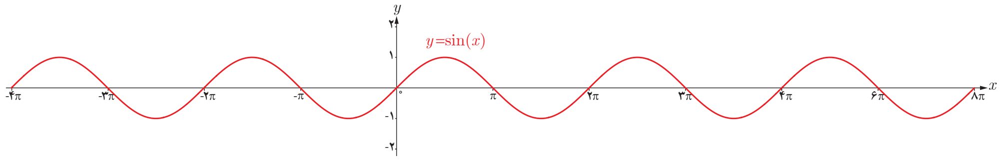
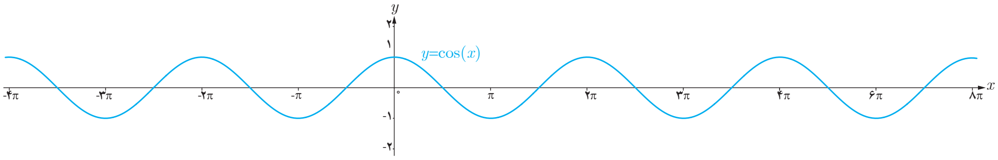
درس ۱

تناوب و تانژانت

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصلهٔ 2π روی محور xها یکسان است $\left(\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \text{ و } \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x\right)$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.





با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول 2π، 4π، 6π و ... تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دورهٔ تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف :

تابع f را **متناوب** می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را **دورهٔ تناوب** f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x$ $\left(f(x) = \cos x\right)$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و ۱− است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a\sin x$ بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

تعریف: تابع f را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی و مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد بطوریکه

$x \in D_f \rightarrow \begin{cases} x \pm T \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$ که T را دوره تناوب می نامیمودر بسیاری موارد دنبال کمترین

مقدار آن می باشیم .با این تعریف چیزی که دستگیرمان می شود این است که دامنه نمی تواند از بالا

یا پایین محدود باشد این جمله منزله آن نیست که $D_f = \mathbb{R}$ بلکه اگر $x_\circ \notin D_f$ آنگاه قطعاً

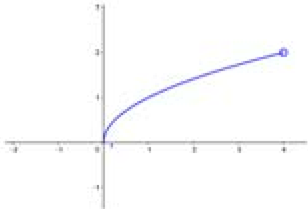
$(x_\circ + T) \notin D_f$ مانند تابع $f(x) = \tan x$ که نقاطی به فاصله دوره تناوب از یکدیگر با هم تعریف

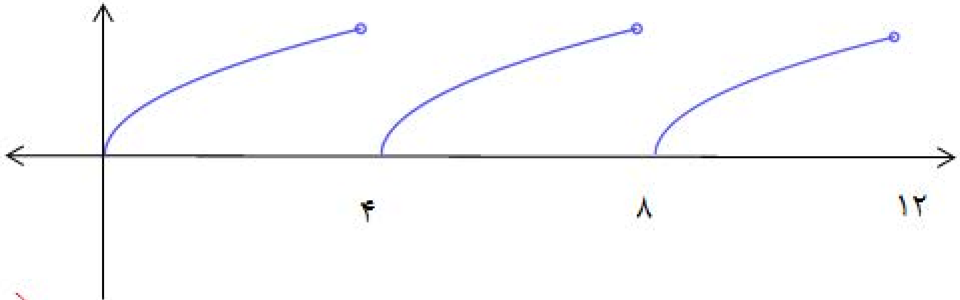
شده هستند یا با هم تعریف نشده بنابراین انتظار متناوب بودن توابعی مانند $f(x) = \sin\sqrt{x-1}$ یا

$f(x) = \tan\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ را نداشته باشیم.

اگر T دوره تناوب یک تابع باشد قطعاً مضارب صحیح غیر صفر آن نیز می توانند دوره تناوب محسوب شوند اما اگر بتوانیم کوچکترین آنرا پیدا کنیم به آن دوره تناوب اصلی گوئیم مثلاً π را می تواند دوره تناوب برای $f(x)=\sin x$ باشد وقطعاً ۲۰π و ۵۰π و ... نیز دوره تناوب می گردند اما مایلیم عددی کوچکتر از ۰π مانند ۲π را دوره تناوب اصلی این تابع معرفی می کنیم هرچند که ممکن است تابعی متناوب باشد اما کوچکترین دوره تناوب آن پیدا نشود مانند توابع ثابت $f(x)=c$ بطوریکه $f(x+T)=k$ که T می تواند هر عدد حقیقی باشد.

مثال:تابع f در بازه $[0,4)$ بصورت $f(x)=\sqrt{x}$ تعریف شده است اگر تابع g متناوب شده تابع f باشد آنگاه $g(1397)$ چیست؟





$$g(1397)=g\left(\overbrace{1396}^{349\times 4}+1\right)=g(1)=f(1)=\sqrt{1}=1$$

مثال:اگر تابع $f(x)=\frac{2x+1}{2x-1}$ که در فاصله $(7,12]$ (بطول۵)را متناوب نماییم قانون تابع در فاصله $(-3,2]$ چه خواهد شد؟

حل: چون طول دوره تناوب **۵** می باشد پس دوره تناوب می تواند **۱۰** هم باشد یعنی دو دوره تناوب

$$f(x)=f(x-2\times 5) \qquad 7<x\leq 12 \Rightarrow -3<\underbrace{x-10}_{=t}\leq 2 \Rightarrow -3<t\leq 2 \qquad x-10=t \to x=t+10$$

$$f(t)=f(x)\to f(x-10)=\frac{2x+1}{2x-1}\to \underset{t\in(-3,2]}{f(t)}=\frac{2(t+10)+1}{2(t+10)-1}=\frac{2t+21}{2t+19}$$

نکته: اگر T دوره تناوب اصلی تابع $y=f(x)$ باشد آنگاه T دوره تناوب اصلی

$a-f(x),\frac{a}{f(x)},f(x)+a,f(a+x),(a\neq ۰)af(x),-f(x)$ نیز می باشد اما دوره تناوب اصلی

$y=f(ax)$ برابر است با : $\frac{T}{|a|}\ (a\neq ۰)$

بنابراین دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی ۲π می باشد.

$$f(x)=-۵\sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)\qquad g(x)=\frac{۲}{\cos(x-۲)}\qquad h(x)=\sqrt{۵}\sin\left(-x-\sqrt{۵}\right)$$

و دوره تناوب اصلی برای توابع زیر همگی π می باشد.

$$f(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{۳}\right)\qquad g(x)=-\sqrt{۳}\cot an\left(-x+\frac{\pi}{۹}\right)$$

سوال: ثابت کنید تابع $y=\sin x$ دوره تناوب اصلی کوچکتر 2π از ندارد.

اثبات : از برهان خلف استفاده می کنیم فرض می کنیم دوره تناوب کوچکتری مانند T' داشته باشد

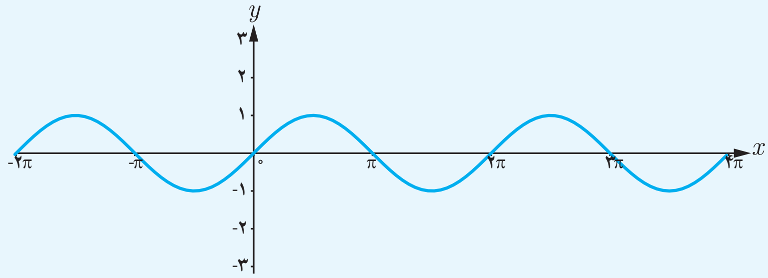
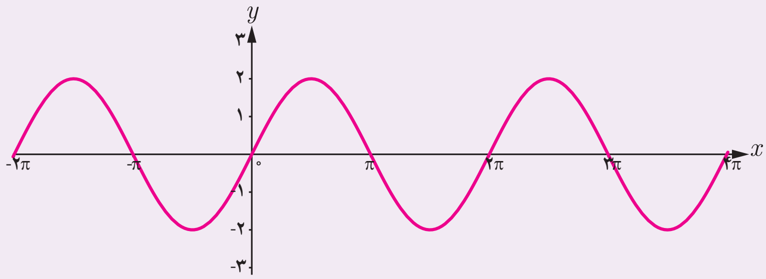
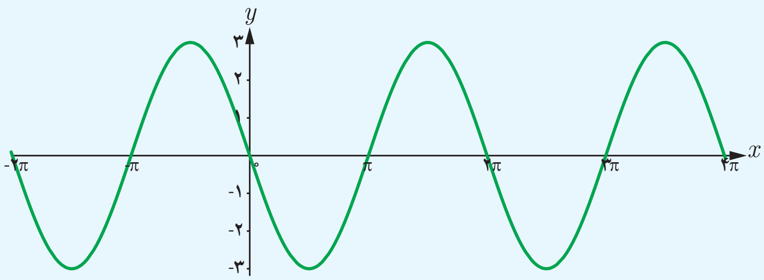
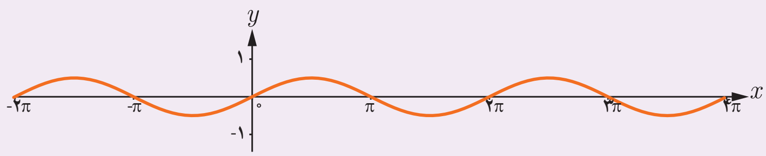
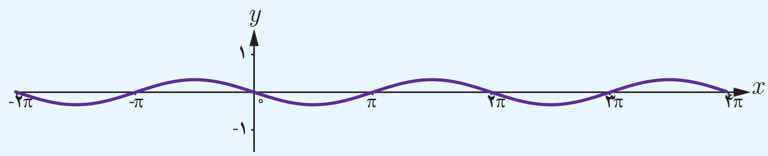
یعنی $0 < T' < 2\pi$ و $f(x+T') = f(x)$ در اینصورت داریم

$$f(x+T') = f(x) \Rightarrow \sin(x+T') = \sin x \rightarrow \sin x.\cos T' + \cos x.\sin T' = (\sin x)(1)$$

از آنجائیکه x را می توانیم هر کمانی بگیریم در نظر می گیریم $x = \frac{\pi}{2}$ در این صورت

$$f(x+T') = f(x) \Rightarrow \sin(x+T') = \sin x \rightarrow \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}.\cos T' + \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}.\sin T' = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)(1) \rightarrow \cos T' = 1$$

$$\rightarrow T' = 0 \qquad \times \; 0 < T' < 2\pi$$

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	-۱	۱		$y=\sin x$
۲π	-۲	۲		$y=۲\sin x$
۲π	-۳	۳		$y=-۳\sin x$
۲π	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$		$y=\frac{۱}{۲}\sin x$
۲π	$-\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$		$y=-\frac{۱}{۳}\sin x$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x$ را مشخص نمایید.

$\max=|a| \qquad \min=-|a|$

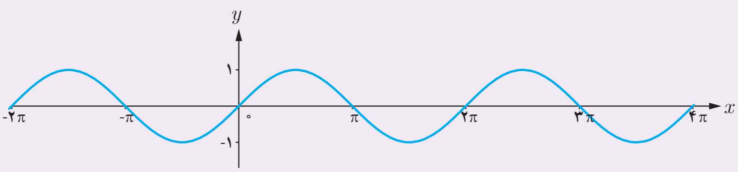
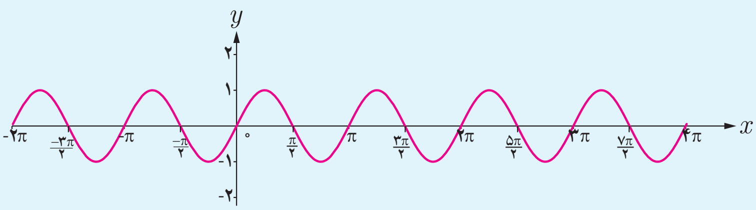
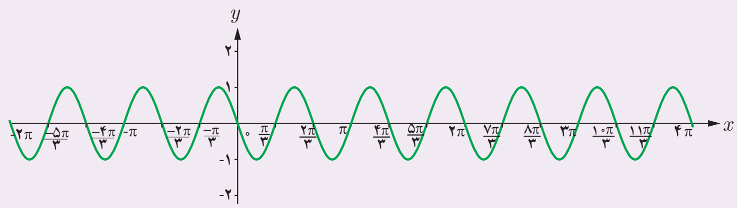
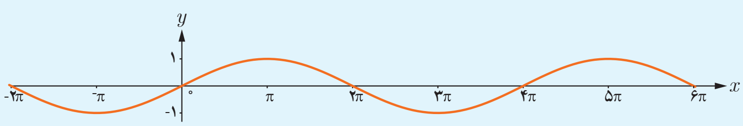
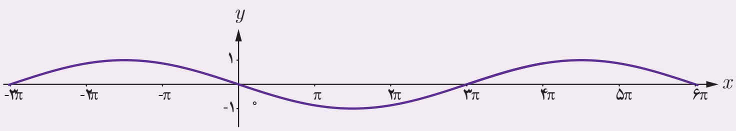
۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانید مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=a\sin x+c$ چگونه است. با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید.

درهمه موارد دوره تناوب برابر ۲π است

$\max=|a|+c \qquad \min=-|a|+c$

فعالیت

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شدهٔ زیر، دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y=\sin bx$ را بر دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

دوره تناوب	مینیمم	ماکزیمم	نمودار تابع	تابع
۲π	−۱	۱		$y=\sin x$
π	−۱	۱		$y=\sin ۲x$
$\frac{۲\pi}{۳}$	−۱	۱		$y=\sin(-۳x)$
۴π	−۱	۱		$y=\sin\frac{x}{۲}$
۶π	−۱	۱		$y=\sin(-\frac{x}{۳})$

نکاتی در مورد توابع متناوب :

۱-دوره تناوب اصلی توابع $\cos^{2n-1}(ax+d),\sin^{2n-1}(ax+d)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ می باشد $(a \neq 0, n \in \mathbb{Z})$

۲ – دوره تناوب اصلی توابع $\cot an^{n}(ax+d),\tan^{n}(ax+d),\cos^{2n}(ax+d),\sin^{2n}(ax+d)$

برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می باشد

۳-اگر **g** تابعی متناوب با دوره تناوب **T** و **f** تابعی دلخواه باشد آنگاه تابع **fog** درصورت معین بودن متناوب خواهد بود که دوره تناوب اصلی آن **T** ویا کوچکتر از **T** می باشد .چنانچه **f** تابعی یک به یک باشد دوره تناوب اصلی **fog** همان **T** است(کوچکتر نمی شود)

۴-اگر f متناوب با دوره تناوب T_1 و g تابعی متناوب با دوره تناوب T_2 باشددر صورتیکه T کوچکترین مضرب مشترک T_1 و T_2 باشد آنگاه دوره تناوب توابع $f \pm g, f \times g, \frac{f}{g}$ حداکثر T می گردد.(وشاید کوچکتر از T)

تذکر: برای تعیین دوره تناوب باید تابع را حتی الامکان ساده کرد.

مثال: دوره تناوب اصلی توابع زیر را بدست آورید.

$$۱)f(x)=\sin ۳x-\cos ۵x$$

$$\begin{cases}\sin ۳x & T_۱=\dfrac{۲\pi}{۳}\\ \cos ۵x & T_۲=\dfrac{۲\pi}{۵}\end{cases}\Rightarrow T=۲\pi$$

$$۲)g(x)=\cos^۲ ۱۵x-\tan^۳ ۶x+\sin^۵ ۹x$$

$$\begin{cases}\cos^۲ ۱۵x & T_۱=\dfrac{\pi}{۱۵}\\ \tan^۳ ۶x & T_۲=\dfrac{\pi}{۶}\\ \sin^۵ ۹x & T_۳=\dfrac{۲\pi}{۹}\end{cases}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۳}$$

$$۳)h(x)=\sin ۲x-\cos \pi x$$

$$\begin{cases}\sin ۲x & T_۱=\dfrac{۲\pi}{۲}=\pi\\ \cos \pi x & T_۲=\dfrac{۲\pi}{\pi}=۲\end{cases}$$

۲عدد گویا و π عددی گنگ هست پس نمی

توان ک . م.م پیدا کرد

$$۴)s(x)=\frac{۲\sin x-۳\cos x}{۴\sin x+۵\cos x}$$

$$s(x)=\frac{\dfrac{۲\sin x-۳\cos x}{\cos x}}{\dfrac{۴\sin x+۵\cos x}{\cos x}}=\frac{۲\tan x-۳}{۴\tan x+۵}\rightarrow T=\pi$$

۲ با توجه به نمودارهای فوق دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx$ را مشخص نمایید. $T=\frac{۲\pi}{|b|}$

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می‌دانیم، مشخص نمایید دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=\sin bx+c$ چگونه است. $\max=۱+c$ $\min=۱-c$

با انجام مراحلی مشابه مراحل بالا می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y=a\cos x$ و $y=a\cos x+c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می‌آید. $\max=|a|+c$ $\min=-|a|+c$

همان‌طور که در فعالیت‌های قبل دیدیم در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ضریب a در دورهٔ تناوب تابع بی‌تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دورهٔ تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی‌تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می‌شود، در دورهٔ تناوب بی‌تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطهٔ تابعی به صورت فوق می‌توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی، می‌توان ضابطهٔ تابع مورد نظر را به دست آورد.

مثال : دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y=۳\sin(۲x)-۲$

ب) $y=-\frac{۱}{۴}\cos(\pi x)$

پ) $y=\pi\sin(-x)+۱$

ت) $y=۸\cos(\frac{x}{۳})$

حل :

الف) $\max=|۳|-۲=۱$ $\quad \min=-|۳|-۲=-۵$ $\quad T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$

ب) $\max=\left|-\frac{۱}{۴}\right|=\frac{۱}{۴}$ $\quad \min=-\left|-\frac{۱}{۴}\right|=-\frac{۱}{۴}$ $\quad T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$

پ) $\max=|\pi|+۱=\pi+۱$ $\quad \min=-|\pi|+۱=۱-\pi$ $\quad T=\frac{۲\pi}{|-۱|}=۲\pi$

ت) $\max=|۸|=۸$ $\quad \min=-|۸|=-۸$ $\quad T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|}=۶\pi$

مراحل رسم تابع $y = a\sin(bx + c) + d$

۱- $y = \sin x$

تابع شناخته شده است که از مبدا مختصات بصورت صعودی جدا شده ودوره تناوب آن $\frac{2\pi}{1}$ می باشد.

۲- $y = \sin(bx)$

بازهم از مبدا معتصات می گذرد که اگر b>۰ باشد صعودی واگر b<۰ نزولی خارج می شود .

(sin-۵x=-sin۵x) که همچنان min=-۱,max=۱ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

۳- $y = \sin(bx + c)$

هما ن نمودار $y = \sin(bx)$ می باشد که به اندازه $\frac{c}{b}$ به سمت چپ یا راست حرکت می کیم

min=-۱,max=۱ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

۴- $y = a\sin x$

هما ن نمودار $y = \sin x$ می باشد که با توجه به ضریب a خواهیم داشت. $\min = -|a|, \max = |a|$

که در مبدا مختصات اگر a>۰ باشد صعودی واگر a<۰ نزولی عبورمی کند

۵- $y = a\sin(bx)$

مانند مرحله دوم دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ می باشد که $\min = -|a|, \max = |a|$ می باشد.

۶- $y = a\overbrace{\sin(bx + c)}^{g(x)}$

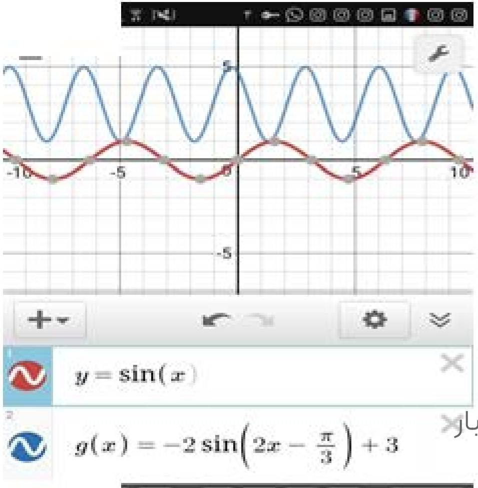
.مانند نمودار $g(x) = \sin(bx + c)$ می باشد که بستگی به مقدار و علامت a ممکن است ماگزیمم

ومی نیمم غیر از ۱و۱- داشته باشیم واز مبدا خارج شود

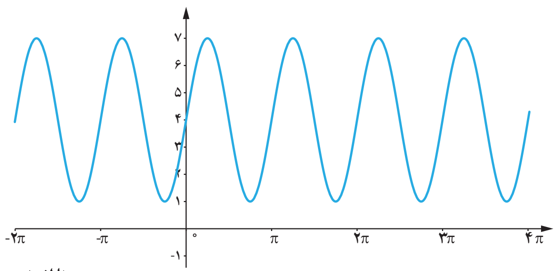
۷- $y = a\sin(bx + c) + d$

همان نمودار $g(x) = a\sin(bx + c)$ می باشد به اندازه d به سمت بالا یا پایین حرکت کرده است.

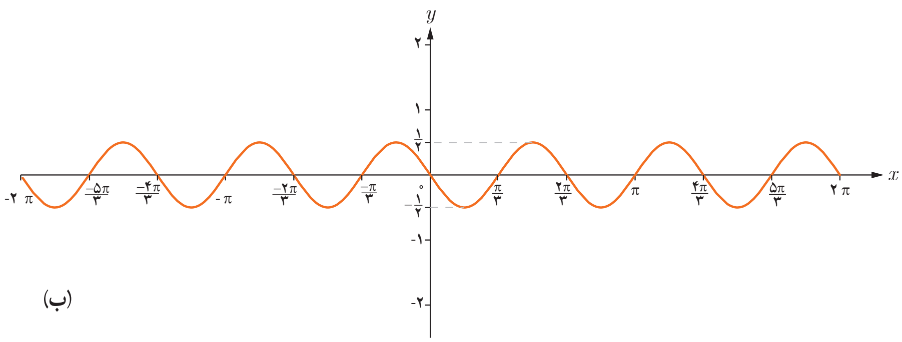
نمودارتابع $g(x) = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$ را رسم کنید با انتقال



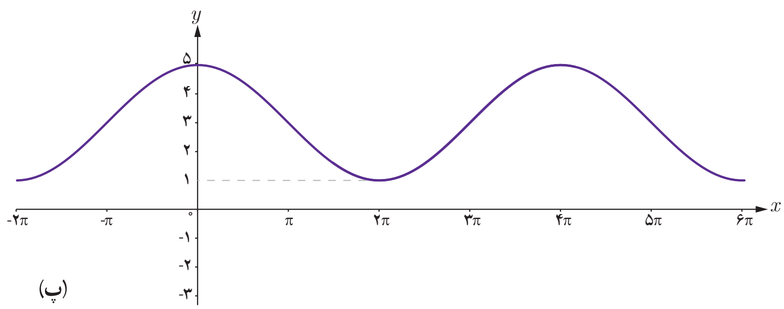
مثال : هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x) = a\sin bx + c$ یا $f(x) = a\cos bx + c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.



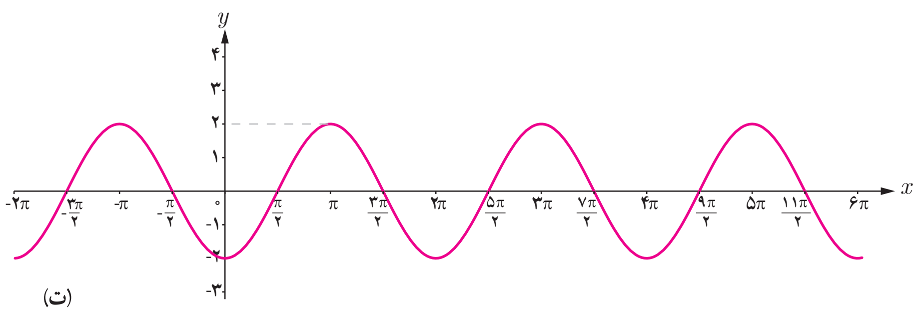
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

حل :

الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.

از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

سوال: در یک شهر در آبان ماه بطور متوسط در هر شبانه روز حداکثر دما ۳۲ درجه سانتیگراد وحداقل ۲۰درجه سانتیگراد است یک معادله سینوسی برای تعیین درجه حرارت در شبانه روز بنویسید.

$$c=\frac{۳۲+۲۰}{۲}=۲۶ \quad a=\frac{۳۲-۲۰}{۲}=۶ \quad \frac{۲\pi}{b}=۲۴\Rightarrow b=\frac{۲\pi}{۲۴}=\frac{\pi}{۱۲}$$

$$y=۶\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}x\right)+۲۶$$

سوال: در یک مخزن آب شهری ازیک طرف آب وارد می شود وپس از تصفیه آب از راه دیگر خارج می شود ارتفاع ب در این مخزن طبق یک رابطه سینوسی است که هر روز تکرار می شود اگر در ساعت ۳ صبح ارتفاع آن ماگزیمم و برابر ۱۵ متر در ساعت ۱۵ عصر کمترین ارتفاع به اندازه ۶متر داشته باشیم معادله این تابع را بنویسید .در ساعت ۱۲ ارتفاع آب چقدر است؟

$$a=\frac{۱۵-۶}{۲}=۴/۵ \quad c=\frac{۱۵+۶}{۲}=۱۰/۵ \quad \frac{T}{۲}=۱۵-۳=۱۲\rightarrow T=۲۴=\frac{۲\pi}{b}\rightarrow b=\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\max(۳,۱۵)\rightarrow ۱۵=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times۳+\alpha\right)+۱۰/۵\rightarrow ۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=۴/۵\rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{۴}+\alpha\right)=۱=\sin\frac{\pi}{۲}$$

$$\frac{\pi}{۴}+\alpha=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

$$\min(۱۵,۶)\rightarrow ۶=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times۱۵+\alpha\right)+۱۰/۵\rightarrow ۴/۵\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}+\alpha\right)=-۴/۵\rightarrow\sin\left(\frac{۵\pi}{۴}+\alpha\right)=-۱=\sin\frac{۳\pi}{۲}$$

$$\frac{۵\pi}{۴}+\alpha=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{۴}$$

$$t=۱۲\rightarrow y=۴/۵\sin\left(\frac{\pi}{۱۲}\times۱۲+\frac{\pi}{۴}\right)+۱۰/۵=۴/۵\left(-\sin\frac{\pi}{۴}\right)+۱۰/۵=-۴/۵\times۰/۷+۱۰/۵=۷/۳$$

سوال: جمعیت نوعی از حیوانات طبق معادله $p(t)=2000\cos\frac{\pi t}{5}+8000$ می باشد که $p(t)$ تعداد یا جمعیت در سال t می باشد دوره تناوب جمعیت چند سال است ماگزیمم ومی نیمم جمعیت چقدر است؟ نمودار آنرا رسم کنید (در یک دوره تناوب) معادله را برحسب سینوس بنویسید.

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=10$$

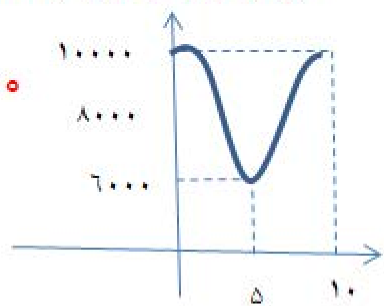
زمانی ماگزیمم رخ میدهد که کسینوس عدد ۱ برگرداند

$$\begin{cases} t=0\Rightarrow\cos\frac{\pi t}{5}=1\Rightarrow p(0)=2000\times1+8000=10000 \\ t=10\Rightarrow\cos\frac{\pi t}{5}=\cos2\pi=1\Rightarrow p(10)=2000\times1+8000=10000 \end{cases}$$

یا هر مضربی از ۱۰

می نیمم زمانی رخ میدهد که کسینوس کمترین مقدارخود یعنی ۱-برگرداند یعنی در نقاط $10k+5$

$$t=5\Rightarrow\cos\frac{\pi t}{5}=\cos\pi=-1\Rightarrow p(5)=2000\times-1+8000=6000$$



$$p(t)=2000\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi t}{5}\right)+8000$$

معادله ولتاژیک دستگاه خانگی بر حسب تابع cos نسبت به زمان دارای فرکانس (دوره تناوب) $\frac{۱}{۶۰}$ می باشد

بطوریکه تغییرات ولتاژدربازه $[-۱۷۰,۱۷۰]$ است معادله این ولتاژ را بنویسید.

$$y = p(t) = a\cos(bt) + c, \frac{۲\pi}{b} = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow b = ۱۲۰\pi$$

$$a = \frac{۱۷۰ - (-۱۷۰)}{۲} = ۱۷۰ \quad c = \frac{۱۷۰ + (-۱۷۰)}{۲} = ۰$$

$$p(t) = ۱۷۰\cos(۱۲۰\pi t)$$

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به صورت مقابل است : $y = ۳\sin(۲x)+۴$

ب) با توجه به نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب از روی نمودار، $c = ۰$ و $|a| = \frac{۱}{۲}$ و $|b| = ۳$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم : $y = -\frac{۱}{۲}\sin ۳x$

پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دورهٔ تناوب برابر ۴π است. بنابراین $c = ۳$ و $|b| = \frac{۱}{۲}$ و $|a| = ۲$ که در آن علامت a مثبت و علامت b منفی است.
لذا $a = ۲$ و $b = -\frac{۱}{۲}$ و بنابراین داریم $y = ۲\cos(-\frac{x}{۲}) + ۳$.

ت) ضابطهٔ این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a\cos bx + c$ باشد و $c = ۰$ و $|a| = ۲$ و $|b| = ۱$ و a منفی و b مثبت است.

بنابراین داریم : $y = -۲\cos x$

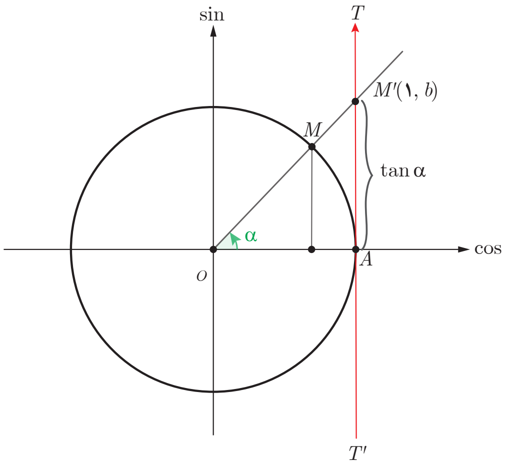
تابع تانژانت

فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطهٔ A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویهٔ α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره‌خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطهٔ M' قطع کند. نشان دهید :

$\tan\alpha = AM' = b$



می‌توان دید که تانژانت هر زاویه دلخواه مانند α، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود.
بنابراین خط TAT' را محور تانژانت می‌نامیم. نقطهٔ A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

ب) چرا تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تانژانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

پ) آیا مقدار $\tan\frac{\pi}{۲}$ عددی حقیقی است؟ $\tan\frac{۳\pi}{۲}$ چطور؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.

ب) وقتی انتهای کمان در ناحیه اول وسوم باشد انتهای OM در بالای A خط TAT' را قطع می کند پس $\tan\alpha$ مثبت است .

وقتی انتهای کمان در ناحیه دوم وچهارم باشد انتهای OM در زیر A خط TAT' را قطع می کند پس $\tan\alpha$ منفی است .

پ) هر دو قسمت جواب خیر است زیرا در این نقاط OM با TAT' موازی است پس آنرا قطع نمی کند پس tan در این نقاط تعریف نشده است.

تغییرات تانژانت

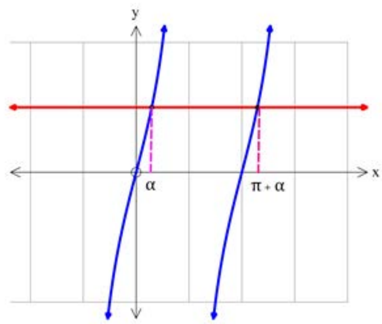
فعالیت

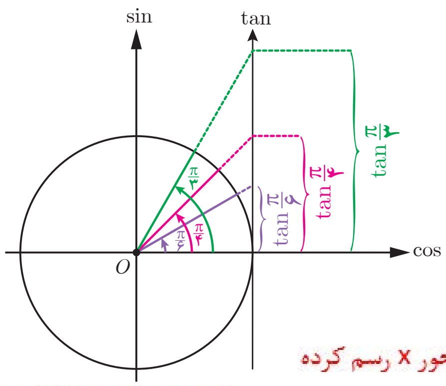
با تغییر زاویهٔ α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = ۰$، مقدار $\tan\alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α، مقدار $\tan\alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویهٔ α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{۲}$، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ازصفر به مثبت بی نهایت افزایش می یابد

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan\alpha = a$.





ازروی نمودار تابع تانژانت: خطی به موازات محور x رسم کرده تا شاخه های نمودار تانژانت را قطع کند

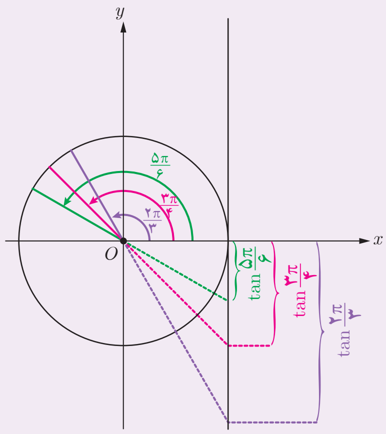
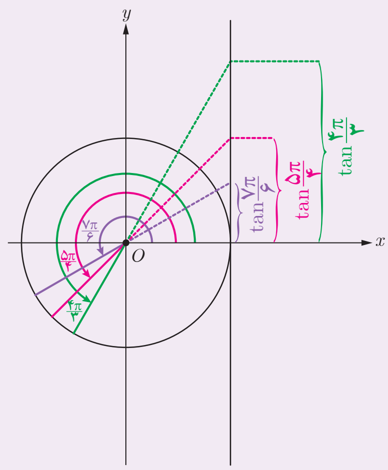
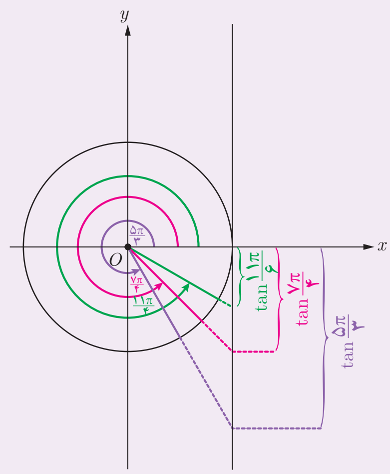
از روی دایره مثلثاتی: نقطه ای روی محور تانژانتها به اندازهa پیدا کرده به مرکز دایره مثلثاتی وصل کرده وامتداد می دهیم وزاویه را با توجه به دو ناحیه گذرانده می یابیم یکی α ودیگری $\pi + \alpha$

کاردرکلاس

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهشی؟ تانژانت در بازه ایی که تعریف شده ومجانب قائم نداشته باشد اکیداً صعودی است

ب) بازهٔ تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

حدود α	$(۰,\frac{\pi}{۲})$	$(\frac{\pi}{۲},\pi)$	$(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$	$(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$
حدود $\tan\alpha$	$(۰,+\infty)$	$(-\infty,۰)$	$(۰,+\infty)$	$(-\infty,۰)$

ربع	دوم	سوم	چهارم
زوایا			
افزایشی یا کاهشی	افزایشی	افزایشی	افزایشی
بازه تغییرات	$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$	$\pi \leq \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت $\nearrow$ به معنی افزایش یافتن و علامت $\swarrow$ به معنی کاهش یافتن است.)

ربع اول		ربع دوم		ربع سوم		ربع چهارم	
$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6}$	2π
$0 \nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \nearrow 1 \nearrow \sqrt{3} \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow -\sqrt{3} \nearrow -1 \nearrow \frac{-\sqrt{3}}{3} \nearrow 0$	0	$\nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad 1 \nearrow \sqrt{3} \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow -\sqrt{3} \nearrow -1 \nearrow \frac{-\sqrt{3}}{3} \nearrow 0$	

تابع تانژانت

همان‌طور که می‌بینیم به ازای هر زاویهٔ دلخواه در دایرهٔ مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$)، عددی حقیقی به عنوان $\tan\alpha$ داریم و تابعی با ضابطهٔ $y = \tan\alpha$ مشخص می‌کند. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \, , \, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می‌توان دید تابع $y = \tan\alpha$، تابعی متناوب است[۱] و دوره تناوب آن π است، زیرا :

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

کار در کلاس

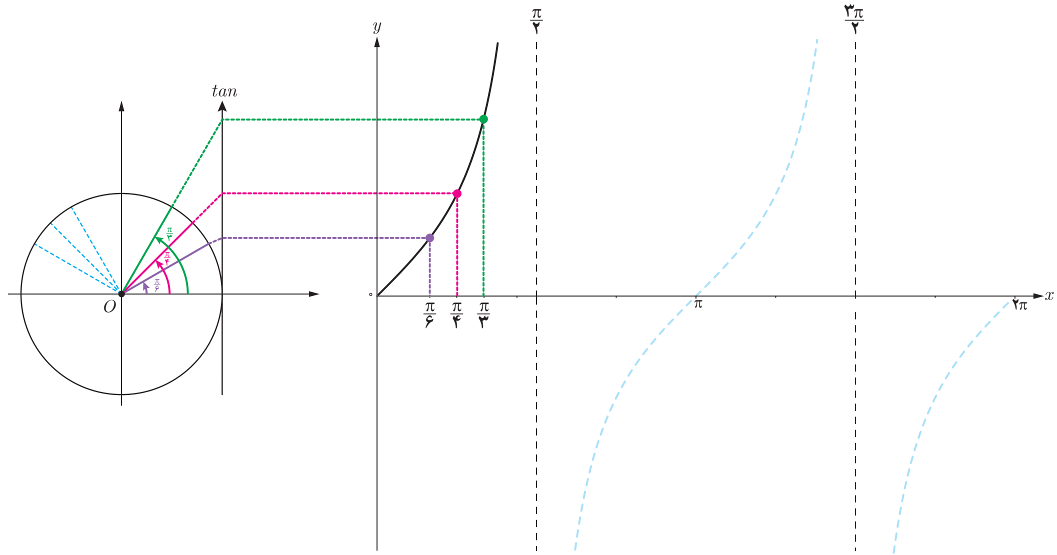
صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan\alpha$ را در بازه $[\circ \, , ۲\pi]$ بررسی کنید.

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\tan$	$\circ$	$+\infty$	$-\infty$	$\circ$	$\circ$	$+\infty$	$-\infty$	$\circ$
	↗		↗		↗		↗	

رسم تابع $y = \tan\alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan\alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع‌های دیگر رسم کنید.



۱ــ به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل tan مدنظر نیست.

تمرین

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = ۱ + ۲\sin ۷x$ $T = \frac{۲\pi}{۷}$ $Max = ۱ + ۲ = ۳$ $min = ۱ - ۲ = -۱$

ب) $y = \sqrt{۳} - \cos\frac{\pi}{۲}x$ $T = \frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}} = ۴$ $Max = \sqrt{۳} + ۱$ $min = \sqrt{۳} - ۱$

پ) $y = -\pi\sin\frac{۱}{۲}(x - ۲)$ $T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}} = ۴\pi$ $Max = \pi$ $min = -\pi$

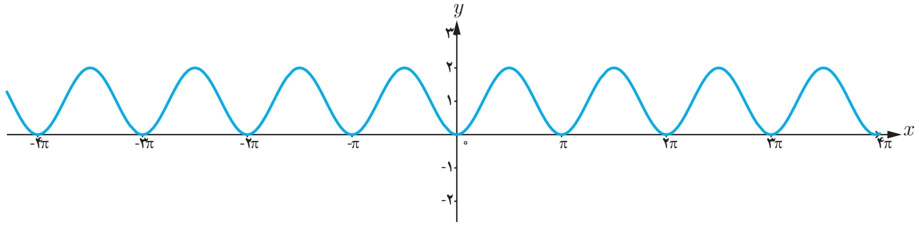
ت) $y = -\frac{۳}{۴}\cos ۳x$ $T = \frac{۲\pi}{۳}$ $Max = \frac{۳}{۴}$ $min = -\frac{۳}{۴}$

۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin\pi x$ ب) $y = ۲ - \cos\frac{۱}{۲}x$ پ) $y = \sin ۲x$ ت) $y = ۱ - \cos ۲x$

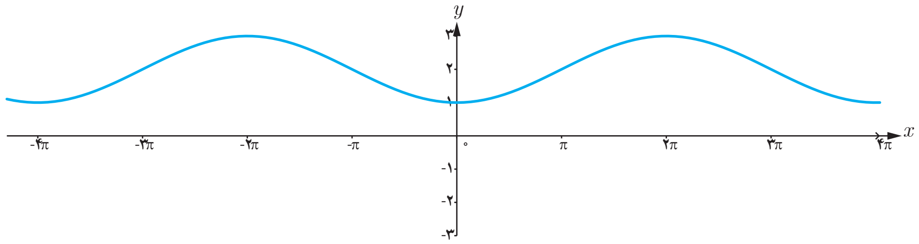
ت

۱)



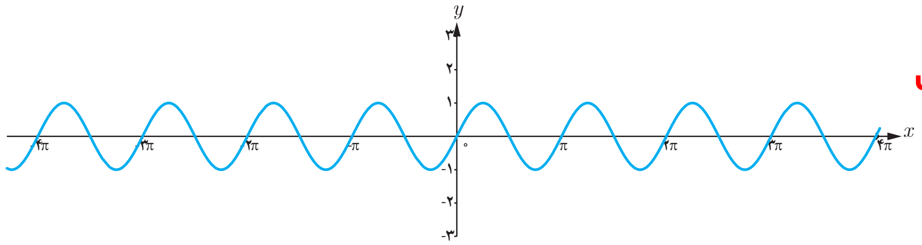
ب

۲)



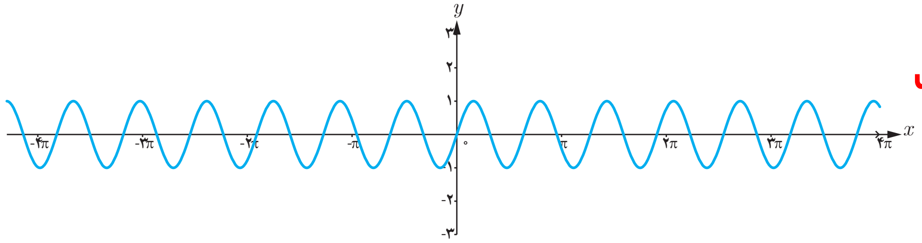
پ

۳)



الف

۴)



$y = a\sin bx + c \qquad c = \frac{\max + \min}{۲} \qquad |a| = \frac{\max - \min}{۲} \qquad b = \frac{۲\pi}{T}$

۳ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

الف) $T = \pi \quad , \quad \max = ۳ \quad , \quad \min = -۳$

ب) $T = ۳ \quad , \quad \max = ۹ \quad , \quad \min = ۳$

پ) $T = ۴\pi \quad , \quad \max = -۱ \quad , \quad \min = -۷$

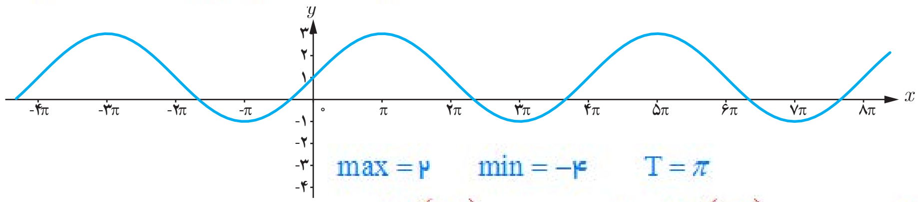
ت) $T = \frac{\pi}{۲} \quad , \quad \max = ۱ \quad , \quad \min = -۱$

۴ ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.

$\max = ۳ \qquad \min = -۱ \qquad T = ۴\pi$

$c = \frac{۳ + (-۱)}{۲} = ۱ \qquad |a| = \frac{۳ - (-۱)}{۲} = ۲ \qquad b = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۲\sin\frac{۱}{۲}x + ۱$

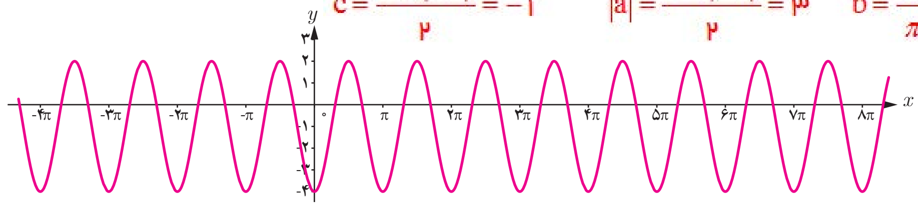
الف)



$\max = ۲ \qquad \min = -۴ \qquad T = \pi$

$c = \frac{۲ + (-۴)}{۲} = -۱ \qquad |a| = \frac{۲ - (-۴)}{۲} = ۳ \qquad b = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲ \Rightarrow y = -۳\cos ۲x - ۱$

ب)



۵ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه‌اش صعودی است. **نادرست**

ب) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد. **نادرست**

پ) می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد. درست (طبق نظر دفتر تالیف) در بازه صفر تا پی تابع غیرصعودی است

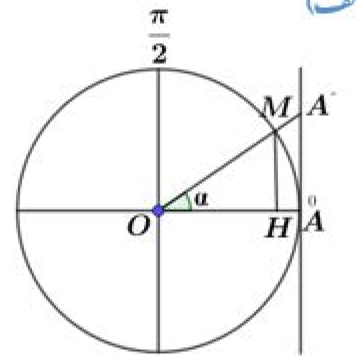
ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است. **درست**

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید:

الف) $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ ب) $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$

حل تمرین ۶: الف)

	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$
sin	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱
tan	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۱	↗	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$ ت ن

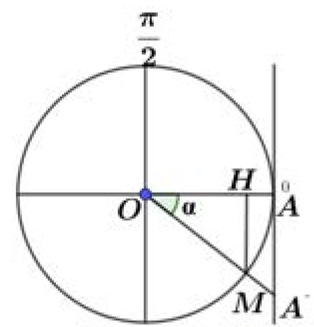


$MH < AA'$

$\sin\alpha < \tan\alpha$

ب)

	$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		$\frac{۷\pi}{۴}$		$\frac{۱۱\pi}{۶}$		۲π
sin	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	↗	$-\frac{۱}{۲}$	↗	۰
tan	ت ن	↗	$-\sqrt{۳}$	↗	-۱	↗	$-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	↗	۰



$|MH| < |AA'|$

$|\sin\alpha| < |\tan\alpha| \longrightarrow \sin\alpha > \tan\alpha$

حل تمرین ۲ صفحه ۳۴

الف) $b=\frac{۲\pi}{\pi}=۲ \Rightarrow y=۳\sin ۲x$ $\quad |a|=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳$ $\quad c=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰$

ب) $b=\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow y=۳\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۶$ $\quad |a|=\frac{۹-۳}{۲}=۳$ $\quad c=\frac{۹+۳}{۲}=۶$

پ) $b=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۳\sin\frac{۱}{۲}x-۴$ $\quad |a|=\frac{-۱-(-۷)}{۲}=۳$ $\quad c=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴$

ت) $b=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴ \Rightarrow y=\sin ۴x$ $\quad |a|=\frac{۱-(-۱)}{۲}=۱$ $\quad c=\frac{۱+(-۱)}{۲}=۰$