درس ۳

معادلات گویا و کسر

معادلاتِ شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازه کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازه کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد : $۲۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=۸$ کیلوگرم

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $۸+x$ و وزن کل محلول $۲۰۰+x$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود :

$$\frac{x+۸}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $۱۰۰(۲۰۰+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰۰(x+۸)=۷(۲۰۰+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت : $۹۳x=۶۰۰$ و در نتیجه $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به‌دست آید.

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $۷(۲۰۰-y)=۸۰۰$ و از آنجا $y=\frac{۶۰۰}{۷}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کار در کلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

وزن نمک $۸+۵=۱۳$

وزن کل محلول $۲۰۰+۵=۲۰۵$ $\quad \frac{۱۳}{۲۰۵-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$ $\quad ۱۴۳۵-۷y=۱۳۰۰$

$y=\frac{۱۳۵}{۷}\simeq ۱۹/۲۹$

برای حل معادلاتِ شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

❖ **مثال** : معادله $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

❖ **حل** : کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^۲-۴)$ است. (چرا؟)

با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم :

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)$$

$$۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۲$$

البته جواب $x=-۲$ مورد قبول نیست. (چرا؟) چون مخرج کسر را صفر می‌کند

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

تعبیر هندسی آن چنین است. طول مستطیلی به مساحت واحد که عرض آن یک واحد کمتر از طولش باشد.

مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبهٔ بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌الله و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

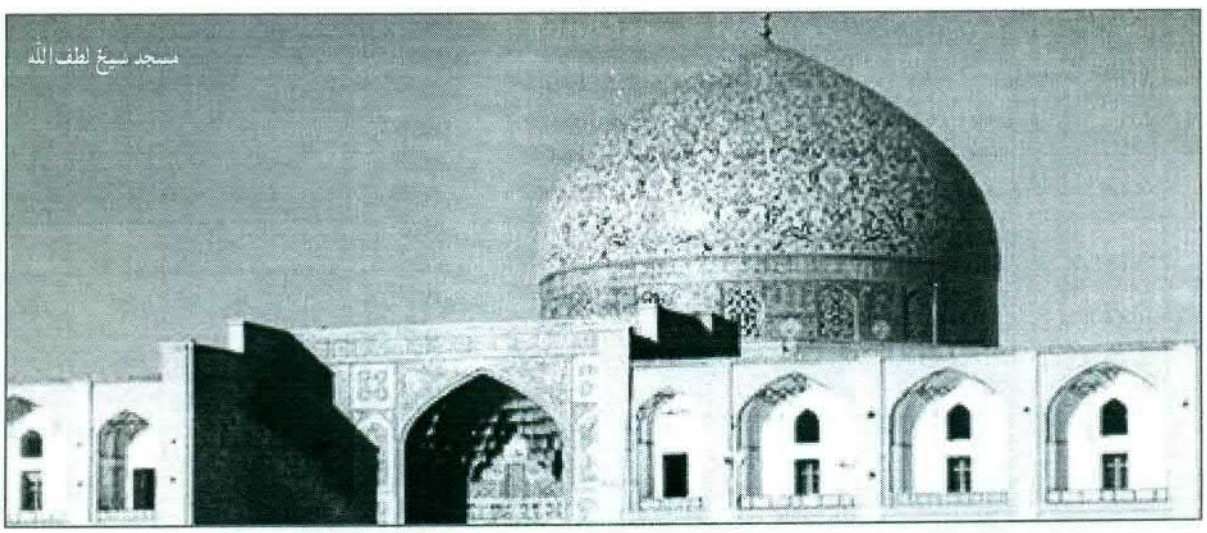
منبع : مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲

کار در کلاس

۱ معادله $\frac{۱}{(x-۲)^۲}+\frac{۲}{x-۲}=۳$ را حل کنید.

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$ آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

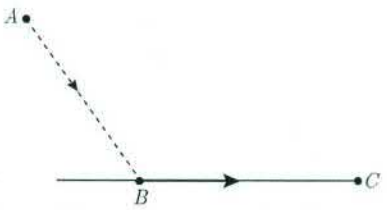
اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل‌شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

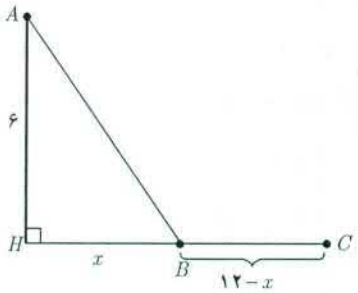


معادلات شامل عبارت‌های گنگ

طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟





❖ **حل :** برای درک بهتر صورت‌مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $۱۲-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{۳۶+x^۲}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف‌شده توسط مرغ دریایی برابر است با : $۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۰(۱۲-x)$

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم :

$$۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۲۰-۱۰x=۱۸۰\Rightarrow ۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}=۱۰x+۶۰$$
$$۷\sqrt{۳۶+x^۲}=۵x+۳۰$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $۲x^۲-۲۵x+۷۲=۰$ می‌رسیم که از آنجا $x=۸$ و $x=۴/۵$. در این‌صورت فاصلهٔ B تا C برابر $۱۲-۸=۴$ یا $۱۲-۴/۵=۷/۵$ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان‌رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی این عمل آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

❖ **مثال :** معادله $\sqrt{x+2}=x-4$ را حل کنید.

❖ **حل :**

$$(\sqrt{x+2})^2=(x-4)^2$$
$$x+2=x^2-8x+16$$
$$x^2-9x+14=0$$
$$(x-2)(x-7)=0 \Rightarrow x=2 \text{ و } x=7$$

آزمایش جواب‌ها

$x_1=2: \sqrt{2+2} \overset{?}{=} 2-4$

$2 \neq -2$ ×

جواب مسئله نیست

$x_2=7: \sqrt{7+2} \overset{?}{=} 17-4$

$3=3$ ✓

جواب معادله است

بنابراین $x=7$ تنها جواب معادله است.

❖ **تذکر :** در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به‌دست آوردن دامنه تعریف داریم :

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x \geq 4$$

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

$x+\sqrt{x}=6 \quad \sqrt{x}=6-x \quad (\sqrt{x})^2=(6-x)^2$

$x=36-12x+x^2 \quad x^2-13x+36=0 \quad (x-4)(x-9)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \text{ قابق} \\ x=9 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

۲ معادله $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟ حاصل جمع دو عبارت نامنفی صفر می‌شود که هر دو صفر باشند

$\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x}=0 \quad \begin{cases} x^2-4=0 \quad x^2=4 \quad x=\pm 2 \\ x=0 \end{cases}$

جواب مشترک وجود نداشته در نتیجه جواب ندارد

۲۲

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}$

۲ $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{۲}$

۳ $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

۴ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

۵ $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

۶ $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

۷ $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴$

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رودخانه اروند (استان خوزستان)

۱) $\frac{۹}{x} = ۲ + \frac{x}{x+۱}$ $\xrightarrow{x(x+۱)\Rightarrow}$ $۹(x+۱) = ۲x(x+۱) + x(x)$

$۹x+۹ = ۲x^۲+۲x+x^۲ \rightarrow ۳x^۲-۶x-۹=۰$ $\quad \Delta = ۱۶+۱۲۸ = ۱۴۴$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶ \pm ۲\sqrt{۳۶}}{۶}$ $\begin{cases} x = \frac{۲+\sqrt{۳۶}}{۳} & \text{قبول} \\ x = \frac{۲-\sqrt{۳۶}}{۳} & \text{قبول} \end{cases}$

۲) $\frac{ρ}{۲-ρ} + \frac{۲}{ρ} = ۵$ $\xrightarrow{ρ(۲-ρ)\Rightarrow}$ $ρ(ρ)+۲(۲-ρ) = ۵ρ(۲-ρ)$

$\rightarrow ρ^۲+۴-۲ρ = ۱۰ρ - ۵ρ^۲ \rightarrow ۶ρ^۲-۱۲ρ+۴=۰ \rightarrow ۳ρ^۲-۶ρ+۲=۰$

$\Delta = ۳۶-۲۴ = ۱۲$ $\quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶ \pm ۲\sqrt{۳}}{۶}$ $\begin{cases} x = \frac{۳+\sqrt{۳}}{۳} & \text{قبول} \\ x = \frac{۳-\sqrt{۳}}{۳} & \text{قبول} \end{cases}$

۳) $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y} + \frac{y+۴}{y+۵} = \frac{y+۱}{y}$

$\xrightarrow{y(y+۵)\Rightarrow}$ $۳y+۵+y(y+۴) = (y+۱)(y+۵)$

$۳y+۵+y^۲+۴y = y^۲+۶y+۵ \rightarrow y=۰$ قبول نیست

۴) $۲\sqrt{x} = \sqrt{۳x+۴} \rightarrow (۲\sqrt{x})^۲ = (\sqrt{۳x+۴})^۲ \rightarrow ۴x = ۳x+۴ \quad x=۴$ قبول

$\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}} = ۱-x \rightarrow (۱+\sqrt{x})(۱-x) = ۱-\sqrt{x}$

$(۱-\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})$

$(۱+\sqrt{x})(۱+\sqrt{x})(۱-\sqrt{x}) - (۱-\sqrt{x}) = ۰$

$(۱-\sqrt{x})\left[(۱+\sqrt{x})^۲ - ۱\right] = ۰$ $\begin{cases} ۱-\sqrt{x}=۰ & \sqrt{x}=۱ \quad x=۱ \text{ قبول} \\ (۱+\sqrt{x})^۲-۱=۰ & (۱+\sqrt{x})^۲ = ۱ \end{cases}$

$\begin{cases} ۱+\sqrt{x}=۱ \rightarrow \sqrt{x}=۰ & x=۰ \text{ قبول} \\ ۱+\sqrt{x}=-۱ \rightarrow \sqrt{x}=-۲ & \text{جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$

۵) $\frac{۱}{\sqrt{x}+۲} = ۲ + \frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$ $\xrightarrow{(\sqrt{x}+۲)(\sqrt{x}-۲)\Rightarrow}$

$\sqrt{x}-۲ = ۲(x-۴)+\sqrt{x}+۲$ $\quad x=۴$ قبول

۶) $\sqrt[۳]{۳x+۱} = ۱-\sqrt{x+۲}$ $\quad (\sqrt[۳]{۳x+۱})^۲ = (۱-\sqrt{x+۲})^۲$

$۹(۳x+۱) = ۴x-۱۴\sqrt{x+۲}+x+۲ \rightarrow ۱۴\sqrt{x+۲} = ۵۷-۲۶x$

$۱۹۶(x+۲) = ۳۲۴x^۲-۳۰۸۶x+۲۸۵۱ \rightarrow ۱۹۶x^۲-۱۱۸۷x+۱۶۹۰=۰$

$\Delta = ۱۴۱۰۶۹ - ۱۳۲۴۸۰ = ۸۱۸۹ = ۹۰۹^۲$ $\quad x = \frac{۱۱۸۷ \pm ۹۰۹}{۳۹۲}$ $\begin{cases} x = \frac{۱۰}{۷} & \text{قبول} \\ x = \frac{۱۳}{۱۴} & \text{قبول} \end{cases}$