درس دوم

ترکیب توابع

در سال گذشته با اعمال جبری روی توابع آشنا شدیم، در این درس می‌خواهیم مفهوم ترکیب توابع را بررسی کنیم.

فعالیت

هنگامی که غذا از یخچال بیرون آورده می‌شود، دمای آن با گذشت زمان افزایش می‌یابد و مقدار این دما با استفاده از تابع $d(t)$ با ضابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$d(t)=۴t+۲ \quad ; \quad ۰\leq t\leq ۳$ (واحد t، ساعت است.)

الف) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$d(۲)=۱۰$

دمای غذایی که دو ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد است.

$d(۱)=$ ۴×۱+۲=۶ دمای غذایی که یک ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۶ است

$d(۳)=$ ۴×۳+۲=۱۴ دمای غذایی که سه ساعت قبل از یخچال بیرون آورده شده است برابر ۱۴ است

همچنین اگر یک مادهٔ غذایی را با دمای ۲ درجهٔ سانتی‌گراد از یخچال بیرون آوریم، میزان افزایش تعداد باکتری‌ها با بالا رفتن دما با استفاده از تابع $n(d)$ با ضابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$n(d)=۲۰d^۲-۸۰d+۵۰۰; \quad ۲\leq d\leq ۱۴$

که در این تابع، d دمای مادهٔ غذایی پس از خروج از یخچال برحسب درجهٔ سانتی‌گراد است.

ب) هر کدام از مقادیر زیر را مانند نمونه به‌دست آورده و آنها را تفسیر کنید.

$n(۱۰)=۲۰(۱۰)^۲-۸۰(۱۰)+۵۰۰=۱۷۰۰$

یعنی تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی، پس از خروج از یخچال با رسیدن به دمای ۱۰ درجهٔ سانتی‌گراد به ۱۷۰۰ افزایش یافته است.

$n(۲)=$ $۲۰\times ۲^۲-۸۰\times ۲+۵۰۰=۴۲۰$ تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای ۲ درجه ، ۴۲۰تا است

$n(۳)=$ $۲۰\times ۳^۲-۸۰\times ۳+۵۰۰=۴۴۰$ تعداد باکتریهای موجود در غذا با دمای ۳ درجه ، ۴۴۰ تاست

به‌طور کلی می‌توان گفت با استفاده از تابع d، با داشتن زمان، می‌توان دمای غذا و با استفاده از تابع n، با داشتن دمای غذا، می‌توان تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد، به عبارت دیگر :

زمان $\xrightarrow{d}$ دما $\xrightarrow{n}$ تعداد باکتری‌ها

از الف و ب می‌توان نتیجه گرفت : تعداد باکتری‌های موجود در یک مادهٔ غذایی که به میزان ۲ ساعت از یخچال بیرون مانده است، برابر ۱۷۰۰ تاست.

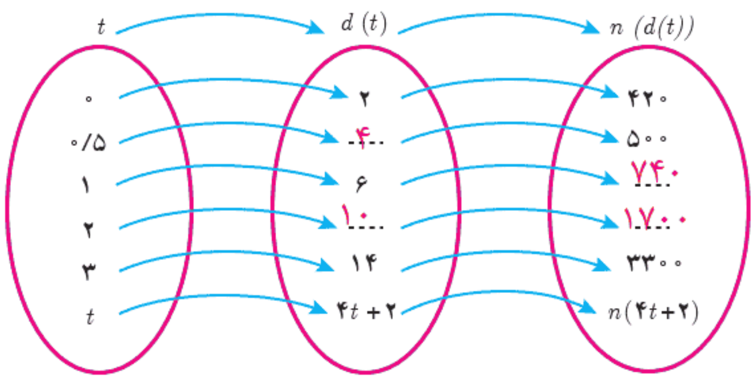
پ) جدول روبه‌رو را کامل کنید و به کمک آن نمودار را تکمیل نمایید.

t	$d(t)=4t+2$	$n(d(t))=n(4t+2)$
0	$d(0)=2$	$n(d(0))=n(2)=420$
$0/5$	$d(0/5)=4$	$n(d(0/5))=n(\dots)=500$
1	$d(1)=6$	$n(d(1))=n(6)=740$
2	$d(2)=10$	$n(d(2))=n(10)=1700$
3	$d(3)=14$	$n(d(3))=n(14)=3300$

همان‌طور که دیدیم، می‌توان با داشتن زمان، دمای غذا را به‌دست آورد و با داشتن دما، تعداد باکتری‌ها قابل محاسبه است.

آیا به نظر شما می‌توان با داشتن زمان و بدون داشتن دما، تعداد باکتری‌ها را به‌دست آورد؟

به بیان دیگر آیا می‌توان تابعی ساخت که n را برحسب t مشخص کند؟



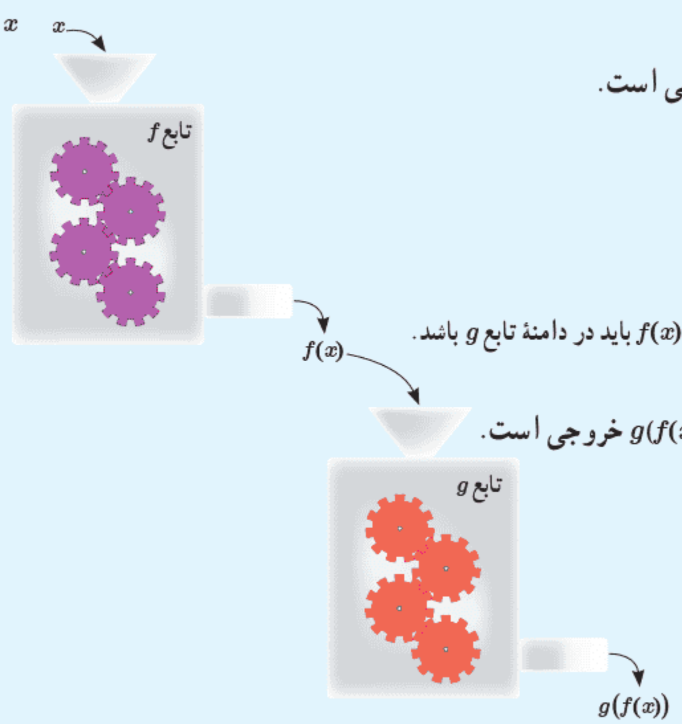
برای به‌دست آوردن چنین تابعی به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$n(d(t))=n(4t+2)=20(4t+2)^2-80(4t+2)+500=20(16t^2+16t+4)-320t-160+500=320t^2+420 \qquad 0\le t\le 3$$

$n(d(t))$ تعداد باکتری‌های موجود در غذای یخچالی را نشان می‌دهد که به میزان t ساعت از یخچال بیرون مانده است.

مراحل ساخت تابع $g(f(x))$:

مرحلهٔ اول: x ورودی و $f(x)$ خروجی است.



مرحلهٔ دوم: $f(x)$ ورودی و $g(f(x))$ خروجی است.

اگر f و g دو تابع باشند به‌طوری که برد تابع f و دامنهٔ تابع g اشتراک ناتهی داشته باشند، تابع $g(f(x))$ را با نماد $(gof)(x)$ نمایش می‌دهیم و تابع gof را تابع مرکب می‌نامیم، به عبارت دیگر :

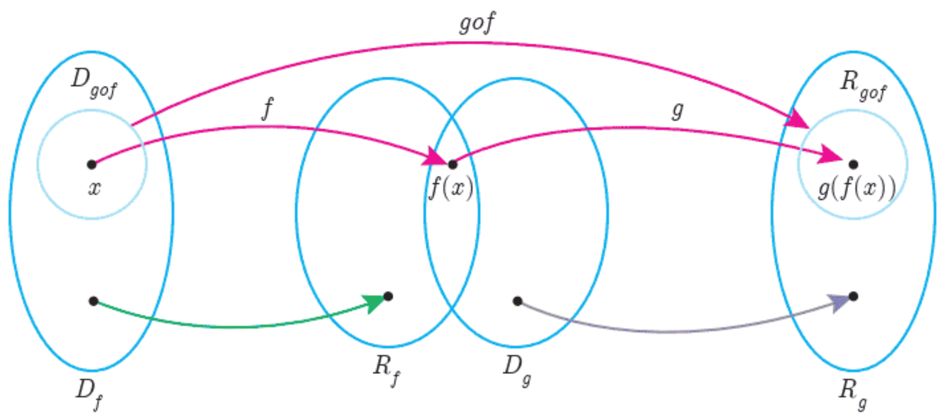
$$(gof)\,(x) = g(f(x))$$

دامنهٔ تابع مرکب :

دامنهٔ تابع مرکب gof مجموعه xهایی است که هم‌زمان در دو شرط زیر صدق کنند :

۱ــ x در دامنهٔ f قرار داشته باشد.

۲ــ $f(x)$ در دامنهٔ g قرار داشته باشد.



بنابراین دامنهٔ تابع gof را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به‌صورت مشابه دامنهٔ تابع fog به صورت زیر است :

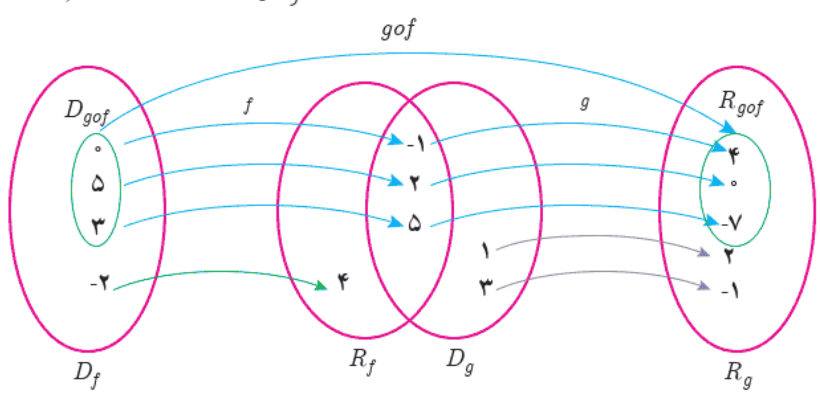
$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

و همچنین :

$$(fog)\,(x) = f(g(x))$$

مثال : اگر $g = \{(۱,۲),(۳,-۱),(۲,۰)(-۱,۴),(۵,-۷)\}$ و $f = \{(۰,-۱),(۵,۲),(۳,۵),(-۲,۴)\}$ ، تابع gof را در صورت امکان بنویسید.

$$\left.\begin{aligned}
(gof)(۰) &= g(f(۰)) = g(-۱) = ۴\\
(gof)(۵) &= g(f(۵)) = g(۲) = ۰\\
(gof)(۳) &= g(f(۳)) = g(۵) = -۷\\
(gof)(-۲) &= g(f(-۲)) = g(۴) : \text{تعریف نشده}
\end{aligned}\right\} \rightarrow gof = \{(۰,۴),(۵,۰),(۳,-۷)\}$$



کار در کلاس

با توجه به جدول‌های زیر، مقادیر خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

x	$f(x)$
۳-	۷-
۲-	۵-
۱-	۳-
۰	۱-
۱	۳
۲	۵
۳	۵

x	$g(x)$
۳-	۸
۲-	۳
۱-	۰
۰	۱-
۱	۰
۲	۳
۳	۸

الف) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(0) = -1$

ب) $(fog)(-1) = f(g(-1)) = f(0) = -1$

پ) $(gof)(0) = g(f(0)) = g(-1) = 0$

ت) $(gog)(-2) = g(g(-2)) = g(3) = 8$

ث) $(gof)(2) = g(f(2)) = g(5)$ . . تعریف نشده

ج) $(fof)(1) = f(f(1)) = f(3) = 5$

مثال : اگر $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ تابع gof را به‌دست آورید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_{gof} = \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$$

مثال : اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ ، $g(x) = 2x^2 - 1$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in [1, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = [1, +\infty)$$

عبارت $\sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$ به این معنی است که $\sqrt{x-1}$ در اعداد حقیقی با معنی باشد یعنی $x - 1 \geq 0$ که بازهٔ $[1, +\infty)$ به‌دست می‌آید.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = 2(f(x))^2 - 1 = 2(\sqrt{x-1})^2 - 1 = 2(x-1) - 1 = 2x - 3$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \,\middle|\, g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 1 \in [1, +\infty)\right\}$$

عبارت $2x^2 - 1 \in [1, +\infty)$ به این معنی است که عبارت $2x^2 - 1$ متعلق به بازهٔ $[1, +\infty)$ باشد، یعنی $2x^2 - 1 \geq 1$، بنابراین :

$$D_{fog} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 2x^2 - 1 \geq 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 \geq 1\right\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1} = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

اگر دامنه و ضابطهٔ توابع gof و fog را با هم مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تذکر : دامنهٔ توابع مرکب را همیشه با توجه به تعاریف آن به دست می‌آوریم نه از روی ضابطهٔ آن. مثلاً در اینجا می‌بینیم که دامنهٔ تابع gof با توجه به ضابطهٔ آن $\mathbb{R}$ است در صورتی که برابر $[1, +\infty)$ است.

کار در کلاس

اگر $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ و $g(x) = \dfrac{3}{x}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و fof را به‌دست آورید.

همیار گروه تلگرامی فقط ریاضی سه تجربی به مدیریت استاد ایمانلو

hamyar.in زهراشمسی

$$fog(x)=f\left(g(x)\right)=\frac{۲}{g(x)-۱}=\frac{۲}{\frac{۳}{x}-۱}=\frac{۲x}{۳-x}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\},D_g=\mathbb{R}-\{۰\}$$

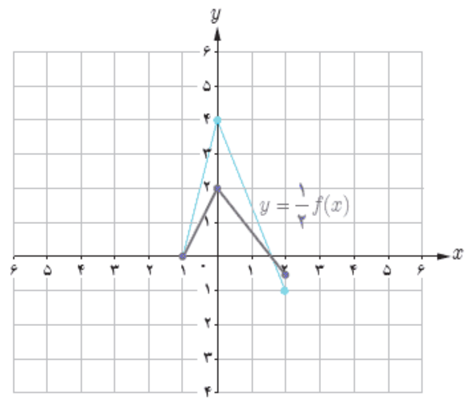
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\left\{x\in\mathbb{R}-\{۰\} \mid \frac{۳}{x}\in\mathbb{R}-\{۱\}\right\}=\mathbb{R}-\{۰,۳\}$$

hamyar.in همیار

«تبدیل نمودار توابع»

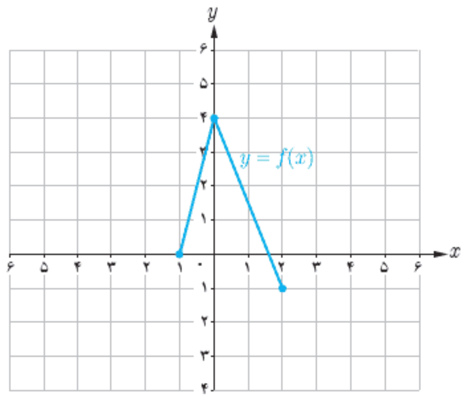
یادآوری : همان‌طور که در پایهٔ یازدهم دیدیم برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ را با حفظ طول آن نقطه، k برابر کنیم.

مثال : در شکل زیر نمودار تابع f و با کمک آن نمودار توابع $y=\frac{1}{2}f(x)$ ، $y=-f(x)$ و $y=2f(x)$ رسم شده است.



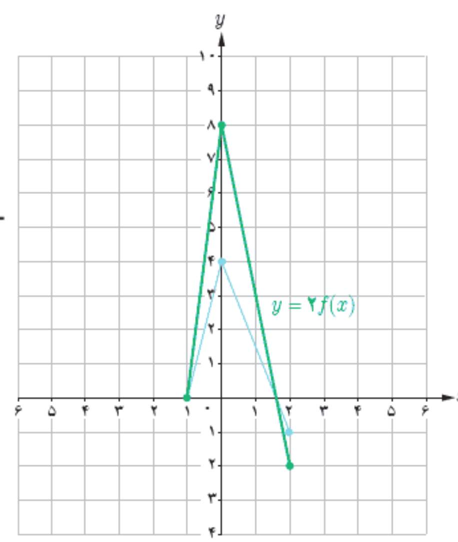
x	$\frac{1}{2}f(x)$
-1	0
0	2
2	$-\frac{1}{2}$

برای رسم نمودار $y=\frac{1}{2}f(x)$ عرض هر نقطهٔ نمودار تابع f را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم.



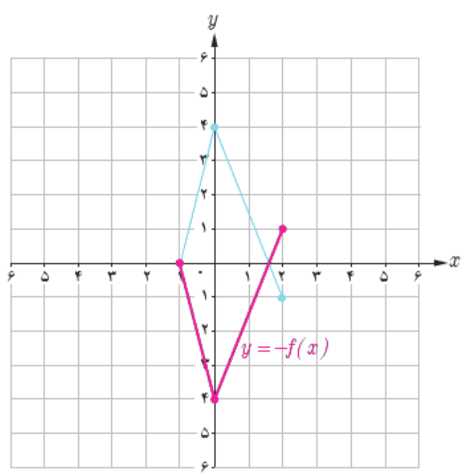
x	$f(x)$
-1	0
0	4
2	-1

از آنجایی که ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ و $kf(x)=0$ یکسان است بنابراین محل تلاقی نمودار توابع f و kf با محور xها یکسان است.



x	$2f(x)$
-1	0
0	8
2	-2

برای رسم نمودار $y=2f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در ۲ ضرب می‌کنیم.

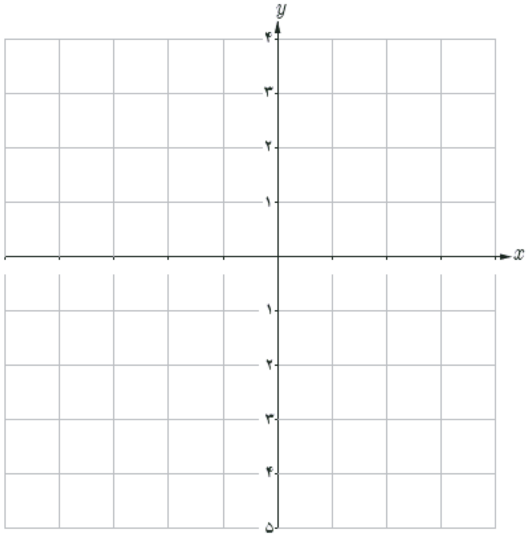


x	$-f(x)$
-1	0
0	-4
2	1

برای رسم نمودار $y=-f(x)$ عرض هر نقطه نمودار تابع f را در -1 ضرب می‌کنیم.

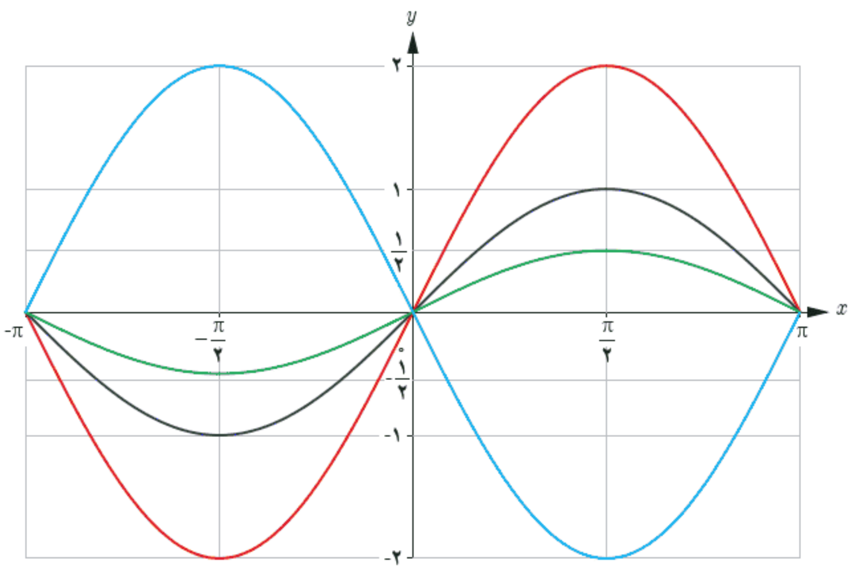
دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است، اما برد آنها لزوماً یکسان نیست.

کار در کلاس



نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ را در بازهٔ $[-۲,۳]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $g(x)=-|x-۲|$ و $h(x)=\frac{۱}{۲}|x-۲|$ و $k(x)=-\frac{۱}{۳}|۲-x|$ را رسم کنید.

کار در کلاس

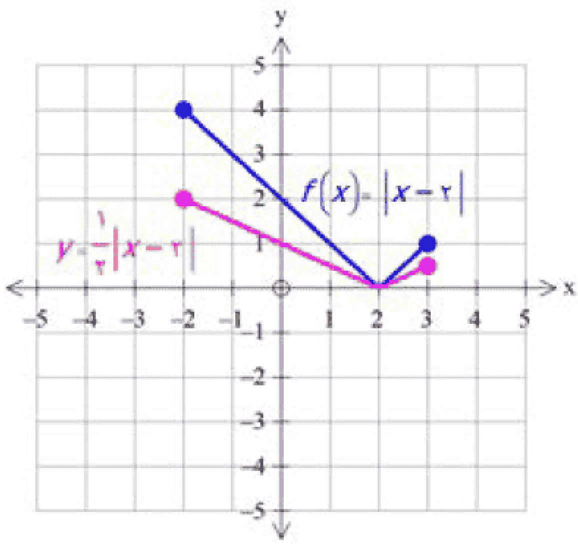


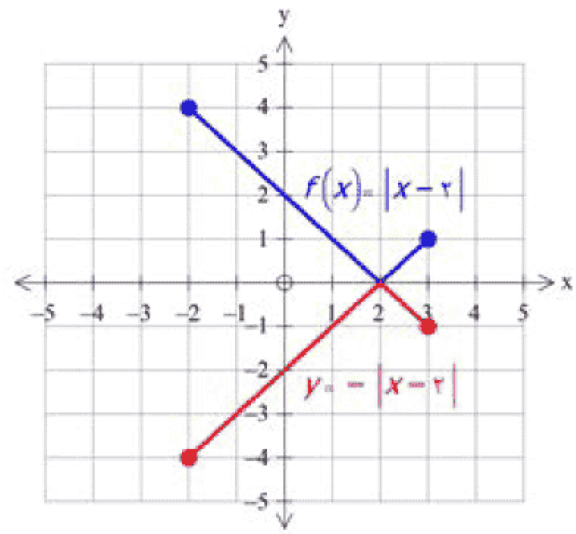
در شکل روبه‌رو نمودار توابع با ضابطه‌های $y=\sin x$، $y=۲\sin x$، $y=-۲\sin x$ و $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ رسم شده است. نمودار تابع $y=\sin x$ را مشخص کرده و توضیح دهید نمودار توابع دیگر چگونه به کمک آن رسم شده است. دامنه و برد هر کدام را مشخص کرده و با هم مقایسه کنید.

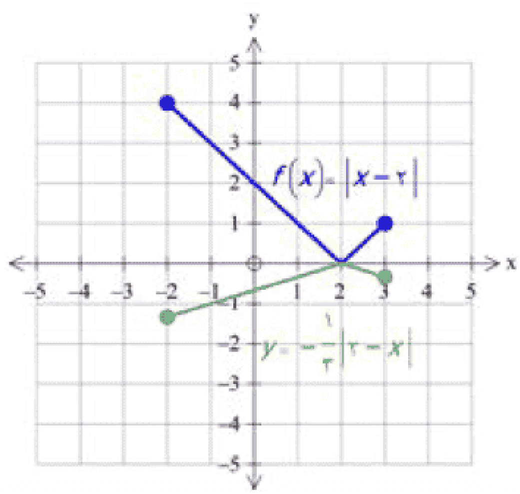
$y=\sin x$	$D=[-\pi,\pi]$	$R=[-۱,۱]$
$y=۲\sin x$	$D=[-\pi,\pi]$	$R=[-۲,۲]$
$y=-۲\sin x$	$D=[-\pi,\pi]$	$R=[-۲,۲]$
$y=\frac{۱}{۲}\sin x$	$D=[-\pi,\pi]$	$R=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$

ییلاقات تالش

حل کار در کلاس بالای صفحه ۱۶



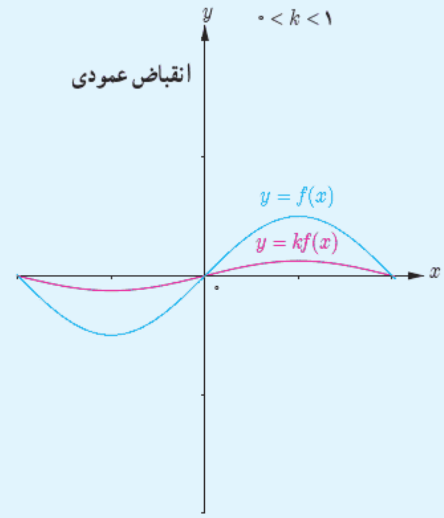




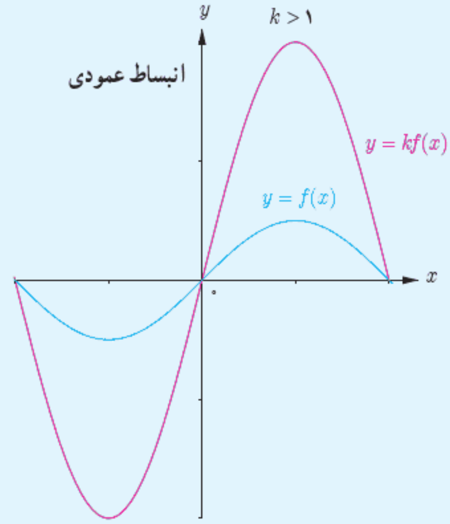
می‌توان گفت نمودار تابع $y=kf(x)$ تغییرات زیر را نسبت به نمودار $y=f(x)$ دارد :

اگر $k>0$، نمودار $y=kf(x)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور yها به دست آورد.

اگر $k<0$ ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $|k|$ به طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.



اگر $0<k<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض عمودی یافته است.

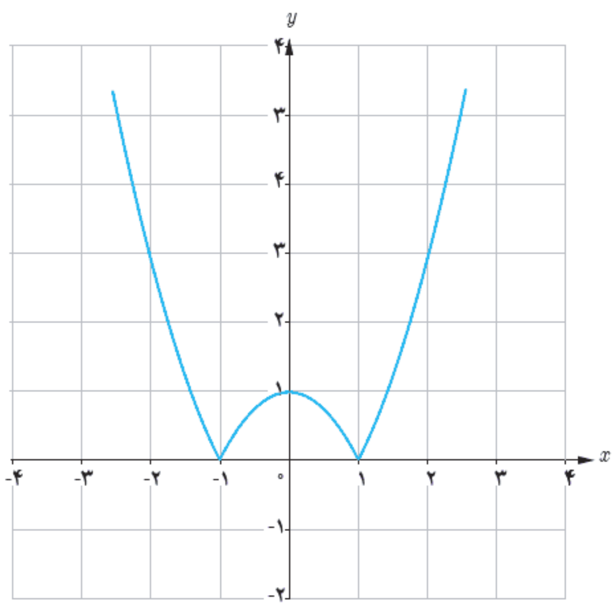


اگر $k>1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب k کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط عمودی یافته است.

رسم نمودار $|f|$:

برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در قسمت‌هایی که نمودار f زیر محور xهاست، قرینهٔ نمودار f را نسبت به محور xها رسم کنیم.

مثال : در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=|x^2-1|$ رسم شده است.



هم‌یار گروه تلگرامی فقط ریاضی سه تجربی به مدیریت استاد ایمانلو
hamyar.in زهراشمسی

رسم نمودار $f(kx)$ با استفاده از نمودار $f(x)$:

مثال : تابع $f(x)=x+۳$ را با دامنه $[-۴,۰]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی رسم نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{x}{۲})$ را بررسی می‌کنیم.

ضابطهٔ تابع $y=f(۲x)$ به صورت $f(۲x)=۲x+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

$-۴\leq ۲x\leq ۰ \rightarrow -۲\leq x\leq ۰ \rightarrow$ دامنهٔ $f(۲x)$: $D=[-۲,۰]$

همچنین ضابطهٔ تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ به صورت $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$ است و دامنهٔ آن به شکل زیر مشخص می‌شود :

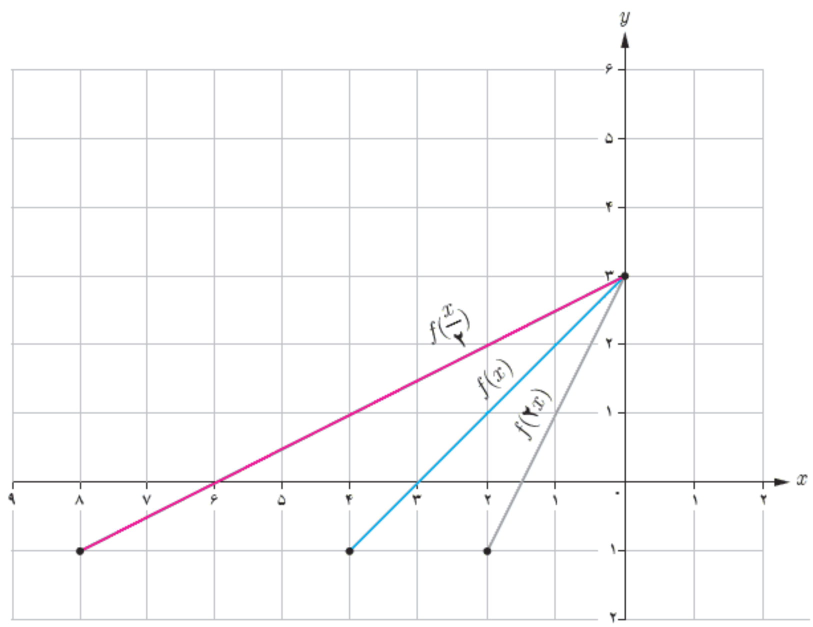
$-۴\leq \frac{x}{۲}\leq ۰ \rightarrow -۸\leq x\leq ۰ \rightarrow$ دامنهٔ $f(\frac{x}{۲})$: $D=[-۸,۰]$

برخی از نقاط نمودار این سه تابع در جدول‌های زیر نوشته شده است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۳$	-۱	۰	۱	۲	۳

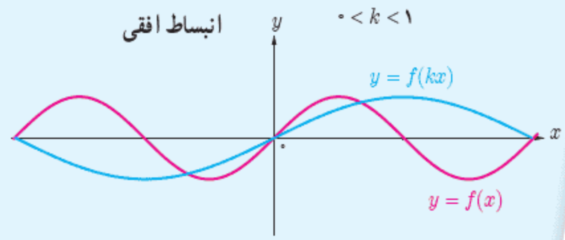


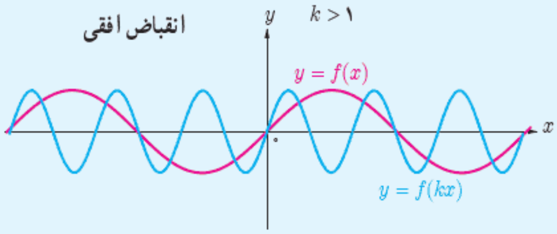
همان‌طور که ملاحظه می‌شود برد توابع $f(۲x)$ و $f(\frac{x}{۲})$ با برد تابع $f(x)$ یکسان است.

برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y=f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم.

اگر $k>0$، نمودار $y=f(kx)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد.

اگر $k<0$ ، ابتدا نمودار f نسبت به محور yها قرینه می‌شود، سپس با ضریب $\left|\frac{1}{k}\right|$ به‌طور افقی منبسط یا منقبض می‌شود.

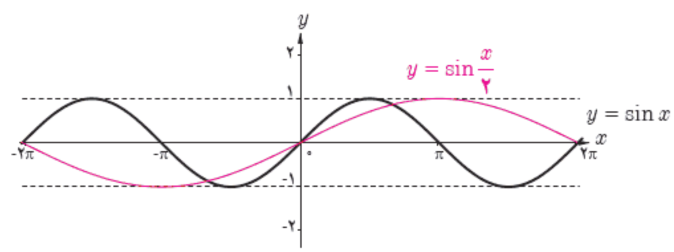


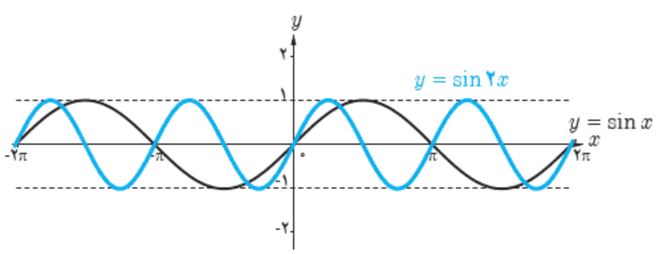


اگر $0<k<1$، نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ کشیده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انبساط افقی یافته است.

اگر $k>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها با ضریب $\frac{1}{k}$ فشرده می‌شود که در این حالت می‌گوییم نمودار انقباض افقی یافته است.

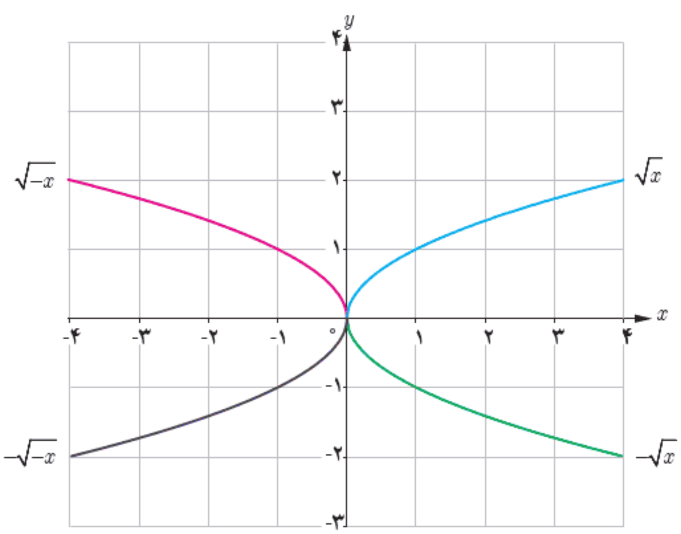
مثال : در شکل‌های زیر نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin 2x$ و $y=\sin\frac{x}{2}$ در بازهٔ $[-2\pi,2\pi]$ رسم شده‌اند. همان‌طور که می‌بینیم نمودار تابع $y=\sin 2x$ با انقباض نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها و نمودار تابع $y=\sin\frac{x}{2}$ با انبساط نمودار تابع $y=\sin x$ در امتداد محور xها به‌دست آمده است.





کار در کلاس

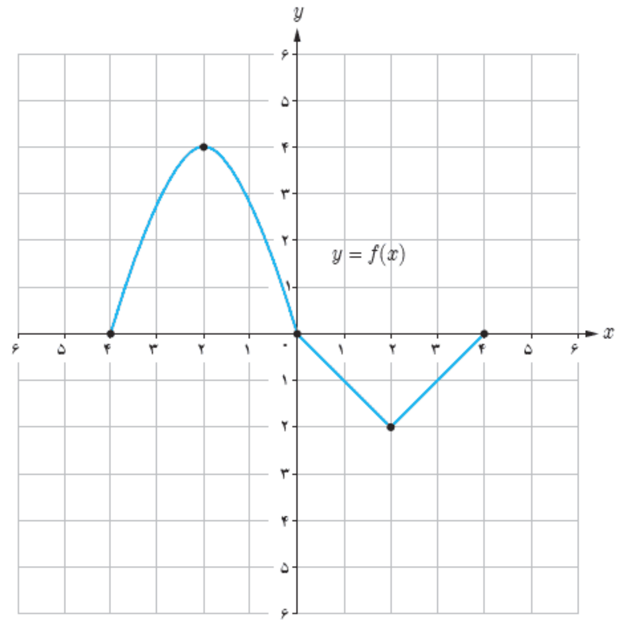
نمودار توابع $y=\sqrt{-x}$ و $y=-\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{-x}$ به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم شده‌است. دامنه و برد توابع فوق را مشخص کنید.



$\sqrt{x}$	$D=[0,+\infty)$	$R=[0,+\infty)$
$-\sqrt{x}$	$D=[0,+\infty)$	$R=(-\infty,0]$
$-\sqrt{-x}$	$D=(-\infty,0]$	$R=(-\infty,0]$
$\sqrt{-x}$	$D=(-\infty,0]$	$R=[0,+\infty)$

کار در کلاس

نمودار تابع f با دامنهٔ $[-۴,۴]$ به صورت زیر داده شده است، می‌خواهیم با استفاده از آن نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنیم.



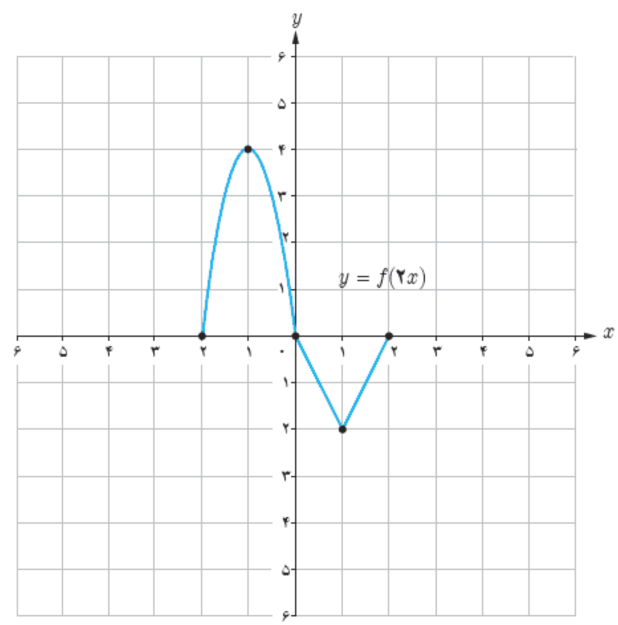
x	$f(x)$
-۴	۰
-۲	۴
۰	۰
۲	-۲
۴	۰

الف) برای تعیین دامنهٔ $y=f(۲x)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$-۴ \le ۲x \le ۴ \rightarrow -۲ \le x \le ۲$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=f(۲x)$ بازهٔ $[-۲,۲]$ است. جدول نقاط را کامل کنید.

برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط یا همان xها باید محاسبه شود.



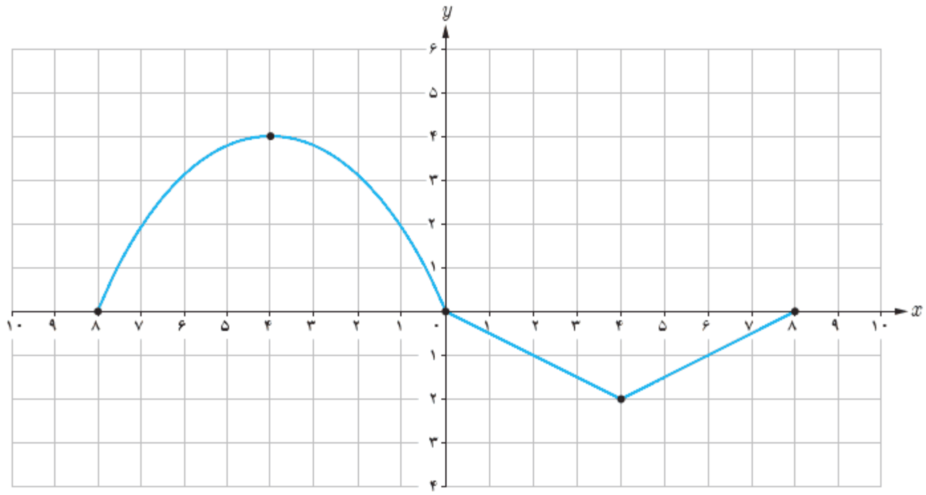
x	$۲x$	$f(۲x)$	$(x, f(۲x))$
-۲	-۴	۰	$(-۲,۰)$
-۱	-۲	۴	$(-۱,۴)$
۰	۰	۰	$(۰,۰)$
۱	۲	-۲	$(۱,-۲)$
۲	۴	۰	$(۲,۰)$

ب) برای تعیین دامنهٔ $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$-۴ \le \frac{۱}{۲}x \le ۴ \rightarrow -۸ \le x \le ۸$$

پس دامنهٔ تابع $y = f(\frac{1}{2}x)$ بازهٔ $[-8,8]$ است و نقاط متناظر به‌صورت زیر است :

x	$f(\frac{1}{2}x)$
-8	0
-4	4
0	0
4	-2
8	0



همان‌طور که ملاحظه شد برای رسم نمودار $y=f(2x)$ طول هر نقطهٔ نمودار $y=f(x)$ را در $\frac{1}{2}$ و برای رسم نمودار $y = f(\frac{1}{2}x)$ طول هر نقطه را در ۲ ضرب می‌کنیم.

> دامنهٔ تابع $y=f(kx)$ با دامنهٔ تابع $y=f(x)$ الزاماً یکسان نیست ولی برد تابع $y=f(kx)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است.

خواندنی

فرش‌بافی از جمله هنرهای اصیل و ارزشمندی است که سابقه‌ای طولانی در ایران دارد. این هنر اصیل با فرهنگ کهنسال این مرز و بوم پیوندی ناگسستنی داشته و در گذر قرن‌ها یکی از دستاوردهای مهم ایرانیان محسوب شده است، به طوری‌که جهانیان فرش را با نام ایران می‌شناسند. هنرمندان طراح فرش با الهام از طبیعت و یا ترکیبی از خیال و طبیعت نقش‌هایی را بر روی آثارشان جلوه‌گر می‌سازند که در آنها اشکالی به صورت شکسته، گردان و یا تلفیقی طراحی می‌کنند. در این طراحی‌ها از انتقال و تبدیل نیز استفاده می‌شود.

$f\circ g=\{(۵,۸),(۳,۳),(۷,۸),(۹,۴)\}$ $\quad$ $g\circ f=\{(۵,۵)\}$

تمرین

۱ اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ ، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲ در هر قسمت موارد خواسته شده را در صورت امکان به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۲-۵ \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x+۶} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

ب) $f(x)=\sqrt{۳-۲x} \quad ; \quad g(x)=\dfrac{۶}{۳x-۵} \quad : \quad D_{fog}\,,(fog)(x)$

پ) $f(x)=\sqrt{x+۲} \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

ت) $f(x)=\sin x \quad ; \quad g(x)=\sqrt{x} \quad : \quad D_{gof}\,,(gof)(x)$

۳ اگر $f(g(x))=۳x^۲-۶x+۱۴$ و $f(x)=۳x-۴$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را به دست آورید.

۴ مشخص کنید کدام یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$.

ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ وقت برقرار نیست.

پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$ ، آنگاه $(fog)(۴)=۵$.

ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.

۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۶ تابع $h(x)=(۳x^۲-۴x+۱)^۵$ ترکیب کدام دو تابع زیر است؟

الف) $f(x)=\sqrt[۵]{x} \quad ; \quad g(x)=۳x^۲-۴x+۱$

ب) $k(x)=x^۵ \quad ; \quad l(x)=۳x^۲-۴x+۱$

۷ هریک از توابع زیر را به‌صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصر به فرد است؟

الف) $h(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$

ب) $l(x)=\sqrt{x^۲+۵}$

پاسخ تمرین ۲

الف)

$$f(x)=x^{۲}-۵ \qquad g(x)=\sqrt{x+۶}$$

$$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=[-۶,+\infty) \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۶,+\infty) \mid \sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}\}=$$

$$\sqrt{x+۶}\in\mathbb{R} \qquad \rightarrow D_{fog}=[-۶,+\infty)\cap\mathbb{R}=[-۶,+\infty)$$

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=(g(x))^{۲}-۵=\left(\sqrt{x+۶}\right)^{۲}-۵=x+۱$$

hamyar.in همیار

ب)

$$f(x)=\sqrt{۳-۲x} \qquad g(x)=\frac{۶}{۳x-۵}$$

$$D_f=\left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right] \qquad D_g=\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۳}\right\}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{۵}{۳}\right\} \mid \frac{۶}{۳x-۵}\in\left(-\infty,\frac{۳}{۲}\right]\right\}=\left(-\infty,\frac{۵}{۳}\right)\cup\left[۳,+\infty\right)$$

$$(fog)_{(x)}=f(g(x))=\sqrt{۳-۲g(x)}=\sqrt{۳-۲\left(\frac{۶}{۳x-۵}\right)}=\sqrt{\frac{۹x-۲۷}{۳x-۵}}$$

hamyar.in همیار

پ)

$$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-16}$$

$$D_f=[-2,+\infty) \qquad D_g=(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$$

$$D_{gof}=\left\{x\in[-2,+\infty)\mid \sqrt{x+2}\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)\right\}=[14,+\infty)$$

$$\underbrace{\sqrt{x+2}\le -4}_{\text{همواره نادرست است}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{x+2}\ge 4 \to x+2\ge 16 \to x\ge 14 \Rightarrow x\in[14,+\infty)$$

$$(gof)_{(x)}=g(f(x))=\sqrt{(f(x))^2-16}=\sqrt{x-14}$$

ت)

$$f(x)=\sin x \qquad g(x)=\sqrt{x}$$

$$D_f=\mathbb{R} \qquad D_g=[0,+\infty)$$

$$D_{gof}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \sin x\in[0,+\infty)\right\}=\mathbb{R}\cap[2k\pi,2k\pi+\pi]\,(k\in\mathbb{Z})=[2k\pi,2k\pi+\pi]_{k\in\mathbb{Z}}$$

$$\sin x\ge 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول ودوم}} x\in[2k\pi,2k\pi+\pi]\,(k\in\mathbb{Z})$$

$$(gof)_{(x)}=g(f(x))=\sqrt{(f(x))}=\sqrt{\sin x}$$

hamyar.in همیار

پاسخ تمرین ۳:

$$f(g(x)) = 3x^2 - 6x + 14 \qquad f(x) = 3x - 4$$

$$f(g(x)) = 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 14 = 3(g(x)) - 4 \Rightarrow 3(g(x)) = 3x^2 - 6x + 18$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = x^2 - 2x + 6}$$

hamyar.in
همیار

پاسخ تمرین ۴:

الف) نادرست

$$(fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = g(۵)^۲ - ۴ = \left(\sqrt{x^۲ - ۴}\right)^۲ - ۴ = \left(\sqrt{۵^۲ - ۴}\right)^۲ - ۴ = ۲۱ - ۴ = ۱۷$$

ب) نادرست

$$\begin{cases} f_{(x)} = ۳x \\ g_{(x)} = ۲x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = ۳(۲x) = ۶x \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = ۲(۳x) = ۶x \end{cases} \rightarrow fog_{(x)} = gof_{(x)}$$

پ) درست

$$(fog)_{(۴)} = f(g(۴)) = f(۷) = ۵$$

ت)درست

$$\begin{cases} (fog)_{(۵)} = f(g(۵)) = \sqrt{۲ \times ۵ - ۱} = \sqrt{۹} = ۳ \\ g_{(۲)} = ۲ \times ۲ - ۱ = ۳ \end{cases}$$

hamyar.in
همیار

پاسخ سوال ۵:

الف) مقرون به صرفه است

$$f_{(x)} = x - \frac{۲}{۱۰}x = \frac{۸}{۱۰}x = \frac{۴}{۵}x \ (x > ۰) \qquad g_{(x)} = x - ۲۰۰۰۰۰ \quad x > ۱۵۰۰۰۰۰$$

$$g\left(f_{(x)}\right) = f_{(x)} - ۲۰۰۰۰۰ = \frac{۴}{۵}x - ۲۰۰۰۰۰$$

$$\frac{۸۰}{۱۰۰} \times ۲۰۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰۰ = ۱۴۰۰۰۰۰$$

ب)

$$f\left(g_{(x)}\right) = f_{(x-۲۰۰۰۰۰)} = \frac{۴}{۵}(x - ۲۰۰۰۰۰) = \frac{۴}{۵}x - ۱۶۰۰۰۰$$

$$\frac{۸۰}{۱۰۰}(۲۰۰۰۰۰۰ - ۲۰۰۰۰۰) = ۱۴۴۰۰۰۰$$

hamyar.in همیار

پاسخ تمرین ۶:

الف)

$$\begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \sqrt[۵]{۳x^{۲} - ۴x + ۱} & \times \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = ۳\sqrt[۵]{x^{۲}} - ۴\sqrt[۵]{x} + ۱ & \times \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} fog_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \left(۳x^{۲} - ۴x + ۱\right)^{۵} & \checkmark \\ gof_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = ۳\left(x^{۵}\right)^{۲} - ۴x^{۵} + ۱ = ۳x^{۱۰} - ۴x^{۵} + ۱ & \times \end{cases}$$

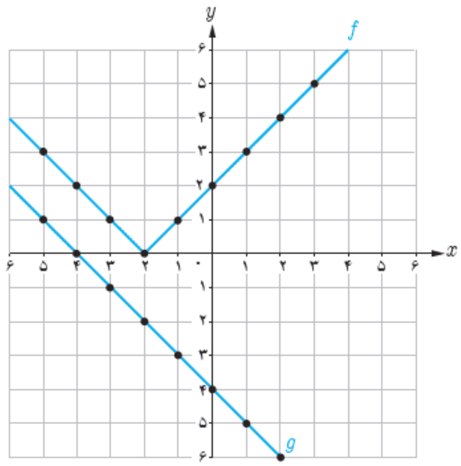
پاسخ تمرین ۷:

الف) $h_{(x)} = \sqrt[۳]{x^{۲} + ۱} \rightarrow f_{(x)} = x^{۲} + ۱ , g_{(x)} = \sqrt[۳]{x}$

ب) $l_{(x)} = \sqrt{x^{۲} + ۱} \rightarrow f_{(x)} = x^{۲} + ۵ , g_{(x)} = \sqrt{x}$

hamyar.in همیار

خیر منحصر بفرد نیست



۸ با توجه به نمودارهای توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $(fog)(-۱) = f(g(-۱)) = f(-۳) = ۱$

ب) $(gof)(۰) = g(f(۰)) = g(۲) = -۶$

پ) $(fog)(۱) = f(g(۱)) = f(-۵) = ۳$

ت) $(gof)(-۱) = g(f(-۱)) = g(۱) = -۵$

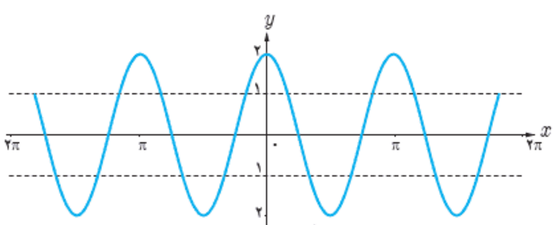
۹ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلات مورد نظر را تشکیل داده و آنها را حل کنید.

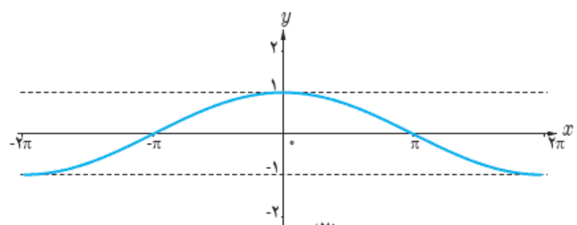
الف) $f(x) = ۲x-۵ \quad , \quad g(x) = x^۲-۳x+۸ : (fog)(x) = ۷$

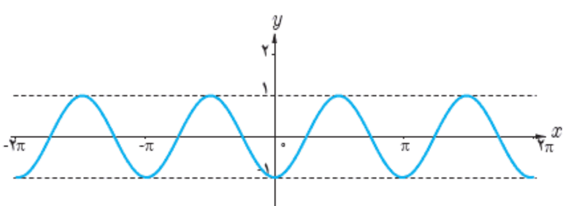
ب) $f(x) = ۳x^۲+x-۱ \quad , \quad g(x) = ۱-۲x \quad : (gof)(x) = -۵$

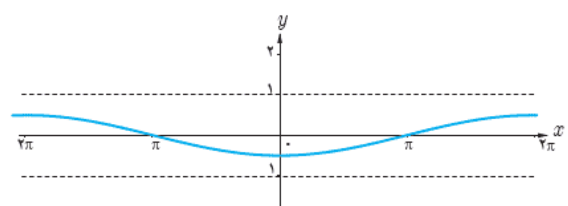
۱۰ با استفاده از نمودار $y=\cos x$، نمودار توابع زیر رسم شده است، ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.

الف) $y = -\frac{۱}{۲}\cos(-\frac{۱}{۲}x)$ ۴ ب) $y=۲\cos ۲x$ ۱ پ) $y = \cos(\frac{۱}{۲}x)$ ۲ ت) $y=-\cos ۲x$ ۳


(۱)

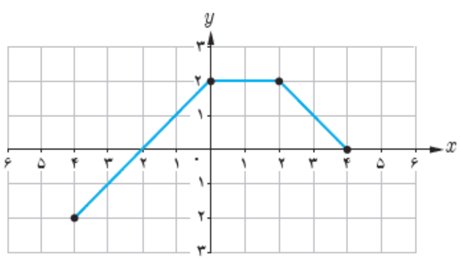

(۲)


(۳)


(۴)

۱۱ نمودار توابع $y = -\sin ۲x - ۱$ و $y = ۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y = \sin x$ در بازهٔ $[-\pi , \pi]$ رسم کنید.

۱۲ با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

ب) $y = -f(-x) + ۲$

پ) $y = ۲f(x-۱) - ۳$

ت) $y = ۲f(\frac{۱}{۲}x)$

پاسخ تمرین ۹:   الف)

$$f(x)=۲x-۵\,,\,g(x)=x^۲-۳x+۸\rightarrow\begin{cases}f(g(x))=۷\\ ۲(x^۲-۳x+۸)-۵\end{cases}\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۱۱=۷$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۶x+۴=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=۲\end{cases}$$

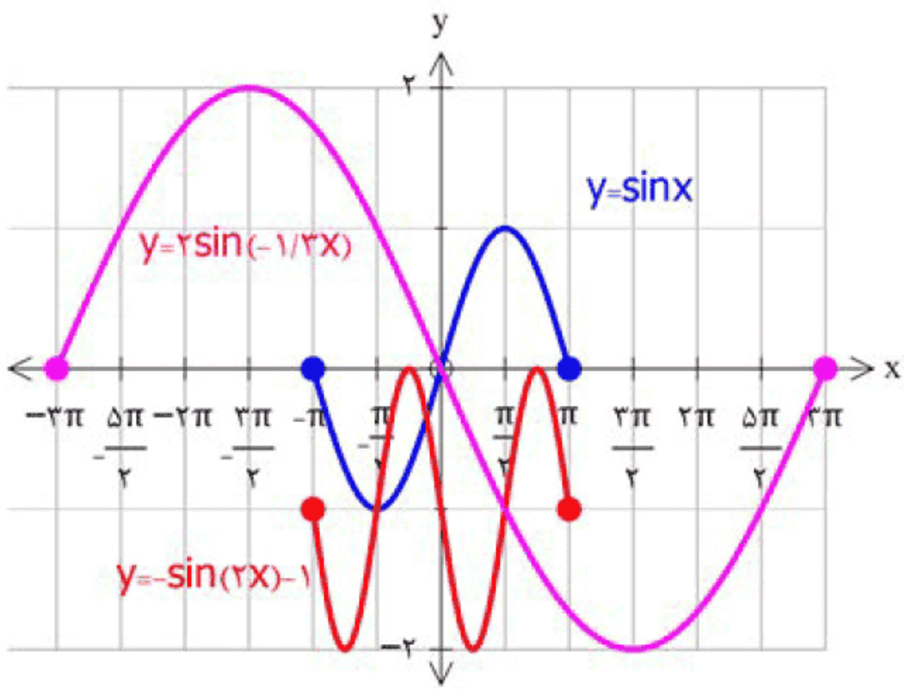
ب)

$$f(x)=۳x^۲+x-۱\,,\,g(x)=۱-۲x\rightarrow\begin{cases}g(f(x))=-۵\\ ۱-۲(۳x^۲+x-۱)\end{cases}\Rightarrow -۶x^۲-۲x+۳=-۵$$

$$\Rightarrow -۶x^۲-۲x+۸=۰\xrightarrow{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=-\frac{۸}{۶}=-\frac{۴}{۳}\end{cases}$$

hamyar.in   همیار

پاسخ تمرین ۱۱:



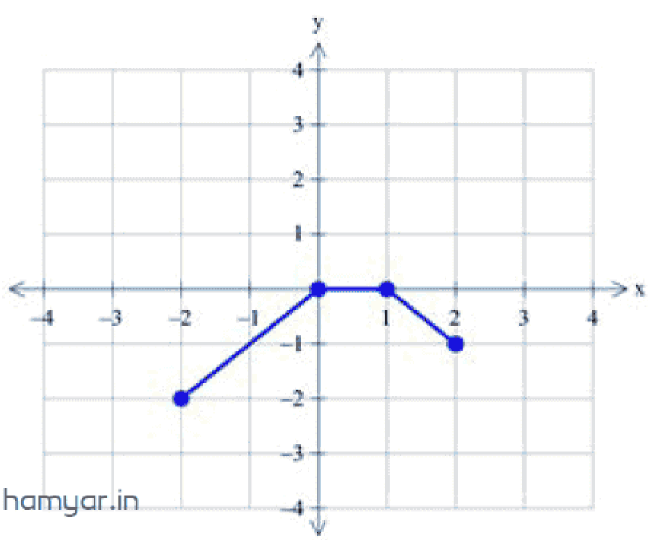
تمرین ۱۲: ۱) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

$$y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱ \qquad ۲x=t \rightarrow t=\frac{۱}{۲}x$$

$\frac{۱}{۲}\times(-۴)$	$\frac{۱}{۲}(-۲)$	$\frac{۱}{۲}(۰)$	$\frac{۱}{۲}(۲)$	$\frac{۱}{۲}(۴)$
$\frac{۱}{۲}(-۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۰)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۰)-۱$

$\Rightarrow$

-۲	-۱	۰	۱	۲
-۲	-۱	۰	۰	-۱



$$y=\begin{cases} x & -۲\le x\le ۰ \\ ۰ & ۰\le x\le ۱ \\ -x+۱ & ۱\le x\le ۲ \end{cases}$$

$$D=[-۲,۲] \qquad R=[-۲,۰]$$

hamyar.in

همیار

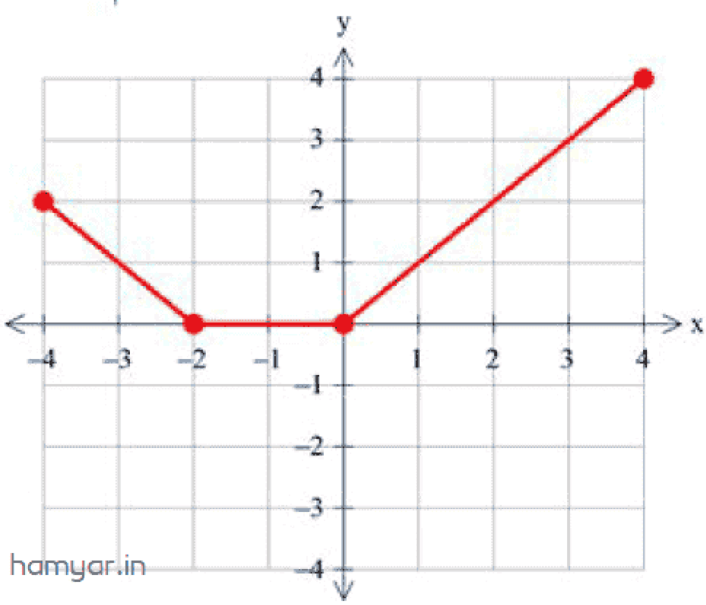
تمرین ۱۲:

۲) $y=-f(-x)+۲$

x	$-(-۴)$	$-(-۲)$	$-(۰)$	$-(۲)$	$-(۴)$
y	$-(-۲)+۲$	$-(۰)+۲$	$-(۲)+۲$	$-(۲)+۲$	$-(۰)+۲$

$\Rightarrow$

x	۴	۲	۰	-۲	-۴
y	۴	۲	۰	۰	۲



$$y=\begin{cases}-x-۲ & -۴\le x\le -۲\\ ۰ & -۲\le x\le ۰\\ x & ۰\le x\le ۴\end{cases}$$

$D=[-۴,۴]$ $\qquad$ $R=[۰,۴]$

hamyar.in

همیار

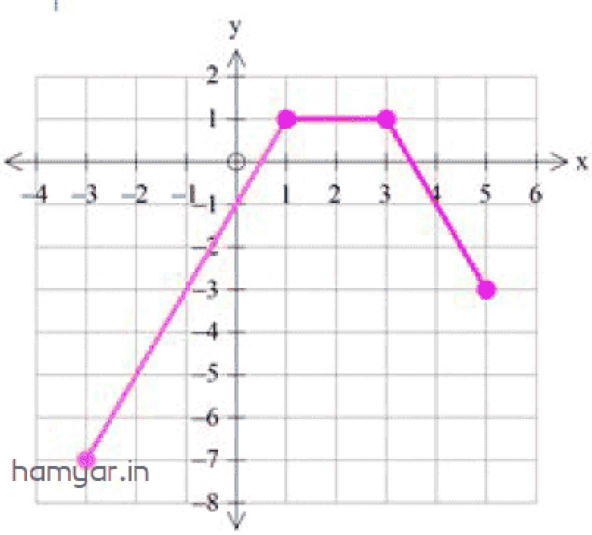
تمرین ۱۲:

۳) $y = ۲f(x-۱) - ۳$

$(-۴)+۱$	$(-۲)+۱$	$(۰)+۱$	$(۲)+۱$	$(۴)+۱$
$۲(-۲)-۳$	$۲(۰)-۳$	$۲(۲)-۳$	$۲(۲)-۳$	$۲(۰)-۳$

$\Rightarrow$

-۳	-۱	۱	۳	۵
-۷	-۳	۱	۱	-۳



$$y = \begin{cases} ۲x - ۱ & -۳ \le x \le ۱ \\ ۱ & ۱ \le x \le ۳ \\ -۲x + ۷ & ۳ \le x \le ۵ \end{cases}$$

$D = [-۳, ۵]$ $\qquad$ $R = [-۷, ۱]$

hamyar.in

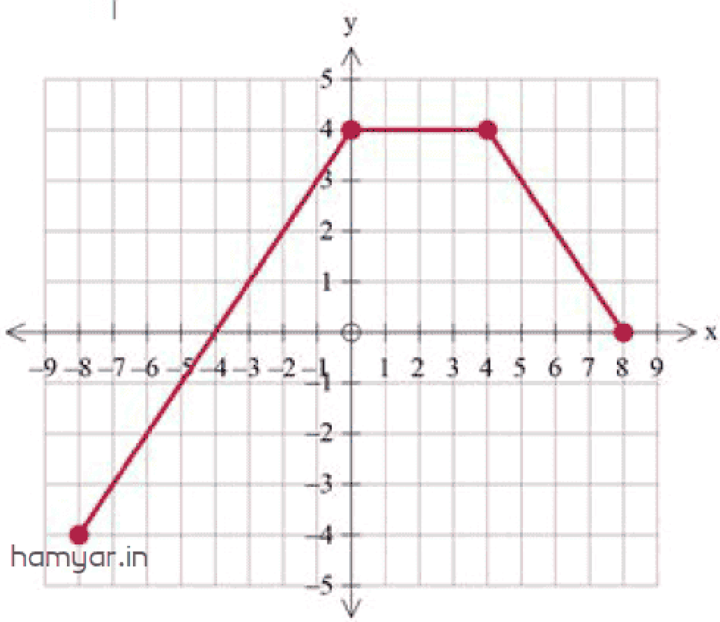
همیار

تمرین ۱۲: $y = ۲f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ (۴

	$۲(-۴)$	$۲(-۲)$	$۲(۰)$	$۲(۲)$	$۲(۴)$
	$۲(-۲)$	$۲(۰)$	$۲(۲)$	$۲(۲)$	$۲(۰)$

$\Rightarrow$

-۸	-۴	۰	۴	۸
-۴	۰	۴	۴	۰



$$y = \begin{cases} x + ۴ & -۸ \leq x \leq ۰ \\ ۴ & ۰ \leq x \leq ۴ \\ -x + ۸ & ۴ \leq x \leq ۸ \end{cases}$$

$D = [-۸, ۸] \qquad R = [-۴, ۴]$

hamyar.in
همیار