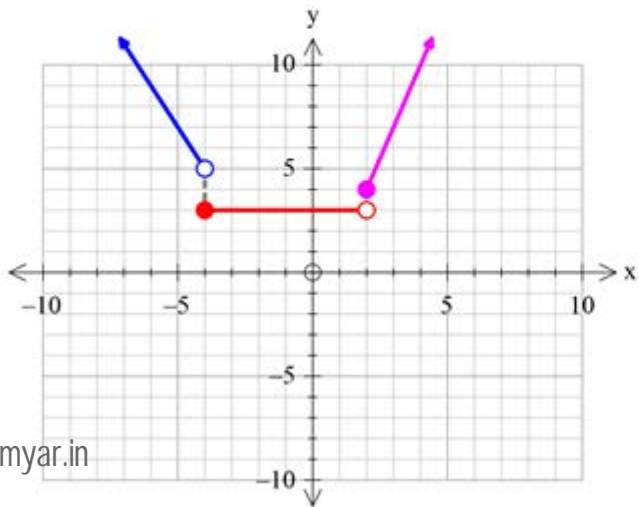
ب



$$D_f = (-\infty, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, +\infty)$$

تمرین ۲:



$x \in [2, +\infty)$ اکیداً صعودی

$x \in (-\infty, -4)$ اکیداً نزولی

$x \in [-4, 2)$ ثابت

تمرین ۴:

