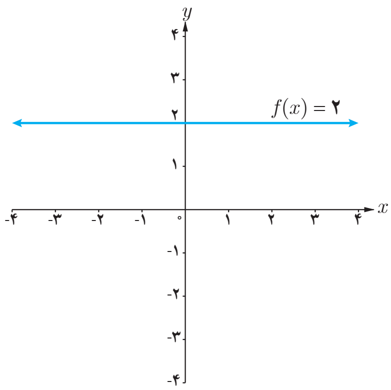
درس ۲
تابع درجه سوم، توابع یکنوا و بخش‌پذیری و تقسیم

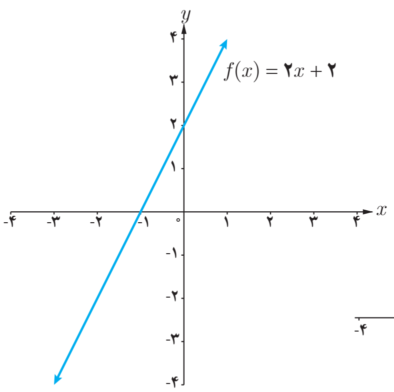
فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و a_0، a_1، a_2، ...، a_{n-1} و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. تابع $f(x)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، **تابع چند جمله‌ای از درجه** n نامیده می‌شود.[1]

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

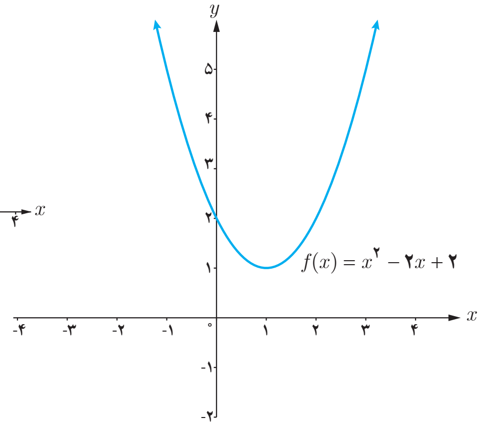
تابع ثابت $f(x) = c$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه صفر و تابع خطی $f(x) = mx + b$ که $m \neq 0$، یک تابع چند جمله‌ای از درجه یک است. به همین ترتیب یک سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه دو است.



تابع درجه صفر



تابع درجه یک



تابع درجه دو

کار در کلاس

در زیر چند تابع چند جمله‌ای نوشته شده‌اند. درجه هر کدام را مشخص کنید.

درجه چهار — $n(x) = 2x - x^4$ ، درجه سه — $h(x) = x^3 + x - 4$ ، درجه یک — $f(x) = 2x - 3$

درجه پنج — $p(x) = x^2(1-x)^3$ ، درجه صفر — $m(x) = 5$ ، درجه دو — $g(x) = (x-1)^2 + 3$

۱ــ برای $f(x)=0$، درجه تعریف نمی‌شود.

فعالیت

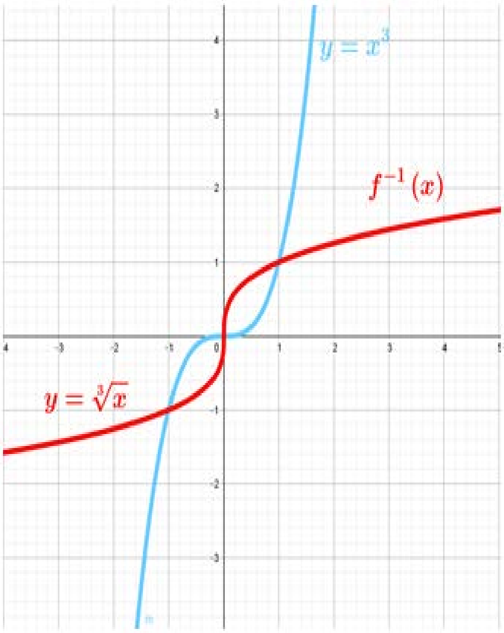
یکی از توابع چند جمله‌ای درجه سه، تابع $f(x) = x^{۳}$ است.

۱ با تکمیل جدول مقابل، نمودار تابع $f(x) = x^{۳}$ را رسم کنید.

۲ به کمک نمودار رسم شده برای تابع $f(x) = x^{۳}$، نشان دهید که این تابع وارون‌پذیر است.

۳ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و ضابطه $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

x	$y = x^{۳}$
-۲	$(-۲)^{۳} = -۸$
-۱	$(-۱)^{۳} = -۱$
$-\frac{۱}{۲}$	$(-\frac{۱}{۲})^{۳} = -\frac{۱}{۸}$
۰	۰
$\frac{۱}{۲}$	$(\frac{۱}{۲})^{۳} = \frac{۱}{۸}$
۱	۱
۲	$۲^{۳} = ۸$



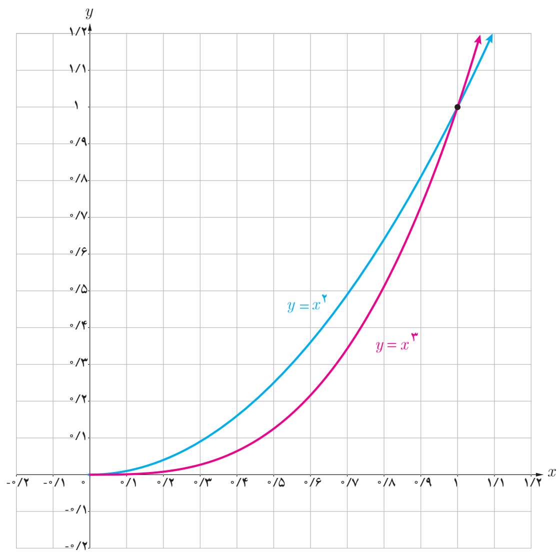
کار در کلاس

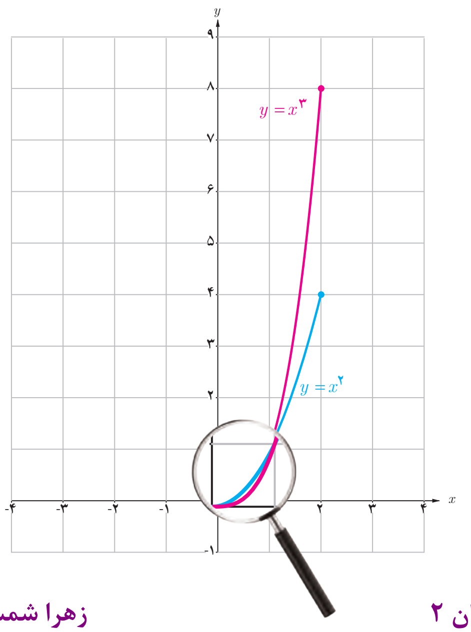
۱ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = x^{۳}$ رسم کنید.

الف) $y = (x+۱)^{۳}$ ب) $y = -x^{۳}+۱$ پ) $y = x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$

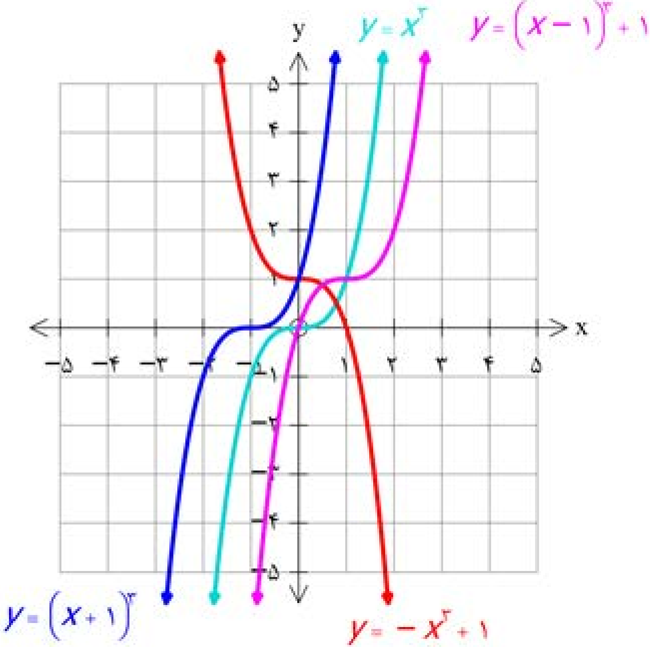
۲ نمودار هر یک از توابع $y = x^{۲}$ و $y = x^{۳}$ در فاصله $[۰,۲]$ رسم شده است.

در فاصله $[۰,۱]$، نمودار کدام تابع پایین‌تر و نمودار کدام تابع بالاتر است؟ در فاصله $[۱,۲]$ چطور؟

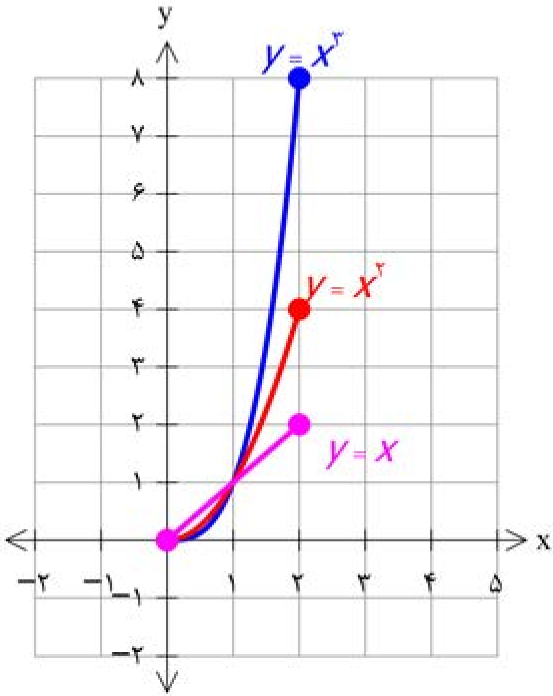




کار در کلاس ۱:



کار در کلاس ۲:



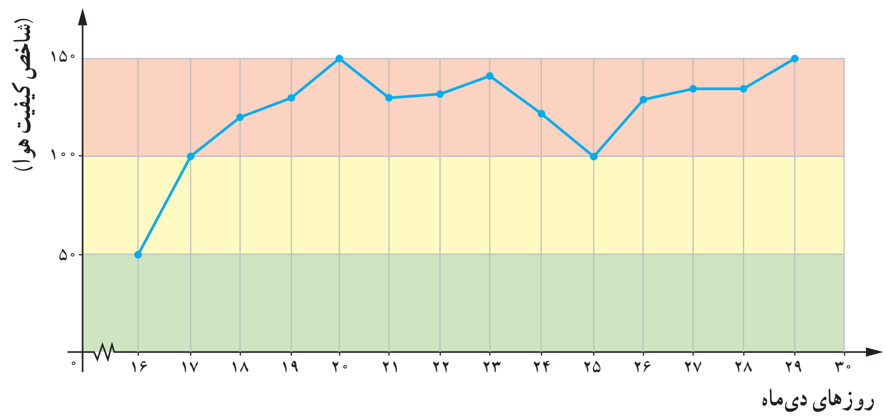
$$0 \le x \le 1 \rightarrow x^3 < x^2 < x$$

$$1 \le x \le 2 \rightarrow x < x^2 < x^3$$

توابع صعودی و توابع نزولی

فعالیت

تنفس هوای پاک در شهرهای صنعتی یکی از آرزوهای ساکنین این شهرهاست. براساس شاخص کیفیت هوا (AQI)، کیفیت هوای یک منطقه، یکی از وضعیت‌های پاک، سالم، ناسالم برای گروه‌های حساس، ناسالم، بسیار ناسالم و خطرناک می‌باشد. نمودار زیر، میانگین شاخص کیفیت هوا در ۱۵ روز پایانی دی ماه سال ۱۳۹۵ در شهر تهران را نشان می‌دهد.



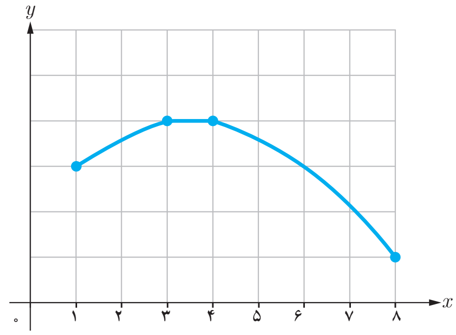
الف) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه افزایش بوده است؟ [۱۶,۲۰] ∪ [۲۱,۲۳] ∪ [۲۵,۲۷] ∪ [۲۸,۲۹]

ب) شاخص کیفیت هوا در چه فاصله‌های زمانی روبه کاهش بوده است؟ [۲۳,۲۵] ∪ [۲۰,۲۱] نزولی

پ) این شاخص در چه فاصله زمانی ثابت بوده است؟ [۲۷,۲۸]

دامنهٔ تابع f که در شکل مقابل دیده می‌شود، بازه [۱,۸] است. در بازه [۱,۳]، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع روبه بالا می‌رود. به همین خاطر به تابع f در بازه [۱,۳] صعودی می‌گوییم. در بازه [۳,۴] مقدار تابع ثابت است.

در ادامه و در بازه [۴,۸]، هم‌زمان با افزایش x، نمودار تابع روبه پایین می‌رود و به همین منظور به تابع f در بازه [۴,۸] نزولی گفته می‌شود.

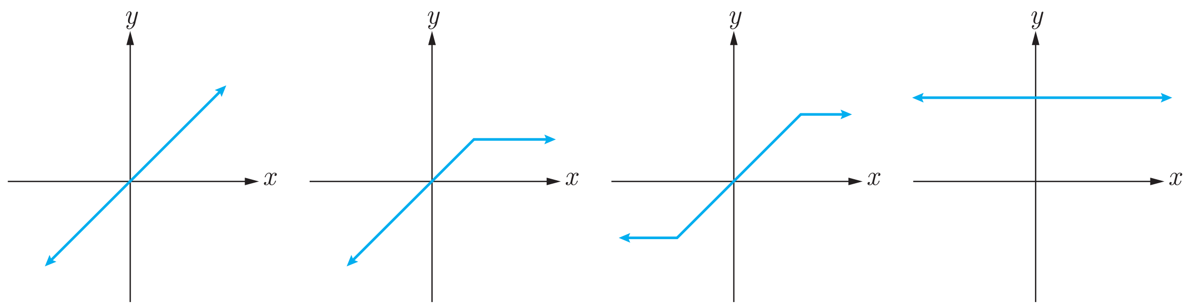


(غیر اکید) صعودی [۱,۴]

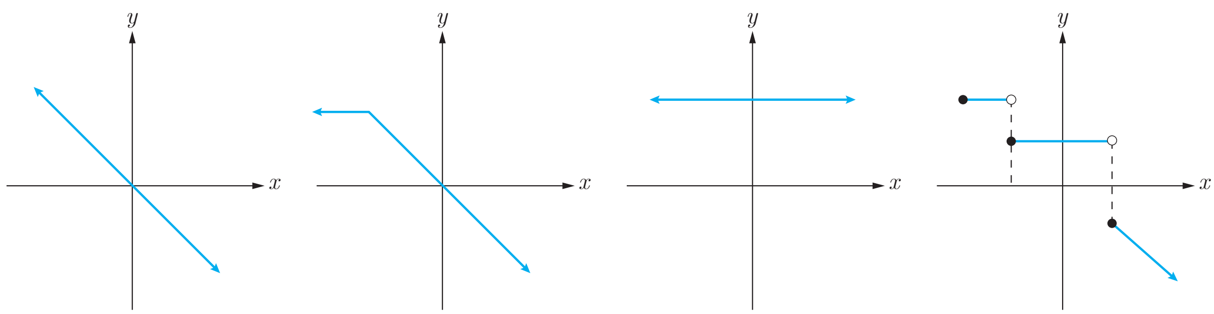
توابع صعودی و توابع نزولی

اگر برای هر دو نقطه a و b از دامنه تابع f که $a < b$، داشته باشیم $f(a) \leq f(b)$، آنگاه f را تابعی صعودی می‌نامیم. از آنجائی که معمولاً رفتار تابع را در بازه‌هایی از اعداد حقیقی بررسی می‌کنیم، بنابراین می‌توان گفت :

تابع f را در یک بازه، **صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \leq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه پایین نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع صعودی‌اند.



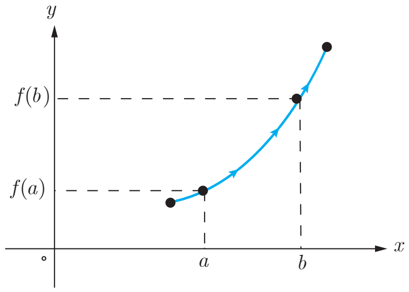
تابع f را در یک بازه، **نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) \geq f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، روبه بالا نخواهیم رفت. نمودارهای زیر همگی مربوط به توابع نزولی‌اند.



به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا فقط نزولی باشد، یکنوا می‌گوییم.

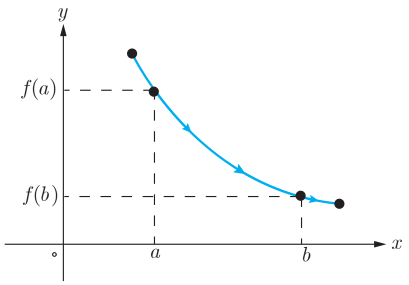
✤ تابع f را در یک بازه، **ثابت** می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه، مقدار $f(x)$ ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک‌بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

توابع اکیداً صعودی و توابع اکیداً نزولی



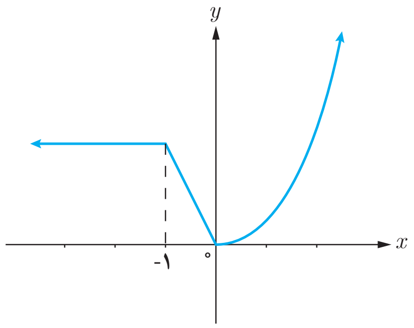
الف) تابع اکیداً صعودی

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً صعودی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) < f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً صعودی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه بالا خواهیم رفت. (شکل الف)



ب) تابع اکیداً نزولی

✤ تابع f را در یک بازه، **اکیداً نزولی** می‌گوییم، اگر برای هر دو مقدار a و b در این بازه که $a < b$، آنگاه $f(a) > f(b)$. در فاصله‌ای که یک تابع اکیداً نزولی است، با حرکت روی نمودار (از چپ به راست)، همواره روبه پایین خواهیم رفت. (شکل ب)



به تابعی که در یک بازه فقط اکیداً صعودی یا فقط اکیداً نزولی باشد، **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.

✤ **مثال :** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. در فاصله $(-\infty,-۱]$ تابع f ثابت است. همچنین در فاصله $[-۱,۰]$ تابع اکیداً نزولی و در فاصله $[۰,+\infty)$ تابع اکیداً صعودی است.

کار در کلاس

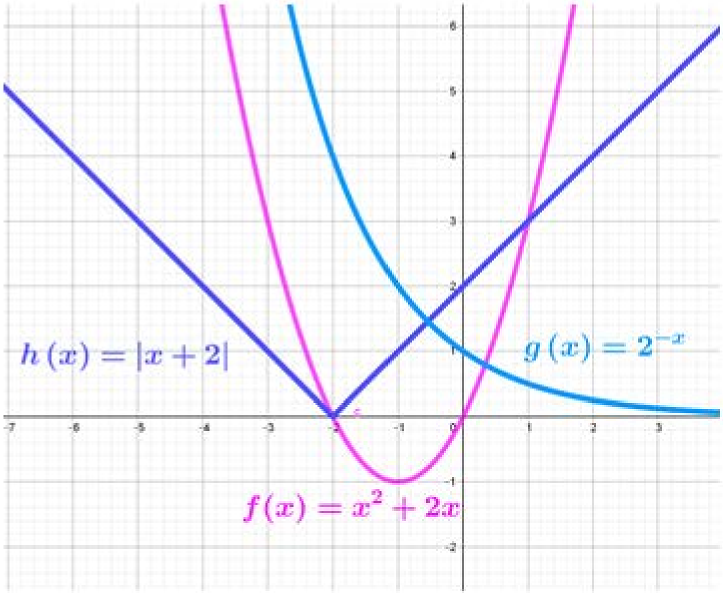
۱ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = x^۲ + ۲x \quad , \quad g(x) = ۲^{-x} \quad , \quad h(x) = |x + ۲|$$

الف) در چه بازه‌هایی این توابع، اکیداً صعودی و در چه بازه‌هایی اکیداً نزولی هستند؟

ب) کدام یک از آنها در تمام دامنه خود، اکیداً یکنوا است؟

حل کاردرکلاس صفحه ۱۷:



الف)

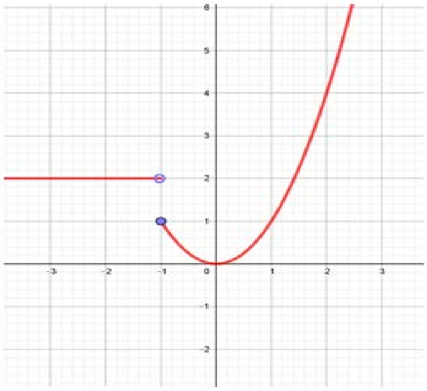
$f(x)$: اکیدا نزولی $x\in(-\infty,-۱]$ ، اکیداً صعودی $x\in[-۱,+\infty)$

$g(x): x\in(-\infty,+\infty)$ اکیدا نزولی

ب)

$h(x)$: نزولی $x\in(-\infty,-۲]$ ، صعودی $x\in[-۲,+\infty)$

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲ & x<-۱ \end{cases}$ را رسم کنید. در چه فاصله‌هایی این تابع صعودی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟



نزولی $x\in(-\infty,۰]$

صعودی $x\in[۰,+\infty)$

۳

الف) اگر تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد، آیا صعودی نیز هست؟ چرا؟ بله اثبات آن در چند صفحه بعد آورده شده است

ب) اگر تابع f در یک فاصله صعودی باشد، آیا اکیداً صعودی نیز خواهد بود؟ مثال بزنید. خیر ممکن است ثابت باشد

۴

الف) فرض کنید تابع f در یک فاصله اکیداً صعودی باشد و a و b متعلق به این فاصله باشند. اگر $f(a)\leq f(b)$ نشان دهید که $a\leq b$.

ب) اگر $\log(x+۱)\leq \log(۲x-۳)$، حدود x را به‌دست آورید.

تقسیم و بخش‌پذیری

فعالیت

با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر آشنا هستید. توابع چند جمله‌ای $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ و $p(x)=x^{۲}-۲$ را درنظر می‌گیریم.

الف) اگر $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج قسمت و باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $p(x)$ باشند. نشان دهید که $q(x)=x-۳$ و $r(x)=۲x-۵$.

ب) درستی تساوی $f(x)=p(x)\,q(x)+r(x)$ را بررسی کنید.

قضیه تقسیم برای چند جمله‌ای‌ها

اگر $f(x)$ و $p(x)$ توابع چند جمله‌ای باشند و درجه $p(x)$ از صفر بزرگ‌تر باشد، آنگاه توابع چند جمله‌ای منحصر بفرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به‌طوری که :

$$f(x)=p(x)\,q(x)+r(x)$$

که در آن $r(x)=۰$ یا درجه $r(x)$ از درجه $p(x)$ کمتر است.

اگر $r(x)=۰$ باشد، چندجمله‌ای f بر چندجمله‌ای p بخش‌پذیر است.

حل کاردرکلاس سوال ۳ الف صفحه ۱۸ بله زیرا:

$$P \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow (f(a) < f(b) \vee f(a) = f(b))$$

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

حل کار در کلاس سوال ۴ صفحه ۱۸

الف) از برهان خلف استفاده می کنیم   فرض می کنیم $a > b$ پس $f(a) > f(b)$ چون تابع اکیداً صعودی است پس که این خلاف فرض است.

ب)

$$\begin{aligned} &x+1 \le 2x-3 \to -x \le -4 \to x \ge 4 \\ &x+1 > 0 \to x > -1 \qquad\qquad \Rightarrow x \in [4,+\infty) \\ &2x-3 > 0 \to x > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

حل فعالیت صفحه ۱۸

الف)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 + 1 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{{}_{-}x^3 \;{}_{+}{-2x}} & x - 3 \\
-3x^2 + 2x + 1 & \\
\underline{{}_{+}{-3x^2} \;{}_{-}{+6}} & \\
2x - 5 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow q(x) = x - 3, r(x) = 2x - 5$$

ب)

$$f(x) = p(x) \times q(x) + r(x)$$

$$x^3 - 3x^2 + 1 = \underbrace{(x^2 - 2)(x - 3)}_{x^3 - 3x^2 - 2x + 6} + (2x - 5) = x^3 - 3x^2 + 1$$

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^4 - 16$ و $p(x) = x+2$، نشان دهید که $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

فعالیت

در تقسیم $f(x) = x^3+2$ بر $p(x) = 2x-1$، $q(x)$ و $r(x)$ به ترتیب خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌اند.

الف) نشان دهید که $r(x)$ از درجه صفر است.

ب) با توجه به قضیه تقسیم می‌توان نوشت :

$$f(x) = (2x-1)\ q(x) + r(x)$$

اکنون ریشه چند جمله‌ای $p(x) = 2x-1$ را به‌دست آورید و با قرار دادن در رابطه بالا نشان دهید که $r(x) = f(\frac{1}{2})$. به‌طور کلی می‌توان گفت :

قضیه : باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت‌است از $r(x) = f(\frac{-b}{a})$.

$$2x+1=0 \rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$r(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-2=\frac{-21}{8}$$

کار در کلاس

۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای x^3+x-2 را بر $2x+1$ به‌دست آورید.

۲ اگر چند جمله‌ای x^2+ax-2 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

$$x-a=0 \rightarrow x=a$$

$$r(x)=f(a)=(a)^2+a(a)-2=2a^2-2 \xrightarrow{r(x)=0} 2a^2-2=0 \rightarrow a=\pm 1$$

حل کار در کلاس صفحه ۱۹

روش اول: با تقسیم چون با قیمانده صفر شده است

پس بخش پذیر است

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - 16 & x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^4 - 2x^3} & x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\
\quad -2x^3 - 16 & \\
\quad \underline{+2x^3 + 4x^2} & \\
\qquad 4x^2 - 16 & \\
\qquad \underline{-4x^2 - 8x} & \\
\qquad\quad -8x - 16 & \\
\qquad\quad \underline{+8x + 16} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

روش دوم:

$$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2)^4 - 16 = 16 - 16 = 0$$

چون ریشه مقسوم علیه مقسوم را صفر کرد پس بر مقسوم بخش پذیر است

حل فعالیت صفحه ۱۹ الف)

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 + 2 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 - \frac{1}{2}x^2} & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \\
\quad + \frac{1}{2}x^2 + 2 & \\
\underline{+ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x} & \\
\quad + \frac{1}{4}x + 2 & \\
\underline{+ \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}} & \\
\quad \frac{17}{8} &
\end{array}
$$

ب)

$$x^3 + 2 = \underbrace{(2x-1)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\right)}_{x^3 - \frac{1}{8}} + \frac{17}{8} = x^3 + 2$$

پ)

$$2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$r(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 = \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$$

فعالیت

با اتحادهای زیر از سال‌های قبل، آشنا هستید.

$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ و $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$

۱ از تقسیم $x^4 - a^4$ بر $x-a$ نشان دهید که :

$$x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$$

۲ آیا $x^n - a^n$ $(n \in \mathbb{N})$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است؟ بله

۳ از تقسیم $x^n - a^n$ بر $x-a$ نشان دهید که $x^n - a^n$ به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

۴ چند جمله‌ای‌های $x^5 - 1$ و $x^6 - 64$ را به کمک اتحاد بالا تجزیه کنید.

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$
$$x^6 - 64 = (x-2)(x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32)$$

کار در کلاس

۱ در اتحاد بالا، اگر n فرد باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^5 + 1$ را تجزیه کنید.

$$x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

۲ در فعالیت بالا، اگر n زوج باشد، با تغییر a به $-a$ اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

به کمک این اتحاد، چند جمله‌ای $x^4 - 16$ را طوری تجزیه کنید که $x + 2$ یک عامل آن باشد.

$$x^4 - 16 = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

حل فعالیت صفحه ۲۰ سوال ۱:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - a^4 & x - a \\
\cline{2-2}
\underline{-x^4 \mp ax^3} & x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\
\quad ax^3 - a^4 & \\
\quad \underline{-ax^3 \mp a^2x^2} & \\
\qquad a^2x^2 - a^4 & \\
\qquad \underline{-a^2x^2 \mp a^3x} & \\
\qquad\quad a^3x - a^4 & \\
\qquad\quad \underline{-a^3x \pm a^4} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow (x-a)\left(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3\right) = x^4 - a^4$$

تمرین

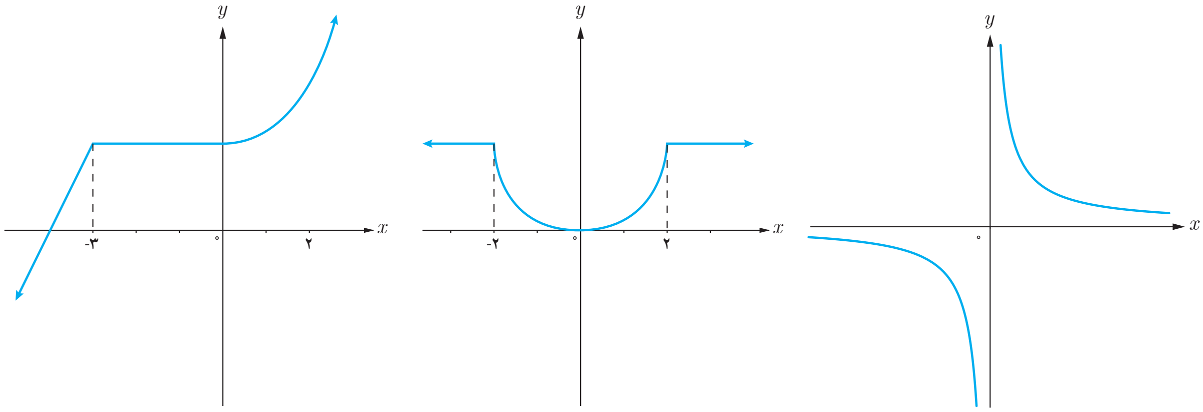
۱ تابع $f(x) = (x-۲)^۳ + ۱$ را درنظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^۳$ رسم کنید. دو واحد به راست ویک واحد به بالا

ب) نشان دهید که f وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

پ) ضابطه $f^{-۱}$ را به‌دست آورید.

۲ نمودار توابع f، g و h در زیر رسم شده‌اند.



$y = f(x)$ $y = g(x)$ $y = h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

$f\begin{cases} x \in (-\infty, -۳] \cup [۰, +\infty) & \text{اکیدا صعودی} \\ x \in (-\infty, +\infty) & \text{صعودی} \end{cases}$

$g\begin{cases} x \in (-\infty, ۰] \cup [۲, +\infty) & \text{نزولی} \\ x \in [-۲, ۰] & \text{اکیدا نزولی} \end{cases}$

h: در بازهای $(-\infty, ۰)$ و $(۰, +\infty)$ اکیداً نزولی است ولی در کل نزولی نیست

۳ نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید. کدام یک از انها در تمام دامنه خود، اکیدا یکنواست؟

الف) $f(x) = \sqrt{۲ - x}$

ب) $g(x) = ۲^{-x}$

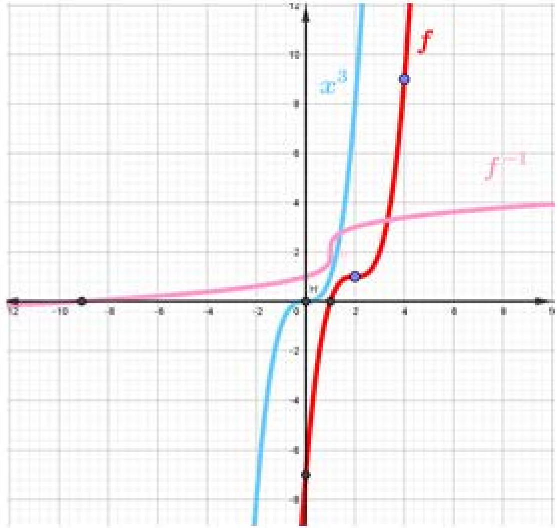
ج) $h(x) = \log_۲ x$

حل تمرین صفحه۲۱ سوال۱: الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
$f(x)$	$-$۷	۰	۱	۲	۹

x	$-$۷	۰	۱	۲	۹
$f^{-1}(x)$	۰	۱	۲	۳	۴

$$f^{-1}(x) = ۲ + \sqrt[۳]{x-۱}$$



ب)

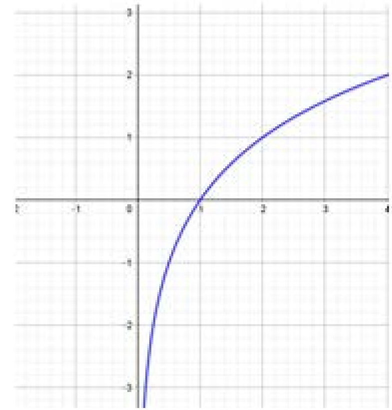
$$\begin{cases} y_۱ = (x_۱ - ۲)^۳ + ۱ \\ y_۲ = (x_۲ - ۲)^۳ + ۱ \end{cases} \xrightarrow{y_۱ = y_۲} (x_۱ - ۲)^۳ + ۱ = (x_۲ - ۲)^۳ + ۱ \to (x_۱ - ۲)^۳ = (x_۲ - ۲)^۳$$

$$\to (x_۱ - ۲) = (x_۲ - ۲) \to x_۱ = x_۲$$

پ)

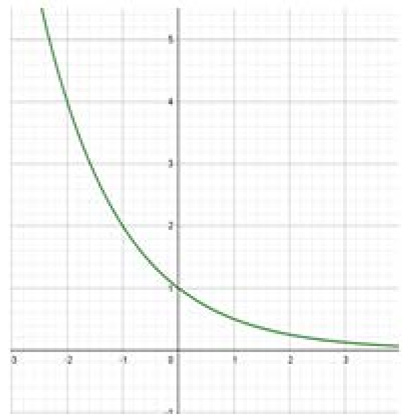
$$y = (x-۲)^۳ + ۱ \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = (y-۲)^۳ + ۱ \to (y-۲)^۳ = x - ۱ \to (y-۲) = \sqrt[۳]{x-۱} \to y = \sqrt[۳]{x-۱} + ۲$$

حل تمرین صفحه ۲۱ سوال ۳:



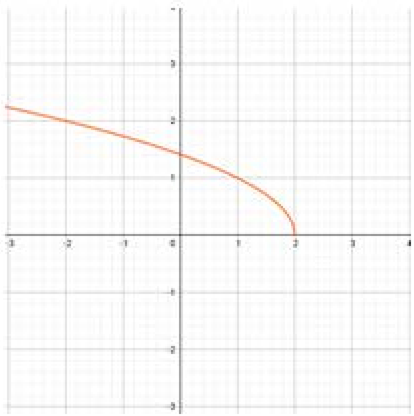
$h(x)=\log_{2}^{x}$

اکیداً صعودی



$g(x)=2^{-x}$

اکیداً نزولی



$f(x)=\sqrt{2-x}$

اکیداً نزولی

۴ آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی و هم نزولی باشد؟ تابع ثابت

۵ اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. برای تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

۶ اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $x^۳+kx^۲+۲$ بر $x-۲$ برابر با ۶ باشد، k را تعیین کنید.

$$f(۲)=۶ \rightarrow (۲)^۳+k(۲)^۲+۲=۶ \rightarrow ۴k=-۴ \rightarrow k=-۱$$

۷ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^۳+ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$\left.\begin{array}{l} f(۲)=۰ \rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰ \rightarrow ۴a+۲b=-۹ \\ f(-۱)=۰ \rightarrow -۱+a-b+۱=۰ \rightarrow a-b=۰ \rightarrow a=b \end{array}\right\} \rightarrow a=b=\frac{-۳}{۲}$$

۸ هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل‌های خواسته شده تجزیه کنید.

الف) $x^۶-۱$ با عامل $x-۱$

$$x^۶-۱=(x-۱)(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$$

ب) $x^۶-۱$ با عامل $x+۱$

$$x^۶-۱=(x+۱)(x^۵-x^۴+x^۳-x^۲+x-۱)$$

پ) $x^۵+۳۲$ با عامل $x+۲$

$$x^۵+۳۲=(x+۲)(x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۸x+۱۶)$$

۹ الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی باشد و a و b متعلق به این بازه باشند. اگر $f(a)\le f(b)$ نشان دهید که $a\ge b$.

ب) اگر $\frac{۱}{۶۴}\le(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}$ ، حدود x را به‌دست آورید.

حل تمرین صفحه ۲۱ سوال ۵:

$$a<b \qquad f(a)<f(b) \quad , g(a)<g(b)$$

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a)<f(b)+g(b)=(f+g)(b)\Rightarrow(f+g)(a)<(f+g)(b)$$

برای تفاضل نمی توان گفت چون در منفی ضرب می شود جهت نامعادله عوض می شود

$$f(x)=x^2 \qquad g(x)=x^3 \qquad D=[0,+\infty)$$

$$y=(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-x^3$$

$$y'=2x-3x^2 \xrightarrow{y'=0} \begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{2}{3} \end{array} \qquad x\in\left[0,\frac{2}{3}\right] \text{ نزولی } \qquad x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right) \text{ صعودی }$$

x		0		$\frac{2}{3}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

حل تمرین صفحه ۲۱ سوال ۹:

الف) **با برهان خلف**

$\forall a,b\in$ بازه $a<b\to f(a)>f(b)$ این خلاف فرض است $\to f(a)\le f(b)$

ب)

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳x-۲}\le\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\xrightarrow[\text{ج ع م}]{۰<\frac{۱}{۲}<۱} ۳x-۲\ge ۶,\quad ۳x\ge ۸,\quad x\ge\frac{۸}{۳}$$

یا

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۳x+۲}\le\left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۶}\xrightarrow[\text{ج ع ن}]{۲>۱} -۳x+۲\le -۶,\quad -۳x\le -۸,\quad x\ge\frac{۸}{۳}\Rightarrow x\in\left[\frac{۸}{۳},+\infty\right)$$