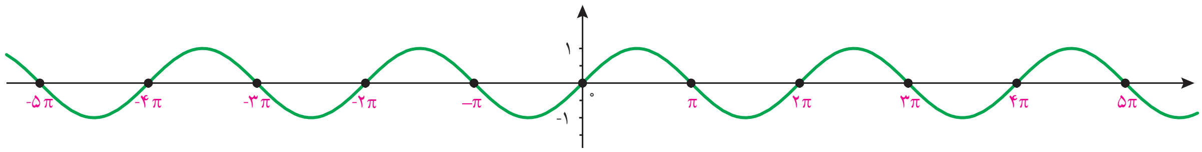
درس ۲

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویهٔ مجهول داریم، یک معادلهٔ مثلثاتی نام دارد.

مثال : تابع مثلثاتی $y=\sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.

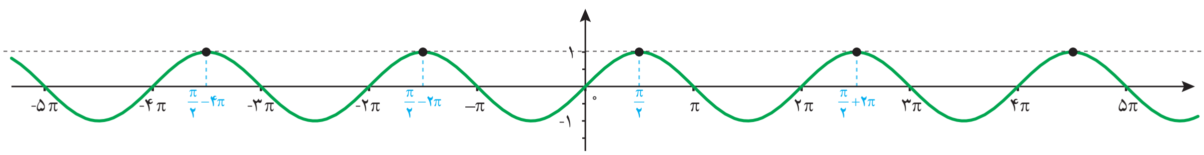


همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x=0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به‌صورت $x=\dots, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y=0$ (یعنی محور xها) و تابع $y=\sin x$ است.

این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x=k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.

به‌طور مشابه جواب های معادله $\sin x=1$ مقادیری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.

این مقادیر محل تقاطع $y=1$ و $y=\sin x$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های معادله صفحه قبل به‌صورت

$$x=\cdots, \frac{\pi}{2}-4\pi, \frac{\pi}{2}-2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+2\pi, \cdots$$

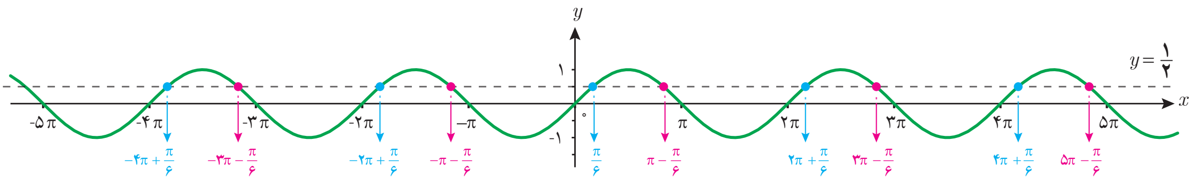
می‌باشند که به‌صورت کلی $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x=\frac{1}{2}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

فعالیت

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است مثال بزنید. $\dots, \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۱۳\pi}{۶}, \frac{۱۷\pi}{۶}, -\frac{۱۱\pi}{۶}, -\frac{۷\pi}{۶}, \dots$

۲ خط $y=\frac{۱}{۲}$ و نمودار $y=\sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟ **بله**



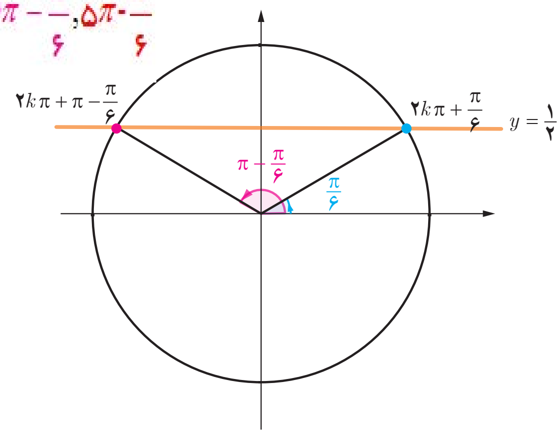
۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y=\frac{۱}{۲}$ و $y=\sin x$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x=\frac{۱}{۲}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

معادله بی شمار جواب دارد ولی با نظم خاصی تکرار می شود

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y=\frac{۱}{۲}$ و زوایای $\frac{\pi}{۶}$ و $\pi-\frac{\pi}{۶}$ که سینوس آنها برابر $\frac{۱}{۲}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{۶}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi-\frac{\pi}{۶}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{۶}$: $-۶\pi+\frac{\pi}{۶}, -۴\pi+\frac{\pi}{۶}, -۲\pi+\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}, ۲\pi+\frac{\pi}{۶}, ۴\pi+\frac{\pi}{۶}$

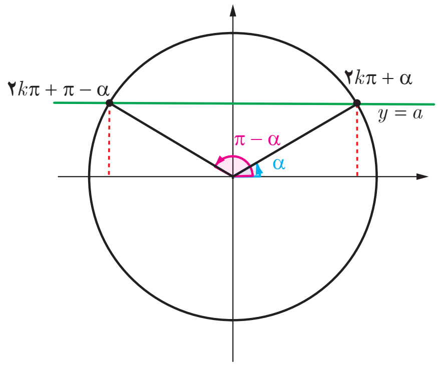
هم انتها با $\pi-\frac{\pi}{۶}$: $-۵\pi-\frac{\pi}{۶}, -۳\pi-\frac{\pi}{۶}, -\pi-\frac{\pi}{۶}, \pi-\frac{\pi}{۶}, ۳\pi-\frac{\pi}{۶}, ۵\pi-\frac{\pi}{۶}$



برای عدد حقیقی $-۱ \le a \le ۱$ که $\sin x=a$، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin\alpha=a$. بنابراین معادله $\sin x=a$ به‌صورت $\sin x=\sin\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x=\sin\alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به‌طوری که $\sin x=\sin\alpha$ در دوران‌های مختلف به‌صورت زیر است :

$$\sin x=\sin\alpha \Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad و \quad x=(۲k+۱)\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشد که $k\in\mathbb{Z}$.

مثال : معادلهٔ $\sin x=-\frac{۱}{۲}$ را حل کنید.

$$\sin x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\sin x=\sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\begin{cases} x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} & , \ k\in\mathbb{Z} \\ x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶} & , \ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

کاردرکلاس

معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲\sin x-\sqrt{۳}=۰$

ب) $۴\sin x+\sqrt{۸}=۰$

$$۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

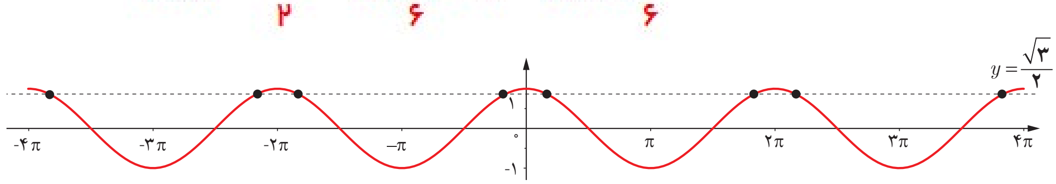
$$۴\sin x + \sqrt{۸} = ۰$$

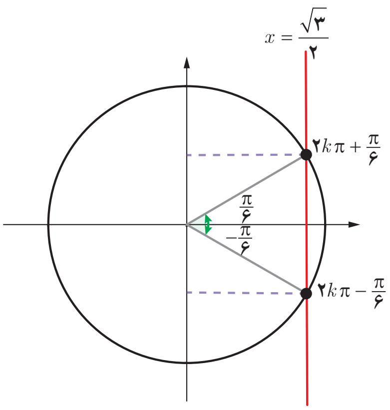
$$\sin x = \frac{-\sqrt{۸}}{۴} = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} = \sin\left(-\frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \\ x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

فعالیت

نمودار تابع $y=\cos x$ و خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را بیابید.

$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

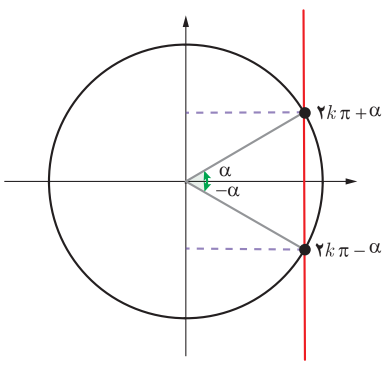




الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به‌دست آورید.

برای هر عدد حقیقی $-۱\leq a\leq ۱$ در معادله $\cos x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos\alpha=a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به‌صورت $\cos x=\cos\alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به‌صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow x=۲k\pi+\alpha \quad \text{و} \quad x=۲k\pi-\alpha \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

✤ **مثال :** جواب‌های معادله $\cos x = \frac{۱}{۲}$ را به‌دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-۳\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$ پس معادله به‌صورت $\cos x = \cos\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به‌صورت زیر هستند :

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -۲\pi - \frac{\pi}{۳}, -۲\pi + \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}$ از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

✤ **مثال :** معادله $\sin ۲x = \sin ۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند :

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + ۳x \Rightarrow x = ۲k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = (۲k+۱)\pi - ۳x \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)\pi}{۵} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

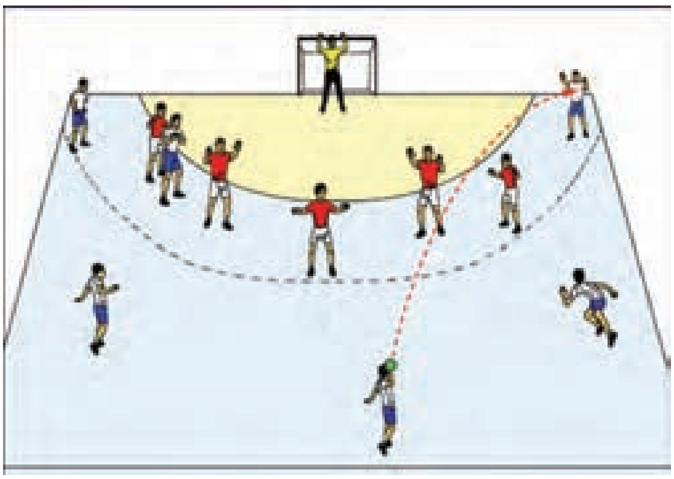
✤ **مثال :** معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید.

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$$
$$۲\sin ۳x = \sqrt{۲}$$

$$\sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \\ ۳x = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{(۲k+۱)}{۳}\pi - \frac{\pi}{۱۲} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

✤ **مثال :** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۱۶\ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۱۲/۸ متری او قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر حسب متر) و زاویه پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^۲ \sin ۲\theta}{۱۰}$$



از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$۱۲/۸=\frac{(۱۶)^{۲}\sin ۲\theta}{۱۰} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱۲/۸\times ۱۰}{۲۵۶} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} ۲\theta=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲\theta=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta=\frac{\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

مثال : جواب‌های معادله $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را به‌دست آورید.

$$۲\sin x\cos x=۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin ۲x=\sin\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \\ ۲x=(۲k+۱)\pi-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} & , k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^{۲}x-۹\cos x-۵=۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم $۲t^{۲}-۹t-۵=۰$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل دو معادله ساده $\cos x=۵$ و $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x=۵$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}\ ,\ k=\mathbb{Z}$$

مثال : معادله $\sin x+\cos x=۱$ را در بازه $۰\le x\le ۲\pi$ حل کنید.

$\sin x+\cos x=۱$

$\sin x=۱-\cos x$

$\sin^{۲}x=(۱-\cos x)^{۲}$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$\sin^{۲}x=۱-۲\cos x+\cos^{۲}x$ استفاده از رابطه $\sin^{۲}=۱-\cos^{۲}x$

$1-\cos^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x$

$2\cos^2 x-2\cos x=0$

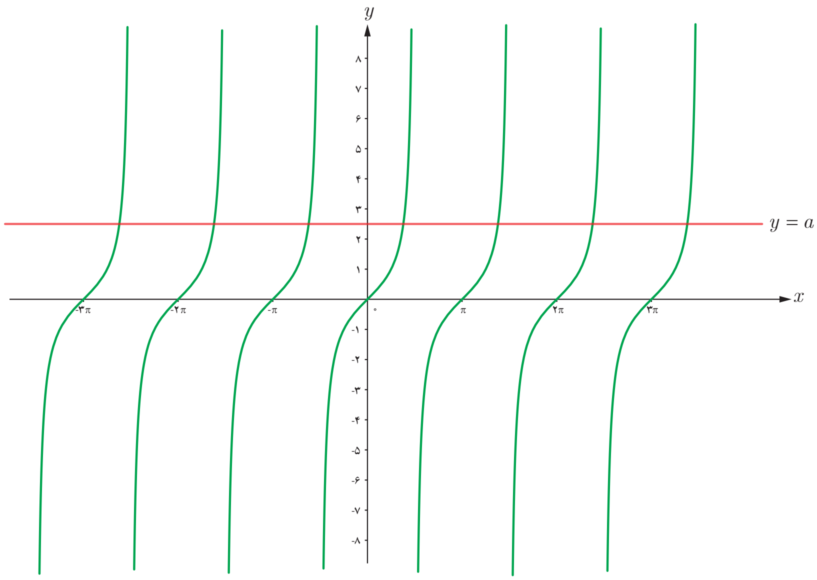
$2\cos x(\cos x-1)=0 \Rightarrow 2\cos x=0$ یا $\cos x-1=0$

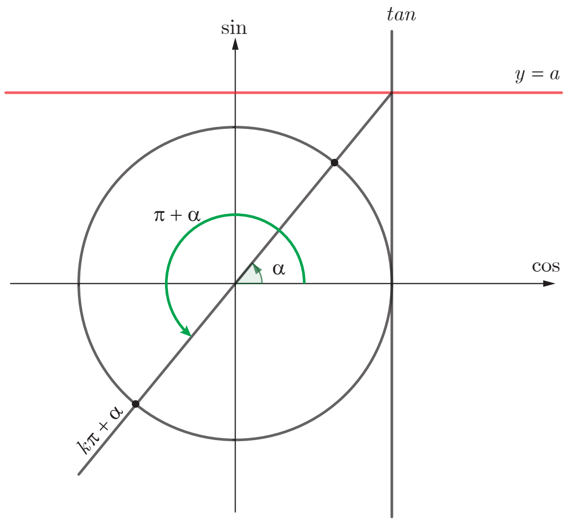
اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $0\leq x\leq 2\pi$ می‌یابیم :

$$2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$
$$\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=0\ ,2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x=\frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x=0,\frac{\pi}{2}$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

در شکل زیر نمودار تابع $y=\tan x$ و خط $y=a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x=a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a، که $\tan x=a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan\alpha=a$. بنابراین معادله $\tan x=a$ به‌صورت $\tan x=\tan\alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x=\tan\alpha$ باید رابطه بین زوایای x و a را بیابیم.





از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و a به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ که k یک عدد صحیح، است می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a=۱$ باشد، داریم :

$$\tan x=۱\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\quad (k\in z)$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x=\tan\alpha$ به‌صورت $x=k\pi+\alpha$ می‌باشد که k یک عددی صحیح است.

مثال : معادله $\tan x=\tan ۵x$ را حل کنید.

حل :

$$x=k\pi+۵x\ \Rightarrow\ ۴x=k\pi\ \rightarrow\ x=\frac{k\pi}{۴}\ (k\in\mathbb{Z})$$

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

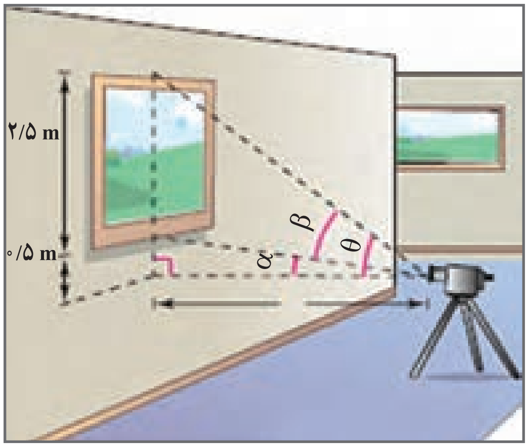
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}}+\dfrac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha\tan\beta}$$

مثال : نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به‌صورت زیر است.

$$\tan\beta = \frac{۲/۵\,x}{x^۲ + \frac{۳}{۲}}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به‌دست آورید.

حل : با توجه به شکل برای مثلث قائم‌الزاویه پایین شکل داریم :

$$\tan\alpha = \frac{۰/۵}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم :

$$\tan\theta = \frac{۳}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به‌دست می‌آید :

$$\tan\beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{۱ + \tan\theta\tan\alpha} = \frac{\frac{۳}{x} - \frac{۰/۵}{x}}{۱ + \frac{۳}{x} \times \frac{۰/۵}{x}} = \frac{\frac{۲/۵}{x}}{\frac{x^۲ + \frac{۳}{۲}}{x^۲}} = \frac{۲/۵x}{x^۲ + \frac{۳}{۲}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم :

$$x = ۱ \rightarrow \tan\beta = \frac{۲/۵ \times ۱}{۱^۲ + \frac{۳}{۲}} = \frac{۲/۵}{۲/۵} = ۱$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan\frac{\pi}{۴} = ۱$ پس جواب‌های معادله tanβ=۱ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=۰$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{۴}$ را به‌دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

تمرین

۱ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\cos ۲\alpha$

ب) $\sin ۲\alpha$

۲ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^\circ$ به‌دست آورید.

۳ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin\frac{\pi}{۲} = \sin ۳x$

ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$

پ) $\cos x = \cos ۲x$

ت) $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$

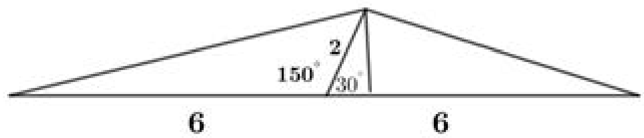
ث) $۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$

ج) $\sin x - \cos ۲x = ۰$

چ) $\tan(۲x - ۱) = ۰$

ح) $\tan ۳x = \tan \pi x$

۴ مثلثی با مساحت ۳ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟



$$S = \frac{۱}{۲} ab \sin C = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۶ \times \sin C = ۳ \rightarrow \sin C = \frac{۱}{۲} \rightarrow C = ۳۰^\circ, ۱۵۰^\circ$$

دو مثلث تشکیل می شود

حل تمرین صفحه ۴۴:

الف)

$$\sin^{۲}\alpha = ۱ - \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^{۲} = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲}\alpha - ۱ = ۲ \times \frac{۲۵}{۱۶۹} - ۱ = -\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

ب)

$$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha.\cos\alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

حل تمرین ۲:

$$\sin^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱-\cos ۴۵^{\circ}}{۲} = \frac{۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲-\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \sin ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\cos^{۲} ۲۲/۵ = \frac{۱+\cos ۴۵^{\circ}}{۲} = \frac{۱+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲+\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \cos ۲۲/۵ = \frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$$

حل تمرین ۳:

الف)

$$\sin\frac{\pi}{2}=\sin 3x$$

$$\begin{cases} 3x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6} \\ 3x=2k\pi+\underbrace{\pi-\dfrac{\pi}{2}}_{=\frac{\pi}{2}}\rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

ب)

$$\cos 2x-\cos x+1=0$$

$$2\cos^2 x-1-\cos x+1\rightarrow \cos x\left(2\cos x-1\right)=0\rightarrow\begin{cases} \cos x=0\rightarrow x=k\pi+\dfrac{\pi}{2} \\ 2\cos x-1=0\rightarrow \cos x=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}\rightarrow x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

ب)

$$\cos x=\cos 2x\rightarrow\begin{cases} x=2k\pi+2x\rightarrow x=-2k\pi \\ x=2k\pi-2x\rightarrow x=\dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

ت)

$$\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱ \rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x - \sin x = ۰ \rightarrow ۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} t^۲ + t - ۱ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱ + ۸ = ۹ \rightarrow t = \frac{-۱ \pm ۳}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \\ \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

ث)

$$۲\sin^۲ x + \sin x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\sin x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \rightarrow \Delta = ۱ + ۸ = ۹ \rightarrow t = \frac{-۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۲ \quad \text{غیر ممکن} \end{cases}$$

ج)

$$\sin x - \cos ۲x = ۰$$

$$\sin x = \cos ۲x = \sin\left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right) \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{۲} - ۲x\right) \rightarrow x = -۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

ج)

$$\tan(۲x - ۱) = ۰$$

$$۲x - ۱ = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi + ۱}{۲}$$

ج)

$$\tan ۳x = \tan \pi x$$

$$۳x = k\pi + \pi x \rightarrow ۳x - \pi x = k\pi \rightarrow x(۳ - \pi) = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{(۳ - \pi)}$$