درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است ($a\neq 0$) که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

$3x^2-5x+2=0$

$a \quad b \quad c \qquad \Delta=b^2-4ac=25-4\times3\times2=1$

۱ معادله $3x^2=5x-2$ را حل کنید.

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+1}{6}=1$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

۲ اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

$x=-1 \to 4-m(-1)-7=0 \qquad m-3=0 \qquad m=3$

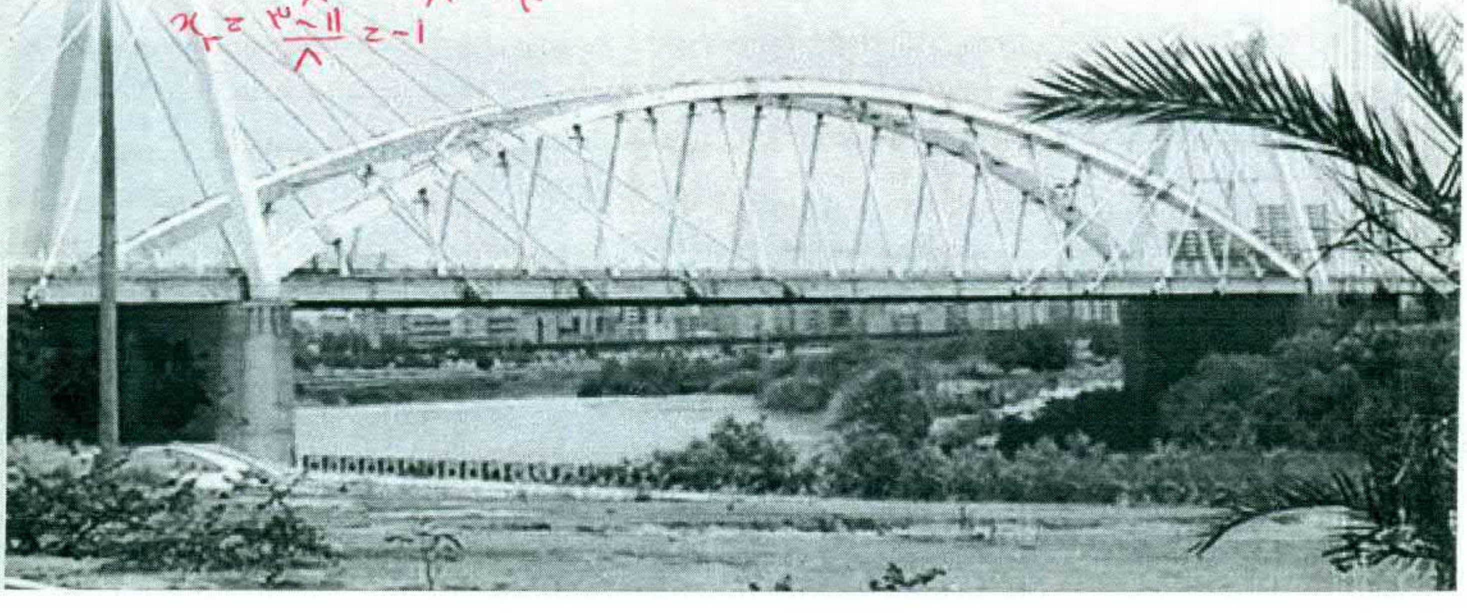
$4x^2-3x-7=0$

$a=4 \quad b=-3 \quad c=-7 \qquad \Delta=9-4(4)(-7)=9+112=121$

$x_1=\frac{3+11}{8}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

$x_2=\frac{3-11}{8}=-1$

پل پارک جزیره (اهواز ـ استان خوزستان)



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$ax^2+bx+c=0$	مقدار هر ریشه x_1 و x_2	جمع ریشه‌ها (S)	ضرب ریشه‌ها (P)	a	b	c	$\frac{-b}{a}$	$\frac{c}{a}$
$3x^2-5x+2=0$	1 , $\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	3	-5	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
$4x^2-3x-7=0$	-1 , $\frac{7}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-7}{4}$	4	-3	-7	$\frac{3}{4}$	$\frac{-7}{4}$
$x^2-2x+1=0$	1 , 1	2	1	1	-2	1	2	1
$5x^2+6x-8=0$	-2 , $\frac{4}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$	5	6	-8	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{5}$

جمع ریشه‌ها $= -\frac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها $= \frac{c}{a}$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر x_1 و x_2 ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، نشان دهید:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\cdots=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$b^2-\Delta=\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac=4ac \qquad \frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

مثال: اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادلهٔ $4x^2-mx-7=0$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

حل: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$P=x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow(-1)x_2=\frac{-7}{4}\Rightarrow x_2=\frac{7}{4}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

$$S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}\Rightarrow -1+\frac{7}{4}=\frac{m}{4}\Rightarrow m=3$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x = ۲ \\ x = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \\ x + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x-۲)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$

۲ اگر $x_1 = \alpha$ و $x_2 = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \end{cases} \to \begin{cases} (x-\alpha) = ۰ \\ (x-\beta) = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) = ۰ \Rightarrow x^۲ - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{S} x + \underbrace{\alpha\beta}_{P} = ۰$$

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^۲ - Sx + P = ۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲+\sqrt{۳}$ و $۲-\sqrt{۳}$ باشند.

$S = ۲ - \cancel{\sqrt{۳}} + ۲ + \cancel{\sqrt{۳}} = ۴$

$P = (۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳}) = ۴ - ۳ = ۱$

$x^۲ - Sx + P = ۰ \qquad x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌مترمربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب x_1 و x_2 باشند، داریم :

$$x_1 + x_2 = \frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_1 x_2 = ۶۵$$

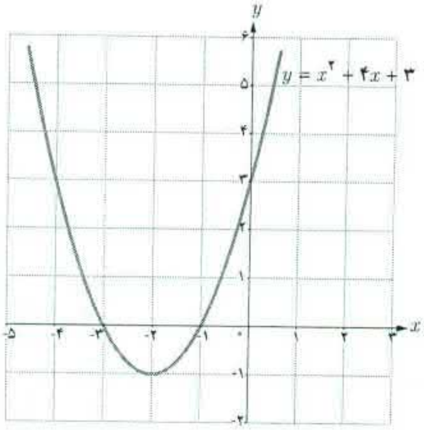
معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{۳۳}{۲}$ و $P = ۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۳۳}{۲}x + ۶۵ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳۳x + ۱۳۰ = ۰$$

از حل معادله اخیر $x_1 = ۱۰$ یا $x_2 = \frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت



نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^2+4x+3$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

۱ معادله $f(x)=0$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

$x^2+4x+3=0 \quad (x+1)(x+3)=0$

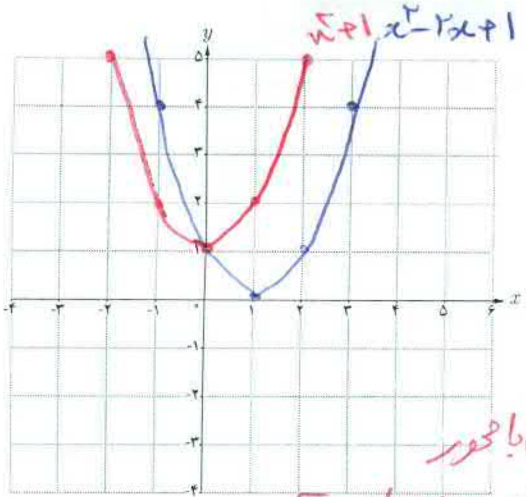
$\begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=0$ دارد؟ محل تلاقی نمودار با محور x ها دقیقا جواب‌های معادله $f(x)=0$ هستند

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کار در کلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^2-2x+1$ و $g(x)=x^2+1$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ چه می‌توان گفت؟

معادله $g(x)=0$ جواب ندارد چون هیچ برخوردی با محور xها ندارد و معادله $f(x)=0$ چون مماس بر محور x هاست تنها یک جواب دارد

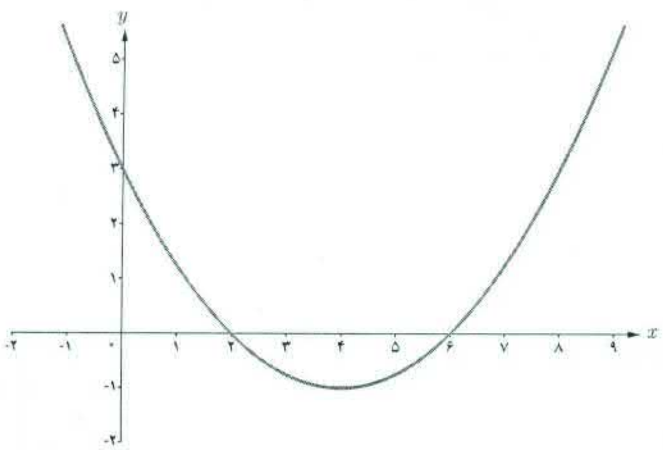
مثال : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^۲ + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

حل : از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^۲ + bx + c = ۰$ هستند و داریم :

$$\begin{aligned} a(x - x')(x - x'') &= a(x^۲ - (x' + x'')x + x'x'') \\ &= a(x^۲ - Sx + p) \\ &= a[x^۲ - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a}] \\ &= ax^۲ + bx + c \end{aligned}$$

مثال : اگر نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول : از آنجا که $x' = ۲$ و $x'' = ۶$ صفرهای تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می‌توان نوشت : $f(x) = ax^۲ + bx + c = a(x - ۲)(x - ۶)$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(۳, ۰)$ می‌گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند و داریم.

$$۳ = a(۰ - ۲)(۰ - ۶) \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

معادله سهمی به‌صورت $y = \frac{۱}{۴}(x - ۲)(x - ۶)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y = \frac{۱}{۴}x^۲ - ۲x + ۳$ نوشته می‌شود.

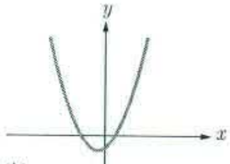
روش دوم : از آنجا که $f(۰) = ۳$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^۲ + bx + ۳$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

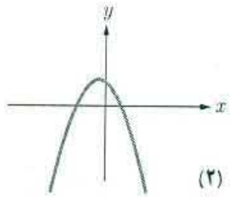
$$\frac{c}{a} = ۱۲ \Rightarrow \frac{۳}{a} = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۴}$$

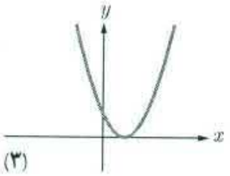
از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = ۸$ و $a = \frac{۱}{۴}$ پس $b = -۲$ و در نتیجه $y = \frac{۱}{۴}x^۲ - ۲x + ۳$

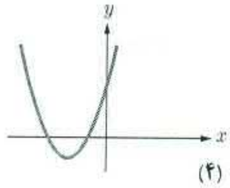
کار در کلاس

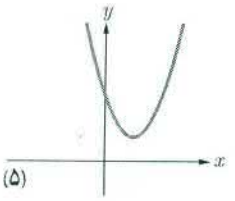
هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است.

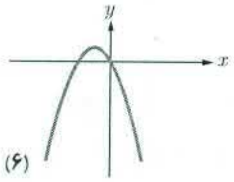

(۱)

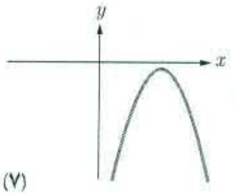

(۲)


(۳)

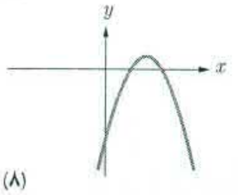

(۴)

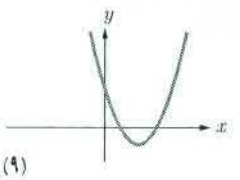

(۵)


(۶)


(۷)

$-\frac{b}{2a}>0 \quad -b\not<0 . \quad b\not>0$


(۸)


(۹)

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ مثبت دارد. **(شکل‌های ۸ و ۹)**

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (۴)

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (۱و۲)

ت) ریشه ندارد. (۵و۷)

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (۷)

ج) یک ریشه دارد. (۳)

چ) حاصل جمع ریشه‌ها مثبت است. (۳و۸و۹)

ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (۱و۲و۴و۶)

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

شماره شکل / ویژگی	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲	۲	۱	۲	۰	۲	۰	۲	۲
علامت a	+	−	+	+	+	−	−	−	+
علامت b	+	−	−	+	−	−	+	+	−
علامت c	−	+	+	+	+	۰	−	−	+

تذکر : ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ و طول نقطه مینیمم تابع ، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a}>0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x+1$

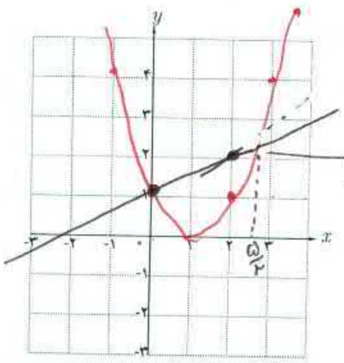
$x^2 - 2x + \cancel{1} = \frac{1}{2}x + \cancel{1}$

$x^2 - \frac{5}{2}x = 0$

$x(x - \frac{5}{2}) = 0 \rightarrow x=0 ,\ x = \frac{5}{2}$

روش هندسی حل معادلات

فعالیت



۱ معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x+1$ را حل کنید. در بالا راه حل ارائه شده

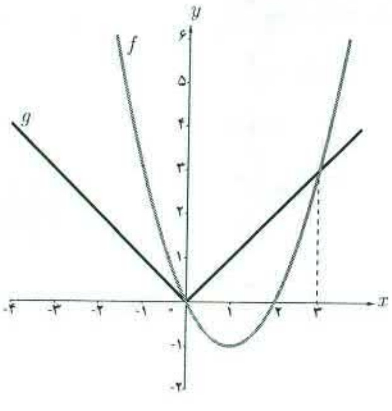
۲ نمودار دو تابع $y=(x-1)^2$ و $y=\frac{1}{2}x+1$ را رسم کنید.
y هر دو تابع به ازای $x=\frac{5}{2}$ برابر $\frac{9}{4}$ می شود

۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $(x-1)^2=\frac{1}{2}x+1$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟ ریشه‌های معادله دقیقاً همان طول‌های نقاط تلاقی نمودارها هستند

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

مثال : به روش هندسی معادله $|x|=x^2-2x$ را حل کنید.

حل : با فرض $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=|x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از : $x=0$, $x=3$
که جواب‌های معادله $|x|=x^2-2x$ می‌باشند.

مثال : اگر $x=2$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^3-x^2-4x+4$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل : از آنجا که $x=2$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-2$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-2$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-4x+4 & x-2 \\ \hline \underline{-x^3+2x^2} & x^2+x-2 \\ x^2-4x & \\ \underline{-x^2+2x} & \\ -2x+4 & \\ \underline{+2x-4} & \\ 0 & \end{array}$$

می‌توان نوشت $p(x)=(x-2)\,(x^2+x-2)$. آنگاه از حل معادله $p(x)=0$ داریم :

$$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x^2+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر -2 , 2 , 1 می‌باشند.

کار در کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر (-2) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

$x=-2$

$0=-8+4k+\cancel{2}-\cancel{2}$

$k=+2$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & x+2 \\ \hline \underline{-x^3\mp 2x^2} & x^2-1 \\ -x-2 & \\ \underline{+x+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$x^2-1 \rightarrow (x-1)(x+1)=0 \rightarrow x=1,\ x=-1$

سایر صفرها

مثال : صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

حل : هر چند معادله $f(x)=0$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t=x^2-1$، معادله به‌صورت $t^2+t-2=0$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t=x^2-1$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1 \text{ یا } t=-2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ می‌باشند.

> برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^4-10x^2+16$ را به‌دست آورید.

$x^4-10x^2+16=0 \qquad x^2=t$

$t^2-10t+16=0$

$(t-8)(t-2)=0$

$t=8 \quad x^2=8 \quad x=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$

$t=2 \quad x^2=2 \quad x=\pm\sqrt{2}$

۱- الف)
$S=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1 \qquad P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$

$x^2-Sx+P=0 \qquad x^2-1x+\frac{2}{9}=0$

ب)
$\alpha , 2\alpha \qquad S=3\alpha \qquad P=2\alpha^2$

$x^2-Sx+P=0 \qquad x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$

مسئله بی‌شمار جواب دارد

تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ باشند. بالای صفحه

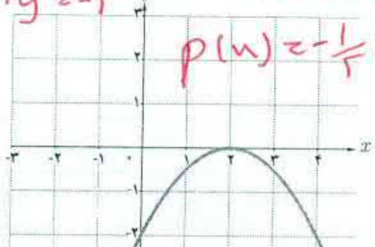
ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x)=ax^2+bx+c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.

$y=a(x-2)^2$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=4a \quad a=-\frac{1}{2}$

$P(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$



(الف)

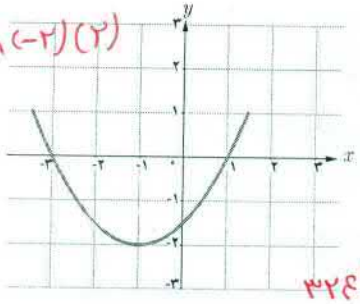
$y=a(x-1)(x+3)$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \quad -2=a(-2)(2)$

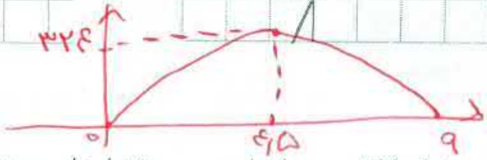
$a=\frac{1}{2}$

$P(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$

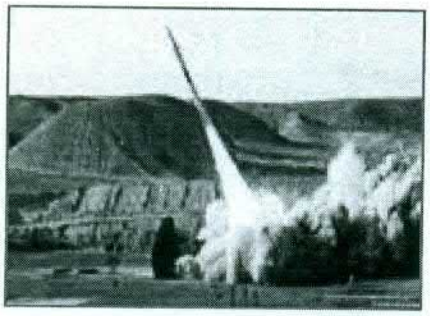
$P(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$



(ب)



← نمودار تمرین ۳



۳ یک موشک با سرعت اولیه ۱۴۴ متر بر ثانیه از زمین به فضا پرتاب می‌شود. ارتفاع این موشک (h) در زمان t، از رابطه $h(t)=-16t^2+144t$ به‌دست می‌آید. ارتفاع ماکزیمم آن و همچنین زمانی را که موشک به زمین برخورد می‌کند به‌دست آورید.

$t_{max}=-\frac{b}{2a}=\frac{-144}{-32}=\frac{9}{2} \qquad h_{max}=-16\times\frac{81}{4}+144\times\frac{9}{2}$

$=-324+648=324$

$t(-16t+144)=0 \rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=9 \end{cases}$

۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^3-4x \qquad x(x^2-4)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x^2=4 \end{cases} \quad x=\pm 2$

ب) $g(x)=2x^3+x^2+3x \qquad x(2x^2+x+3)=0 \quad \begin{cases} x=0 \\ 2x^2+x+3=0 \end{cases} \quad \Delta<0$ ریشه حقیقی ندارد

پ) $h(x)=x^4+3x^2+5 \rightarrow t^2+3t+5$

$\Delta=9-4(1)(5)=-11$ ریشه حقیقی ندارد

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^4-3x^2-4=0 \qquad x^2=t \quad t^2-3t-4=0 \quad (t-4)(t+1)=0 \quad (x^2-4)(x^2+1)=0 \quad x=\pm 2$

ریشه حقیقی ندارد

ب) $(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0 \longrightarrow \frac{x^2}{3}-2=t$

$t^2-7t+6=0 \quad (t-1)(t-6)=0$

$t=1 \rightarrow \frac{x^2}{3}-2=1 \rightarrow \frac{x^2}{3}=3 \quad x^2=9 \quad x=\pm 3$

$t=6 \rightarrow \frac{x^2}{3}-2=6 \rightarrow \frac{x^2}{3}=8 \quad x^2=24$

$x=\pm\sqrt{24}$

پ) $(4-x^2)^2-(4-x^2)=12$

$4-x^2=t$

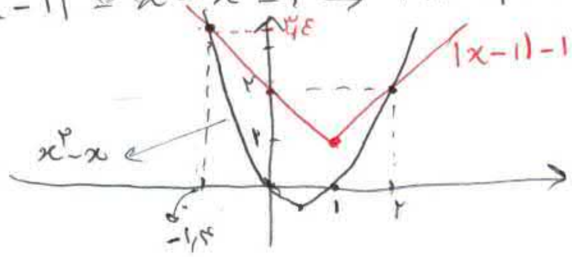
$t^2-t-15=0 \quad \Delta=61 \quad t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{61}}{2}$

$4-x^2=\frac{1+\sqrt{61}}{2} \qquad x^2=4-\frac{1+\sqrt{61}}{2}=\frac{7-\sqrt{61}}{2}$

$4-x^2=\frac{1-\sqrt{61}}{2} \qquad x^2=4-\frac{1-\sqrt{61}}{2}=\frac{7+\sqrt{61}}{2}$

$x=\pm\sqrt{\frac{7+\sqrt{61}}{2}}$

$|x-1| = x^2 - x - 1 \rightarrow |x-1|+1 = x^2 - x$ $\quad \begin{cases} f(x) = |x-1|+1 \\ g(x) = x^2 - x \end{cases}$ -۶

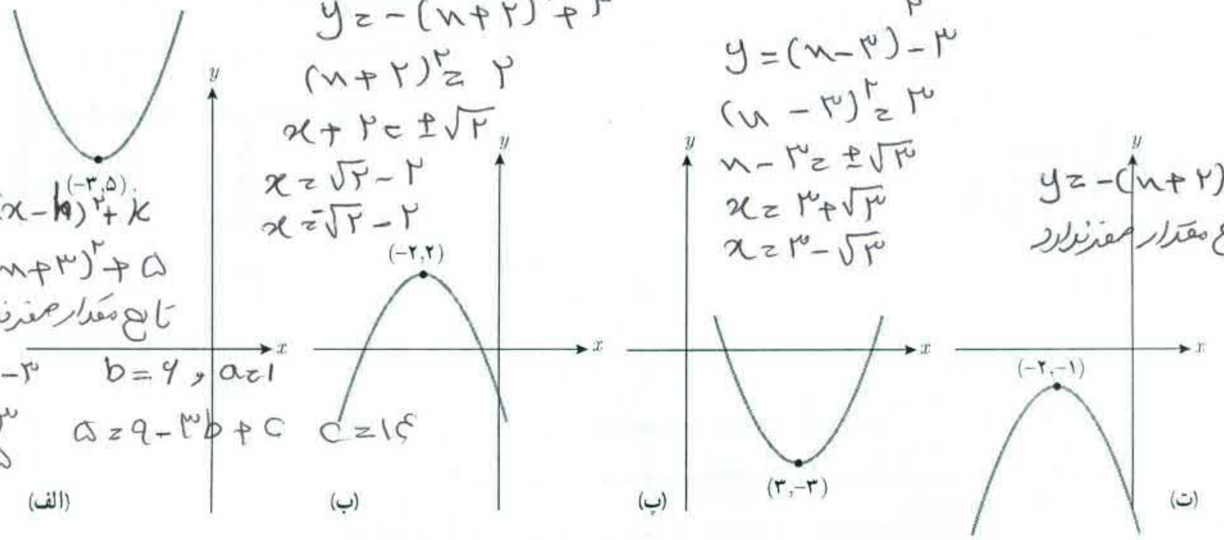


معادله دارای دو ریشه می باشد یکی ۲ و دیگری تقریبا ۱/۴-

۱۶

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

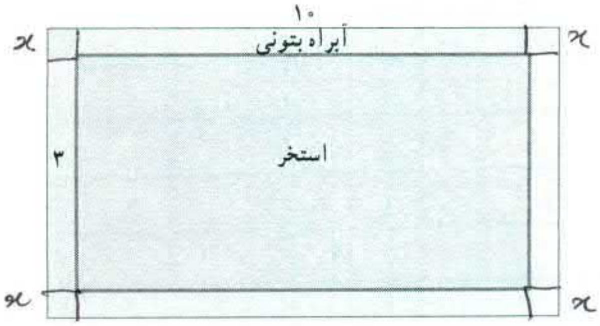


(الف)
$y = a(x-h)^2 + k$
$y = (x+3)^2 + 5$
تابع مقدار صفر ندارد
$-\frac{b}{2a} = -3 \quad b = 6 , a = 1$
$\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \quad 5 = 9 - 3b + c \quad c = 14$

(ب)
$y = -(x+2)^2 + 2$
$(x+2)^2 = 2$
$x + 2 = \pm\sqrt{2}$
$x = \sqrt{2} - 2$
$x = -\sqrt{2} - 2$

(پ)
$y = (x-3)^2 - 3$
$(x-3)^2 = 3$
$x - 3 = \pm\sqrt{3}$
$x = 3 + \sqrt{3}$
$x = 3 - \sqrt{3}$

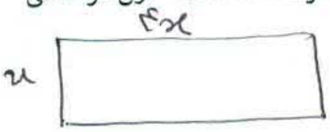
(ت)
$y = -(x+2)^2 - 1$
تابع مقدار صفر ندارد



۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

$4x^2 + 20x + 6x = 14$
$4x^2 + 26x - 14 = 0$
$2x^2 + 13x - 7 = 0$
$\Delta = 169 + 56 = 225$
$x = \frac{-13+15}{4} = \frac{1}{2}$ قق $\quad x = \frac{-13-15}{4} = -7$ غ قق

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟



$21 m^2 = 21 \times 10^4 cm^2$
۲۰۰۰ عدد کفپوش

کف‌پوش $S = x(4x+1)$
$S = 4x^2 + x$
$2000S = 2000(4x^2 + x)$
$8000x^2 + 2000x = 210000$
$8x^2 + 2x - 210 = 0$
$4x^2 + x - 105 = 0$
$\Delta = 1 + 16(105) = 1681$
$x_1 = \frac{-1+41}{8} = 5$ قق
$x_2 = \frac{-1-41}{8} = -\frac{42}{8} = -\frac{21}{4}$