درس سوم

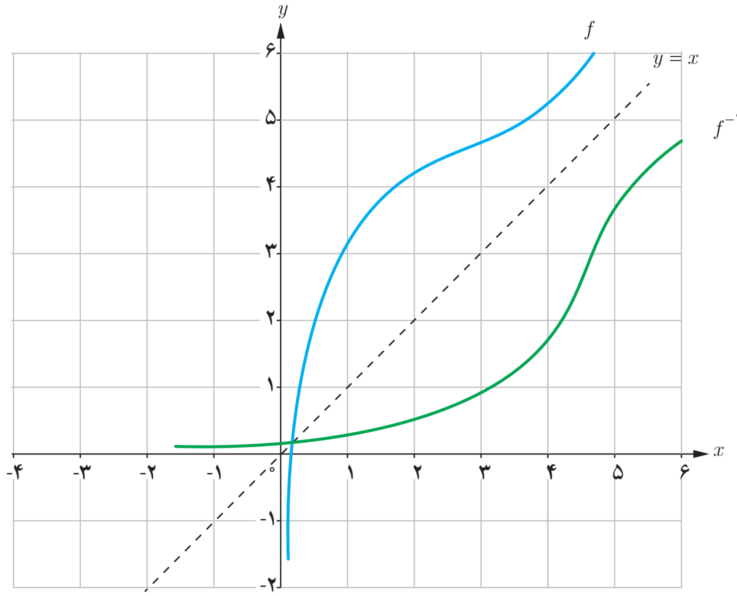
تابع وارون

یادآوری

همان‌طور که در فصل تابع کتاب ریاضی ۲ دیدیم با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج‌های مرتب تابع یک‌به‌یک f، تابعی جدید به‌دست می‌آید که وارون تابع f است و آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم. یعنی اگر نقطهٔ (a , b) روی نمودار تابع f قرار داشته باشد آن‌گاه نقطهٔ (b , a) روی نمودار تابع f^{-1} قرار دارد و به عکس :

$$(a , b) \in f \Leftrightarrow (b , a) \in f^{-1}$$

همچنین دیدیم نمودار تابع f و تابع وارون آن نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ربع اوّل و سوم) قرینه‌اند.



مثال :

اگر $f = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ آن‌گاه :

$$f^{-1} = \{(۴,۱),(۳,۲),(۵,۳)\}$$

خواهیم داشت :

$$\begin{cases} (fof^{-1})(۴) = f(f^{-1}(۴)) = f(۱) = ۴ \\ (fof^{-1})(۳) = f(f^{-1}(۳)) = f(۲) = ۳ \\ (fof^{-1})(۵) = f(f^{-1}(۵)) = f(۳) = ۵ \end{cases} \rightarrow fof^{-1} = \{(۴,۴),(۳,۳),(۵,۵)\}$$

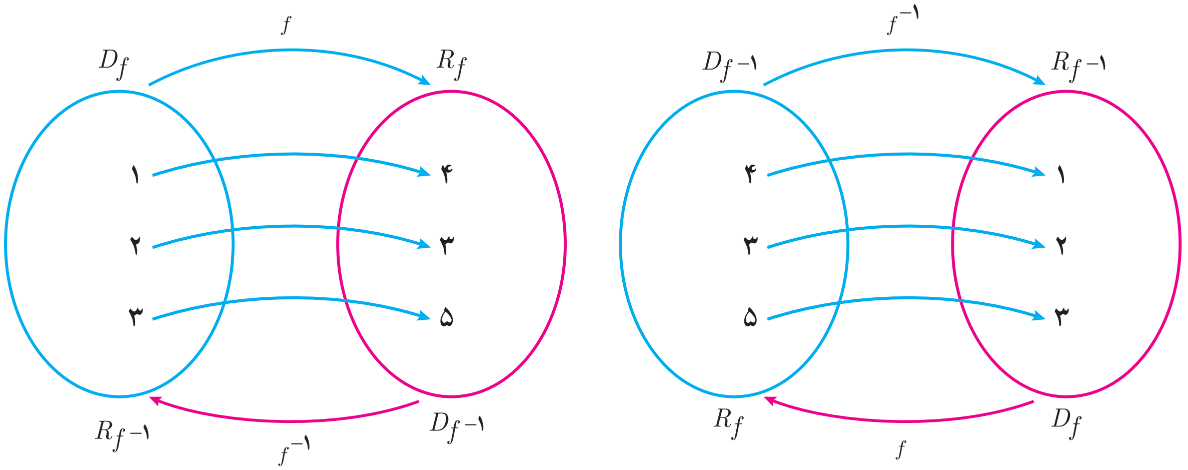
بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f^{-1} داریم :

$$(fof^{-1})(x) = x$$

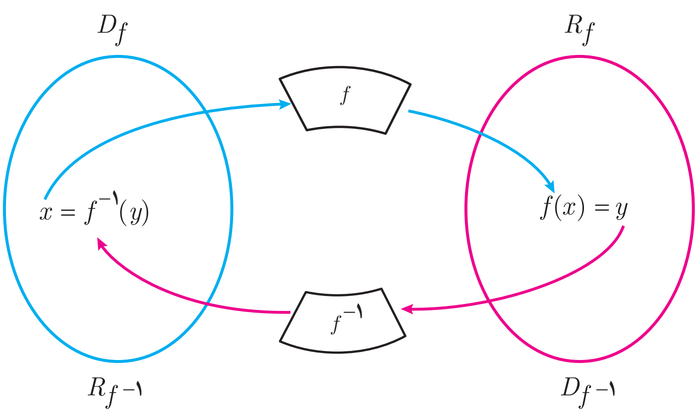
همچنین :

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(1) = f^{-1}(f(1)) = f^{-1}(4) = 1 \\ (f^{-1}of)(2) = f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 2 \\ (f^{-1}of)(3) = f^{-1}(f(3)) = f^{-1}(5) = 3\end{cases} \rightarrow f^{-1}of = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

بنابراین به ازای هر x متعلق به دامنهٔ تابع f داریم : $(f^{-1}of)(x) = x$



به‌طور کلی اگر f تابعی یک‌به‌یک و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و f^{-1} را نشان می‌دهد.



اگر f تابعی وارون‌پذیر و f^{-1} وارون آن باشد، همواره داریم :

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad ; \quad x \in D_{f^{-1}}$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

با توجه به آنچه که دیدیم می‌توان گفت اگر دو تابع f و g به گونه‌ای باشند که :

الف) $(fog)(x) = x \; ; \; x \in D_g$

ب) $(gof)(x) = x \; ; \; x \in D_f$

آنگاه توابع f و g وارون یکدیگرند.

مثال : نشان دهید توابع f و g وارون یکدیگرند.

$$f(x) = ۳x - ۴$$

$$g(x) = \frac{x+۴}{۳}$$

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است، یعنی :

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) - ۴ = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x \qquad (x \in D_g)$$

همچنین :

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+۴}{۳} = \frac{۳x-۴+۴}{۳} = x \qquad (x \in D_f)$$

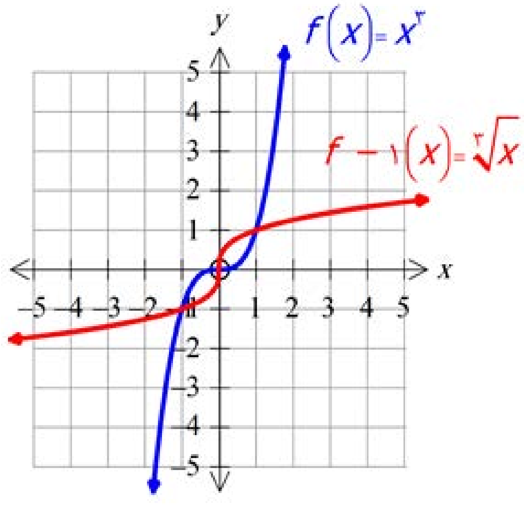
بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادلهٔ $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.[۱]

$$\begin{matrix} y_۱ = x_۱^۳ \\ y_۲ = x_۲^۳ \end{matrix} \xrightarrow{y_۱ = y_۲} x_۱^۳ = x_۲^۳ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

کار در کلاس

آیا تابع $f(x) = x^۳$ یک به یک است؟ چرا؟ در دستگاه مختصات زیر نمودار تابع $f(x) = x^۳$ و وارون آن را رسم کنید. ضابطهٔ تابع وارون چیست؟



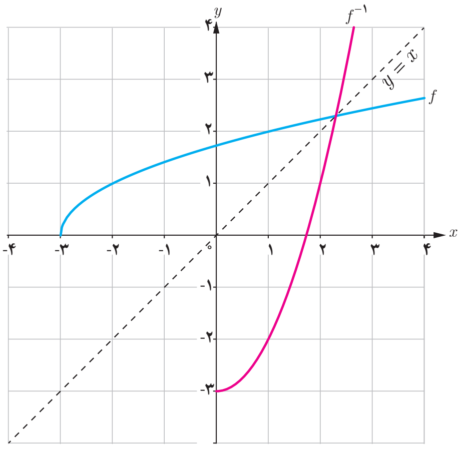
$$f(x) = x^۳ \xrightarrow{y \leftrightarrow x} x = y^۳ \Rightarrow y = \sqrt[۳]{x} \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x}$$

۱ــ توابع مورد نظر در این درس توابع خطی، درجهٔ دوم، $\sqrt{ax+b}$، $x^۳$ و $\sqrt[۳]{x}$ است. رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورده و نمودار آنها را رسم کنید، ضابطهٔ $f^{-۱}$ را نیز به‌دست آورید.
تابع f یک‌به‌یک است، بنابراین دارای وارون است.

$$\begin{cases} D_f=[-۳,+\infty) \\ R_f=[۰,+\infty) \end{cases} \qquad \begin{cases} D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty) \\ R_{f^{-۱}}=[-۳,+\infty) \end{cases}$$

$$y=\sqrt{x+۳}$$
$$y^۲=x+۳$$
$$x=y^۲-۳$$
$$f^{-۱}(y)=y^۲-۳$$
$$f^{-۱}(x)=x^۲-۳$$



کار در کلاس

ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید.

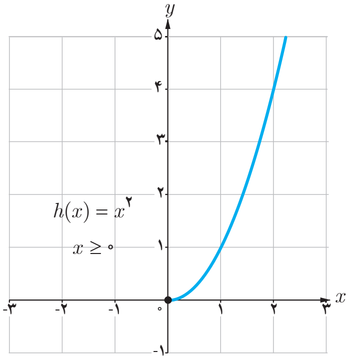
الف) $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$

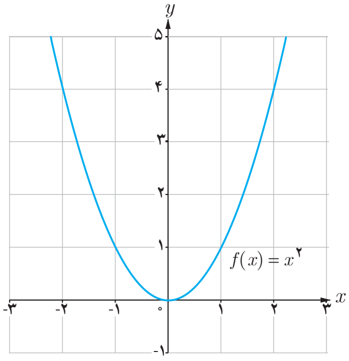
ب) $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$

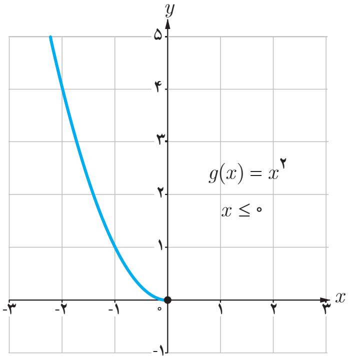
پ) $h(x)=x^۲+۱$

محدود کردن دامنه تابع

از سال قبل می‌دانیم که اگر تابعی یک‌به‌یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنهٔ یک تابع، می‌توان تابعی یک‌به‌یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^۲$ یک‌به‌یک نیست ولی با محدود کردن دامنهٔ تابع به بازهٔ $[۰,+\infty)$ و یا $(-\infty,۰]$ یا زیرمجموعه‌هایی از این دو بازه، تابعی یک‌به‌یک به‌دست می‌آید.







حل کاردر کلاس الف)

$$\underbrace{f(x)=-\frac{1}{2}x+3}_{D_f=\mathbb{R}\quad R_f=\mathbb{R}}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-\frac{1}{2}y+3\rightarrow-\frac{1}{2}y=x-3\rightarrow y=-2x+6\rightarrow\underbrace{f^{-1}(x)=-2x+6}_{D_{f^{-1}}=\mathbb{R}\quad R_{f^{-1}}=\mathbb{R}}$$

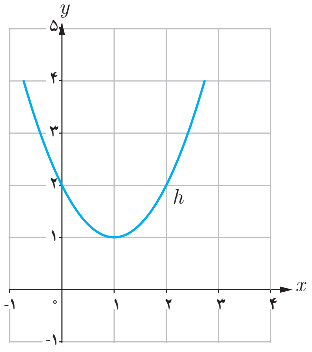
ب)

$$\underbrace{g(x)=1+\sqrt{x-2}}_{D_g=[2,+\infty)\quad R_g=[1,+\infty)}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=1+\sqrt{y-2}\rightarrow\sqrt{y-2}=x-1\rightarrow y-2=(x-1)^2\rightarrow\underbrace{g^{-1}(x)=(x-1)^2+2}_{D_{g^{-1}}=[1,+\infty)\quad R_{g^{-1}}=[2,+\infty)}$$

پ)

$$\underbrace{h(x)=x^2+1}_{D_h=[0,+\infty)\quad R_h=[1,+\infty)}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=y^2+1\rightarrow y^2=x-1\rightarrow y=\sqrt{x-1}\rightarrow\underbrace{h^{-1}(x)=\sqrt{x-1}}_{D_{h^{-1}}=[1,+\infty)\quad R_{h^{-1}}=[0,+\infty)}$$

مثال : نمودار تابع $h(x)=x^{2}-2x+2$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. اما می‌توان با محدود کردن دامنهٔ این تابع آن را طوری محدود کرد که تابعی یک‌به‌یک به‌دست آید و سپس وارون آن را محاسبه کرد.



$$h(x)=x^{2}-2x+2=(x-1)^{2}+1$$

مثلاً دامنهٔ تابع h را به بازهٔ $[1,+\infty)$ محدود می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید که آن را $k(x)$ می‌نامیم با ضابطهٔ $h(x)$ برابر است اما دامنهٔ تابع h مجموعهٔ اعداد حقیقی و دامنهٔ تابع k بازهٔ $[1,+\infty)$ است.

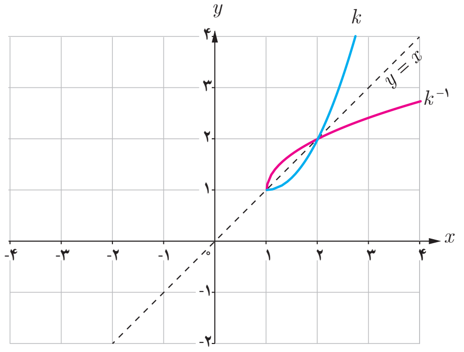
در تابع k، x را برحسب y به‌دست می‌آوریم :

$$k(x)=(x-1)^{2}+1$$
$$y=(x-1)^{2}+1$$
$$(x-1)^{2}=y-1$$
$$x-1=\pm\sqrt{y-1}$$
$$x=\pm\sqrt{y-1}+1$$
$$k^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+1$$

جواب منفی غیرقابل قبول است. (چرا؟)

زیرا دامنه k اعداد مثبت برزگترمساوی یک است

نمودار توابع k و k^{-1} به‌صورت زیر است :



باغ ارم شیراز

تمرین

۱ ضابطهٔ تابع وارون توابع یک‌به‌یک زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}$

ب) $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$

۲ در مورد هر یک از قسمت‌های زیر نشان دهید که f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=\frac{-۷}{۲}x-۳$, $g(x)=-\frac{۲x+۶}{۷}$

ب) $f(x)=-\sqrt{x-۸}$, $g(x)=۸+x^۲\ ;\ x\leq ۰$

۳ رابطهٔ بین درجهٔ سانتی‌گراد و فارنهایت که برای اندازه‌گیری دما استفاده می‌شوند به‌صورت $f(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ است که در آن x میزان درجهٔ سانتی‌گراد و $f(x)$ میزان درجهٔ فارنهایت است. $f^{-۱}(x)$ را به دست آورده و توضیح دهید چه چیزی را نشان می‌دهد.

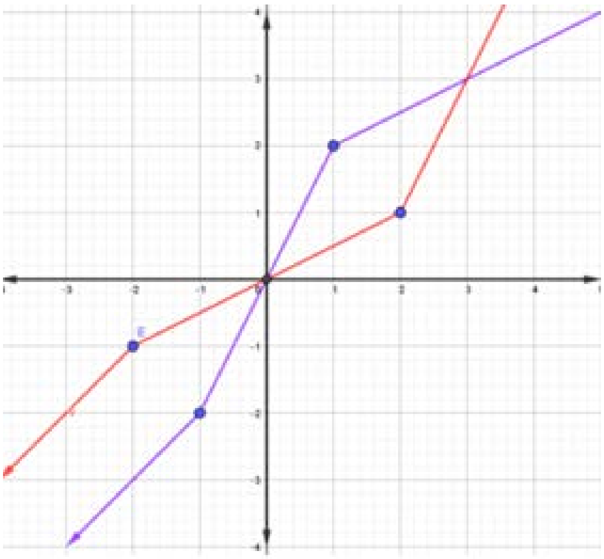
۴ توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنهٔ آنها به دو روش متفاوت توابعی یک‌به‌یک بسازید.

الف) $f(x)=|x|$

ب) $g(x)=-x^۲$

پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۵ از نمودار تابع f برای تکمیل جدول استفاده کنید.



x	-۴	-۲	۲	۳
$f^{-۱}(x)$	-۳	-۱	۱	۳

۶ با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^۲-۴x+۵$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید و این دو تابع را رسم کنید.

۷ اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$

ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$

پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

تمرین۱:

$$f(x)=\frac{-۸x+۳}{۲}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=\frac{-۸y+۳}{۲}\rightarrow -۸y=۲x-۳\rightarrow$$

$$y=\frac{-۲x+۳}{۸}\rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x+۳}{۸}$$

$$g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{x\leftrightarrow y}x=-۵-\sqrt{۳y+۱}\rightarrow -\sqrt{۳y+۱}=x+۵$$

$$\rightarrow ۳y+۱=(x+۵)^{۲}\rightarrow ۳y=(x+۵)^{۲}-۱\rightarrow y=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}\rightarrow g^{-۱}(x)=\frac{(x+۵)^{۲}-۱}{۳}$$

تمرین ۲:

الف)

$$fog(x)=f(g(x))=-\frac{\cancel{۳}}{۲}\left(-\frac{۲x+۶}{\cancel{۳}}\right)-۳=x+۳-۳=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=-\frac{۲\left(\frac{-۷x}{۲}-۳\right)+۶}{۷}=\frac{۷x-۶+۶}{۷}=x$$

ب)

$$fog(x)=f(g(x))=-\sqrt{۸+x^۲-۸}=-\sqrt{x^۲}=-|x|\xrightarrow{x\leq ۰}=-(-x)=x$$

$$gof(x)=g(f(x))=\left(-\sqrt{x-۸}\right)^۲+۸=x-۸+۸=x$$

تمرین ۳::

$$f(x)=\frac{9}{5}x+32\xrightarrow{y\leftrightarrow x}x=\frac{9}{5}y+32\Rightarrow 5x=9y+160\rightarrow 9y=5x-160\rightarrow y=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{5}{9}x-\frac{160}{9}$$

میزان تغییرات درجه نسبت به فارینهایت را نشان می دهد

تمرین ۴:

الف) $x\geq 0$ $\quad f(x)=|x|$

ب) $x\leq 0$ $\quad g(x)=-x^2$

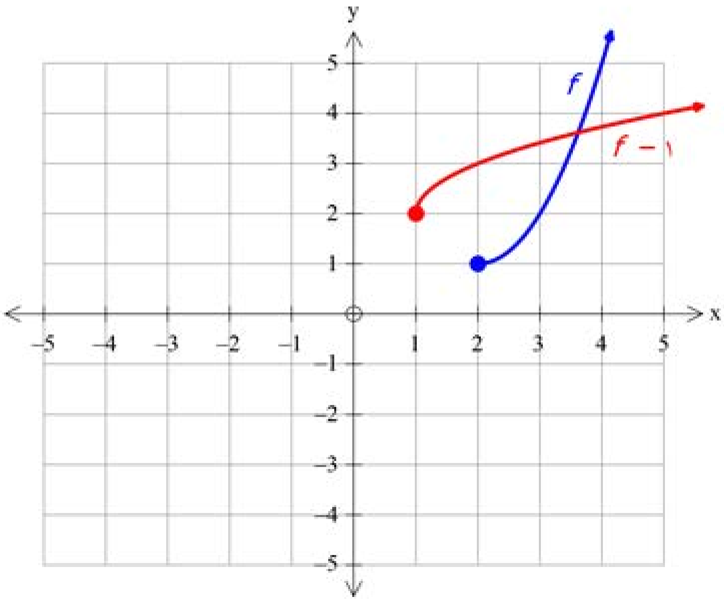
پ) $x\geq -2$ $\quad h(x)=(x+2)^2-1$

تمرین ۶:

$$f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \qquad D_f=[2,+\infty) \qquad R_f=[1,+\infty)$$

$$y=(x-2)^2+1 \rightarrow y-1=(x-2)^2 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{y-1} \Rightarrow x=\pm\sqrt{y-1}+2$$

$$\xrightarrow{x\geq 2} f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2 \qquad D_{f^{-1}}=[1,+\infty) \qquad R_{f^{-1}}=[2,+\infty)$$



تمرین ۷:

الف)

$$\left(f^{-1}of^{-1}\right)(۶)=f^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(۶)}_{۸(۶+۳)=۷۲}\right)=f^{-1}(۶)=۸(۷۲+۳)=۶۰۰$$

پ)

$$(fog)^{-1}(۵)=\sqrt[۳]{۸\times ۵+۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

$$(fog)(x)=f\left(x^{۳}\right)=\frac{۱}{۸}x^{۳}-۳\rightarrow y+۳=\frac{۱}{۸}x^{۳}\rightarrow x^{۳}=۸y+۲۴\rightarrow x=\sqrt[۳]{۸y+۲۴}$$

$$(fog)^{-1}(x)=\sqrt[۳]{۸x+۲۴}$$

ت)

$$\left(g^{-1}of^{-1}\right)(۵)=g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(۵)}_{۸(۵+۳)=۶۴}\right)=g^{-1}(۶۴)=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$$

سوال: تحت چه شرایطی تابع هموگرافیک معکوس خودش می شود؟

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad c\neq 0,\ ad-bc\neq 0$$

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\rightarrow cxy+dy=ax+b\rightarrow x(cy-a)=-dy+b\rightarrow x=\frac{-dy+b}{cy-a}\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$f(x)=f^{-1}(x)\rightarrow\begin{cases}a=-d\\ d=-a\end{cases}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}=R_{f^{-1}}\quad,\quad R_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{a}{c}\right\}=D_{f^{-1}}$$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\ ,\ f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$\left(fof^{-1}\right)(x)=f\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)=\frac{a\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)+b}{c\left(\frac{-dx+b}{cx-a}\right)+d}=\frac{\frac{-adx+ab+bcx-ab}{cx-a}}{\frac{-dcx+bc+dcx-ad}{cx-a}}\xrightarrow[bc-ad\neq 0]{x\neq\frac{a}{c}}\left(fof^{-1}\right)(x)=x$$

$$\left(f^{-1}of\right)(x)=f^{-1}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)=\frac{-d\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)-a}=\frac{\frac{-adx-bd+bcx+db}{cx+d}}{\frac{cax+cb-acx-ad}{cx+d}}\xrightarrow[-bc+ad\neq 0]{x\neq\frac{d}{c}}\left(f^{-1}of\right)(x)=x$$

روستای رهلی داغلار ـــ آذربایجان شرقی