حل المسائل ریاضیات گسسته

دوازدهم ریاضی

کانال گام به گام درسی :

@GamBeGam-Darsi

با تشکر از آقای افشین ملاسعیدی و همکارانشان برای تهیه و تنظیم این فایل

درس ۱ استدلال ریاضی

نقش استدلال در زندگی انسان‌ها انکارناپذیر است. همهٔ ما در زندگی روزمره و یا در زندگی حرفه‌ای خود نیازمند کسب توانمندی در این زمینه هستیم. تسلیم عقل در برابر استدلال موهبتی الهی است که امکان تعامل بین انسان‌ها و توسعه علوم گوناگون و رشد و بالندگی را در زمینه‌های مختلف برای بشر فراهم ساخته است. استدلال و اثبات در ریاضیات نیز جایگاه ویژه‌ای دارد. درک و فهم ریاضی بدون توجه به استدلال امکان ندارد و آموزش ریاضیات را محدود به حفظ کردن رویه‌ها و الگوریتم‌ها خواهد کرد. آشنایی با روش‌های استدلال و اثبات در ریاضیات، هم به فهم ریاضیات و هم به بسط و توسعه آن کمک شایانی می‌نماید. هدف ما در این درس آشنایی با برخی از روش های استدلال و اثبات در ریاضی است.

مثال : درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید :

الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) عدد $۲^{۲^n} + ۱$ به ازای همه عددهای طبیعی n، عددی اول است.

حل : گاهی ممکن است برای فهم یک گزاره، مثال‌هایی را برای صدق آن بررسی کنیم.

برای نمونه برای گزاره الف داریم :

$۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۳۳ \qquad ۵ + ۶ + ۷ = ۱۸$

$۳۱ + ۳۲ + ۳۳ = ۹۶ \qquad ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ = ۷۸$

در همه موارد حاصل جمع های به‌دست آمده، درستی گزاره الف را نشان می‌دهند همچنین برای $n = ۱$, $n = ۲$, $n = ۳$ و $n = ۴$ حاصل $۲^{۲^n} + ۱$ به ترتیب برابر ۵، ۱۷، ۲۵۷ و ۶۵۵۳۷ است که همگی اعداد اول هستند و ظاهراً بر درستی گزاره ب دلالت می‌کنند.

آیا ارائه این مثال‌ها برای برقراری گزاره‌های الف و ب کافی هستند، اگر کافی نیست آیا ارائه مثال‌های بیشتر کفایت می‌کند؟

در مورد الف هر چقدر مثال ارائه کنید، مشاهده خواهید کرد که گزاره برقرار است، اما در مورد گزاره ب، اگر $n = ۵$ آن‌گاه :

$$۲^{۲^۵} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷ = ۶۴۱ \times ۶۷۰۰۴۱۷$$

که به وضوح نشان می‌دهد، حاصل یک عدد اول نیست. همین «مثال نقض» نشان می‌دهد که گزارهٔ ب در حالت کلی درست نیست. این روش استدلال به‌صورت معمول برای رد کردن یک حکم کلی به‌کار می‌رود و استدلال به کمک «مثال نقض» است.

در مورد گزاره الف با اینکه نمی‌توانید مثال نقضی ارائه کنید، امّا درستی گزاره با ارائه مثال به‌دست نمی‌آید. مثلاً یک احتمال این است که نتوانید مثال نقضی ارائه کنید و یا اینکه تاکنون مثال نقضی برای آن ارائه نشده باشد. به هر حال در اینجا اثبات دشوار نیست. کافی است سه عدد طبیعی را با n، $n+1$ و $n+2$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$n+n+1+n+2=3n+3=3(n+1)$$

که نشان می‌دهد گزاره الف در حالت کلی درست است.

این نوع اثبات کردن را «اثبات مستقیم» می‌نامند. البته اثبات مستقیم ممکن است کاملاً پیچیده باشد. هدف این کتاب طرح اثبات‌های دشوار نیست[1]. محتوای آموزش این درس در چارچوب مطالبی است که تاکنون آموخته‌اید. در کار در کلاس نمونه‌هایی از استدلال به روش «اثبات مستقیم» و استدلال به کمک «مثال نقض» را مشاهده خواهید کرد.

کار در کلاس

هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است. گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد فرد را با $2n-1$, $2m-1$ به فرض $n,m\in\mathbb{Z}$ نمایش دهیم. در این صورت:

$$2n-1+2m-1=2n+2m-2=2(n+m-1) \longrightarrow \text{عدد زوج}$$

ب) برای هر دو عدد حقیقی x و y : $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

اگر $x=9$ و $y=16$ آنگاه:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x+y}&=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}&=\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow \sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

بنابراین گزاره صحیح نیست.

پ) حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست سه عدد طبیعی متوالی را با $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ به فرض $n\in\mathbb{N}$ نمایش دهیم. در این صورت حاصل ضرب آنها $(n+3)(n+2)(n+1)$ خواهد بود و می‌توان نوشت:

$$(n+3)(n+2)(n+1)=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)\times n!\times 3!}{n!\times 3!}=\frac{(n+3)!}{n!\times 3!}\times 3!=\underbrace{\binom{n+3}{3}}_{\in\mathbb{N}}\times 6$$

$\Rightarrow$ $(n+3)(n+2)(n+1)$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

ت) برای هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، عدد 2^n-1 اول است.

اگر $n=4$ آنگاه: $2^4-1=16-1=15$ ، عدد اول نیست. بنابراین گزاره غلط است.

ث) مجموع هر دو عدد گویا، عددی گویاست.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست دو عدد گویا را با $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ نمایش دهیم که a و b و c و d اعداد صحیح بوده و b و d مخالف صفر باشند، بنابراین:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{\text{عدد صحیح}}{\text{عدد صحیح ناصفر}}=\text{عدد گویا}$$

ج) اگر برای هر سه مجموعه A، B و C داشته باشیم $A\cup B=A\cup C$ آنگاه $B=C$.

اگر $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{2,4\}$ و $C=\{4\}$ ، آنگاه $A\cup B=A\cup C=\{1,2,3,4\}$ ولی $B\neq C$.

چ) اگر k حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4k+1$ مربع کامل است.

گزاره صحیح است. اثبات: کافیست $k=n(n+1)$ به فرض $n\in\mathbb{N}$ در نظر گرفته شود، بنابراین:

$$4k+1=4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2 \longrightarrow \text{مربع کامل}$$

خواندنی

یافتن مثال نقض ممکن است کار بسیار دشواری باشد. گاهی سال‌ها وقت برای یافتن مثال نقض لازم بوده است. به‌طور مثال عبارت $991n^2+1$ را برای nهای طبیعی درنظر بگیرید. اگر حاصل این عبارت را برای $n=1$، $n=2$، ... و $n=1000$ به‌دست آورید هیچ کدام مجذور کامل نمی‌باشند. آیا به نظر شما می‌توان حکم کرد که «برای nهای طبیعی عبارت $991n^2+1$ هیچ‌گاه مجذور کامل نیست.» پاسخ منفی است! سرپینسکی ریاضی‌دان معاصر لهستانی، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به ازای آن $991n^2+1$ مجذور کامل باشد را ارائه کرد. این عدد ۲۹ رقم دارد؛ عدد $n=12055735790331359447442538767$ مثال نقض مورد نظر است.

1ــ طرح مسائل در ارزشیابی‌ها باید در سطح مطالب کتاب باشد. طرح مسائل پیچیده که نیاز به دانش محتوایی سطح بالا دارند مورد تأیید مؤلفین نیست.

اثبات با درنظر گرفتن همه حالت‌ها

گاهی برای اثبات یک گزاره لازم است همهٔ موارد ممکن درمورد مسئله را درنظر بگیریم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n، $n^{۲} - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

حل : دو حالت در اینجا ممکن است رخ دهد :

الف) n زوج است، به‌عبارت دیگر $n = ۲k$ ($k \in \mathbb{N}$)؛ در این حالت داریم :

$$n^{۲} - ۵n + ۷ = (۲k)^{۲} - ۵(۲k) + ۷ = ۴k^{۲} - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^{۲} - ۵k + ۳) + ۱$$

که حاصل یک عدد فرد است.

ب) n فرد است، یعنی $n = ۲k - ۱$ ($k \in \mathbb{N}$)؛ در این حالت هم داریم :

$$n^{۲} - ۵n + ۷ = (۲k - ۱)^{۲} - ۵(۲k - ۱) + ۷ = ۴k^{۲} - ۴k + ۱ - ۱۰k + ۵ + ۷$$
$$= ۴k^{۲} - ۱۴k + ۱۳ = ۲(۲k^{۲} - ۷k + ۶) + ۱$$

که باز هم حاصل یک عدد فرد است.

به عبارت دیگر زوج یا فرد بودن n، فرد بودن $n^{۲} - ۵n + ۷$ را نتیجه می‌دهد.

اگر زوج بودن n را با p و فرد بودن n را با q و فرد بودن $n^{۲} - ۵n + ۷$ را با r نمایش دهیم، حکم را می‌توان به‌صورت گزاره $p \vee q \Rightarrow r$ نمایش داد. با توجه به هم‌ارزی $p \vee q \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ شیوهٔ اثبات در مثال فوق توجیه می‌شود.

$$\begin{aligned} p \vee q \Rightarrow r &\equiv r \vee \sim (p \vee q) \\ &\equiv r \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (r \vee \sim p) \wedge (r \vee \sim q) \\ &\equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \end{aligned}$$

به‌طریق مشابه، برای هر تعداد متناهی گزارهٔ دلخواه داریم :

$$P_{۱} \vee P_{۲} \vee \ldots P_{n} \Rightarrow r \equiv (P_{۱} \Rightarrow r) \wedge (P_{۲} \Rightarrow r) \wedge \ldots (P_{n} \Rightarrow r)$$

نوعی دیگری از درنظر گرفتن حالت‌های ممکن، در مثال زیر ارائه شده است.

مثال : ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = ۰$ آنگاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

حل : برای a دو حالت ممکن است رخ دهد :

الف) اگر $a = ۰$، در این حالت حکم برقرار است (چرا؟) **زیرا گزاره $a = ۰$ یا $b = ۰$ یک ترکیب فصلی است و اگر $a = ۰$ درست فرض شود ، کل ترکیب درست خواهد بود .**

ب) اگر $a \neq ۰$، در این حالت $a^{-۱}$ (معکوس a) یک عدد حقیقی است و با ضرب طرفین رابطه $ab = ۰$ در $a^{-۱}$ داریم :

$$ab = ۰ \Rightarrow a^{-۱}(ab) = a^{-۱} \times ۰$$
$$\Rightarrow b = ۰$$

بنابراین در هر دو حالت حکم برقرار است.

الف) اگر a و b دو عدد صحیح باشند و ab عددی فرد باشد، ثابت کنید $a^2 + b^2$ زوج است.

فقط درحالتی ab فرد است که a و b هردو فرد باشند زیرا اگر حداقل یکی از آنها زوج باشد ab زوج خواهد شد.
بنابراین با فرض $a=2n-1$ و $b=2m-1$ ، $n,m \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$a^2+b^2=(2n-1)^2+(2m-1)^2=4n^2-4n+1+4m^2-4m+1=4n^2-4n+4m^2-4m+2=2(2n^2-2n+2m^2-2m+1)$$

که حاصل عددی زوج است.

ب) $A = \{3, 4\}$ یک زیرمجموعه از مجموعه $S = \{1, 2, ..., 6\}$ است و $n \in S$ ، اگر $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج باشد ثابت کنید $n \in A$.

کافیست هر شش عضو S را بررسی کنیم (درنظر گرفتن تمام حالت ها):

$n=1 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1\times 4}{4} = 1 \rightarrow$ زوج نیست

$n=2 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{4\times 9}{4} = 9 \rightarrow$ زوج نیست

$n=3 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9\times 16}{4} = 36 \rightarrow$ زوج است

$n=4 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16\times 25}{4} = 100 \rightarrow$ زوج است

$n=5 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{25\times 36}{4} = 225 \rightarrow$ زوج نیست

$n=6 \Rightarrow \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{36\times 49}{4} = 441 \rightarrow$ زوج نیست

بنابراین فقط برای $n=3$ و $n=4$ ، عدد $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ یک عدد زوج می‌باشد به عبارت دیگر $n \in A$ است.

اثبات غیرمستقیم

اثبات به روش برهان خلف

در هندسه (۱) با اثبات به روش برهان خلف که نوعی اثبات غیرمستقیم است آشنا شده‌اید. در روش برهان خلف فرض می‌کنیم که حکم نادرست باشد و سپس با استفاده از قوانین منطق گزاره‌ها و دنباله‌ای از استدلال‌های درست و مبتنی بر فرض به یک نتیجه غیرممکن یا نتیجه متضاد با فرض می‌رسیم و از آنجا (با توجه به منطقی بودن همه مراحل) معلوم می‌شود که فرضِ نادرست بودنِ حکم باطل است و درستی حکم ثابت می‌گردد.

در تعاملات و محاورات روزمره هم ممکن است از این روش استدلال استفاده کنیم. آنجا که با فردی نظری کاملاً متضاد داریم و به درستی نظر خود اطمینان داریم، برای رسیدن به نتیجه موردنظرمان، موقتاً نظر مخالف خود را می‌پذیریم و با استفاده از دنباله‌ای از استدلال‌ها و ادبیاتی که مورد توافق دو طرف است، نشان می‌دهیم که پذیرفتن نظر او به بن بست یا تناقض منجر می‌شود.

مثال : ثابت کنید حاصل‌جمع یک عددگویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم که r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ باشد. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است. اگر (فرض خلف) $r + x$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است. از طرفی می‌دانیم که تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست، پس تفاضل $r + x$ و r باید عددی گویا باشد یعنی $r + x - r \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض ما در تناقض است. درنتیجه فرض خلف باطل است و حکم اثبات می‌گردد.

مثال : حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

حل : فرض کنیم r یک عدد گویای ناصفر باشد و x عددی گنگ باشد ولی rx عددی گویا (فرض خلف) باشد. می‌دانیم که حاصل‌ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویاست. علاوه بر این معکوس هر عدد گویای ناصفر هم عددی گویاست. بنابراین $(\frac{1}{r})(rx) \in Q$ و از آنجا $x \in Q$ که با فرض در تناقض است.

مثال : a_1 ، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند و b_1 ، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

حل : برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. a_1 ، a_2 و a_3 را به‌ترتیب، ۵، ۸ و ۱ درنظر می‌گیریم و b_1 ، b_2 و b_3 را ۸، ۱ و ۵ درنظر می‌گیریم، داریم :

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)=(5-8)(8-1)(1-5)=(-3)(7)(-4)=84$$

اگر $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است. پس هر سه عامل a_1-b_1 ، a_2-b_2 و a_3-b_3 هم باید فرد باشند (چرا؟) و درنتیجه مجموع آنها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)$ باید عددی فرد باشد. امّا مجموع این سه عبارت صفر است!

زیرا فقط حاصلضرب سه عدد فرد ، عددی فرد خواهد شد و در صورتی که حداقل یکی از آنها زوج باشد ، حاصلضرب زوج می شود .

کار در کلاس

درستی گزاره‌های زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، ثابت کنید $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

برهان خلف : فرض کنیم $\frac{1}{x}$ عددی گویا باشد، از طرفی می‌دانیم وارون هر عدد گویای ناصفر، عددی گویاست پس وارون $\frac{1}{x}$ یعنی x نیز گویاست که با فرض سؤال تناقض دارد، پس $\frac{1}{x}$ عددی گنگ است

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته ولی g در $x=a$ ناپیوسته باشد، ثابت کنید $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

برهان خلف : فرض کنیم $f+g$ در $x=a$ پیوسته باشد، از طرفی تفریق دو تابع پیوسته، پیوسته است

پس $(f+g)-f=g$ در $x=a$ پیوسته است که با فرض سؤال تناقض دارد پس

$f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

اثبات‌های بازگشتی / گزاره‌های هم‌ارز

اگر ارزش دو گزاره یکسان باشد آنها را گزاره‌های هم ارز (هم ارزش) می‌نامیم.

اگر P و Q دو گزاره هم ارز (یعنی همواره هر دو درست یا هر دو نادرست) باشند، آن‌گاه گزاره‌های $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ هر دو درست هستند و در نتیجه $P \Leftrightarrow Q$ یک گزاره درست است.

به عکس اگر ترکیب دو شرطی $P \Leftrightarrow Q$ درست باشد، آن‌گاه P و Q دو گزاره هم ارز خواهند بود و اگر ارزش یکی از آنها را بدانیم، ارزش دیگری نیز همان خواهد بود. به کمک این موضوع می‌توانیم درستی یا نادرستی یک گزاره را بررسی کنیم. در عمل به‌طور معمول درستی یا نادرستی گزاره‌ای که معمولاً ساده‌تر است را انتخاب می‌کنیم. البته این کار ممکن است که در یک مرحله انجام نشود، به‌طور مثال اگر P ، Q و R سه گزاره باشند و $Q \Leftrightarrow R$ و $P \Leftrightarrow Q$ یعنی ارزش سه گزاره یکسان است و اثبات درستی یا نادرستی هر یک، تکلیف دو گزاره دیگر را معلوم خواهد کرد. به‌هر حال ممکن است این عمل ادامه یابد و در تعدادی متناهی مرحله کار انجام شود.

با توجه به آنچه گفته شد، در هنگام استفاده از این روش اثبات (که گاهی به آن «روش بازگشتی» هم می‌گویند) توانایی ارائه ترکیب دو شرطی درست و مناسب بسیار اساسی است.

مثال : ترکیب دو شرطی $(a,b \in \mathbb{R})$ ، $a=b \Leftrightarrow a^3=b^3$ درست است ولی ترکیب دو شرطی $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$ درست نیست (چرا؟)

زیرا $a^2=b^2 \Rightarrow a=b \quad \vee \quad a=-b$ **و نمی توان به طور قطع ادعا کرد** $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$

اگر $a,b \in \mathbb{R}$ کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

ب) $a<b \Leftrightarrow a^3<b^3$ درست

الف) $a<b \Leftrightarrow a^2<b^2$

نادرست، به طور مثال از $-2<2$ نتیجه می‌شود که $4<9$ و این نامساوی منطقی نیست

مثال : اگر $a>0$ ثابت کنید $a+\frac{1}{a}\geq 2$

اگر $a>0$، داریم : $a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$

این ترکیب دو شرطی بیان نمی‌کند که کدام گزاره درست است، بلکه تنها بیانگر آن است که دو گزاره هم ارز هستند و اثبات هر کدام، دیگری را نتیجه می‌دهد. به نظر شما چرا این دو گزاره هم ارز هستند؟ **زیرا می توان طرفین یک نامساوی را در هر عدد مثبت (مانند a)ضرب یا بر آن تقسیم کرد.** اثبات کدام‌یک ساده‌تر است؟ **اثبات $a^2+1\geq 2a$ ساده تر است.**

همچنین $a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0$

و درنهایت : $a^2+1-2a\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$

آخرین گزاره یعنی $(a-1)^2\geq 0$ همواره برقرار است، به‌عبارت دیگر حکم هم ارز گزاره‌ای است که همواره برقرار است.
پس حکم ثابت شده است. مراحل اثبات را (با شرط $a>0$) به صورت زیر می‌توان خلاصه کرد :

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a$$
$$\Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$ همواره برقرار است.

به هر حال این نوع استدلال در گفت‌وگوها و مذاکرات معمول هم مورد استفاده قرار می‌گیرد، آنجا که برای بررسی یک حکم، معادل آن را به مخاطب یادآوری می‌کنیم و از عباراتی نظیر : آنچه که شما می‌گویید معادل این است که ...، یا گفته شما به مثابه آن است که ....، در آنجا باید از قوانین و ادبیات مورد پذیرش طرفین پیروی کنیم و در ریاضیات از منطق ریاضی. در هر حال در هنگام استفاده از این نوع استدلال در زندگی روزمره هم ممکن است پس از چند مرحله به نتیجه برسیم.

مثال : ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

حل : اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود : $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$$ گزاره همیشه درست.

مثال : اگر b و a دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید : $a^2+ab+b^2\geq 0$

حل : $a^2+ab+b^2\geq 0 \Leftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}\geq 0$

اثبات کوتاه و زیبایی است. حکم با یک گزاره همیشه درست (سمت راست) هم‌ارز است.

راه دوم :

$$a^2+ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2+2ab+2b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab+a^2+b^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)^2+a^2+b^2 \geq 0$$ گزاره همیشه درست.

البته ممکن است شما هم راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه کنید.

شیوه‌ای که در این قسمت از درس مورد استفاده قرار گرفت را برای نشان دادن نادرستی یک گزاره نیز می‌توان به‌کار برد.

کار در کلاس

الف) اگر n یک عدد طبیعی باشد، آیا زوج بودن n و زوج بودن n^2 هم‌ارزند؟

بله هم‌ارز می‌باشند. اثبات :

برای n زوج است و نشان می‌دهیم n^2 زوج است :
$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2(2k^2) \rightarrow$ زوج است

اثبات عکس : n^2 زوج است و نشان می‌دهیم n زوج است :

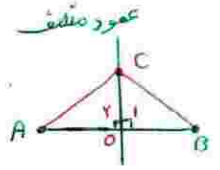
برهان خلف : اگر n زوج نباشد پس n عددی فرد خواهد بود یعنی :

$n=2k-1 \Rightarrow n^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k)+1 \rightarrow$ تناقض n^2 فرد است

بنابراین : n^2 زوج است $\Longleftrightarrow$ n زوج است

ب) آیا دو گزاره زیر هم‌ارزند؟

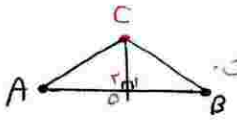
۱ نقطه C روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد. ۲ فاصله نقطه C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.



اثبات ① ⇒ ② :

$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1=\hat{O}_2\\ AO=OB\\ OC=OC\end{array}\right) \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AOC} \cong \overset{\triangle}{BOC} \Rightarrow AC=BC \Rightarrow$$

فاصله نقطه‌ی C از دو سر پاره‌خط AB یکسان است



اثبات ② ⇒ ① : با فرض AC=BC ، ارتفاع OC وارد بر ضلع AB را رسم کرده و نشان می‌دهیم OC عمود منصف است.

$$\left.\begin{array}{l}AC=BC\\ OC=OC\\ \hat{O}_1=\hat{O}_2=90^\circ\end{array}\right) \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \overset{\triangle}{AOC} \cong \overset{\triangle}{BOC} \Rightarrow AO=OB \Rightarrow$$

OC عمود منصف پاره‌خط AB است

بنابراین : ① ⟺ ② یعنی دو گزاره هم‌ارزند.

تمرین

۱ گزاره‌های زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید : **پاسخ تمرینها در صفحات بعد می باشد.**

الف) اگر x و y دو عدد حقیقی **هم‌علامت** (مخالف صفر) باشند داریم : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم :

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

$$x^2+y^2+1 \geq xy+x+y$$

۲ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3 < x^2$.

۳ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

۴ آیا اعدادی صحیح مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

۵ آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که :

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \quad (a+b \neq 0)$$

۶ گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض آنها را رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است.

پاسخ تمرین صفحه ۸ کتاب درسی:

۱) الف) اگر x و y دو عدد حقیقی هم‌علامت (مخالف صفر) باشند داریم: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

x و y هم‌علامت‌اند، بنابراین $xy>0$ خواهد بود.

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \iff xy\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq 2xy \iff x^2+y^2\geq 2xy \iff x^2+y^2-2xy\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2\geq 0$$ همیشه درست

ب) برای هر سه عدد حقیقی x و y و z داریم:

(I) $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2z^2\geq 2xy+2yz+2zx$$

$$\iff \underline{x^2}+\underline{\underline{x^2}}+\underline{y^2}+\underline{\underline{y^2}}+\underline{\underline{\underline{z^2}}}+\underline{\underline{\underline{z^2}}}-\underline{2xy}-\underline{\underline{2yz}}-\underline{\underline{\underline{2zx}}}\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\geq 0$$ همیشه درست

(II) $x^2+y^2+1\geq xy+x+y$

ابتدا طرفین نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$\iff 2x^2+2y^2+2\geq 2xy+2x+2y$$

$$\iff \underline{x^2}+\underline{\underline{x^2}}+\underline{y^2}+\underline{\underline{\underline{y^2}}}+\underline{\underline{1}}+\underline{\underline{\underline{1}}}-\underline{2xy}-\underline{\underline{2x}}-\underline{\underline{\underline{2y}}}\geq 0$$

$$\iff (x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0$$ همیشه درست

۲) عدد حقیقی مانند x ارائه کنید به طوری که $x^3<x^2$. جواب: $x=\frac{1}{2}$ ، $x=-1$ و $x=-2$ و ...

۳) اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ و $\alpha+2\beta$ گنگ هستند.

(I) گیریم $\alpha-\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس مجموع آنها یعنی $\alpha+\beta+\alpha-\beta=2\alpha$ گویا بوده و در نتیجه α نیز گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha-\beta$ گنگ است.

(II) گیریم $\alpha+2\beta$ گویا باشد از طرفی $\alpha+\beta$ گویاست پس تفاضل آنها یعنی $(\alpha+2\beta)-(\alpha+\beta)=\beta$ گویاست که با فرض تناقض دارد پس $\alpha+2\beta$ گنگ است.

۴) آیا اعدادی مانند x و y وجود دارند که $x^2+y^2=(x+y)^2$

$$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy\Rightarrow 2xy=0\Rightarrow x=0 \vee y=0$$

حداقل یکی از اعداد x و y باید صفر باشد به طور مثال $x=0$ و $y=7$ جواب است.

۵) آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که: $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $(a+b\neq 0)$

خیر - اثبات: برهان خلف. گیریم چنین اعدادی وجود داشته باشند، بنابراین:

$$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{a+b}{ab}\Rightarrow (a+b)^2=ab\Rightarrow a^2+b^2+2ab=ab$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+ab=0 \xrightarrow{\times 2} 2a^2+2b^2+2ab=0\Rightarrow a^2+\underline{a^2}+b^2+\underline{b^2}+\underline{2ab}=0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2+a^2+b^2=0\Rightarrow a=0 \wedge b=0 \wedge a+b=0\Rightarrow$$ تناقض

۶ الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است. صحیح است زیرا:

$2n-1$: عدد فرد
$n \in \mathbb{Z}$

$$\xrightarrow{\text{مربع}} (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 2(2n^2 - 2n) + 1 \longrightarrow \text{فرد است}$$

$$\xrightarrow{\text{مکعب}} (2n-1)^3 = 8n^3 - 12n^2 + 6n - 1 = 2(4n^3 - 6n^2 + 3n) - 1 \longrightarrow \text{فرد است}$$

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی همان عدد وسطی است. صحیح است زیرا:

پنج عدد طبیعی متوالی : $n+1$ و $n+2$ و $n+3$ و $n+4$ و $n+5$ و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\text{میانگین اعداد} = \frac{\text{مجموع اعداد}}{\text{تعداد اعداد}} = \frac{5n+15}{5} = n+3 = \text{عدد وسطی}$$

درس ۲ بخش‌پذیری در اعداد صحیح[۱]

قرار دادن تعدادی شیء در دسته‌های مساوی یا دسته‌بندی کردن تعدادی از چیزها را، بدون آنکه باقی‌مانده‌ای داشته باشیم، «عاد کردن» یا شمارش آن اشیا، توسط شمارنده‌ها می‌گویند. مثلاً، ۱۲ شیء را می‌توان با شمارنده‌های مثبتِ عدد ۱۲ یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ دسته‌بندی یا شمارش کرد.

در این فصل برای نمایش این مفهوم از نماد «|» استفاده کرده و مثلاً می‌نویسیم ۲|۱۲ و می‌خوانیم عدد ۲ عدد ۱۲ را می‌شمارد یا عاد می‌کند. بیان دیگر این مفهوم آن است که بگوییم عدد ۱۲ بر عدد ۲ بخش‌پذیر است (باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است).

توجه داشته باشید که دسته‌بندی کردن اشیا در دسته‌های صفرتایی یا شمارش تعدادی شیء خاص به‌صورت صفر تا صفر کار بی‌معنایی است؛ لذا صفر هیچ عدد غیر صفری را نمی‌شمارد و هیچ عدد غیر صفری بر صفر بخش‌پذیر نمی‌باشد در ضمن توجه داشته باشید که هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش‌پذیر است؛ یعنی اگر a عددی طبیعی باشد $1|a$ و $a|a$. (عدد ۱ هر عدد صحیح را عاد می‌کند و هر عدد برخودش بخش‌پذیر است).

حال با توجه به اینکه مفهوم بخش‌پذیری b بر a معادل است با اینکه بنویسیم $a|b$ (عدد a، عدد b را می‌شمارد یا عدد a، عدد b را عاد می‌کند) مفهوم بخش‌پذیری را می‌توان برای هر دو عدد صحیح به‌کار برد، مثلاً می‌توان گفت، عدد ۲۸- بر ۴ بخش‌پذیر است (زیرا، $-28=4\times(-7)$ یا باقی‌مانده تقسیم ۲۸- بر عدد ۴ صفر است) پس در حالت کلّی و با تعمیم مفهوم عاد کردن به مجموعهٔ اعداد صحیح عاد کردن به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

عدد صحیح a، که مخالف صفر است[۲]، شمارندهٔ عدد b است ــ یا a، b را می‌شمارد یا $a|b$ یا b بر a بخش‌پذیر است ــ هرگاه عددی صحیح چون q وجود داشته باشد به‌طوری که $b=aq$.

اگر عدد b بر عدد a بخش‌پذیر نباشد یا عدد a عدد b را عاد نکند می‌نویسیم، $a \nmid b$

۱ــ در سراسر این فصل منظور از عدد، عدد صحیح است.

۲ــ اینکه صفر عدد صفر را می‌شمارد به‌صورت یک قرارداد پذیرفته می‌شود.

کار در کلاس

۱ با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن جاهای خالی را پر کنید.

الف) $۷|۶۳ \Leftrightarrow ۶۳=۷\times۹$

ب) $۷|۹۱ \Leftrightarrow ۹۱=۷\times۱۳$

پ) $-۶|۵۴ \Leftrightarrow ۵۴=(-۹)\times(-۶)$

ت) $۵|-۳۵ \Leftrightarrow -۳۵=۵\times(-۷)$

ث) $۱۸|۰ \Leftrightarrow ۰=۱۸\times۰$

ج) $a|۱ \Rightarrow a=+۱$ یا $a=-۱$

چ) $۲۶=۲\times۱۳ \Rightarrow ۲|۲۶$ و $۱۳|۲۶$

۲ با استفاده از تعریف عاد کردن و قوانین ضرب و تقسیمِ اعداد توان‌دار با پایه‌های برابر، ابتدا نشان دهید که $۳^۵|۳^۹$ و سپس ثابت کنید:

$\forall m,n\in\mathbb{N}; m\le n \Rightarrow a^m | a^n$

$(۳^۹=۳^۵\times ۳^۴ \xrightarrow{(۳^۴=q)} ۳^۵|۳^۹)$

$a^n=a^m\times a^{n-m}\Rightarrow a^m|a^n$

ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

ویژگی ۱: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب صحیحِ عدد b را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$\boxed{a|b \Rightarrow a|mb}$$

مثال: $۳|۶ \Rightarrow ۳|۶\times۵\ ,\ ۳|۶\times۴\ ,\ ۳|۶\times(-۷)\ ,\ \dots$

نتیجه: اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه $b^۲$ را می‌شمارد و در حالت کلّی b^n را می‌شمارد که $n\in\mathbb{N}$ است. یعنی:

$$\begin{cases} \text{الف)}\ a|b\Rightarrow a|b^۲ \\ \text{ب)}\ a|b\Rightarrow a|b^n \end{cases}$$

برای اثبات (الف) کافی است از ویژگی ۱ استفاده کرده و m را مساوی با b فرض کنیم؛ و برای اثبات (ب) نیز کافی است $m=b^{n-۱}$ فرض شود.

سؤال: آیا از اینکه $a|bc$ می‌توان نتیجه گرفت که a حداقل یکی از دو عدد b و c را عاد می‌کند؟ خیر نمی توان چنین نتیجه ای گرفت.

به گزاره‌های زیر دقت کنید و پس از آن پاسخ دهید:

الف) $۳|۹\times۶$ و $۳|۶$ و $۳|۹$

ب) $۳|۶\times۵$ و $۳|۶$ و $۳\nmid۵$

ج) $۶|۳\times۴$ و $۶\nmid۳$ و $۶\nmid۴$

سؤال: آیا از اینکه $a|b$ می‌توان نتیجه گرفت که $ka|kb$؟ آیا از $ka|kb$ می‌توان نتیجه گرفت $a|b$؟ $(k\in\mathbb{Z})$ $(k\neq ۰)$

$a|b\Rightarrow b=aq \xrightarrow{\text{ضرب در } k} kb=kaq\Rightarrow ka|kb$

$ka|kb\Rightarrow kb=kaq \xrightarrow{\text{تقسیم بر } k} b=aq\Rightarrow a|b$

ویژگی ۲ : اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد آنگاه عدد a عدد c را می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c}$$

اثبات: $\begin{cases} a|b \Rightarrow b = aq_1 \ (1) \\ b|c \Rightarrow c = bq_2 \end{cases}$

$$c = bq_2 \overset{(1)}{\Rightarrow} c = aq_1q_2 \xrightarrow{q_1q_2=q} c = aq \Rightarrow a|c$$

این خاصیّت را «خاصیت تعدّی» برای رابطهٔ عاد کردن می‌نامیم.

سؤال : با استفاده از خاصیت تعدّی برای رابطهٔ عاد کردن، نشان دهید که :

$$a|b \Rightarrow a|b^n$$

اثبات: $\left.\begin{array}{l} \text{طبق فرض: } a|b \\ \text{و می‌دانیم: } b|b^n \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعدی}} a|b^n$

ویژگی ۳ : هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد.

$$\boxed{a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c}$$

اثبات: $\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b = a \times q_1 \\ a|c \Rightarrow c = aq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b \pm c = a\underbrace{(q_1 \pm q_2)}_{q} \Rightarrow a|b \pm c$

سؤال : آیا از اینکه $a|b+c$ همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a|c$ یا $a|b$؟ خیر به طور مثال $۲|۵ \pm ۳$ ولی $۲ \nmid ۳$ و $۲ \nmid ۵$

ویژگی ۴ : اگر $a|b$ و $b \neq ۰$ در این صورت $|a| \leq |b|$.

اثبات : چون $a|b$ پس $b = aq$ و چون $b \neq ۰$ پس $q \neq ۰$ و چون $q \in \mathbb{Z}$ لذا $|q| \geq ۱$. حال اگر طرفین نامساوی اخیر را در $|a|$ ضرب کنیم خواهیم داشت :

$$۱ \leq |q| \Rightarrow |a| \times ۱ \leq |a||q| \Rightarrow |a| \leq |aq| \Rightarrow |a| \leq |b|$$

نتیجه : اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$.

اثبات : در صورتی که یکی از اعداد صفر باشند ، دیگری نیز صفر خواهد بود زیرا فقط صفر می تواند صفر را عاد کند . اما در حالتی که هر دو عدد ناصفر باشند ، خواهیم داشت :

$$\left.\begin{array}{l} a|b \overset{(۴)}{\Rightarrow} |a| \leq |b| \\ b|a \overset{(۴)}{\Rightarrow} |b| \leq |a| \end{array}\right\} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

کار در کلاس

۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۷m+۶)$ و $(۶m+۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

$$\left.\begin{array}{l} a|۷m+۶ \Rightarrow a|۴۲m+۳۶ \\ a|۶m+۵ \Rightarrow a|۴۲m+۳۵ \end{array}\right\} \Rightarrow a|(۴۲m+۳۶)-(۴۲m+۳۵)$$

$$\Rightarrow a|۱ \Rightarrow a = \pm ۱ \ (\text{چرا؟})$$

$$|a| \leq ۱ \xrightarrow{|a| \in \mathbb{N}} |a| = ۱ \Rightarrow a = \pm ۱$$

۲ اگر $a|b$ نشان دهید که $a^n|b^n$.

اثبات: $a|b \Rightarrow b=aq \Rightarrow b^n=a^nq^n \xrightarrow{q^n=q'} b^n=a^nq' \Rightarrow a^n|b^n$

۳ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که $ac|bd$.

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow b=aq_1 \\ c|d \Rightarrow d=cq_2 \end{array}\right\} \Rightarrow b\times d=(a\times c)\underbrace{(q_1q_2)}_{q}$$

$$\Rightarrow b\times d=a\times c\times q \Rightarrow ac|bd$$

۴ اگر $a|b$ و $a|c$ نشان دهید که $a|mb\pm nc$.
(از ویژگی ۱ و ویژگی ۳ استفاده کنید).

$$\left.\begin{array}{l} a|b \Rightarrow a|mb \\ a|c \Rightarrow a|nc \end{array}\right\} \xrightarrow{\pm} a|mb\pm nc$$

شما در سال‌های قبل با تعریف و مفهوم اعداد اول آشنا شده‌اید و می‌دانید که هر عدد طبیعی و بزرگ‌تر از یک که هیچ شمارندهٔ مثبتی به‌جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود. مجموعهٔ اعداد اول، که ثابت شده است مجموعه‌ای نامتناهی است، به‌صورت $P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,...\}$ نمایش داده می‌شود.

تذکر : با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد و a عددی طبیعی و $a|p$ در این‌صورت $a=۱$ یا $a=p$.

مثال : اگر عدد طبیعی a دو عدد $(۹k+۷)$ و $(۷k+۶)$ را عاد کند، ثابت کنید $a=۱$ یا $a=۵$.

$a|۹k+۷ \Rightarrow a|۷\times(۹k+۷)$

$\Rightarrow a|۶۳k+۴۹$

$a|۷k+۶$

$\Rightarrow a|۹\times(۷k+۶) \Rightarrow a|۶۳k+۵۴$

$\Rightarrow a|(۶۳k+۵۴)-(۶۳k+۴۹)$

$\Rightarrow a|۵ \Rightarrow a=۵$ یا $a=۱$

خواندنی

می‌دانیم که هر عدد طبیعی و کوچک‌تر یا مساوی ۱۰ عدد !۱۰ را عاد می‌کند (چرا؟) و به‌طور کلّی می‌توان نوشت : $\forall k\le n$ ، $k|n!$؛ بنابراین عدد !۱۰۰+۲ و همین‌طور عدد !۱۰۰+۳ و ... و بالاخره عدد !۱۰۰+۱۰۰ همه اعدادی غیراول هستند. بنابراین با توجه به اینکه اعداد (!۱۰۰+۲) و (!۱۰۰+۳) و ... (!۱۰۰+۱۰۰)، تعداد ۹۹ عدد طبیعی و متوالی‌اند ما توانسته‌ایم ۹۹ عدد طبیعی متوالی بیابیم که هیچ‌کدام اول نباشند.

آیا شما می‌توانید ۱۵ عدد طبیعی متوالی بیابید که هیچ‌کدام اول نباشند؟ !۱۶+۲, !۱۶+۳, ... , !۱۶+۱۶

(برای اینکه نشان دهیم عدد !۱۰۰+۷ بر ۷ بخش‌پذیر است، کافی است از عدد ۷ در دو عدد !۱۰۰ و ۷، فاکتور بگیریم یا با استفاده از خواص عاد کردن بنویسیم : $۷|۷$ و $۷|۱۰۰! \Rightarrow ۷|۱۰۰!+۷$)

بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد

می‌خواهیم با توجه به تعریف رابطهٔ عاد کردن، مفاهیم ب م م (بزرگ‌ترین مقسومٌ‌علیه مشترک) و ک م م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) دو عدد را معرفی کنیم.

توجه دارید که مقسوم‌علیه همان شمارنده است. به عبارت دیگر، اگر بنویسیم $a|b$، یعنی a شمارندهٔ b است یا b بر a بخش‌پذیر است و این یعنی a مقسوم‌علیه b است؛ و نیز توجه دارید که b مضرب a است، یعنی $b=aq$ یا $a|b$.

تعریف : عدد طبیعی d را ب م م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a,b)=d$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد و اگر دو شرط زیر برقرار باشد آنگاه $(a,b)=d$.

الف) $d|a, d|b$

ب) $\forall m>0 : m|a, m|b \Rightarrow m\le d$

شرط (الف) مقسومٌ‌علیه مشترک بودن را برای d تأمین می‌کند و شرط (ب) نشان می‌دهد که d از هر مقسوم‌علیه مشترک دلخواهی چون m بزرگ‌تر یا مساوی است.

اگر داشته باشیم $(a,b)=1$ در این صورت می‌گوییم، a و b نسبت به هم اول‌اند.

مثال : $(1,12)=1$ ، $(7,11)=1$ ، $(4,9)=1$ ، $(3,4)=1$

$(4,-6)=2$ ، $(0,6)=6$ ، $(8,16)=8$ ، $(6,9)=3$

تعریف : عدد طبیعی c را ک م م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می‌نامیم و می‌نویسیم $[a,b]=c$، هرگاه دو شرط (الف) و (ب) برقرار باشد، و اگر این دو شرط برقرار باشد آنگاه $[a,b]=c$

الف) $a|c \ , \ b|c$

ب) $\forall m>0 \ , \ a|m \ , \ b|m \Rightarrow c\le m$

توضیح دهید که هریک از شرط‌های (الف) و (ب) کدام ویژگی را تأمین می‌کنند؟

شرط (الف) مضرب مشترک بودن را برای c تامین می کند و شرط (ب) نشان می دهد که از مضرب مشترک دلخواهی چون m، کوچکتر یا مساوی است .

مثال : $[-4,16]=16$ ، $[1,8]=8$ ، $[6,4]=12$ ، $[3,4]=12$

کار در کلاس

۱ با توجه به تعاریف ب م م و ک م م ثابت کنید :

الف) $a|b \Rightarrow (a,b)=|a|$

شرط اول : $|a|\,|a \xrightarrow{a|b} |a|\,|b$

شرط دوم : $\forall m>0 : m|a \wedge m|b \Rightarrow m|a \Rightarrow |m|\le|a| \xrightarrow{m>0} m\le|a|$

ب) $a|b \Rightarrow [a,b]=|b|$

شرط اول : $b\,\big|\,|b| \xrightarrow{a|b} a\,\big|\,|b|$

شرط دوم : $\forall m>0 : a|m \wedge b|m \Rightarrow b|m \Rightarrow |b|\le|m| \xrightarrow{m>0} |b|\le m$

راهنمایی : برای اثبات (الف) باید دو شرط موجود در تعریف ب م م را برای $|a|$ بررسی کنیم، یعنی نشان دهیم که $|a|\,|\,a$ و ... و نیز برای هر $m>0$ که $m|a$ و $m|b$ نشان دهیم $m\le|a|$ و همین‌طور برای اثبات (ب) . . .

۲ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، ثابت کنید، $(p,a) = ۱$

فرض کنیم $(p,a) = d$

$$d \mid p \xRightarrow{\text{اول } p} d = ۱ \text{ یا } d = p$$

$$d \mid a \quad (۱)$$

اگر $d = p \xRightarrow{(۱)} p \mid a$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد)

پس فقط $d = ۱$ یا $(p,a) = ۱$.

تذکر : توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، مطلبِ کار در کلاس ۲ ممکن است برقرار نباشد :

مثال: $۴ \nmid ۶$ ولی $(۴,۶) = ۲ \neq ۱$

قضیه تقسیم و کاربردها

ممکن است در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده صفر نباشد، یعنی a بر b بخش‌پذیر نباشد $(b \nmid a)$. در این‌صورت قضیهٔ تقسیم که به بیان آن خواهیم پرداخت (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم) کمک می کند تا بحث بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$ را کامل کنیم.

قضیه تقسیم : اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این‌صورت، اعدادی صحیح و منحصربه‌فرد مانند q و r یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$.

مثال : اگر ۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم داریم : $q = ۳$ و $r = ۴$، و به عبارت دیگر $۲۵ = (۷ \times ۳) + ۴$. حال اگر -۲۵ را بر ۷ تقسیم کنیم و $q = -۳$ در نظر بگیریم، در این صورت تساوی $-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴$ حاصل می‌شود که نمی‌توان (-۴) را به عنوان باقی‌مانده معرفی کرد، زیرا طبق قضیه تقسیم باقی‌مانده باید نامنفی و کوچک‌تر از مقسوم‌علیه باشد در این صورت با اضافه و کم کردن مضارب مثبتی از مقسومٌ‌علیه، شرایط قضیه تقسیم را برقرار می کنیم :

$$-۲۵ = ۷ \times (-۳) - ۴ = ۷ \times (-۳) - ۴ - ۷ + ۷$$

$$= ۷ \times (-۳) - ۷ + ۳ = ۷\underbrace{[(-۳) - (۱)]}_{q} + ۳ = ۷q + ۳ \Rightarrow r = ۳$$

تذکر : همان‌طور که از دورهٔ ابتدایی به‌خاطر دارید در تقسیم عدد a بر b، a را مقسوم، b را مقسومٌ‌علیه، q را خارج قسمت و r را باقی‌مانده می‌نامیم.

مثال : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(۲m - ۵n)$ بر ۱۷ را به‌دست آورید.

حل :

$$\begin{matrix} \text{طبق فرض}: m = ۱۷q_۱ + ۵ \\ \text{طبق فرض}: n = ۱۷q_۲ + ۳ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۲ \times ۱۷q_۱ + ۱۰ \\ -۵n = (-۵) \times ۱۷q_۲ - ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷\,(۲q_۱ - ۵q_۲) - ۵$$

$$= 17(2q_1 - 5q_2) - 5 - 17 + 17$$

$$= 17(\underbrace{2q_1 - 5q_2 - 1}_{q_3}) + 17 - 5$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17(\underbrace{q_3 - 1}_{q}) + 12$$

$$= 17q + 12 \Rightarrow r = 12$$

افراز مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم که اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b، و با توجه به اینکه باقی‌ماندهٔ تقسیم یعنی r در رابطهٔ $0 \leq r < b$ صدق می‌کند، برای a برحسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر ۵ تقسیم کنیم در این صورت یا a بر ۵ بخش‌پذیر است، یعنی $r=0$، یا باقی‌مانده تقسیم a بر ۵ عدد ۱ است یا ... یا باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ است؛ به عبارت دیگر، $a=\cdots$ یا $a=5k+3$ یا $a=\cdots$ یا $a=5k+1$ یا $a=5k$ پس می‌توان گفت هر عدد صحیح مانند a را می‌توان به یکی از پنج صورت فوق نوشت.

مسئله ۱ : اگر $m \in \mathbb{Z}$ نشان دهید که m را به یکی از دو صورت $2k$ یا $2k+1$ (زوج یا فرد) می‌توان نوشت.

حل : کافی است m را بر ۲ تقسیم کنیم؛ در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$$m=2k+r \;,\; 0 \leq r < 2 \Rightarrow m=2k \text{ یا } m=2k+1$$

مسئله ۲ : ثابت کنید اگر $p>3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=6k+1$ یا $p=6k+5$ نوشته می‌شود.

حل : کافی است p را بر ۶ تقسیم کنیم، در این صورت طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت :

$p=6k \quad (1)$

$p=6k+1 \quad (2)$

$p=6k+2 \quad (3)$

$p=6k+3 \quad (4)$

$p=6k+4 \quad (5)$

$p=6k+5 \quad (6)$

p در حالت (۱)، (۳) و (۵) زوج است و لذا با اول بودنِ آن تناقض دارد. در حالت (۴) و با فاکتورگیری از ۳ داریم :

$p=3(2k+1)$

یا $p=3k'$ یا $3|p$ که با اول بودن p در تناقض است و لذا فقط حالت‌های (۲) و (۶) باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

(توجه دارید که عکس مطلب فوق در حالت کلّی برقرار نیست؛ مثلاً $(25=6\times4+1)$ ولی ۲۵ اول نیست.)

مسئله۳ : ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k+1$ یا $4k+3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(8t+1)$ نوشته می‌شود (باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است.)

حل : فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$a=4k \qquad (1)$$
$$a=4k+1 \qquad (2)$$
$$a=4k+2 \qquad (3)$$
$$a=4k+3 \qquad (4)$$

(چهار مجموعهٔ $A_1=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k\}$ و $A_2=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k+1\}$ و $A_3=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k+2\}$ و $A_4=\{a\in\mathbb{Z} \mid a=4k+3\}$ مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را افراز می‌کنند.)

حالت‌های (۱) و (۳) زوج بوده و لذا $a=4k+1$ یا $a=4k+3$

اگر $a=4k+1 \Rightarrow a^2=16k^2+8k+1=8\,(\underbrace{2k^2+k}_{k'})+1=8k'+1$

اگر $a=4k+3 \Rightarrow a^2=16k^2+24k+9=16k^2+24k+8+1$

$$\Rightarrow a^2=8(\underbrace{2k^2+3k+1}_{t})+1=8t+1$$

تمرین

۱ فرض می‌کنیم $ab=cd$ (a , b , c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

۲ ثابت کنید : اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $5|4k+1$، ثابت کنید : $25|16k^2+28k+6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

۶ ثابت کنید : الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند. ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

(**راهنمایی :** فرض کنید $d=(m\,,\,m+1)$ و ثابت کنید $d|1$ و نتیجه بگیرید $d=1$).

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p, q)=1$.

۸ اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ و $m,n\in\mathbb{N}$ ثابت کنید :

$$m\le n\,,\,a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

(**راهنمایی :** برای n سه حالت $n=3k$ و $n=3k+1$ و ... در نظر بگیرید و در هر حالت ثابت کنید $3|n^3-n$).

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسومٌ‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر $3!$ بخش‌پذیر است.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید: $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^2, m], m^5\right)$

ب) $(2m, 6m^3)$

پ) $(3m+1, 3m+2)$

ت) $\left[m^7, (m^2, m^3)\right]$

ث) $\left[(72, 48), 120\right]$

پاسخ تمرین‌های صفحه ۱۶ کتاب

۱ فرض می‌کنیم $ab = cd$ (a ، b ، c و d اعداد صحیح و ناصفرند) در این صورت پنج رابطهٔ عاد کردن از این تساوی نتیجه بگیرید.

$a|cd \ , \ b|cd \ , \ c|ab \ , \ d|ab \ , \ ab|cd$

۲ ثابت کنید: اگر $a|b$ آنگاه $a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$.

$a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۱}} a|(-1)\times b \Rightarrow a|-b$

$-a|a \ , \ a|b \xrightarrow{\text{ویژگی ۲ تعدی}} -a|b$

$a|b \Rightarrow (-1)a|(-1)b \Rightarrow -a|-b$

۳ اگر $a>1$ و $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

$a|9k+4 \xrightarrow{\times 5 \text{ راست}} a|45k+20$

$a|5k+3 \xrightarrow{\times 9 \text{ راست}} a|45k+27$

$\Rightarrow a|(45k+27)-(45k+20) \Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \Rightarrow$ عددی اول است a

۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری که $5|4k+1$، ثابت کنید: $25|16k^2+28k+6$

$5|4k+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25|16k^2+8k+1$

$5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20k+5$

$\xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$

۵ آیا از اینکه $a|b$ و $c|d$، همواره می‌توان نتیجه گرفت که $a+c|b+d$؟

خیر، به طور مثال $3|3$ و $2|4$ ولی $2+3 \nmid 4+3$.

۶ ثابت کنید: الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

گیریم: $m\in\mathbb{Z}, (m,m+1)=d \Rightarrow d|m \wedge d|m+1 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(m+1)-m \Rightarrow d|1 \xrightarrow{d>0} d=1$

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول‌اند.

گیریم: $k\in\mathbb{Z}, (2k+1, 2k+3)=d \Rightarrow d|2k+1 \wedge d|2k+3 \xrightarrow{\text{تفریق}} d|(2k+3)-(2k+1)$

$\Rightarrow d|2 \xrightarrow{d\text{ زوج نیست}} d=1$

۷ اگر $p\neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند ثابت کنید $(p,q)=1$.

برهان خلف: گیریم $(p,q)=d$ و $d\neq 1$ باشد بنابراین:

$d|p \wedge d|q \xrightarrow{d\neq 1} d=p \wedge d=q \Rightarrow p=q$ تناقض

۸ اگر $m,n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ ثابت کنید: $m\le n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$

$a|b \xrightarrow{\text{توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\text{راست } \times b^{n-m}} a^m|b^m\times b^{n-m} \Rightarrow a^m|b^n$

۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۷ و ۸ به‌ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۵۶ بیابید.

$a=7k+5 \xrightarrow{\times 8} 8a=56k+40$

$a=8k'+7 \xrightarrow{\times 7} 7a=56k'+49$

$\xrightarrow{\text{تفریق}} a=56k-56k'-9$

$\xrightarrow{-9=-56+47} a=56k-56k'-56+47$

$\Rightarrow a=56(\underbrace{k-k'-1}_{q})+47 \Rightarrow$ باقیمانده $r=47$

۱۰ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+2$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد (a^2+b^2+3) بر ۸ را بیابید.

گیریم: $n\in\mathbb{Z}, a=2n+1 \xrightarrow{b|a+2} b|2n+3 \Rightarrow$ b عددی فرد است $\Rightarrow b=2m+1, m\in\mathbb{Z}$

$a^2+b^2+3=(2n+1)^2+(2m+1)^2+3=4n^2+4n+\underline{1}+4m^2+4m+\underline{1+3}$

$=4\underbrace{n(n+1)}_{2k}+4\underbrace{m(m+1)}_{2k'}+5=8k+8k'+5=8(\underbrace{k+k'}_{q})+5 \Rightarrow r=5$

۱۱ اگر n عددی صحیح باشد ثابت کنید $3|n^3-n$

$$n^3-n=n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$$

اگر $n=3k \Rightarrow n^3-n=3\underbrace{k(3k-1)(3k+1)}_{q} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+1 \Rightarrow n^3-n=(3k+1)(3k)(3k+2)=3\underbrace{k(3k+1)(3k+2)}_{q'} \Rightarrow 3|n^3-n$

اگر $n=3k+2 \Rightarrow n^3-n=(3k+2)(3k+1)\underbrace{(3k+3)}_{3(k+1)}=3\underbrace{(k+1)(3k+2)(3k+1)}_{q''} \Rightarrow 3|n^3-n$

بنابراین در هر حالت نشان دادیم $3|n^3-n$.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

با فرض $a=bq+r$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} n|a \\ n|b \Rightarrow n|bq \end{array}\right\} \Rightarrow n|a-bq \xrightarrow{a-bq=r} n|r$$

۱۳ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

برای هر عدد صحیح دلخواه a یکی از سه حالت زیر وجود دارد:

حالت اول: $a=3k \Rightarrow 3|a$

حالت دوم: $a=3k+1 \Rightarrow a+2=3k+3 \Rightarrow a+2=3(k+1) \Rightarrow 3|a+2$

حالت سوم: $a=3k+2 \Rightarrow a+4=3k+6 \Rightarrow a+4=3(k+2) \Rightarrow 3|a+4$

بنابراین همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیرند.

۱۴ ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

با فرض $n \in \mathbb{Z}$ ، دو عدد صحیح متوالی را به صورت n و $n+1$ در نظر می گیریم:

$(n+1)^3-n^3=\cancel{n^3}+3n^2+3n+1-\cancel{n^3}=3\underbrace{n(n+1)}_{2k}+1=2\underbrace{(3k)}_{q}+1 \Rightarrow$ عدد فرد است.

۱۵ ثابت کنید حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر !۳ بخش‌پذیر است.

اعداد صحیح متوالی را به صورت $n+1$ و n و $n-1$ در نظر می‌گیریم که حاصلضرب آن‌ها n^3-n خواهد شد و قبلاً (تمرین ۱۱) نشان دادیم که $3|n^3-n$، پس n^3-n بر ۳ بخش‌پذیر است.

از طرفی حاصلضرب هر دو عدد صحیح متوالی، مضرب ۲ است پس حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی، بر ۲ بخش‌پذیر است.

بنابراین n^3-n بر ۶ یعنی !۳ بخش‌پذیر است، در نتیجه $3!|n^3-n$.

۱۶ حاصل هر یک را به دست آورید : $(m \in \mathbb{Z})$

الف) $\left([m^۲, m], m^۵\right)$

$$\big(\underbrace{[m^۲, m]}_{m^۲}, m^۵\big) = (m^۲, m^۵) = m^۲ \qquad , m \neq ۰$$

ب) $(۲m, ۶m^۳)$

$$(۲m, ۶m^۳) = ۲|m| \qquad , \quad m \neq ۰$$

(توجه داشته باشیم که $۲m | ۶m^۳$)

پ) $(۳m+۱, ۳m+۲)$

$$(۳m+۱, ۳m+۲) = ۱$$

(توجه داشته باشیم که $۳m+۱$, $۳m+۲$ دو عدد صحیح متوالی‌اند)

ت) $\left[m^۷, (m^۲, m^۳)\right]$

$$\big[m^۷, \underbrace{(m^۲, m^۳)}_{m^۲}\big] = [m^۷, m^۲] = |m^۷| \qquad , m \neq ۰$$

ث) $[(۷۲, ۴۸), ۱۲۰]$

$$\big[\underbrace{(۷۲, ۴۸)}_{۲۴}, ۱۲۰\big] = [۲۴, ۱۲۰] = ۱۲۰$$

(توجه داشته باشیم که $۲۴ | ۱۲۰$)

فعالیت

در درس قبل دیدیم که باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد بر ۴ عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲ و ۳. حال اگر هر کدام از این باقی‌مانده‌ها را نمایندهٔ یک مجموعه از اعداد درنظر بگیریم که باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عضو آن مجموعه بر عدد ۴، به‌ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ باشد، داریم:

(مجموعهٔ اعدادی را که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد m، مساوی با عدد r باشد با نماد $[r]_m$ نشان می‌دهیم)

$$A_0=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k\}=\{\cdots,-8,-4,0,4,8,\cdots,16,\cdots\}=[0]_4$$
$$A_1=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+1\}=\{\cdots,-7,-3,1,5,\cdots,13,\cdots,21,\cdots\}=[1]_4$$
$$A_2=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+2\}=\{\cdots,-6,\cdots,2,6,10,\cdots\}=[2]_4$$
$$A_3=\{x\in \mathbb{Z}\ |x=4k+3\}=\{\cdots,-13,\cdots,-5,-1,3,7,11,\cdots\}=[3]_4$$

۱ دو عضو دلخواه از مجموعهٔ A_0 را درنظر بگیرید. آیا تفاضل این دو عدد مضرب ۴ است؟
بله مضرب ۴ است. به طور مثال اگر ۸ و ۱۶ انتخاب شوند ۸=۸-۱۶ مضرب ۴ می باشد.

۲ از مجموعهٔ A_1 دو عضو دلخواه را درنظر بگیرید و تفاضل آنها را حساب کنید. آیا عدد حاصل مضرب ۴ است؟ بله مضرب ۴ است .به طور مثال : ۸=۵-۱۳ مضرب ۴ است .

۳ نتیجه‌ای را که از ۱ و ۲ گرفتید در حالت کلّی برای هر دو عضو دلخواه از A_1 اثبات کنید.

فرض کنید $a,b\in A_1 \Rightarrow \begin{cases} a=4k_1+1 \\ b=4k_2+1 \end{cases} \Rightarrow a-b=(4k_1+1)-(4k_2+1)$

$$\Rightarrow a-b=4\underbrace{(k_1-k_2)}_{k_3} \Rightarrow 4|a-b$$

۴ آیا درست است که بگوییم اعضای مجموعهٔ A_2 همگی بر عدد ۴، باقی‌ماندهٔ یکسان دارند؟ بله
در مورد مجموعهٔ A_3 چه می‌توان گفت؟ تفاضل هر دو عدد دلخواه از A_3 ، مضرب ۴ است .

می‌دانیم مجموعه‌های A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 یک افراز برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ هستند و بنابراین هر دو عدد صحیح، مانند a و b، یا هر دو به یکی از این چهار مجموعه تعلق دارند و یا هر کدام در یک مجموعه

واقع‌اند (A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 اشتراکی با هم ندارند. چرا؟) **بنا به تعریف افراز ، نباید اشتراک داشته باشند .**
و لذا اگر a و b هر دو در یک مجموعه از این چهار مجموعه باشند(باقی‌ماندهٔ تقسیم a و b بر ۴ مساوی باشد یا اصطلاحاً a و b بر ۴ هم باقی‌مانده باشند) همواره $4|a-b$ و اگر این‌طور نباشد $4\nmid a-b$.

تعریف : برای هر عدد طبیعی مانند m و هر دو عدد صحیح مانند a و b، اگر $m|a-b$، می گوییم «a هم‌نهشت با b است به‌سنج یا پیمانهٔ m»؛ و می‌نویسیم $a\overset{m}{\equiv}b$. تعریف رابطهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ m، به زبان ریاضی عبارت است از :

$$\forall a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow m\,|\,a-b\ (m\in\mathbb{N})$$

مثال: $\begin{cases}12\overset{5}{\equiv}2\ ,\ -11\overset{6}{\equiv}1\\ -295\overset{10}{\equiv}-5\ ,\ 23\overset{3}{\equiv}-7\end{cases}$

قرارداد : مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر عدد طبیعی m برابر با r می‌باشد، یعنی $A_r=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,x=mk+r\}$ را کلاس یا دستهٔ هم‌نهشتی r به پیمانهٔ m می‌نامیم و با نماد $[r]_m$ نمایش می‌دهیم.
برای استفاده از رابطهٔ هم‌نهشتی، ابتدا خواص و ویژگی‌های این رابطه را بررسی می‌کنیم که با توجه به تعریف این رابطه و خواص رابطهٔ عاد کردن، ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی به‌راحتی اثبات می‌شوند. شما در کامل کردن اثبات‌ها شرکت کنید.

سه خاصیت مهم در هم نهشتی :

۱- $\forall m\in\mathbb{N},a\in\mathbb{Z}:a\overset{m}{\equiv}a$ (هر عدد صحیح با خودش هم نهشت است.)

۲- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow b\overset{m}{\equiv}a$

۳- برای هر $m\in\mathbb{N}$ و اعداد صحیح c,b,a داریم : $a\overset{m}{\equiv}b\ \wedge\ b\overset{m}{\equiv}c\ \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}c$ (خاصیت تعدی)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow\begin{cases}a+c\overset{m}{\equiv}b+c\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c\end{cases}$$

ویژگی ۱ : به دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه یا از آن کم کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,a+c-b-c$$
$$\Rightarrow m\,|\,(a+c)-(b+c)\Rightarrow(a+c)\overset{m}{\equiv}(b+c)$$

مثال : با توجه به فعالیت قبل فرض کنیم، $7\overset{4}{\equiv}-1$ ($[(-1)\ ,7]\in A_3$ یا $(4\,|\,7-(-1))$) در این صورت اگر ۵ واحد به دو طرف این هم‌نهشتی اضافه کنیم فاصلهٔ این دو عدد یا تفاضل آنها همچنان حفظ شده و همان ۸ که مضرب ۴ است باقی می‌ماند. به عبارت دیگر، اعدادحاصل یعنی $12=5+7$ و $4=5+(-1)$ نیز در A_3 قرار خواهند گرفت.

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

ویژگی ۲ : دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد.

اثبات :

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\,|\,a-b\Rightarrow m\,|\,c\times(a-b)\Rightarrow m\,|\,ac-bc$$
$$\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

تذکر : عکس ویژگی ۲ برقرار نیست، یعنی اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a\overset{m}{\equiv}b$ (قانون حذف برای رابطهٔ هم‌نهشتی در حالت کلّی برقرار نیست) برای این مطلب یک مثال نقض بزنید. $2\times 2\overset{2}{\equiv}3\times 2$ ولی $3\overset{2}{\not\equiv}2$

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

ویژگی ۳ : (دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را می‌توان به توان n رساند.) $(n\in\mathbb{N})$

مثال : $(5\overset{3}{\equiv}2\Rightarrow 5^3\overset{3}{\equiv}2^3)$

اثبات : (از اتحاد $(a^n-b^n)=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ استفاده می‌کنیم)

$$a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b\ \Rightarrow\ m\mid(a-b)\underbrace{(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})}_{c}$$

$$\Rightarrow m\mid a^n-b^n\Rightarrow a^n\overset{m}{\equiv}b^n$$

تذکر : می‌دانیم $3^2\overset{4}{\equiv}5^2$ ولی $3\overset{4}{\not\equiv}5$ بنابراین نتیجه می‌گیریم که **عکس ویژگی ۳ برقرار نیست.**

$$a\overset{m}{\equiv}b\ ,\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow\begin{cases}ac\overset{m}{\equiv}bd & (1)\\ a+c\overset{m}{\equiv}b+d & (2)\\ a-c\overset{m}{\equiv}b-d & (3)\end{cases}$$

ویژگی ۴ : دو طرف دو رابطهٔ هم‌نهشتی را که پیمانه‌های یکسان داشته باشند می‌توان با هم جمع یا از هم منها و یا در هم ضرب کرد.

$(15\overset{5}{\equiv}10\ ,\ 7\overset{5}{\equiv}2\Rightarrow 15\times 7\overset{5}{\equiv}10\times 2$ و $15\times 2\overset{5}{\equiv}10\times 7)$

و $15+7\overset{5}{\equiv}10+2\Rightarrow 22\overset{5}{\equiv}12$

اثبات (۱):

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b\overset{\times c}{\Rightarrow}m\mid ac-bc\\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow m\mid c-d\overset{\times b}{\Rightarrow}m\mid bc-bd\end{array}\right\}\overset{+}{\Rightarrow}m\mid(ac-bc)+(bc-bd)$$

$$\Rightarrow m\mid ac-bd\Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bd$$

اثبات (۲) و (۳) به عهدهٔ شما :

$$\left.\begin{array}{l}a\overset{m}{\equiv}b\Rightarrow m\mid a-b\\ c\overset{m}{\equiv}d\Rightarrow m\mid c-d\end{array}\right\}\overset{\pm}{\longrightarrow}m\mid(a-b)\pm(c-d)\Rightarrow m\mid(a\pm c)-(b\pm d)\Rightarrow a\pm c\overset{m}{\equiv}b\pm d$$

تذکر مهم : اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد در این صورت $a\overset{m}{\equiv}r$

$$a=mq+r\Rightarrow a\overset{m}{\equiv}r$$

$$(179=11\times 16+3\Rightarrow 179\overset{11}{\equiv}3)$$

اثبات :

$$a = mq + r \Rightarrow a - r = mq \Rightarrow m \mid a - r \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} r$$

نتیجه ۱ : هرگاه بخواهیم کوچک‌ترین عدد نامنفی و هم‌نهشت با عدد a به پیمانهٔ m را مشخص کنیم، کافی است عدد a را بر m تقسیم کرده و باقی‌مانده را به‌دست آوریم.

مثال: $۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ? \rightarrow ۲۹۶ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$

نتیجه ۲ : اگر دو عدد a و b تقسیم بر عدد طبیعی m، هم باقی‌مانده باشند در این صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۲۷)^{۷}+۱۹$ را بر ۱۳ بیابید.

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underbrace{(۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} = ۱}_{۱} \quad \text{و} \quad ۱۹ = ۱۳ \times ۱ + ۶$$

$$\Rightarrow \underbrace{۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶}_{۲} \xRightarrow{\text{با توجه به ۱ و ۲}} (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۶ \xRightarrow{\text{با توجه به ۱}} A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r = ۷$$

پس باقی‌ماندهٔ A بر ۱۳، برابر با ۷ می‌باشد.

مثال : باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times۱۲+۱۰$ را بر ۷ بیابید.

$$۱۰۰۰ = ۷ \times ۱۴۲ + ۶ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \text{ و } ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۳} = -۱ \qquad ۱۳$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ \overset{۷}{\equiv} (-۱) \times ۱۲ = -۱۲$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} (-۱۲) + ۱۰ = -۲ \text{ و } -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a + mt \overset{m}{\equiv} b + mk \\ a - mt \overset{m}{\equiv} b - mk \end{cases}$$

ویژگی ۵ : می‌توان به دو طرف یا یک طرفِ یک رابطهٔ هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا از آن کم کرد.

طبق فرض: $a \overset{m}{\equiv} b$

می‌دانیم: $mt \overset{m}{\equiv} mk$

$$\overset{\pm}{\Rightarrow} a \pm mt \overset{m}{\equiv} b \pm mk$$

مثال : می‌دانیم $۲ \overset{۵}{\equiv} ۷$ اگر به سمت چپ رابطه $۳\times۵=۱۵$ و به سمت راست آن $۵\times۵=۲۵$ واحد اضافه کنیم خواهیم داشت $۷+۱۵ \overset{۵}{\equiv} ۲+۲۵$ یا $۲۲ \overset{۵}{\equiv} ۲۷$ که این رابطه برقرار است.

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=d \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

ویژگی ۶ : اگر بخواهیم دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنیم، باید پیمانهٔ آن هم‌نهشتی را بر ب م م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم. (این ویژگی را بدون اثبات می‌پذیریم)

نتیجه مهم : اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(c,m)=1$ در این‌صورت $a \overset{m}{\equiv} b$ در واقع قاعدهٔ حذف در هم‌نهشتی‌ها، برای هر عدد که نسبت به پیمانه اول باشد، برقرار است.

مثال : واضح است که $3\times4 \overset{3}{\equiv} 6\times4$ و چون $(4,3)=1$ پس $3 \overset{3}{\equiv} 6$.

فعالیت

همان‌طور که در دورهٔ ابتدایی آموختید عددنویسی در مبنای ۱۰ انجام می‌شود؛ که در آن ارزش مکانی ارقام، ده تا ده تا درنظر گرفته می‌شود (ده تا یکی می‌شود ده تا و ده تا ده تایی می‌شود صد تا و ده تا صد تایی می‌شود هزار تا و ...) بنابراین به راحتی می‌توانیم هر عدد را در مبنای ده بسط بدهیم. به‌عنوان مثال عدد ۱۳۹۷ را می‌توان به‌صورت زیر بسط داد :

$$1397 = 1\times1000+3\times100+9\times10+7$$
$$\Rightarrow 1397 = 1\times10^3+3\times10^2+9\times10+7$$

۱ هر یک از دو عدد زیر را در مبنای ده بسط بدهید :

$$1388109 = 1\times10^6+3\times10^5+8\times10^4+8\times10^3+1\times10^2+0\times10^1+9$$
$$13571122 = 1\times10^7+3\times10^6+5\times10^5+7\times10^4+1\times10^3+1\times10^2+2\times10^1+2$$

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=1358112$ را بر عدد ۹ بیابید.

می‌دانیم $10 \overset{9}{\equiv} 1$ و بنابر ویژگی‌های رابطهٔ هم‌نهشتی $10^n \overset{9}{\equiv} 1$ بنابراین :

$$A=1\times10^6+3\times10^5+5\times10^4+8\times10^3+1\times10^2+1\times10+2$$

$$10^6 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times1}{\Rightarrow} 1\times10^6 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$10^5 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times3}{\Rightarrow} 3\times10^5 \overset{9}{\equiv} 3$$

$$10^4 \overset{9}{\equiv} 1 \overset{\times5}{\Rightarrow} 5\times10^4 \overset{9}{\equiv} 5$$

$$10^3 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 8\times10^3 \overset{9}{\equiv} 8$$

$$10^2 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times10^2 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$10 \overset{9}{\equiv} 1 \Rightarrow 1\times10 \overset{9}{\equiv} 1$$

$$2 \overset{9}{\equiv} 2$$

با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم :

$$A \overset{9}{\equiv} 1+3+5+8+1+1+2$$

اگر دقت کنید سمت راست هم‌نهشتیِ اخیر مجموعِ ارقام A است. بنابراین می‌توان گفت «باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹»

عدد n رقمی $A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\dots a_2a_1a_0}$ را بسط دهید و در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار دهید، سپس همین نتیجه‌گیری را در حالت کلّی بررسی کنید.

$$A=10^{n-1}\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots+10^2a_2+10\,a_1+10^0a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}1\times a_{n-1}+\dots+1\times a_1+a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{9}{\equiv}a_{n-1}+a_{n-2}+\dots+a_2+a_1+a_0$$

کار در کلاس

۱ با توجه به اینکه $10\overset{3}{\equiv}1$، نتیجه می‌گیریم $\forall k\in\mathbb{N}\,,\,10^k\overset{3}{\equiv}1$، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعدهٔ کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

۲ می‌دانیم که $10\overset{11}{\equiv}-1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n\overset{11}{\equiv}1$ و برای هر n فرد، $10^n\overset{11}{\equiv}-1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (۱−) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\dots+2\times10+7$$
$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}4\times\dots+\dots\times(-1)+\dots\times1+\dots+2\times(-1)+7$$
$$\Rightarrow A\overset{11}{\equiv}7-2+3-5+8-9+4=6\Rightarrow r=\dots$$

۳ می‌دانیم $10\overset{2}{\equiv}0$ و $10\overset{5}{\equiv}0$ و $10\overset{10}{\equiv}\dots$ در این‌صورت:

$\forall k\in\mathbb{N}\,;\,10^k\overset{2}{\equiv}\dots$ و $10^k\overset{5}{\equiv}\dots$ و $10^k\overset{10}{\equiv}0$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\,a_{n-2}\cdots a_2\,a_1\,a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت:

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\dots+10^2a_2+10\,a_1+a_0$$
$$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}0\times a_{n-1}+\dots+\dots+\dots\times a_2+\dots+a_0$$

$\Rightarrow A\overset{2}{\equiv}\dots$ و $A\overset{5}{\equiv}\dots$ و $A\overset{10}{\equiv}a_0$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

۱ با توجه به اینکه $10 \overset{3}{\equiv} 1$، نتیجه می‌گیریم، $\forall k \in \mathbb{N}\,,\, 10^k \overset{3}{\equiv} 1$ ، بنابراین، مشابه فعالیت قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=598348$ را بر ۳ بیابید و سپس یک قاعده کلّی برای یافتن باقی‌مانده تقسیم و بخش‌پذیری اعداد n رقمی بر ۳ بیان کنید.

$$A = 5\times10^5 + 9\times10^4 + 8\times10^3 + 3\times10^2 + 4\times10^1 + 8$$

$$\left.\begin{array}{l}
10^5 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 5} 5\times10^5 \overset{3}{\equiv} 5 \\
10^4 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 9} 9\times10^5 \overset{3}{\equiv} 9 \\
10^3 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 8} 8\times10^3 \overset{3}{\equiv} 8 \\
10^2 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3} 3\times10^2 \overset{3}{\equiv} 3 \\
10^1 \overset{3}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 4} 4\times10^1 \overset{3}{\equiv} 4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 8 \overset{3}{\equiv} 8
\end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{3}{\equiv} 5+9+8+3+4+8 \Rightarrow A \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow r = 1$$

قاعده : باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۳ ، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۳ .

۲ می‌دانیم که $10 \overset{11}{\equiv} -1$؛ بنابراین برای هر n زوج، $10^n \overset{11}{\equiv} 1$ و برای هر n فرد، $10^n \overset{11}{\equiv} -1$. حال اگر در هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۱ و در بسط عدد $A=4985327$ به‌جای توان‌های زوجِ عدد ۱۰، عدد یک و به‌جای توان‌های فردِ عدد ۱۰، عدد (۱-) قرار دهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد A را بر ۱۱ بیابید.

$$A=4\times10^6+9\times10^5+8\times10^4+\cdots+2\times10+7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 4\times 1 + 9\times(-1) + 8\times 1 + \cdots + 2\times(-1) + 7$$

$$\Rightarrow A \overset{11}{\equiv} 7-2+3-5+8-9+4 = 6 \Rightarrow r = 6$$

۳ می‌دانیم $10 \overset{2}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{10}{\equiv} 0$ در این‌صورت : $\forall k \in \mathbb{N}\,;\, 10^k \overset{2}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{5}{\equiv} 0$ و $10^k \overset{10}{\equiv} 0$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی مانند $A=\overline{a_{n-1}\,a_{n-2}\cdots a_2\,a_1\,a_0}$ به‌جای توان‌های عدد ۱۰ (در هم‌نهشتی‌های به پیمانهٔ ۲ و ۵ و ۱۰) صفر قرار دهیم خواهیم داشت :

$$A=10^{n-1}a_{n-1}+10^{n-2}a_{n-2}+\ldots+10^2a_2+10\,a_1+a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} 0\times a_{n-1} + 0\times a_{n-2} + \cdots + 0\times a_2 + 0\times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \overset{2}{\equiv} a_0 \text{ و } A \overset{5}{\equiv} a_0 \text{ و } A \overset{10}{\equiv} a_0$$

نتیجهٔ حاصل را برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد n رقمی بر ۲ و ۵ و ۱۰ و شرط بخش‌پذیری بر این اعداد را بیان کنید.

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۲ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲ می باشد . بنابراین عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۲ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن عددی زوج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۵ ، همان باقیمانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۵ می باشد . بنابراین عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن بر ۵ بخش پذیر باشد یعنی رقم یکان آن صفر یا پنج باشد .

باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ ، همان رقم یکان آن عدد می باشد . بنابراین عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که رقم یکان صفر باشد .

یکی از کاربردهای هم‌نهشتی در تقویم‌نگاری و محاسبهٔ روزهای هفته برحسب تاریخ داده شده، مشخص شده است. به‌عنوان مثال : اگر اول مهر ماه در یک سال یکشنبه باشد، ۲۲ بهمن در همان سال چه روزی از هفته خواهد بود؟ برای پاسخ دادن به سؤالاتی شبیه این سؤال فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

می‌دانیم هر روز از روزهای هفته، مثلاً شنبه، پس از گذشت ۷ روز دوباره تکرار می‌شود. به‌عنوان مثال اگر ۱۲ فروردین در یک سال یکشنبه باشد در این‌صورت ۷+۱۲=۱۹ فروردین و ۷+۱۹=۲۶ فروردین نیز یکشنبه می‌باشد. در بحث تقویم و روزهای هفته دقت دارید که شش ماه اولِ سال همگی ۳۱ روزه و شش ماه دومِ سال غیر از اسفند (که، به‌جز سال کبیسه، ۲۹ روز است) همگی ۳۰ روزه می‌باشند.

حال فرض کنید در یک سال ۹ دی ماه[1] یکشنبه باشد، در همان سال ۲۸ دی‌ماه چند شنبه است؟

با توجه به مطالب مذکور ۱۶ دی و ۲۳ دی یکشنبه بوده و کافی است از ۲۳ دی تا ۲۸ دی ۵ روز بعد را حساب کنیم که به روز **جمعه** می‌رسیم.

حال اگر فاصلهٔ ۹ دی تا ۲۸ دی را حساب کنیم (۱۹=۹−۲۸) مشاهده می‌شود که ۱۹ روز فاصله داریم و چون $۱۹\overset{۷}{\equiv}۵$ لذا کافی است یکشنبه را مطابق جدول مقابل مبدأ فرض کرده و مشخص کنیم که ۵ روز بعد چه روزی از هفته است یا عدد ۵ متناظر با کدام روز است.

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۱ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد در این‌صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهر ماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، فاصلهٔ ۱ مهر است تا ۱۲ بهمن؛ یعنی $d=۲۹+۳\times۳۰+۱۲=۱۳۱$

از طرفی $۱۳۱\overset{۷}{\equiv}۵$ و با توجه به جدول فوق روز متناظر با عدد ۵ پنجشنبه است، یعنی ۱۲ بهمن در آن سال پنجشنبه است.

۲ از روی تقویم سال جاری روز هفته را برای هفتم تیر مشخص کنید و با توجه به آن و به روش فوق مشخص کنید که ۲۲ بهمن در سال جاری چه روزی از هفته خواهد بود. درستی پاسخ خود را از روی تقویم نیز بررسی کنید.

می دانیم هفتم تیر پنجشنبه می باشد . بنابراین

$$d=(۳۱-۷)+۲\times۳۱+۴\times۳۰+۲۲\overset{۷}{\equiv}۳+(-۱)+۱+۱=۴$$

پ	ج	ش	ی	د	س	چ
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

دوشنبه است .

معادلهٔ هم‌نهشتی

تعریف : یک رابطه هم‌نهشتی همراه با مجهولی چون x به فرم $ax\overset{m}{\equiv}b$ را یک معادلهٔ هم‌نهشتی می‌نامیم؛ و منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی پیدا کردن همهٔ جواب‌هایی چون $x_0\in\mathbb{Z}$ است که در این معادله صدق کنند، یعنی $ax_0\overset{m}{\equiv}b$. $(a,b\in\mathbb{Z})$

۱ــ ۹ دی ماه روز بصیرت نام‌گذاری شده است.

به‌عنوان مثال، معادلهٔ $x \overset{۳}{\equiv} ۲$ را درنظر بگیرید. در این معادله x می‌تواند ۲ یا ۵ باشد. عدد بعدی که می‌تواند به جای x قرار بگیرد و در معادله صدق کند عدد ۸ است و اگر بخواهیم تمام جواب‌های این معادله یا جواب‌های عمومی آن را داشته باشیم کافی است از تعریف هم‌نهشتی استفاده کنیم،

$$x \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳ \mid x-۲ \Rightarrow (x-۲)=۳k \Rightarrow x=۳k+۲$$

که اگر k را به‌ترتیب صفر و ۱ و ۲ قرار بدهیم همان جواب‌های $x_0=۲$ و $x_0=۵$ و $x_0=۸$ را به‌دست می‌آوریم و برای هر $k \in \mathbb{Z}$، جوابی برای معادله به‌دست می‌آید. در معادلهٔ فوق ضریب x عدد یک است و اگر ضریب x عددی غیر از یک باشد برای دست‌یابی به جواب‌های عمومی معادله باید ضریب x را حذف کنیم که ویژگی‌های ۵ و ۶ و نتیجه ویژگی ۶ به ما کمک می‌کنند.

مثال : جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به‌دست آورید.

$$۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \,,\, ۱۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲$$

$$\overset{\text{ویژگی ۵}}{\Rightarrow} ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲+(۲\times ۵)$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \overset{(۴,۵)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۴}x \overset{۵}{\equiv} \cancel{۴}\times ۳$$

$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۵k+۳$$

$$(۵|x-۳ \Rightarrow x-۳=۵k \Rightarrow x=۵k+۳)$$

مثال : همهٔ اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

حل : اگر آن عدد را x فرض کنیم باید $۷|۳x-۱۳$ یا $۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳$

$$۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ۳x \overset{۷}{\equiv} ۱۳-۷=۶$$

$$\overset{(۳,۷)=۱}{\Rightarrow} \cancel{۳}x \overset{۷}{\equiv} \cancel{۳}\times ۲ \Rightarrow x=۷k+۲$$

قضیه : معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a,m)|b$. این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم.

نتیجه : اگر $(a,m)=۱$ چون برای هر b، همواره $۱|b$ پس معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای جواب است.

مثال : معادلهٔ $۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ دارای جواب نیست زیرا، $۳=(۶,۹)$ و $۳\nmid ۱۱$ و معادلهٔ $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸$ دارای جواب است. چرا؟ چون $۲=(۴,۶)$ و $۲|۱۸$

این معادله را حل کنید :

$$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۸ \Rightarrow ۲\times ۲x \overset{۶}{\equiv} ۲\times ۹ \,,\, (۲,۶)=۲$$

$$\overset{\text{ویژگی ۶}}{\Rightarrow} ۲x \overset{\frac{۶}{۲}}{\equiv} ۹$$

$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹$$

$$\Rightarrow ۲x \overset{۳}{\equiv} ۹+۳=۱۲$$

$$\Rightarrow \cancel{۲}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۲}\times ۶ \Rightarrow x=۳k+۶$$

حل معادلات سیّاله و کاربردهای آن

فعالیت

۱ آیا می‌توانید یک کیسهٔ ۱۹ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۴ کیلویی وزن کنید؟ (می‌توانید از یکی از دو وزنه یا هر دو باهم استفاده کنید و از هر وزنه به تعداد کافی در اختیار داریم)

یک جواب مسئله استفاده از ۴ وزنهٔ ۴ کیلویی و یک وزنهٔ ۳ کیلویی است.

۴× ۴ +۱×۳=۱۹

آیا برای این مسئله می‌توانید یک جواب دیگر بیابید؟

۱× ۴ + ۳ × ۵=۱۹

در واقع شما به دنبال جواب‌های حسابی (صحیح و نامنفی) برای معادلهٔ ۱۹=y×۳+x×۴ هستید.

(x تعداد وزنه‌های ۴ کیلویی به‌کار رفته و y تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی به‌کار رفته است)

۲ اگر در قسمت قبل بخواهیم فقط از وزنه‌های ۲ و ۴ کیلویی استفاده کنیم آیا عمل توزین امکان‌پذیر است؟

باید جواب‌هایی چون $y\in W$ و x بیابیم که ۱۹=y× ۲ + x× ۴ چون مجموع دو عدد زوج همواره زوج است پس چنین x و y ای در W وجود ندارد.

تعریف : هرگاه بخواهیم جواب‌های معادلهٔ $ax+by=c$ یعنی x و y را در اعداد صحیح بیابیم و $c\in\mathbb{Z}$ و b و a در این صورت معادلهٔ مذکور ($ax+by=c$) را یک معادلهٔ سیّاله درجهٔ اول یا خطی می‌نامیم.

تبدیل یک معادلهٔ سیّاله به معادلهٔ هم‌نهشتی

معادلهٔ سیّالهٔ $ax+by=c$ دارای دو مجهول است و به دو صورت می‌تواند به یک معادلهٔ هم‌نهشتی (با مجهول x یا y) تبدیل شود :

$$ax+by=c \Rightarrow ax-c=(-b)y \Rightarrow -b|ax-c \Rightarrow b|ax-c$$

$$\Rightarrow ax\overset{b}{\equiv}c\ (b>0) \text{ و } ax\overset{-b}{\equiv}c\ (b<0) \text{ یا } ax\overset{|b|}{\equiv}c$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نوشت :

$$by\overset{-a}{\equiv}c \text{ و } by\overset{a}{\equiv}c$$

تذکر: برای سهولت در حل معادله ی سیاله ، بهتر است از بین دو عدد $|a|$ و $|b|$ ، هر کدام کوچکتر است به عنوان پیمانه انتخاب شود .

به عنوان نمونه در حل معادله سیاله $2x+3y=7$، می توان به دو صورت معادله هم نهشتی نوشت : $2x\overset{3}{\equiv}7$ یا $3y\overset{2}{\equiv}7$ ولی بهتر است در حالتی که پیمانه کوچکتر است ، یعنی $3y\overset{2}{\equiv}7$ نوشته شود.

تذکر : با توجه به قضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم که «شرط لازم و کافی برای آنکه معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ دارای جواب باشد آن است که، $(a\,,\,b)\mid c$

کار در کلاس

۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ $۴x+۵y=۹$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادلهٔ سیاله را بیابید.

$$۴x+۵y=۹ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۹-۵ \Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow \underline{x=۵k+۱}$$

$$\Rightarrow ۴(۵k+۱)+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۴+۵y=۹$$

$$\Rightarrow ۲۰k+۵y=۵$$

$$\Rightarrow ۴k+y=۱ \Rightarrow \underline{y=-۴k+۱}$$

۲ در قسمت ۱ فعالیت قبل مشخص کنید به چند طریق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

کافی است جواب‌های عمومی معادلهٔ $۴x+۳y=۱۹$ را (برحسب k) بیابیم و به‌ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشند تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم:

$$۴x+۳y=۱۹ \Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱۹$$

$$\Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴x \overset{۳}{\equiv} ۱+۳$$

$$\Rightarrow \cancel{۴}x \overset{۳}{\equiv} \cancel{۴} \times ۱ \Rightarrow \underline{x=۳k+۱}$$

$$\Rightarrow ۴(۳k+۱)+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۴+۳y=۱۹$$

$$\Rightarrow ۱۲k+۳y=۱۵ \Rightarrow ۴k+y=۵$$

$$\Rightarrow \underline{y=-۴k+۵}$$

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ y=۵ \end{cases} \text{ و } k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۱ \end{cases}$$

به‌ازای $k=۲$ و بیشتر از آن $y<۰$ و به‌ازای $k=-۱$ و کمتر از آن $x<۰$ که قابل قبول نمی‌باشند و لذا به دوصورت فوق می‌توان این کیسهٔ ۱۹ کیلویی را وزن کرد.

مثال : به چند طریق می‌توان ۱۸۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی فرض کنیم حل این مثال معادل است با تعداد جواب‌های نامنفی $۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$

$$۲۰۰۰x+۵۰۰۰y=۱۸۰۰۰$$

$$\Rightarrow ۲x+۵y=۱۸$$

$$\Rightarrow ۲x\overset{۵}{\equiv}۱۸ \text{ و } ۱۸\overset{۵}{\equiv}۸$$

$$\Rightarrow \cancel{۲}x\overset{۵}{\equiv}\cancel{۲}\times ۴$$

$$\Rightarrow x\overset{۵}{\equiv}۴ \Rightarrow \underline{x=۵k+۴}$$

$$\Rightarrow ۲(۵k+۴)+۵y=۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۰k+۸+۵y=۱۸$$

$$\Rightarrow ۱۰k+۵y=۱۰ \Rightarrow \underline{y=-۲k+۲}$$

$$k=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۲ \end{cases} \text{ و } k=۱ \Rightarrow \begin{cases} x=۹ \\ y=۰ \end{cases}$$

(فقط به‌ازای ۱ و ۰ $=k$ برای x و y جواب‌ها نامنفی هستند)

پس به دو طریق امکان تبدیل کردن ۱۸۰۰۰ تومان به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی، وجود دارد.

مثال : در یک رستوران فقط دو نوع خورش قورمه‌سبزی و قیمه وجود دارد. اگر ۵ نفر وارد این رستوران شوند به چند طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند؟ (هر نفر فقط یک پرس غذا میل می‌کند)

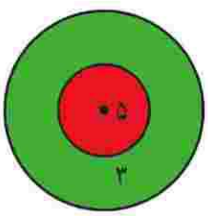
حل : اگر تعداد چلو خورش قورمه‌سبزی و چلو خورش قیمهٔ سفارش داده شده را به‌ترتیب با x و y نشان دهیم خواهیم داشت :

$$x+y=۵ \Rightarrow x\overset{۱}{\equiv}۵ \Rightarrow \underline{x=k+۵}$$

$$\Rightarrow k+\cancel{۵}+y=\cancel{۵} \Rightarrow \underline{y=-k}$$

چون y و x اعدادی نامنفی هستند پس باید $k\in\{۰,-۱,-۲,-۳,-۴,-۵\}$ و لذا به ۶ طریق می‌توانند سفارش غذا بدهند.

مثال : تیراندازی به سمت یک هدف، شامل دو دایرهٔ هم مرکز، تیراندازی می‌کند. اگر او تیر را به دایرهٔ با شعاع کوچک‌تر بزند ۵ امتیاز و اگر به دایرهٔ بزرگ‌تر و خارج دایرهٔ کوچک‌تر بزند ۳ امتیاز می‌گیرد. اگر او کمتر از ۱۵ تیر انداخته و همهٔ تیرها به داخل دایرهٔ بزرگ‌تر اصابت کرده باشد و در پایان ۴۲ امتیاز گرفته باشد چند حالت برای او در این تیراندازی می‌تواند ثبت شود؟



حل : اگر x و y را به‌ترتیب تعداد اصابت‌ها به دایره کوچک‌تر و بزرگ‌تر فرض کنیم، داریم :

$$۵x+۳y=۴۲ \Rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲$$

$$\Rightarrow ۵x\overset{۳}{\equiv}۴۲+۳ \Rightarrow \cancel{۵}x\overset{۳}{\equiv}\cancel{۵}\times ۹$$

$$\Rightarrow \underline{x=۳k+۹}$$

$$۵(۳k+۹)+۳y=۴۲$$

$$\Rightarrow ۱۵k+۴۵+۳y=۴۲$$

$\Rightarrow 15k+3y=-3 \Rightarrow \underline{y=-5k-1}$

$x,y \in W \Rightarrow k \in \{-1,-2,-3\} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=4 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=14 \end{cases}$

($x=6$ و $y=4$ یعنی تیرانداز ۶ تیر را به دایرهٔ کوچک‌تر و ۴ تیر را به دایرهٔ بزرگ‌تر زده است).

پاسخ تمرین

۱ عدد ۱۳۹۸ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۹ تعلق دارد؟

$1398 \overset{9}{\equiv} 1+3+9+8 \overset{9}{\equiv} 3 \Rightarrow$ به دستهٔ هم‌نهشتی $[3]_9=\{x\in\mathbb{Z} \mid x=9k+3\}$ تعلق دارد

۲ اگر $k\in\mathbb{Z}$، ثابت کنید فقط یکی از سه حالت زیر امکان‌پذیر است

$k \overset{3}{\equiv} 0$ یا $k \overset{3}{\equiv} 1$ یا $k \overset{3}{\equiv} 2$

(به عبارت دیگر، $k\in[0]_3$ یا $k\in[1]_3$ یا $k\in[2]_3$)

باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد صحیح همچون k بر عدد ۳، یکی از اعداد ۰ یا ۱ یا ۲ می‌باشد به عبارت دیگر

$3|k-0$ یا $3|k-1$ یا $3|k-2$ و طبق تعریف هم‌نهشتی $k\overset{3}{\equiv}0$ یا $k\overset{3}{\equiv}1$ یا $k\overset{3}{\equiv}2$.

۳ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \overset{n}{\equiv} b$.

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \xrightarrow[\text{تعدی}]{n|m} n|a-b \Rightarrow a\overset{n}{\equiv}b$$

۴ فرض کنیم، $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{n}{\equiv} c$ و $(m,n)=d$ در این صورت ثابت کنید $a \overset{d}{\equiv} c$.

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|m} a\overset{d}{\equiv}b \\ b\overset{n}{\equiv}c \xrightarrow[\text{تمرین ۳}]{d|n} b\overset{d}{\equiv}c \end{array}\right\} \Rightarrow a\overset{d}{\equiv}c$$

۵ ثابت کنید : اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی باشند آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} b$.

روش اول: فرض کنیم باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m برابر r باشد، درنتیجه:

$a\overset{m}{\equiv}r \wedge b\overset{m}{\equiv}r \Rightarrow a\overset{m}{\equiv}b$

روش دوم:

$$\left.\begin{array}{l} a=mq+r \\ b=mq'+r \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q') \Rightarrow m|a-b \xrightarrow{\text{تعریف هم‌نهشتی}} a\overset{m}{\equiv}b$$

۶ عکس تمرین ۵ را بیان و اثبات کنید.

عکس تمرین ۵: اگر $a\overset{m}{\equiv}b$ آنگاه باقیماندهٔ تقسیم دو عدد a و b بر m، مساوی است.

اثبات: فرض کنیم باقیماندهٔ تقسیم a بر m، برابر r_1 و باقیماندهٔ تقسیم b بر m، برابر r_2 باشد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} a=mq+r_1 \\ b=mq'+r_2 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=m(q-q')+(r_1-r_2) \quad (1)$$

از طرفی: $a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a-b=mq'' \quad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} mq''=m(q-q')+(r_1-r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow r_1-r_2=m(q''-q-q') \Rightarrow m|r_1-r_2 \\ \text{از طرفی}: 0\le r_1,r_2<m \Rightarrow |r_1-r_2|<m \end{array}\right\} \Rightarrow r_1-r_2=0 \Rightarrow r_1=r_2$$

۷ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیّام یعنی،

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}\times a^n+\binom{n}{۱}\times a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}\times a^{n-۲}b^۲+\binom{n}{۳}\times a^{n-۳}b^۳+\cdots+\binom{n}{n}\times b^n$$

ثابت کنید که برای هر $n\in\mathbb{N}$ و $a,b\in\mathbb{Z}$ همواره $(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$.

$$\left.\begin{array}{l}\binom{n}{۰}a^n=a^n\overset{ab}{\equiv}a^n\\ \binom{n}{۱}a^{n-۱}b\overset{ab}{\equiv}۰\\ \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲\overset{ab}{\equiv}۰\\ \binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳\overset{ab}{\equiv}۰\\ \vdots\\ \binom{n}{n-۱}ab^{n-۱}\overset{ab}{\equiv}۰\\ \binom{n}{n}b^n=b^n\overset{ab}{\equiv}b^n\end{array}\right\}\xrightarrow{+}(a+b)^n\overset{ab}{\equiv}a^n+b^n$$

۸ با توجه به تمرین ۷ ثابت کنید عدد $۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

طبق تمرین قبل (تمرین ۷) می‌توان نوشت:

$(۲۳)^{۵۱}=(۱۱+۱۲)^{۵۱}\overset{۱۱\times۱۲}{\equiv}۱۱^{۵۱}+۱۲^{۵۱}$

$\xrightarrow{-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}}۲۳^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۱۲^{۵۱}\overset{۱۳۲}{\equiv}۰\longrightarrow$ عدد $۱۲^{۵۱}-۱۱^{۵۱}-۲۳^{۵۱}$ بر ۱۳۲ بخش‌پذیر است

۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=(۲^{۱۱}+۷)\times۹$ را بر ۲۳ بیابید.

$۲^۵\overset{۲۳}{\equiv}۹\xrightarrow{\text{توان ۲}}۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۸۱\xrightarrow{۸۱\overset{۲۳}{\equiv}۱۲}۲^{۱۰}\overset{۲۳}{\equiv}۱۲\xrightarrow{\times۲}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۲۴$

$\xrightarrow{۲۴\overset{۲۳}{\equiv}۱}۲^{۱۱}\overset{۲۳}{\equiv}۱\xrightarrow{+۷}۲^{۱۱}+۷\overset{۲۳}{\equiv}۸\xrightarrow{\times۹}(۲^{۱۱}+۱)\times۹\overset{۲۳}{\equiv}۷۲$

$\xrightarrow{۷۲\overset{۲۳}{\equiv}۳}A\overset{۲۳}{\equiv}۳\longrightarrow r=۳$

۱۰ اگر دو عدد $(۵-۳a)$ و $(۷-۴a)$ رقم یکان برابر داشته باشند رقم یکانِ عدد $(۶+۹a)$ را به‌دست آورید.

طبق تمرین ۵، دو عدد $۳a-۵$ و $۴a-۷$ به پیمانهٔ ۱۰، باید با هم همنهشت باشند:

$۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳a-۵\Rightarrow ۴a-۳a\overset{۱۰}{\equiv}۷-۵\Rightarrow a\overset{۱۰}{\equiv}۲$

$\xrightarrow{\times۹}۹a\overset{۱۰}{\equiv}۱۸\xrightarrow{+۶}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\xrightarrow{۲۴\overset{۱۰}{\equiv}۴}۹a+۶\overset{۱۰}{\equiv}۴\Rightarrow$ رقم یکان ۴ است

۱۱ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!$ را بر ۱۰ به‌دست آورید (رقم یکان A را بیابید)

$$\left.\begin{array}{l} 1! \overset{10}{\equiv} 1 \\ 2! \overset{10}{\equiv} 2 \\ 3! \overset{10}{\equiv} 6 \\ 4! = 24 \overset{10}{\equiv} 4 \\ 5! = 120 \overset{10}{\equiv} 0 \\ 6! \overset{10}{\equiv} 0 \\ \vdots \\ 500! \overset{10}{\equiv} 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} A \overset{10}{\equiv} 1+2+6+4+0+\dots+0 = 13 \xrightarrow{13 \overset{10}{\equiv} 3} A \overset{10}{\equiv} 3$$

رقم یکان عدد A، ۳ است.

۱۲ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $7x + 5y = 11$ را به‌دست آورید.

$$\Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 \Rightarrow 7x \overset{5}{\equiv} 11 + 2\times 5 = 21$$

$$\xrightarrow{\div 7} x \overset{5}{\equiv} 3 \Rightarrow x = 5k+3 \quad , k \in \mathbb{Z}$$

$$\xrightarrow{7x+5y=11} 7(5k+3) + 5y = 11 \Rightarrow y = -7k-2 \quad , k \in \mathbb{Z}$$

۱۳ به چند طریق می‌توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس‌های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟

تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی را x و تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی را y در نظر می‌گیریم بنابراین:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29$$

$$5y \overset{2}{\equiv} 29 \Rightarrow 5y \overset{2}{\equiv} 29 - 12\times 2 = 5 \xrightarrow{\div 5} y \overset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow y = 2k+1$$

$$\xrightarrow{2x+5y=29} 2x + 5(2k+1) = 29 \Rightarrow x = -5k+12$$

	k	۰	۱	۲
تعداد اسکناس های ۵۰۰۰ تومانی	$y = 2k+1$	۱	۳	۵
تعداد اسکناس های ۲۰۰۰ تومانی	$x = -5k+12$	۱۲	۷	۲

$\Rightarrow$ به ۳ طریق می‌توان خرد کرد

۱۴ معادله‌های هم‌نهشتی زیر را در صورت امکان حل کرده و جواب‌های عمومی آنها را به‌دست آورید.

الف) $423x \overset{11}{\equiv} 79$ میدانیم: $423 \overset{11}{\equiv} 5 \quad , \quad 79 \overset{11}{\equiv} 2$

$\Rightarrow$ معادله هم‌نهشتی: $5x \overset{11}{\equiv} 2 \Rightarrow 5x \overset{11}{\equiv} 2 + 3\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} x \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow x = 11k+7 \quad , k \in \mathbb{Z}$

ب) $8x \overset{12}{\equiv} 20$

$$8x \overset{12}{\equiv} 20 - 12 = 8 \xrightarrow[(8,12)=4]{\div 8} x \overset{3}{\equiv} 1 \Rightarrow x = 3k+1 \ , k \in \mathbb{Z}$$

ج) $51x \overset{6}{\equiv} 11$

$(51,6) = 3 \quad , \quad 3 \nmid 11 \Rightarrow$ معادله جواب ندارد

۱۵ اگر اوّل مهر ماه در یک سال روز یکشنبه باشد، ۷ اسفندماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

مهر + آبان + آذر + دی + بهمن + اسفند = $(30-1)+4\times 30+7 \overset{7}{\equiv} 2$

ی	د	س	چ	پ	ج	ش
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

سه شنبه است

۱۶ اگر ۱۲ بهمن در یک سال جمعه باشد، ۳۱ مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

شهریور + مهر + آبان + آذر + دی + بهمن = $31+4\times 30+12 \overset{7}{\equiv} 2$

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن را تعیین می‌کنیم، عدد صفر مربوط به ۳۱ مرداد است.

چ	پ	ج	ش	ی	د	س
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد چهارشنبه بوده است

۱۷ همهٔ اعداد صحیح چون a را بیابید که ۵ برابر آنها به‌علاوهٔ ۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

$$5a+9 \overset{11}{\equiv} 0 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9 \Rightarrow 5a \overset{11}{\equiv} -9+4\times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} a \overset{11}{\equiv} 7 \Rightarrow a = 11k+7 ,\ k\in \mathbb{Z}$$

۱۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را با x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$3x+5y=23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23 \Rightarrow 5y \overset{3}{\equiv} 23-3=20 \xrightarrow{\div 5} y \overset{3}{\equiv} 4 \Rightarrow y = 3k+4$$

$$\xrightarrow{3x+5y=23} 3x+5(3k+4)=23 \Rightarrow x = -5k+1$$

k	۰	۱-
$y=3k+4$: تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی	۴	۱
$x=-5k+1$: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی	۱	۶

به دو طریق می‌توان وزن کرد

۱۹ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y می‌نامیم، بنابراین:

$$x+y=9 \Rightarrow x=-y+9 \Rightarrow x \overset{1}{\equiv} 9 \Rightarrow x=k+9 \xrightarrow{x+y=9} k+9+y=9 \Rightarrow y=-k$$

k	۰	۱-	۲-	۳-	۴-	۵-	۶-	۷-	۸-	۹-
$x=k+9$: تعداد گل‌های نوع اول	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
$y=-k$: تعداد گل‌های نوع دوم	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

به ده طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۹ شاخه تهیه کرد.

۲۰ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به‌دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

تعداد سؤالات ۷ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با x و تعداد سؤالات ۹ امتیازی که امتیاز کامل گرفته را با y نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$7x+9y=73 \Rightarrow 9y \overset{7}{\equiv} 73 \xrightarrow{73 \overset{7}{\equiv} 3} 9y \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\div 3} 3y \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 3y \overset{7}{\equiv} 1-7=-6$$

$$\xrightarrow{\div 3} y \overset{7}{\equiv} -2 \Rightarrow y = 7k-2 \xrightarrow{7x+9y=73} 7x+9(7k-2)=73 \Rightarrow x=-9k+13$$

$k=1 \Rightarrow x=4$ و $y=5 \Rightarrow$ فقط به یک صورت می‌توانسته این امتیاز را کسب کند.