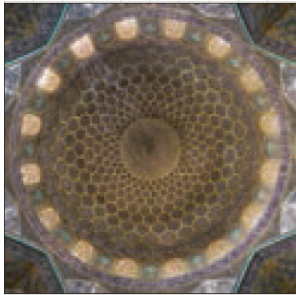


تبدیل‌های هندسی و کاربردها



عکس: محمد رضا دومی‌ز کجی

■ تبدیل‌های هندسی با بسیاری از مفاهیم هندسی از جمله هم‌نهشتی ارتباط نزدیکی دارند. همچنین کاربردهای فراوانی در صنعت، معماری و هنر دارند. خلق بناهای تاریخی که از دستاوردهای با ارزش بشر به شمار می‌آید، بدون به‌کارگیری تبدیل‌های هندسی میسر نمی‌شد. عمارت مسجد نصیرالملک در شیراز نمونه‌ای زیبا از این مطلب است.



تبدیل‌های هندسی

در زندگی روزمره و بسیاری از پدیده‌های اطرافمان نظیر طراحی پارچه، نقش فرش، کاشی کاری، گچ‌بری و... شکل‌های مختلف، طبق الگویی خاص تکرار می‌شود. در این فصل وضعیت‌های مختلفی را که هر شکل مشخص در اثر حرکت مجموعه نقاطش در صفحه پیدا می‌کند، مطالعه و بررسی خواهیم کرد.

این حرکت‌ها می‌تواند دارای ویژگی‌های خاص قابل تعریف باشد؛ حرکتی که سال‌های قبل با نمونه‌هایی از آن آشنا شده‌اید و با توجه به نوع این ویژگی‌ها، آنها را انتقال، بازتاب (تقارن محوری) یا دوران نامیده‌اید. انتقال، بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

تبدیل‌های مطرح شده در این کتاب می‌تواند **موقعیت**^۱ (جایگاه شکل در صفحه) یا **اندازه**^۲ شکل را تغییر دهد.
تبدیل یافته‌ی یک شکل را، **تصویر** آن می‌نامیم.

در سال‌های گذشته با مفاهیم بازتاب، انتقال و دوران تا حدودی آشنا شدید. در این فعالیت، این تبدیل‌ها و برخی ویژگی‌های آنها را به‌طور شهودی مرور و یادآوری خواهیم کرد.

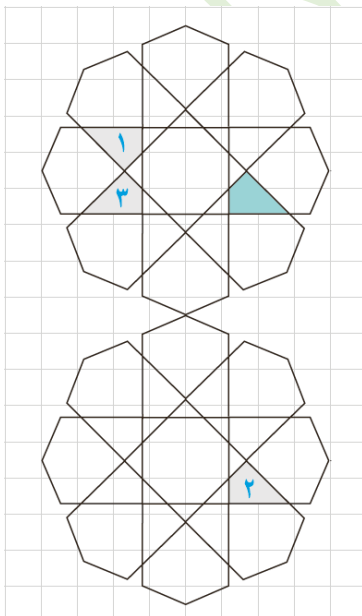
فعالیت

۱- به تصویر روبه‌رو دقت کنید.

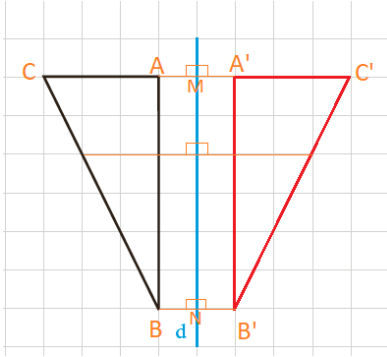
اگر چهارضلعی‌های ۱، ۲ و ۳ را تبدیل یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده بدانیم:
الف) کدام چهارضلعی، انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است؟
چهارضلعی ۲ انتقال یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است.

ب) کدام چهارضلعی بازتاب چهارضلعی رنگ شده است؟
چهارضلعی ۳ بازتاب چهارضلعی رنگ شده است.

پ) کدام شکل، دوران یافته‌ی شکل رنگ شده است؟
چهارضلعی ۱ دوران یافته‌ی چهارضلعی رنگ شده است.



۲- الف) بازتاب شکل روبه‌رو را نسبت به خط d رسم کنید.



(توضیح دهید که چگونه این کار را انجام می‌دهید. در این حالت خط d نسبت به

پاره خطی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، چه وضعیتی دارد؟)

از هر رأس مثلث بر خط d عمودی رسم می‌کنیم و سپس به اندازه ی آن پاره خط امتداد می‌دهیم تا تصویرش به دست آید. ($AM = A'M$, $BN = B'N$, $CM = C'M$) سپس نقاط تصویر یعنی A' , B' و C' را به هم وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC است.

خط d عمود منصف پاره خطی است که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را تغییر می‌دهد؟ اندازه‌ها را چطور؟

موقعیت شکل را تغییر می‌دهد اما اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره‌خط با شیب پاره‌خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

خیر شیب پاره خط BC با شیب پاره خط متناظرش $B'C'$ برابر نیست.

ت) آیا حالتی وجود دارد که بازتاب، شیب خط را حفظ کند؟

اگر خط مورد نظر موازی یا عمود بر محور بازتاب باشد آنگاه شیب آن حفظ می‌شود

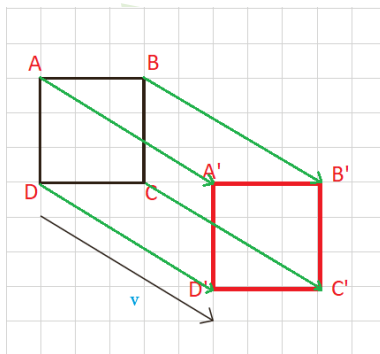
در شکل بالا همانطور که می‌بینیم پاره خط AC بخشی از خط عمود بر خط d است و تصویر آن نیز روی همان خط عمود

قرار خواهد گرفت و به همین دلیل شیب پاره خط $A'C'$ با شیب پاره خط AC برابر است.

اگر خط مورد نظر موازی محور بازتاب باشد تصویرش هم با آن موازی است پس هم شیب خواهند شد.

۳- الف) تصویر شکل روبه‌رو را تحت انتقال با بردار v رسم کنید (توضیح دهید

که چگونه این کار را انجام می‌دهید).



با توجه به بردار v باید رأس‌های مربع را ۵ واحد به سمت راست و ۳ واحد به سمت پایین

انتقال بدهیم تا نقاط تصویر به دست آیند. واضح است که با توجه به شکل بردارها یی که

هر نقطه را به تصویرش برده است با بردار v برابر هستند. سپس نقاط تصویر را به ترتیب

به هم وصل می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ انتقال یافته ی مربع $ABCD$ تحت بردار v است.

در این حالت پاره‌خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کند، نسبت به هم

چه وضعیتی دارند؟

پاره خط‌هایی که هر نقطه را به تصویرش نظیر می‌کنند باهم موازی هستند.

ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می‌کند؟ اندازه‌ها را چطور؟

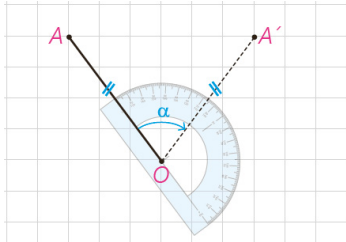
این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی‌کند ولی اندازه‌ها را حفظ می‌کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل، شیب هر پاره خط با شیب پاره خط متناظر در تصویرش برابر است.

ت) آیا در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود؟

در این تبدیل زاویه بین خطوط در شکل و تصویر متناظر آن حفظ می شود.



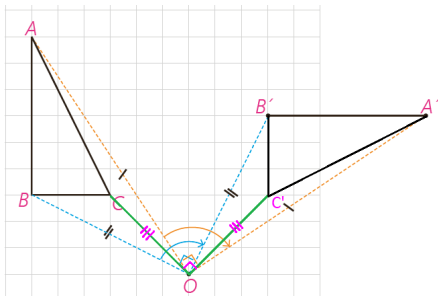
۴- در سال های گذشته دیدید که برای دوران دادن هر شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، کافی است هر نقطه از شکل، مثل نقطه A را به مرکز دوران یعنی O وصل کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه ای برابر α رسم، و روی ضلع دیگر این زاویه پاره خطی به اندازه OA جدا کنیم تا نقطه A' به دست آید.

می خواهیم مثلث ABC را حول مرکز O و 90° درجه در جهت

حرکت عقربه های ساعت دوران دهیم؛ به ترتیبی که گفته شد نقاط A و B

را دوران داده ایم.

الف) به همین ترتیب تصویر نقطه C را پیدا، و شکل را کامل کنید.



ب) آیا این تبدیل، موقعیت شکل اولیه را حفظ می کند؟ اندازه ها را چطور؟

این تبدیل موقعیت شکل اولیه را حفظ نمی کند ولی اندازه ها را حفظ می کند.

پ) آیا در این تبدیل، شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر است؟

در این تبدیل شیب پاره خط اولیه با شیب پاره خط تصویر آن برابر نیست.

ت) آیا می توانید زاویه دوران را طوری تعیین کنید که دوران تحت آن، شیب خط را

حفظ کند؟

اگر زاویه دوران 0° ، 180° و یا 360° درجه انتخاب شود دوران تحت آن، شیب خط را حفظ می کند.

به طور شهودی می توان دید که بازتاب، انتقال و دوران، می توانند موقعیت شکل را تغییر دهند ولی اندازه پاره خطها و زاویه ها را تغییر نمی دهند.

در ادامه این فصل با تبدیلی آشنا خواهید شد که در آن بر خلاف سه تبدیل صفحه

قبل، اندازه زاویه ها حفظ می شود ولی اندازه پاره خطها تغییر می کند. این تبدیل را تجانس می نامیم.

حال که به طور شهودی، برخی ویژگی های تبدیلی های مختلف را مرور کردیم در ادامه

با دقت بیشتری به تعریف تبدیل، معرفی، ویژگی ها و کاربردهای آن خواهیم پرداخت.

تعریف: تبدیل T در صفحه P ، تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P ، دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است. اگر تبدیل را با حرف T نمایش دهیم به اختصار چنین می‌نویسیم:

$$T: P \rightarrow P$$

$$T(A) = A'$$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که بازتاب، انتقال و دوران طول پاره خط را حفظ می‌کنند؛ یعنی اندازه پاره خطی مثل AB در شکل اولیه با اندازه پاره خط $A'B'$ در تصویر آن برابر است. این ویژگی را اصطلاحاً طولپایی یا ایزومتري می‌نامیم.

تعریف: تبدیل‌هایی که طول پاره خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولپا (ایزومتري) نامیده می‌شوند.

به عبارتی اگر داشته باشیم: $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ ، آن‌گاه داریم: $AB = A'B'$

پیش از این به طور شهودی پذیرفتیم که در تبدیل‌هایی که مرور شد، اندازه زاویه حفظ می‌شود. در این فعالیت با استدلال دقیق‌تری این ادعا را اثبات می‌کنیم.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند. فرض کنید T تبدیلی طولپاست. و داریم:

$$T(A) = A'$$

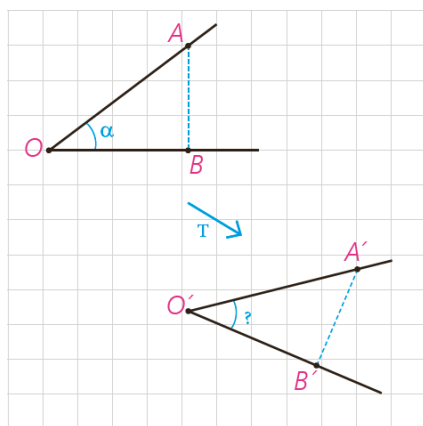
$$T(B) = B'$$

$$T(O) = O' \text{ و } \widehat{AOB} = \alpha$$

دلیل همنهستی دو مثلث OAB و $O'A'B'$ را بنویسید و از آنجا برابری زاویه‌های

AOB و $A'O'B'$ را نتیجه بگیرید.

چون این تبدیل طولپاست پس داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = O'A' \\ OB = O'B' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'} = \alpha$$

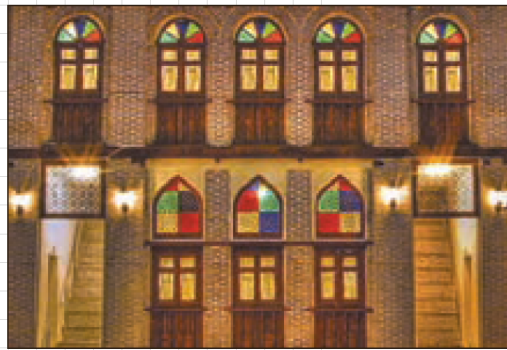
بنابراین می توان نتیجه گرفت :

قضیه: در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

در تبدیل های مطرح شده در این کتاب، می توان ثابت کرد که تبدیل یافته هر خط، یک خط است. بنابراین برای پیدا کردن تبدیل یافته یک خط، کافی است تبدیل یافته دو نقطه دلخواه از آن را پیدا و خط گذرنده از آن دو را رسم کنیم.

حال با استدلال دقیق تری بازتاب، انتقال، دوران و تجانس را بررسی خواهیم کرد.

■ بازتاب



همان طور که پیش از این اشاره شد برای پیدا کردن بازتاب یک نقطه مثل A نسبت به خط d کافی است از نقطه A به خط داده شده عمودی وارد کنیم و پای عمود را H بنامیم. حال AH را از سمت H به اندازه خودش امتداد می دهیم تا A' به دست آید. در این صورت A' را بازتاب یا قرینه A نسبت به خط d می نامیم و می نویسیم :

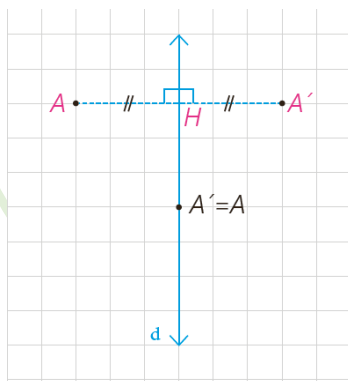
$$S'(A) = A'$$

در چنین حالتی خط d عمود منصف پاره خط AA' خواهد بود.

خط d ، خط بازتاب یا محور بازتاب نامیده می شود.

اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی

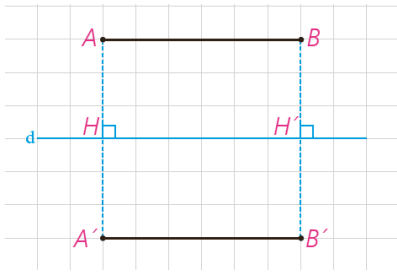
A' همان A است.



تعریف: در هر تبدیل، نقطه ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می شود، نقطه ثابت تبدیل می نامند.

بنابراین بازتاب نسبت به خط، بی شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

فعالیت



می‌خواهیم با استدلال دقیق‌تری نشان دهیم بازتاب، تبدیل طولی است. حالت‌های مختلف یک پاره‌خط را نسبت به خط بازتاب d در نظر می‌گیریم و در هر حالت نشان می‌دهیم که اندازه پاره‌خط با اندازه تصویر آن برابر است.

الف) ابتدا مسئله را برای حالتی در نظر می‌گیریم که AB با خط d موازی است. بازتاب A و B را نسبت به خط d پیدا می‌کنیم و آن را A' و B' می‌نامیم. چرا $A'B'$ با خطوط d و AB موازی است؟

می‌دانیم مستطیل چهار ضلعی است که همه زوایه‌های آن قائمه باشد.

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel d, AH \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ AB \parallel d, BH' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \hat{B} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow ABH'H \text{ مستطیل است}$$

در هر مستطیل اضلاع مقابل با هم برابرند پس:

$$\left. \begin{array}{l} AH = BH' \Rightarrow \sphericalangle AH = \sphericalangle BH' \xrightarrow{\frac{AH=AH}{BH'=BH'}} AA' = BB' \\ AA' \perp d \\ BB' \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع است } ABB'A'$$

در نتیجه: $AB' \parallel AB$ موازی است.

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \parallel AB \\ AB \parallel d \end{array} \right\} \Rightarrow A'B' \parallel d$$

از طرفی متوازی الاضلاع $ABB'A'$ زاویه قائمه دارد:

پس چهارضلعی $ABB'A'$ یک **مستطیل**... است و از آنجا می‌توان نتیجه گرفت که اضلاع روبه‌رو، دو به دو هم‌اندازه‌اند؛ یعنی: $AB = A'B'$.

ب) حال فرض می‌کنیم که فقط یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط داده شده روی خط بازتاب باشد.

(اگر هر دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط داده شده روی خط بازتاب باشد، اثبات بدیهی است؛ چرا؟)

خوب در این حالت بازتاب پاره خط MA بر روی خط و بر روی خودش منطبق است.

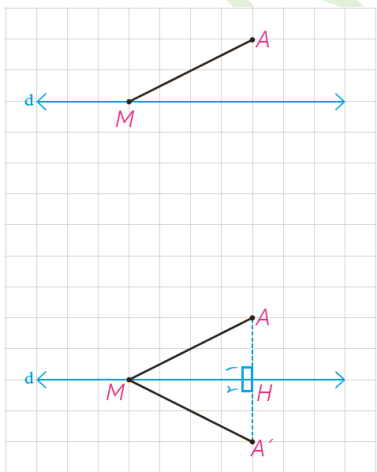
$$S(M) = M, S(A) = A \Rightarrow MA = MA$$

بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' و بازتاب M ، خود M است.

$$\text{به عبارتی: } S(M) = M \text{ و } S(A) = A'$$

آیا می‌توانید به کمک هم نهستی مثلث‌ها، دلیلی برای تساوی $MA = MA'$ ارائه

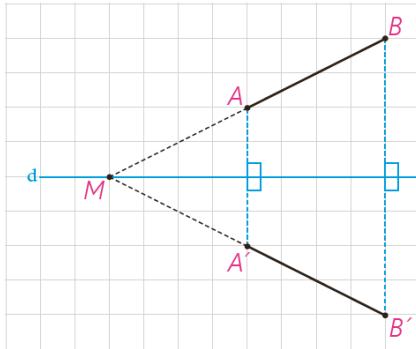
کنید؟



$$\left. \begin{array}{l} AH = A'H \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ MH = MH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \triangle MAH \cong \triangle MA'H \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} MA = MA', \widehat{AMH} = \widehat{A'MH}$$

آیا می‌توانید این تساوی را به روش دیگری نشان دهید؟ (از خاصیت عمود منصف یک پاره خط کمک بگیرید.)

خط d عمود منصف پاره خط AA' است؛ بنا براین هر نقطه مانند M روی خط d از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است. یعنی: $MA = MA'$



(پ) در حالتی که پاره خط AB با خط بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، پاره خط AB را امتداد می‌دهیم تا خط بازتاب را در نقطه M قطع کند. نقطه B' بازتاب نقطه B را نسبت به خط بازتاب پیدا، و پاره خط MB' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که تصویر نقطه A نیز روی خط MB' واقع می‌شود؛ چرا؟

با توجه به قسمت (ب) می‌دانیم که $MB = MB'$ پس مثلث متساوی الساقین است و چون خط d عمود منصف BB' است با توجه به قضایای متساوی الساقین d نیمساز زاویه BMB' نیز هست. بنا براین $\hat{M}_1 = \hat{M}$

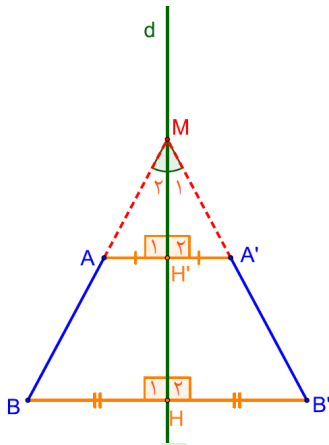
از نقطه A موازی پاره خط BB' خطی رسم می‌کنیم تا MB' را در نقطه A' قطع کند. حالا باید ثابت کنیم که A' تصویر نقطه A نسبت به خط بازتاب d است یعنی:

$$AH' = A'H', \quad H' = H'_\perp = 90^\circ$$

راه اول: در مثلث MAA' پاره خط MH' هم نیمساز است و هم ارتفاع پس مثلث

متساوی الساقین است. و در نتیجه MH' میانه نیز هست پس: $AH' = A'H'$

راه دوم:



$$AA' \parallel BB', \quad d \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} H = H' = 90^\circ$$

$$\Rightarrow H'_1 = H'_\perp = 90^\circ$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_\perp$$

$$MH' = MH$$

$$\left. \begin{array}{l} H'_1 = H'_\perp = 90^\circ \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_\perp \\ MH' = MH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} M \hat{A} H' \cong M \hat{A}' H' \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} AH' = A'H'$$

بنا براین: $AH' = A'H', \quad H'_1 = H'_\perp = 90^\circ$ و حکم ثابت شد.

راه دیگر برای پاسخ به (چرا):

H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا برتعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند. با توجه به بند

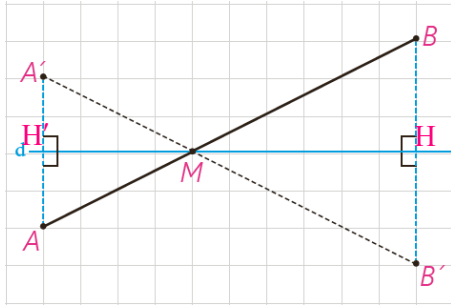
(ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AMH'} = \widehat{BMH} \\ \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH}$$

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A'MH'} = \widehat{AMH'} \\ \widehat{B'MH} = \widehat{BMH} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH و MH') و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :



$$\left. \begin{aligned} AB &= MB - MA \\ A'B' &= MB' - MA' \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

با توجه به قسمت ب $MA = MA'$ و $MB = MB'$

(ت) در حالتی که پاره خط AB خط بازتاب را در نقطه ای مثل M قطع کند، بازتاب نقطه A را نسبت به خط d پیدا می کنیم و آن را نقطه A' می نامیم.

پاره خط MA' را رسم می کنیم و امتداد می دهیم و ادعا می کنیم که بازتاب نقطه B یعنی نقطه B' هم بر امتداد MA' واقع است؛ چرا؟

H وسط BB' و H' وسط AA' است بنا بر تعریف بازتاب نقاط H و H' روی خط d یعنی خط بازتاب هستند. با توجه به بند (ب) خط d نیمساز زاویه های BMB' و AMA' است.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{AMH'} &= \widehat{BMH} \\ \widehat{A'MH'} &= \widehat{AMH'} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{A'MH'} = \widehat{BMH}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A'MH'} &= \widehat{BMH} \\ \widehat{B'MH} &= \widehat{BMH} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{B'MH} = \widehat{A'MH'}$$

یک ضلع (MH' و MH) و رأس این دو زاویه برهم منطبق است پس اضلاع دیگر هم یعنی MA' و MB' بر هم منطبق هستند.

حال داریم :

$$\left. \begin{aligned} AB &= AM + MB \\ A'B' &= A'M + B'M \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

با توجه به قسمت ب $AM = A'M$ و $MB = MB'$

نتیجه این مراحل را می توان در قالب این قضیه بیان کرد :

قضیه: در هر بازتاب، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می دهد که بازتاب، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$ داریم : $AB = A'B'$

فعالیت

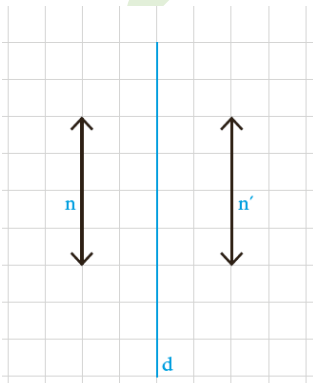
می خواهیم بررسی کنیم که آیا بازتاب، شیب خط را هم حفظ می کند.

مسئله را برای دو حالت کلی در نظر می گیریم : وقتی خط داده شده با خط بازتاب

موازی باشد و وقتی با آن موازی نباشد.

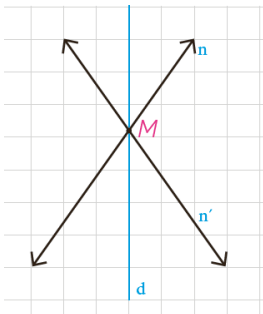
الف) اگر خط n موازی خط بازتاب d باشد، تصویر آن را تحت بازتاب، خط n'

می نامیم. خطوط n و n' نسبت به هم چه وضعی دارند؟ چرا؟



خط n موازی خط بازتاب d است. دونقطه دلخواه مانند A و B را روی n انتخاب می‌کنیم. بنا بر قسمت (الف) فعالیت قبل می‌دانیم که تصویر پاره خط AB نسبت به خط بازتاب d یعنی پاره خط $A'B'$ با پاره خط AB و خط d موازی است از طرفی چون خط n' تصویر خط n است پس حتماً نقاط A' و B' نیز روی خط n' قرار دارند در نتیجه خط n' موازی n و d است.

وقتی دو خط موازی باشند در صورت وجود شیب، شیب‌ها با هم برابرند پس شیب حفظ می‌شود و وقتی که شیب برای یکی از آن‌ها تعریف نشود برای دیگری نیز تعریف نمی‌شود. پس در این حالت بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.



ب) اگر خط n با خط بازتاب d موازی نباشد، خط‌های d ، n و n' در نقطه‌ای مثل M متقاطع می‌شوند؛ پس n و n' موازی نیستند و در این حالت بازتاب، شیب خط را **حفظ نمی‌کند**... بنابراین؛

در حالت کلی، بازتاب شیب خط را **حفظ نمی‌کند**...

دیدیم که طولی‌ها اندازه زاویه را هم حفظ می‌کنند. بنابراین به طور کلی هر چندضلعی و تصویر آن تحت تأثیر یک طولی از جمله بازتاب با هم هم‌نهشت هستند. در ادامه به کمک ویژگی‌های انتقال و دوران ثابت می‌کنیم که این دو تبدیل نیز طولی هستند.

کاردکلاس

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید :

الف) وقتی A' بازتاب A نسبت به خط d است، بازتاب A' نسبت به خط d ، کدام نقطه است؟ A ... چرا؟

چون خط d عمود منصف پاره خط AA' است بنا براین: $d \perp AA'$ ، $A'H = AH$ ، پس اگر از A' بر خط d عمود کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم نقطه A به دست می‌آید.

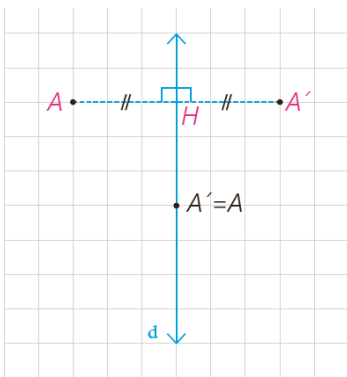
ب) قرینه قرینه هر نقطه چیست؟ **خود آن نقطه است.**

در واقع: $S(S(A)) = S(A) = A$ و به زبان ساده‌تر $S(A) = A$.

پ) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث، یک **مثلث** است که با مثلث اولیه **هم‌نهشت**... است.

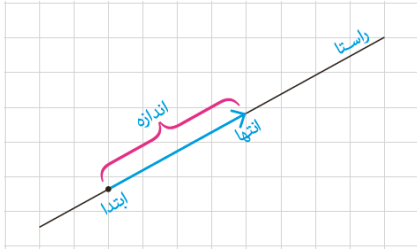
ت) در حالتی که پاره خط AB نسبت به خط بازتاب **موازی** باشد، بازتاب شیب خط را حفظ می‌کند.

ث) در هر بازتاب نسبت به خط d تبدیل یافته تمام نقاط روی خط، **روی خط d** ... است؛ بنابراین تعداد نقاط ثابت تبدیل در هر بازتاب **بیشمار**... است.

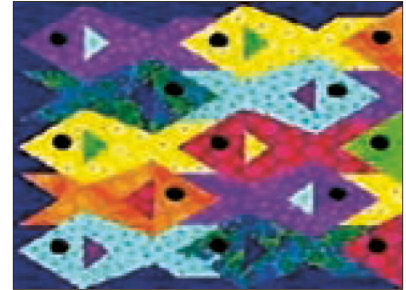
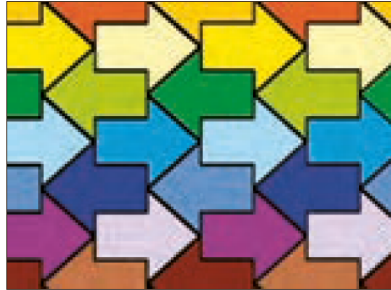


انتقال

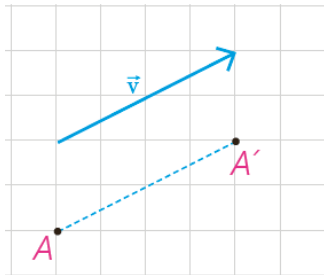
یادآوری



- ۱- در شکل مقابل یک بردار، ابتدا، انتها، اندازه و راستای آن مشخص شده است.
- ۲- دو بردار، که هم اندازه، هم راستا و هم جهت باشند، دو بردار برابر هستند.



در سال‌های گذشته دیدید که برای انتقال دادن یک شکل، کافی است تصویر هر نقطه از شکل را به کمک بردار انتقال پیدا کنیم؛ یعنی اگر نقطه A' تصویر نقطه A باشد، آن گاه $\vec{AA'} = \vec{v}$



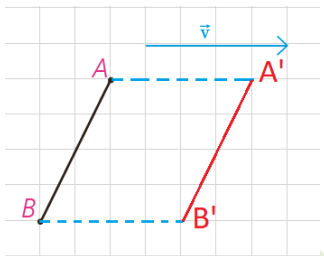
تعریف: انتقال T تحت بردار \vec{v} ، تبدیلی از صفحه است که در آن، تصویر هر نقطه A از صفحه P ، نقطه‌ای مانند A' در همان صفحه است که $\vec{AA'} = \vec{v}$

فعالیت

۱- می‌خواهیم نشان دهیم انتقال، تبدیل طولپاست.

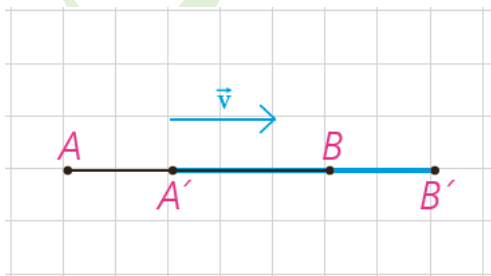
الف) اگر پاره خط AB با بردار \vec{v} موازی نباشد، تبدیل یافته AB را با بردار \vec{v} رسم کنید و آن را $A'B'$ بنامید و نشان دهید: $AB = A'B'$.

راهنمایی: می‌دانیم که اگر در یک چهارضلعی، دو ضلع روبه‌رو موازی و مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

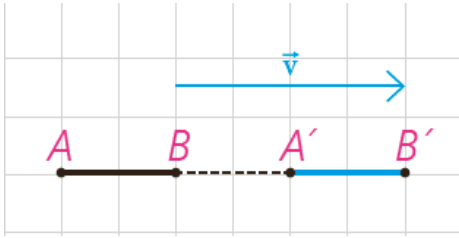


A' تصویر A است پس بنا به تعریف انتقال $\vec{AA'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط AA' مساوی طول بردار \vec{v} و با آن موازی است.
 B' تصویر B است پس بنا به تعریف انتقال $\vec{BB'} = \vec{v}$ یعنی پاره خط BB' مساوی طول بردار \vec{v} و با آن موازی است.
 در نتیجه AA' موازی و مساوی BB' است و بنا بر راهنمایی داده شده نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است پس $AB = A'B'$.

ب) اگر پاره خط AB با بردار \vec{v} موازی باشد به کمک مجموع یا تفاضل پاره خط‌ها در هر دو حالت زیر نشان دهید: $AB = A'B'$.



$$\left. \begin{aligned} AB &= AA' + A'B \\ A'B' &= A'B + BB' \\ AA' &= BB' \text{ طبق تعریف انتقال} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$



$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' - BA' \\ A'B' = BB' - BA' \\ AA' = BB' \text{ طبق تعریف انتقال} \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

(۲)

تذکره: در حالتی که طول بردار v با پاره خط AB برابر است به کمک هر یک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نشان داد.

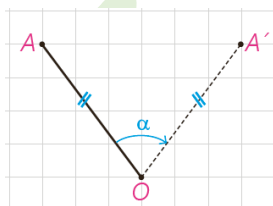
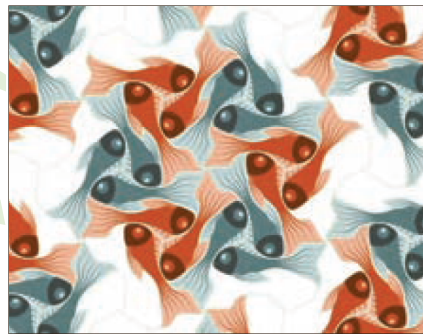
قضیه: در هر انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که انتقال، تبدیل طولی است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$.
۲- در هر یک از حالت‌های قبل نشان دهید انتقال، شیب خط را هم حفظ می‌کند.

در حالت (الف) نتیجه گرفتیم که چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی الاضلاع است پس $AB \parallel A'B'$ در نتیجه شیب خط‌ها یکی است.

در حالت (ب) و (پ) هر پاره خط و تصویرش بر روی یک خط قرار دارند به عبارتی نقاط A, B, B', B هم خط هستند. پس شیب آن‌ها هم برابر است.

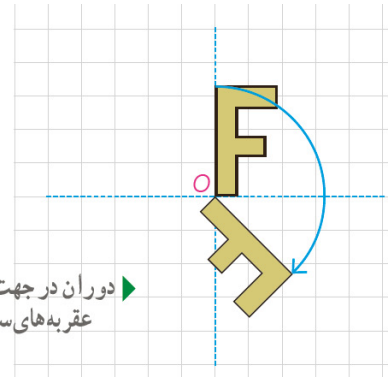
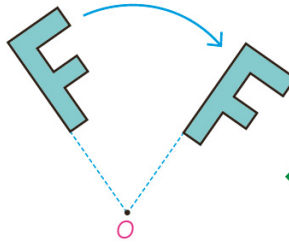
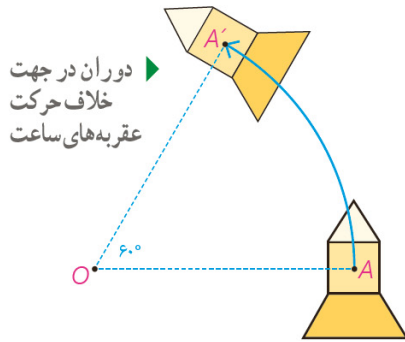
دوران



دیدیم که برای دوران دادن شکل به مرکز دوران O و به اندازه زاویه α ، هر نقطه از شکل، مثل A را به مرکز دوران یعنی O وصل می‌کنیم؛ سپس در جهت خواسته شده به کمک OA زاویه‌ای برابر α رسم کرده، و روی ضلع دیگر این زاویه، پاره خطی به اندازه OA جدا می‌کنیم تا A' به دست آید.

بدین ترتیب:

تعریف: دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α ، تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A' تصویر نقطه A باشد، داریم:
 $OA = OA'$ و $\widehat{AOA'} = \alpha$

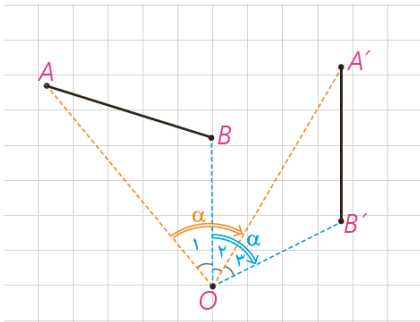


می‌خواهیم نشان دهیم دوران، تبدیل طولپاست.

برای دوران دادن هر پاره خط نظیر AB کافی است نقاط A و B را دوران دهیم تا نقاط A' و B' حاصل شود. پاره خط A'B' را رسم می‌کنیم.

مسئله را برای حالت‌های مختلف در نظر می‌گیریم:

الف) مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران زاویه AOB بیشتر باشد.



$$\text{با توجه به شکل } \alpha = \widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{O_3} + \widehat{O_4}$$

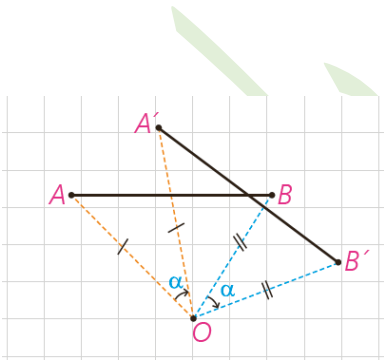
پس می‌توان مدعی شد که $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$...

به کمک هم‌نهشتی دو مثلث OAB و OA'B' نشان دهید AB و A'B' هم‌اندازه‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} \text{با توجه به تعریف دوران} \\ \left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \xrightarrow{\text{(ض ض)}} AB = A'B'$$

ب) به طور مشابه نشان دهید که اگر O بر پاره خط AB واقع نباشد ولی زاویه دوران از زاویه AOB کمتر باشد، باز هم تساوی $AB = A'B'$ برقرار است.

تذکر: در حالتی که \widehat{AOB} با زاویه دوران α برابر است با هریک از روش‌های فوق می‌توان درستی رابطه را نمایش داد.

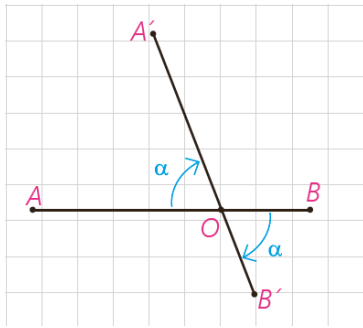


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = \alpha + \widehat{A'OB} \\ \widehat{A'OB'} = \alpha + \widehat{A'OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$$

با توجه به شکل:

در نتیجه:

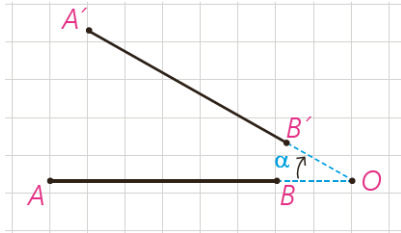
$$\left. \begin{array}{l} \text{با توجه به تعریف دوران} \\ \left\{ \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \widehat{AOB} = \widehat{A'OB'} \end{array} \right. \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \xrightarrow{\text{(ض ض)}} AB = A'B'$$



پ) اگر نقطه O روی پاره خط AB باشد :

$$\left. \begin{aligned} AB &= AO + OB \\ A'B' &= A'O + OB' \\ \text{طبق تعریف دوران } AO &= A'O \text{ و } OB = OB' \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

ت) به طریق مشابه نشان دهید اگر نقطه O روی امتداد پاره خط AB باشد، حکم برقرار است.



$$\left. \begin{aligned} AB &= AO - OB \\ A'B' &= A'O - OB' \\ \text{طبق تعریف دوران } AO &= A'O \text{ و } OB = OB' \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین :

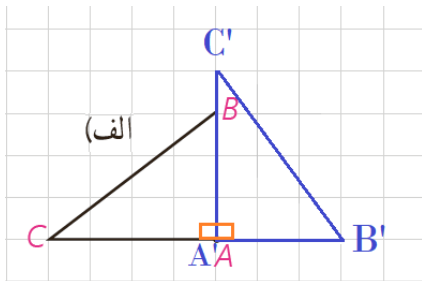
قضیه: در هر دوران، اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند.

به عبارتی این قضیه نشان می‌دهد که دوران، تبدیل طولها است و برای هر دو نقطه A و B از صفحه P که $R(A) = A'$ و $R(B) = B'$ داریم: $AB = A'B'$

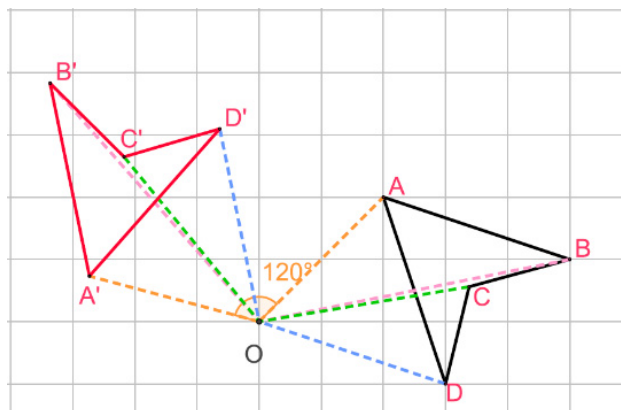
کاردرکلاس

دوران یافته هر شکل را رسم کنید.

الف) دوران به مرکز A و با زاویه 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت

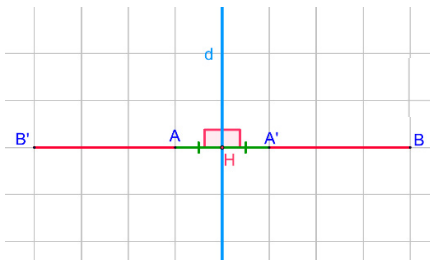


ب) دوران به مرکز O و با زاویه 120° در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت



۱- در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید

که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم اندازه‌اند.



$B'H = BH \Rightarrow B'A + AH = BA' + A'H \xrightarrow{AH=A'H} B'A = BA'$
بنا بر تعریف بازتاب

$$\left. \begin{array}{l} AB = AA' + A'B \\ A'B' = AA' + B'A \\ B'A = BA' \end{array} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

۲- در شکل زیر چهار ضلعی $A'B'C'D'$ تصویر چهارضلعی $ABCD$

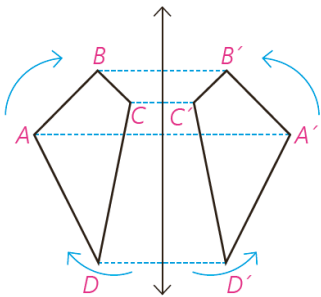
تحت بازتاب است. در شکل اولیه وقتی به ترتیب از A به B ، C و D می‌رویم، جهت

حرکت، موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. جهت حرکت در بازتاب این نقاط

چگونه است؟ آیا می‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟

جهت حرکت در بازتاب این نقاط خلاف جهت عقربه‌های ساعت است.

خیر نمی‌توان گفت بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند.



۳- در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب

مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2

رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

$$AA'' = AH + HA' + A'H' + H'A'' \xrightarrow{\frac{AH=HA'}{A'H'=H'A''}} AA'' = 2HA' + 2A'H'$$

$$\Rightarrow AA'' = 2(\underbrace{HA' + A'H'}_m) \Rightarrow AA'' = 2m$$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

بنا بر اثبات قسمت الف به روش مشابه نتیجه می‌گیریم که: $BB'' = CC'' = 2m$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست؟ چه نتیجه‌ای

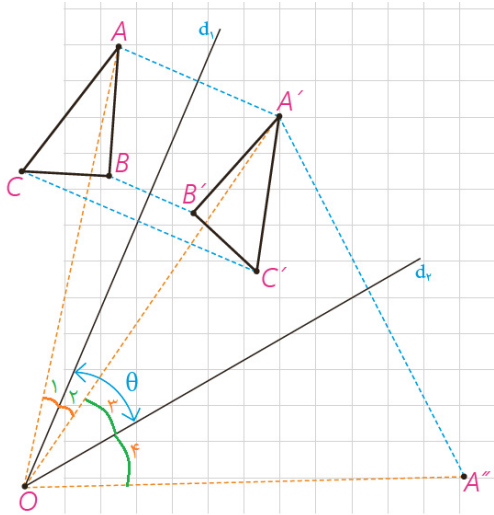
می‌گیرید؟

با انتقالی تحت بردار انتقالی که اندازه آن دو برابر فاصله y بین دو خط بازتاب d_1 و d_2 یعنی $2m$ و راستای آن عمود بر این

دو خط است، می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتابی که محورهای بازتاب موازی یکدیگر هستند یک انتقال است.

۴- در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده‌اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.



الف) نشان دهید: $\widehat{AOA''} = 2\theta$

خط d_1 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه AOA' است یعنی: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

خط d_2 محور بازتاب است پس نیمساز زاویه $A'OA''$ است یعنی: $\hat{O}_3 = \hat{O}_4$

$$\widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 \xrightarrow{\hat{O}_1 = \hat{O}_2, \hat{O}_3 = \hat{O}_4} \widehat{AOA''} = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3$$

$$\Rightarrow \widehat{AOA''} = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 2\theta$$

ب) اندازه $\widehat{BOB''}$ و $\widehat{COC''}$ چقدر است؟

بنا بر اثبات الف به روش مشابه: $\widehat{BOB''} = \widehat{COC''} = 2\theta$

پ) با چه تبدیلی می‌توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه

نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با دورانی به مرکز O نقطه‌ی برخورد دو خط بازتاب d_1 و d_2 و زاویه‌ی θ به اندازه‌ی دو برابر زاویه بین دو خط (2θ) می‌توان

مثلث $A''B''C''$ را تصویر مثلث ABC دانست.

نتیجه می‌گیریم، ترکیب دو بازتاب که محورهای بازتاب متقاطع باشند یک دوران است.

تجانس



در شکل‌های متشابه دیدید که طول پاره‌خط‌ها الزاماً با هم یکسان نیستند؛ اما با یک نسبت، اندازه همه پاره‌خط‌ها بزرگ‌تر یا کوچک‌تر می‌شوند. ساده‌ترین تبدیل از این نوع را تجانس می‌نامیم. در تجانس ابعاد شکل با نسبت $k \neq 0$ ، آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تعریف دقیق‌تر تجانس بدین شکل است:

تعریف: اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و $k \neq 0$ یک عدد حقیقی باشد، نقطه M' را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k گوییم؛ هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

(الف) سه نقطه O ، M و M' روی یک خط راست باشند.

(ب) $OM' = |k| \cdot OM$

– اگر k مثبت باشد، M' روی نیم خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O قرار دارند.

$k = 2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

$k = \frac{1}{2}$  $OM' = \frac{1}{2} OM$

– اگر k منفی باشد، نقطه O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

$k = -2$  $OM' = 2 OM$ **مثال:**

به عبارتی، هرگاه بخواهیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، تصویر نقطه‌ای مثل M را پیدا کنیم، ابتدا از M به O وصل می‌کنیم؛ اگر k مقداری مثبت باشد، روی نیم خط OM ، نقطه M' را چنان می‌یابیم که $OM' = k \cdot OM$ و اگر k عددی منفی باشد، نقطه M' را روی خط OM به گونه‌ای جدا می‌کنیم که نقطه O بین نقاط M و M' باشد و $OM' = |k| \cdot OM$. در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است؛ چرا؟

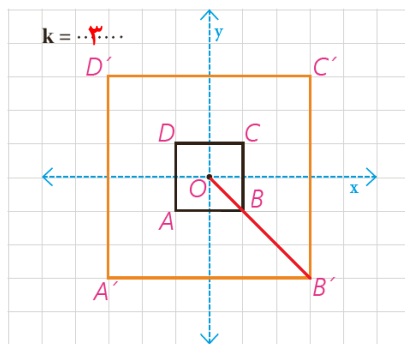
اگر در تجانس به مرکز O و نسبت k ، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k باشد آنگاه:

$$k > 0 \Rightarrow OM' = k \cdot OM \xrightarrow{\times \frac{1}{k}} \frac{1}{k} \cdot OM' = OM$$

$$k < 0 \Rightarrow OM' = |k| \cdot OM \xrightarrow{\times \frac{1}{|k|}} \frac{1}{|k|} \cdot OM' = OM$$

بنا براین نقطه M مجانس نقطه M' با نسبت $\frac{1}{k}$ است.

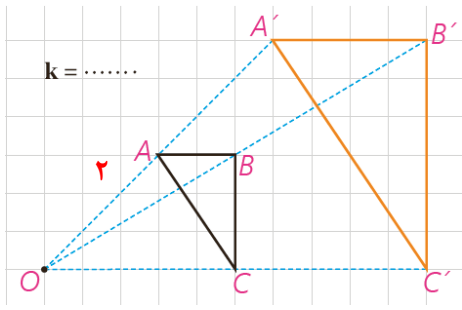
فعالیت



۱- این دو شکل، نمونه‌ای از تجانس را نشان می‌دهند که در یکی، مرکز تجانس داخل شکل اولیه و در دیگری خارج آن در نظر گرفته شده است.

(الف) به کمک صفحه شطرنجی در هر شکل نسبت تجانس را مشخص کنید.

با توجه به تعریف تجانس نقاط B و B' در یک طرف O قرار دارند پس $k > 0$



در نتیجه: $OB' = k.OB \Rightarrow k = \frac{OB'}{OB} \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = 3$

$OC' = k.OC \Rightarrow k = \frac{OC'}{OC} \Rightarrow k = \frac{10}{5} \Rightarrow k = 2$

(ب) آیا تجانس طولی است؟ چرا؟

خیر زیرا اندازه پاره خط ها حفظ نمی شود.

(پ) در این شکل ها، طول هر پاره خط را با طول تصویر آن مقایسه کنید. به چه

نتیجه ای می توان رسید؟

در مربع: $A'B' = 3AB, B'C' = 3BC, C'D' = 3CD, D'A' = 3DA$

طول تصویر هر پاره خط ۳ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است.

همچنین محیط شکل نیز ۳ برابر می شود.

$A'B' = 2AB, B'C' = 2BC$

در مثلث: $AC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}, A'C' = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow A'C' = 2AC$

طول تصویر هر پاره خط ۲ برابر شده و در واقع این عدد همان نسبت تجانس است.

همچنین محیط شکل نیز ۲ برابر می شود.

(ت) مساحت هر شکل را با مساحت تصویر آن مقایسه کنید. چه نسبتی با هم دارند؟

در مثلث: $\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 4 \times 6}{\frac{1}{2} \times 2 \times 3} = 4 = 2^2$

در مربع: $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{36}{4} = 9 = 3^2$

مساحت تصویر یک شکل نسبت به مساحت آن شکل برابر با توان دوم نسبت تجانس است.

۲- در هر دو حالت فوق، نسبت تجانس مقداری بیش از یک است؛ به عبارتی: $k > 1$.

حال مسئله را برای مقادیر مختلف k بررسی می کنیم.

الف) در هر حالت باقی مانده را کامل کنید.

k	$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
مثال	$k = \frac{1}{2}$	$k = -\frac{1}{3}$
k	$k = -1$	$k < -1$
مثال		$k = -2$

ب) با توجه به تصاویر صفحه قبل به طور شهودی، درستی یا نادرستی هر عبارت

را مشخص کنید :

مساحت شکل حفظ می شود.	جهت شکل حفظ می شود.	شیب خط حفظ می شود.	اندازه زاویه حفظ می شود.	طولپاست			
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	$k > 1$	تجانس	
درست	درست	درست	درست	درست	$k = 1$		
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	$0 < k < 1$		
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	$-1 < k < 0$	تجانس	
درست	درست	درست	درست	درست	$k = -1$		
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	$k < -1$		

پ) شرط اینکه تجانس طولیا باشد، این است که $k = 1$ یا $k = -1$ یا $k = 1$ به عبارتی $|k| = 1$

ت) خطوطی که هر نقطه را به تصویر آن نظیر می کند، یعنی خطوط AA' ، BB'

و... نسبت به هم چه وضعی دارند؟

این خطوط در مرکز تجانس یعنی نقطه O هم‌رسند.

در تجانس به مرکز O و نسبت k :

اگر $k > 0$ تجانس را، **تجانس مستقیم** می‌نامیم.

اگر $k < 0$ تجانس را **تجانس معکوس** می‌نامیم.

اگر $|k| < 1$ تصویر شکل **کوچک‌تر** می‌شود و آن را **انقباض** می‌نامیم.

اگر **بزرگ‌تر** تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را **انبساط** می‌نامیم.

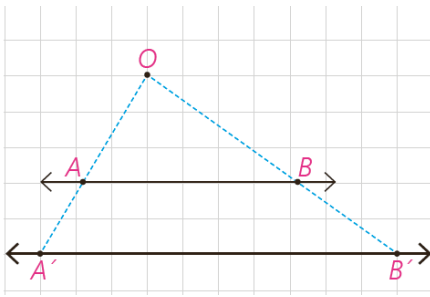
حال که به طور شهودی با تجانس و چگونگی عملکرد آن روی شکل‌های هندسی آشنا شدید با استدلال دقیق‌تری ثابت خواهیم کرد که تجانس تبدیلی است که در حالت کلی شیب خط و اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

فعالیت

می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. برای این منظور، تجانس D ، با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و خط AB را در نظر می‌گیریم؛ دو حالت اتفاق می‌افتد :

الف) نقطه O روی خط AB است.

حل : در این حالت بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس‌های نقاط A و B ، روی خط AB واقع می‌شوند؛ بنابراین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب خط تغییری نمی‌کند.



ب) نقطه O غیر واقع بر خط AB است.

حل: در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب، مجانس های نقاط A و B باشند،

طبق تعریف داریم:

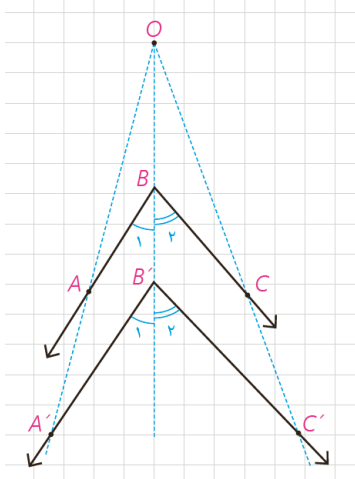
$$\begin{cases} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{cases} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k.$$

$\Rightarrow AB \parallel A'B'$ (چرا؟) بنا بر عکس قضیه تالس

پس در این حالت نیز خط و تصویر آن با هم موازی اند و شیب دو خط، برابر است؛ بنابراین:

قضیه: تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند.

فعالیت



می‌خواهیم نشان دهیم تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

تجانس D با مرکز تجانس O و نسبت تجانس k و زاویه \widehat{ABC} را در نظر می‌گیریم.

مجانس این زاویه، یعنی زاویه $\widehat{A'B'C'}$ را رسم می‌کنیم.

به کمک قضیه قبل و شکل داده شده، ثابت کنید: $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

با توجه به شکل و قضیه قبل داریم:

(۱) $\widehat{B}_1 = \widehat{B}'_1$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

(۲) $\widehat{B}_2 = \widehat{B}'_2$ در نتیجه اگر خط OB' مورب باشد بنا بر قضیه خطوط موازی

در نتیجه از جمع دو طرف رابطه ی (۱) و (۲) داریم: $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = \widehat{B}'_1 + \widehat{B}'_2 \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$

نتیجه این فعالیت را در قالب قضیه زیر مطرح می‌کنیم:

قضیه: تجانس، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

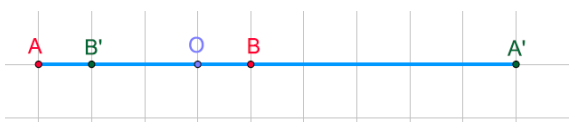
کاردرکلاس

۱- الف) فرض کنید پاره خط $A'B'$ مجانس پاره خط AB در تجانس به مرکز

و نسبت k باشد؛ نشان دهید: $\frac{A'B'}{AB} = |k|$

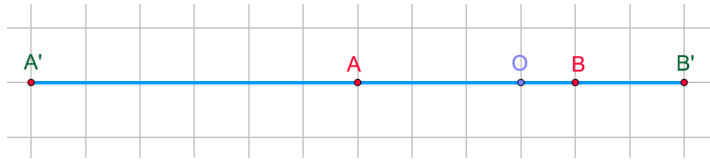
(۱) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه:

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{\frac{OA'}{OB'} = \frac{k.OA}{k.OB}} A'B' = |k|.OA + |k|.OB = |k|(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



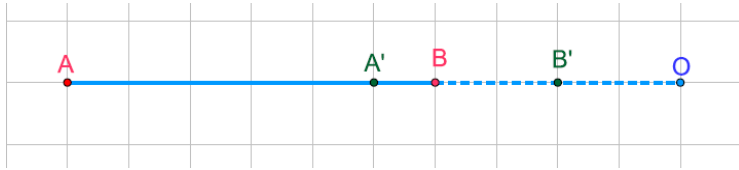
(۲) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' + OB' \xrightarrow{\substack{OA' = k.OA \\ OB' = k.OB}} A'B' = k.OA + k.OB = k(\underbrace{OA + OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



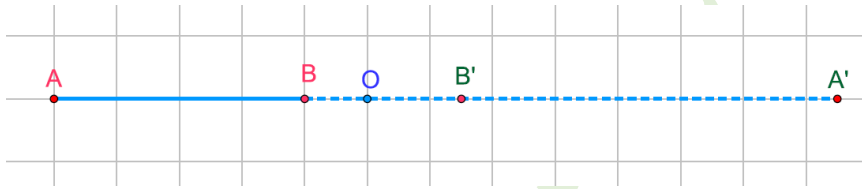
(۳) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{\substack{OA' = k.OA \\ OB' = k.OB}} A'B' = k.OA - k.OB = k(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = k.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k$$



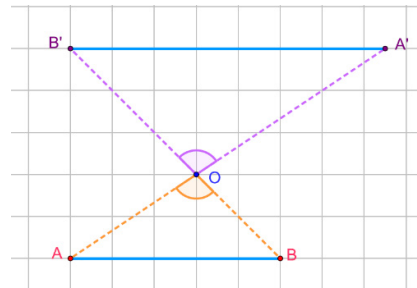
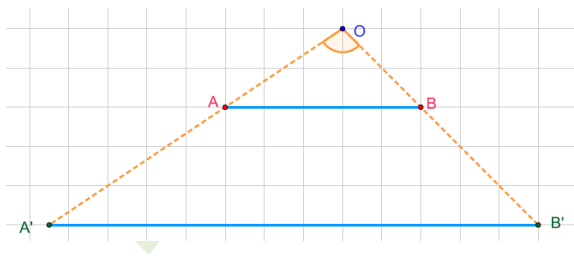
(۴) در این حالت نقطه O روی امتداد پاره خط AB قرار دارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$A'B' = OA' - OB' \xrightarrow{\substack{OA' = |k|.OA \\ OB' = |k|.OB}} A'B' = |k|.OA - |k|.OB = |k|(\underbrace{OA - OB}_{AB}) \Rightarrow A'B' = |k|.AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = |k|$$



(۵) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k > 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



(۶) در این حالت نقطه O روی پاره خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در نتیجه :

$$\left. \begin{matrix} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \left. \begin{matrix} \xrightarrow{\text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث}} \triangle OAB \sim \triangle OA'B' \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

ب) اگر n ضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، نشان دهید این دو ضلعی با هم متشابه اند.

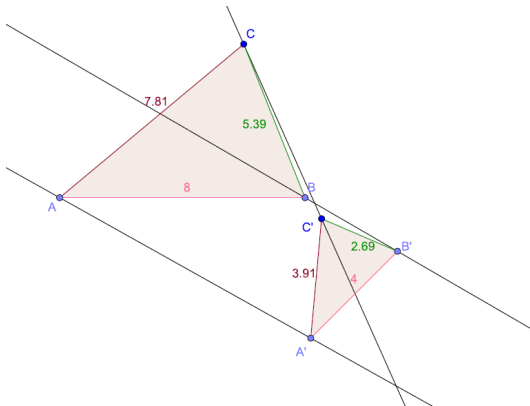
فرض کنیم $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ یک n ضلعی و نقطه O مرکز تجانس و k نسبت تجانس باشد

و چند ضلعی $A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_n$ مجانس آن باشد بنا بر تعریف تجانس داریم:

$$\left. \begin{aligned} OA'_1 &= |k| OA_1 \\ OA'_2 &= |k| OA_2 \\ OA'_3 &= |k| OA_3 \\ &\vdots \\ OA'_n &= |k| OA_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'_1}{OA_1} = \frac{OA'_2}{OA_2} = \frac{OA'_3}{OA_3} = \dots = \frac{OA'_n}{OA_n} = |k|$$

پس چون اضلاع همه متناسب هستند بنا بر قضیه ۳ تشابه نتیجه می گیریم که این دو چند ضلعی متشابه اند.

۲- با توجه به ویژگی های تجانس و به کمک مثال مثال نقض نشان دهید دو شکل متشابه، الزاماً متجانس نیستند.



کافی است که دو شکل متشابه رسم کنیم که وقتی هر نقطه را به تصویرش وصل می کنیم و امتداد می دهیم همرس نشوند. به این ترتیب مرکز تجانس وجود نخواهد داشت و در این صورت تجانسی هم در کار نیست.

در شکل مقابل مثلث های ABC و $A'B'C'$ متشابه اند اما متجانس نیستند

فعالیت

پیش از این دیدیم که اگر نقطه ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می شود؛ به عبارتی A' همان A است و داریم $S(A) = A' = A$ ؛ این نقاط را نقاط **ثابت** **تبدیل** نامیدیم. اما برخی از تبدیل ها، هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند؛ چنین تبدیل هایی را تبدیل همانی می نامیم.

تعریف: تبدیل T را **تبدیل همانی** گوییم، هر گاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$.

معمولاً تبدیل های همانی را با I نمایش می دهند؛ پس $I(A) = A$.

دقت کنید که در بازتاب به جز نقاطی که روی خط بازتاب قرار دارند، تصویر هر نقطه مثل A ، نقطه‌ای مثل A' است که در طرف دیگر خط بازتاب قرار دارد. بنابراین بازتاب هیچ‌گاه، تبدیل همانی نیست.

الف) در چه شرایطی انتقال، دوران و تجانس، می‌توانند تبدیل همانی باشند؟

انتقال زمانی همانی است که بردار انتقال برابر با بردار صفر باشد.

دوران زمانی تبدیل همانی است که زاویه دوران صفر درجه یا ۳۶۰ درجه باشد.

تجانس زمانی تبدیل همانی است که در آن $k=۱$.

ب) آیا تبدیل همانی طولپاست؟

بله تبدیل همانی یک تبدیل طولپاست است زیرا هر نقطه را به خود آن نقطه تصویر می‌کند.

اگر A و B دو نقطه در صفحه باشند و تحت یک تبدیل همانی بخواهیم تصویر آن‌ها را بیابیم داریم:

$$T(A) = A, T(B) = B \Rightarrow AB = AB$$

پ) توضیح دهید که در هر یک از تبدیل‌های زیر، آیا می‌توان نقاط ثابت تبدیل داشت؟

۱- انتقال غیرهمانی:

خیر نمی‌توان نقاط ثابت داشت یا به عبارتی هر نقطه باید تحت یک بردار غیر صفر در صفحه بلغزد و نمی‌تواند بر روی خودش بلغزد.

۲- دوران غیرهمانی:

اگر نقطه‌ی مورد نظر روی مرکز دوران باشد تحت هر دورانی ثابت می‌ماند. پس مرکز دوران نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۳- تجانس غیرهمانی:

اگر نقطه مورد نظر روی مرکز تجانس باشد تصویرش روی خودش قرار می‌گیرد. پس مرکز تجانس نقطه‌ی ثابت تبدیل است.

۱- درستی یا نادرستی هر عبارت را داخل جدول مشخص کنید.

طول پاره خط را حفظ می کند.	اندازه زاویه را حفظ می کند.	شیب خط را حفظ می کند.	جهت شکل را حفظ می کند.	مساحت شکل را حفظ می کند.	
درست	درست	نادرست	نادرست	درست	بازتاب
درست	درست	درست	درست	درست	انتقال
درست	درست	نادرست	درست	درست	دوران
نادرست	درست	درست	درست	نادرست	تجانس



تمرین

۱- در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O نشان دهید :

الف) تجانس شیب خط را حفظ می کند.

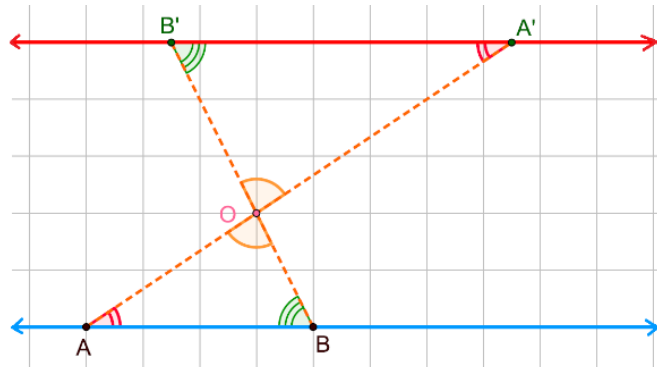
(۱) درحالتی که نقطه O روی خط AB قرار دارد و $k < 0$ بدیهی است که نقاط A' و B' مجانس های نقاط A و B و

روی خط AB واقع می شوند؛ بنا براین $A'B'$ بر AB واقع است و شیب تغییر نمی کند.

(۲) در حالتی که نقطه O روی خط AB قرار ندارد و $k < 0$ در این صورت اگر نقاط A' و B' به ترتیب ، مجانس های

نقاط A و B باشند ، طبق تعریف داریم:

$$\left. \begin{aligned} OA' = k.OA \\ OB' = k.OB \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k \left\{ \begin{array}{l} \text{قضیه ۲ تشابه دو مثلث} \\ \triangle AOB \sim \triangle A'OB' \Rightarrow \widehat{OB'A'} = \widehat{OBA}, \widehat{OA'B'} = \widehat{OAB} \\ \widehat{A'OB'} = \widehat{AOB} \end{array} \right.$$



پس بنا برعکس قضیه خطوط موازی خط AB موازی خط $A'B'$ است . و شیب خط ها در صورت وجود باهم برابر است.

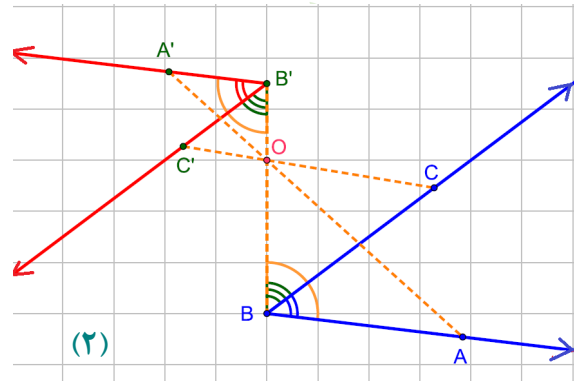
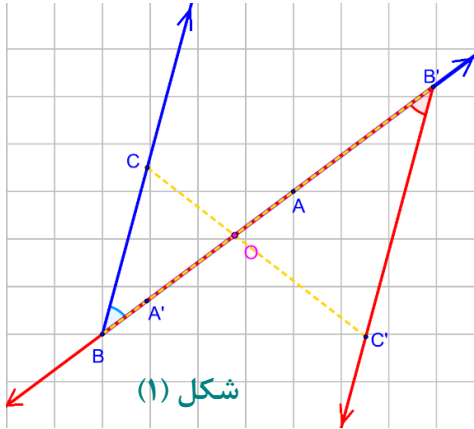
(ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

زاویه \widehat{ABC} را در صفحه در نظر می گیریم :

(۱) اگر نقطه O روی رأس زاویه یعنی نقطه B باشد آنگاه مجانس زاویه یعنی $\widehat{A'B'C'}$ روی خود \widehat{ABC} منطبق می شود. پس اندازه ی آن حفظ می شود.

(۲) اگر نقطه O روی یکی از اضلاع باشد مانند شکل (۱) آنگاه با توجه به قضیه، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس:

$$BC \parallel B'C', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$



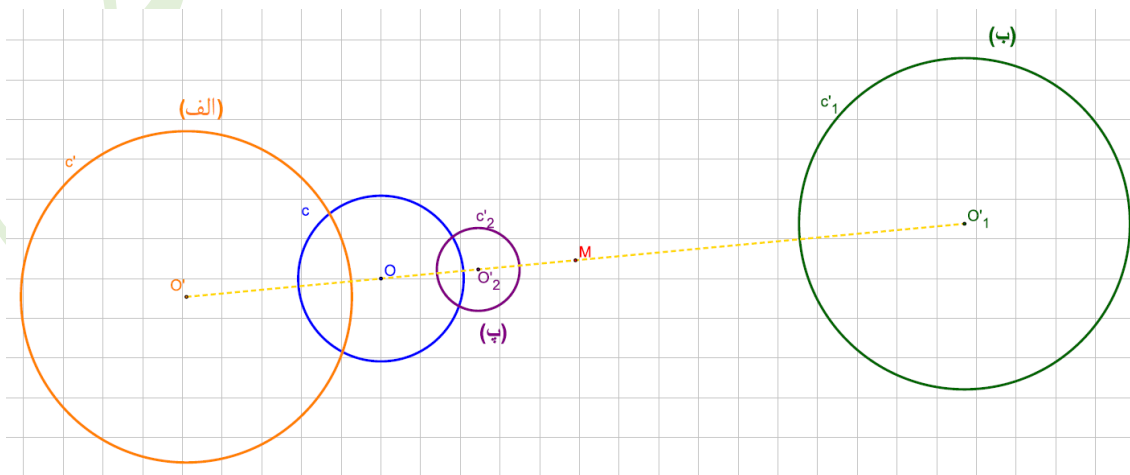
(۳) اگر نقطه O نه روی اضلاع و نه روی رأس زاویه باشد مانند شکل (۲) با توجه به بند قبلی، تجانس شیب خط را حفظ می کند پس :

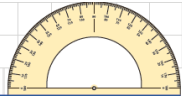
$$\left. \begin{array}{l} BC \parallel B'C', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{CBB'} = \widehat{C'B'B} \\ AB \parallel A'B', BB' \text{ مورب } \xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{ABB'} = \widehat{A'B'B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABB'} - \widehat{CBB'} = \widehat{A'B'B} - \widehat{C'B'B} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

۲- دایره $C(O,R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را

نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k=2$ (ب) $k=-2$ (پ) $k=\frac{1}{2}$





تصاویر زیر، نمونه‌هایی از نقاشی‌های دانش‌آموزان است که استفاده از بازتاب در آن نقشی عمده دارد.

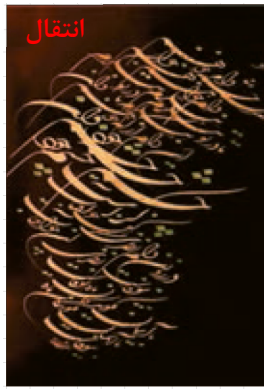


درس دوم

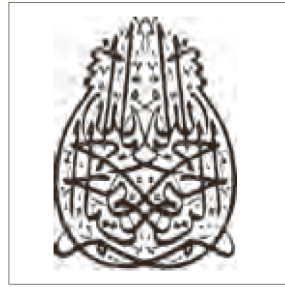
کاربرد تبدیل‌ها

تبدیل‌های هندسی شامل بازتاب، انتقال، دوران و تجانس به طور مستقیم و غیر مستقیم در زندگی واقعی کاربرد دارد؛ برای مثال در سال‌های گذشته با کاربرد برخی تبدیل‌ها در کاشی‌کاری آشنا شدید. آیا می‌توانید با تأمل در محیط اطراف خود به نمونه‌هایی اشاره کنید که تبدیل‌های هندسی در آن به کار رفته‌اند؟

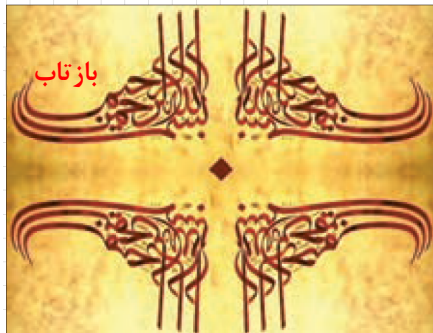
نقش قالی، خطاطی، کاغذ دیواری و



بازتاب



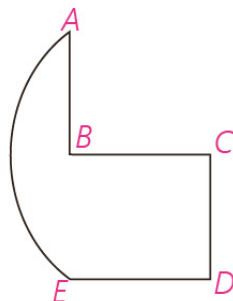
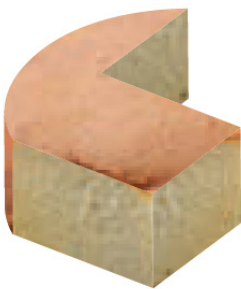
دوران



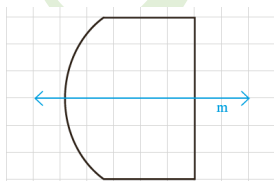
کاربردهایی از بازتاب (قرینه‌یابی)

بازتاب علاوه بر شاخه‌های مختلف ریاضی در دیگر علوم نظیر هنر، معماری، فیزیک و... کاربرد دارد. در علم فیزیک، ویژگی‌های بازتاب همان ویژگی‌های آینه تخت است. کاربردهای دیگری از بازتاب را در ادامه خواهیم دید.

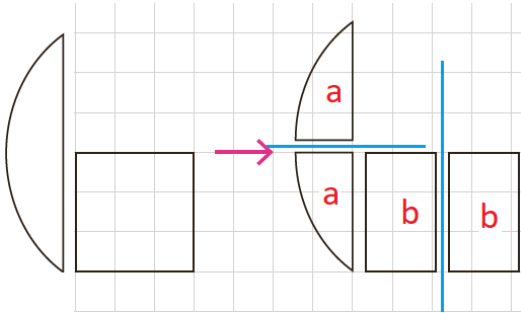
۱- می‌خواهیم کیک به شکل زیر را به‌طور مساوی بین دو نفر تقسیم کنیم. نمای بالای کیک از مربع BCDE و کمان AE از یک دایره تشکیل شده است به طوری که A و B و E روی یک خط هستند.



اگر نمای بالای کیک به شکل روبه‌رو بود، تقسیم آن کار ساده‌ای بود؛ چرا که می‌توانستیم از روی خط بازتاب m کیک را برش بزنیم و آن را به دو نیمه مساوی تقسیم کنیم.

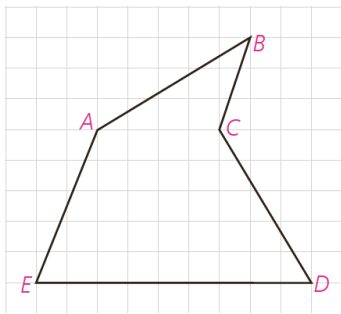


این شکل، راه ساده‌ای برای برش زدن یک و تقسیم آن به دو سهم برابر ارائه می‌کند. توضیح دهید که بازتاب به حل این مسئله چه کمکی کرده است.



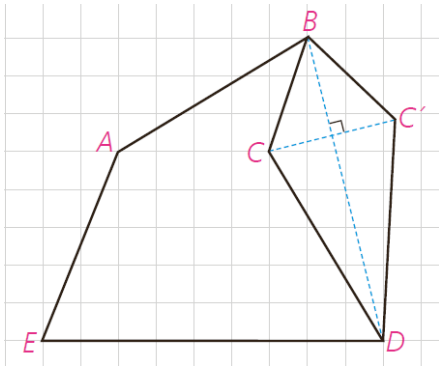
شکل های **a** نسبت به محور بازتاب قرینه اند پس با هم اندازه اند. همچنین شکل های **b** هم نسبت به محور بازتاب خود قرینه اند و در نتیجه هم اندازه اند حالا به ره نفر یک شکل **a** و یک شکل **b** می دهیم.

۲- یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که به مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی معروف است. در این گونه مسائل، هدف این است که بدون اینکه محیط یک چندضلعی تغییر کند، مساحت آن چند ضلعی را تغییر دهیم.



برای مثال فرض کنید که زمینی به شکل چندضلعی ABCDE داریم که دور آن را حصار کشیده ایم. حال می خواهیم با ثابت نگهداشتن محیط و ثابت نگهداشتن تعداد اضلاع چندضلعی، بدون اینکه اندازه حصار کشی تغییر کند، مساحت زمین را افزایش دهیم.

به کمک تصویر روبه‌رو توضیح دهید که این عمل را چگونه می توان انجام داد.



در شکل از نقطه **B** به **D** وصل می کنیم. سپس آن را به عنوان محور بازتاب در نظر می گیریم. و تصویر نقاط **B**، **C** و **D** را نسبت به این محور به دست می آوریم. واضح است که تصویر نقاط **B** و **D** روی خودشان منطبق است ولی تصویر نقطه **C** نقطه **C'** است.

چرا محیط چندضلعی ABCDE با محیط چندضلعی ABC'DE یکی است؟
با توجه به این که بازتاب یک تبدیل طولپا است پس داریم:

$$BC = BC', CD = C'D$$

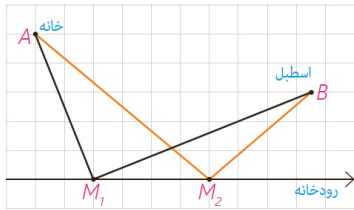
$$P_{ABCDE} = AB + BC + CD + DE + EA \xrightarrow{BC=BC', CD=C'D} P_{ABCDE} = AB + BC + C'D + DE + EA$$

$$\Rightarrow P_{ABCDE} = P_{ABC'DE}$$

■ مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

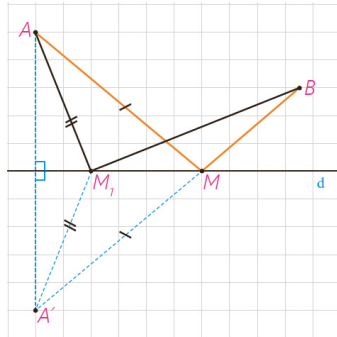
الف) هرون، ریاضی دانی است که به او دایرةالمعارف ریاضی و فیزیک لقب داده اند. او که در فاصله زمانی ۲۵۰ تا ۱۵۰ سال قبل از میلاد مسیح در مصر زندگی می کرد برای نخستین بار به کمک بازتاب، دستور پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر را در شرایطی خاص ارائه کرد.

او با این مسئله روبه‌رو شده بود که :



«مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد که در همان سمت رودخانه است. او از کدام نقطه از ساحل آب بردارد که مسافتی که در مجموع طی می‌کند، کمترین حالت ممکن باشد؟»

مسئله، پیدا کردن نقطه M روی خط d است به گونه‌ای که $AM+MB$ کمترین مقدار ممکن باشد.



هرون ابتدا بازتاب A را نسبت به خط پیدا کرد و آن را A' نامید. خط فرضی $A'B$ خط بازتاب را در نقطه‌ای مثل M قطع می‌کند. او مدعی شد که M جواب مسئله است و $AM+MB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

با هم دلیل ادعای هرون را بررسی می‌کنیم :

۱- برای هر نقطه دلخواه دیگری نظیر M_1 داریم $M_1A = M_1A'$ (و به همین ترتیب

$AM=A'M$)؛ چرا؟

زیرا با توجه به تعریف بازتاب خط d عمود منصف پاره خط AA' است و نقاط M_1 و M روی این خط هستند. بنا بر

خاصیت عمود منصف $AM = A'M$ و $AM_1 = A'M_1$.

۲- در مثلث $A'M_1B$ داریم $A'M_1 + M_1B > A'B$ ؛ چرا؟

بنابر قضیه نامساوی مثلثی، در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است.

از تساوی $A'B = A'M + MB$ و (۱) و (۲) ادعای هرون را اثبات کنید.

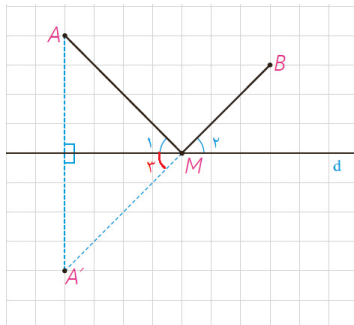
$$\left. \begin{array}{l} A'B = A'M + MB \xrightarrow{A'M=AM} A'B = AM + MB \\ A'B < A'M_1 + M_1B \end{array} \right\} \Rightarrow AM + MB < A'M_1 + M_1B$$

و چون نقطه M_1 دلخواه بود پس ادعای هرون ثابت می‌شود.

سؤال: در همین مسئله فرض کنید که d یک آینه تخت و A یک نقطه نورانی

است. نشان دهید بازتاب شعاع نوری AM از نقطه B می‌گذرد (به عبارتی نشان دهید که

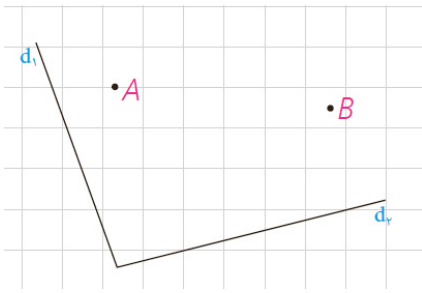
$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2})$$



نقطه M روی عمود منصف AA' است بنا براین $MA = MA'$ پس مثلث MAA'

متساوی الساقین است در نتیجه خط d نیمساز زاویه $\widehat{AMA'}$ است.

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = M_3 \\ M_3 = M_2 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 = M_2$$

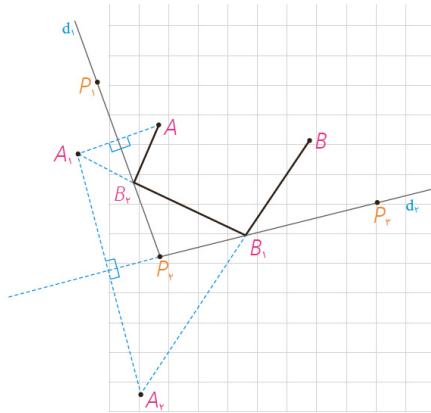


ب) دو خط متقاطع d_1 و d_2 و نقاط ثابت A و B مطابق شکل مفروض اند. چگونه می توان با طی کوتاه ترین مسیر از نقطه A آغاز به حرکت کرد و پس از برخورد با دو خط d_1 و d_2 از نقطه B گذشت؟

حل :

برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر به روش زیر عمل می کنیم :

قرینه A را نسبت به خط d_1 ، نقطه A_1 و قرینه A_1 را نسبت به خط d_2 ، نقطه A_2 می نامیم.



از A_2 به B وصل می کنیم و نقطه برخورد آن را با d_2 ، B_2 می نامیم.

به همین ترتیب از B_1 به A_1 وصل می کنیم و نقطه برخورد آن را با d_1 ، B_1 می نامیم. از A به B_2 وصل می کنیم. ادعا می کنیم که مسیر مورد نظر AB_2B_1B است.

تذکر: این مسئله را فقط در حالتی مطرح می کنیم که A_1 و A هر دو در یک طرف خط $P_2 P_3$ باشند و پاره خط های $A_2 B$ و $A_1 B_1$ متقاطع باشند.

کافی است نشان دهیم این مسیر از تمام مسیرهای دیگر کوتاه تر است. ابتدا ثابت می کنیم که طول این مسیر با طول پاره خط $A_2 B$ برابر است.

(۱)

$$\left. \begin{aligned} A_1 B_2 &= A B_2 \Rightarrow A B_2 + B_2 B_1 = A_1 B_1 \\ A_1 B_1 &= A_2 B_1 \Rightarrow A_2 B_1 + B_1 B = A_2 B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A B_2 + B_2 B_1 + B_1 B = A_2 B$$

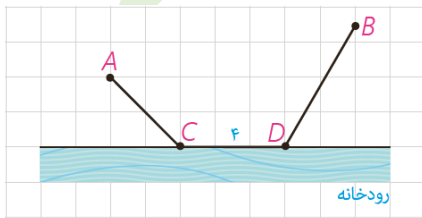
(۲) حال مسیر دلخواه دیگری مانند $AMNB$ را در نظر می گیریم؛ داریم :

$$AM = A_1 M \Rightarrow AM + MN = A_1 N$$

$$A_1 N = A_2 N \Rightarrow \underbrace{AM + MN + NB}_{A_1 N} = A_2 N + NB$$

حال با توجه به مثلث BNA_2 داریم :

طول مسیر اول \square طول مسیر دوم



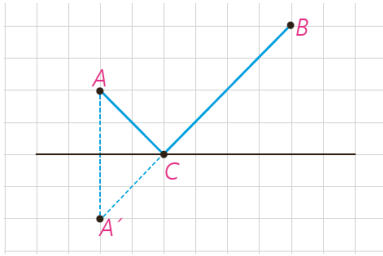
پ) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه ای واقع اند. می خواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که ۴ کیلومتر از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این ۴ کیلومتر را در چه قسمتی از رودخانه بسازیم تا مسیر $ACDB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

حل: مسئله را در چند مرحله حل می کنیم.

۱- اگر جاده ساحلی را از صورت مسئله حذف کنیم، به عبارتی اگر $CD=0$ ، این مسئله به کدام یک از مسائلی شبیه است که قبلاً دیده اید؟

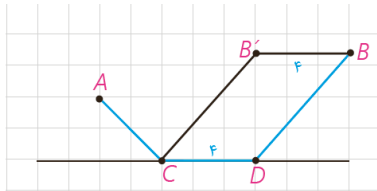
مسئله هرون مردی که از رودخانه می خواهد آب بردارد و به اسطبل برود.

۲- با توجه به شرایط مسئله، مسیر موردنظر، باید مسیری به شکل مسیر $ACDB$ باشد؛ اما:



(چرا؟) طول مسیر $ACDB$ = طول مسیر $ACB'B$

در واقع نقطه C تحت بردار انتقالی به طول ۴ به D منتقل شده و نقطه B' نیز تحت همان بردار به B منتقل شده است بنا براین با توجه به خواص تبدیل انتقال چهارضلعی $CDBB'$ متوازی الاضلاع است. پس

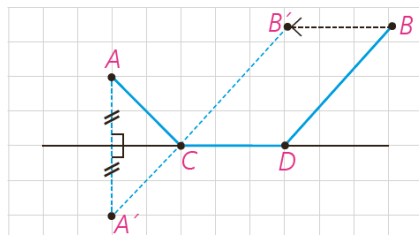


$$\text{مسیر } ACDB = AC + CD + DB \xrightarrow{\substack{CD=B'D \\ CB'=DB}} ACDB = AC + CB' + B'B = \text{مسیر } ACB'B$$

بنابراین: $4 + \text{طول مسیر } ACB' = \text{طول مسیر } ACDB$

۳- پس کافی است برای پیدا کردن کوتاه ترین مسیر ممکن به شکل $ACDB$ مسیر را به گونه ای انتخاب کنیم که طول ACB' کوتاه ترین طول ممکن باشد.

۴- به کمک مراحل ۱ تا ۳ و شکل روبه رو توضیح دهید که رسم کوتاه ترین مسیر $ACDB$ چگونه است.

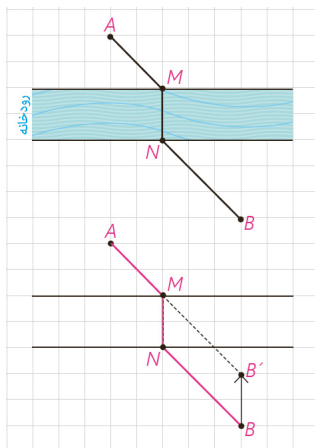


ابتدا نقطه B را تحت بردار انتقالی به طول ۴ و موازی رودخانه و در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می دهیم؛ حالا مسئله شبیه مسئله ی اسطبل می شود. بازتاب نقطه A را نسبت به خط کنار رودخانه به دست می آوریم یعنی نقطه A' سپس از A' به B' وصل می کنیم نقطه C به دست می آید. از نقطه C موازی رودخانه به سمت شهر B و به طول ۴ متر حرکت می کنیم تا نقطه D به دست آید. به این ترتیب کوتاه ترین مسیر رسم می شود.

کاردرکلاس

اگر دو شهر A و B دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر ممکن باشد؟

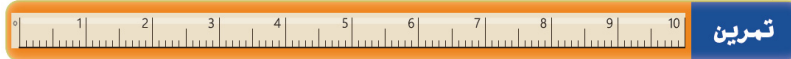
راهنمایی: به کمک فعالیت قبل و با توجه به تصویر داده شده، طریقه رسم مسیر $AMNB$ را شرح دهید و مشخص کنید چرا این مسیر، کوتاه ترین مسیر ممکن است.



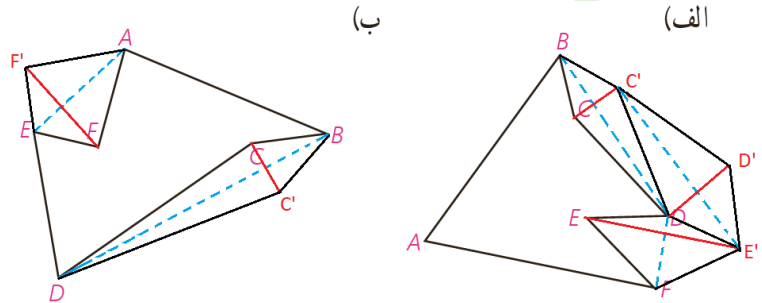
نقطه B را تحت برداری مساوی و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال

می دهیم. سپس از B' به A وصل می کنیم. تا نقطه M به دست آید از نقطه M بر رودخانه عمود می کنیم تا نقطه N به دست آید. به این ترتیب محل احداث پل MN به دست می آید به طوری که مسیر $AMNB$ کوتاه ترین مسیر است. مشابه مسئله ی قسمت (پ) می دانیم که مسیر $AMB'B$ کوتاه ترین است پس:

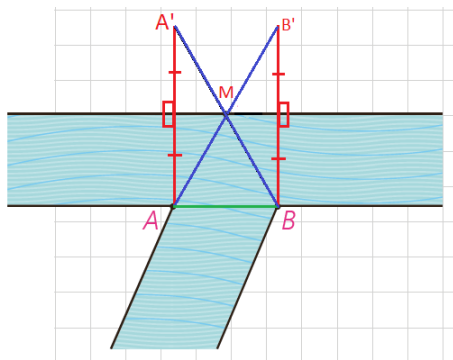
$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB} \text{مسیر } AMB'B = AM + NB + MN = \text{مسیر } AMNB$$



۱- دور زمین‌هایی مطابق شکل حصار کشی شده است. چطور می‌توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟

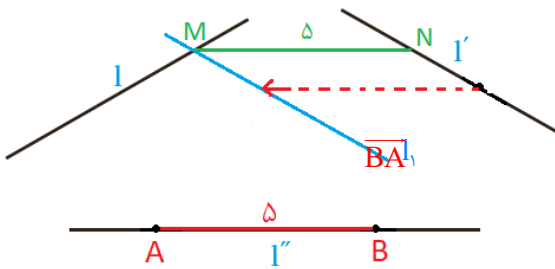


۲- می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر MABM کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟

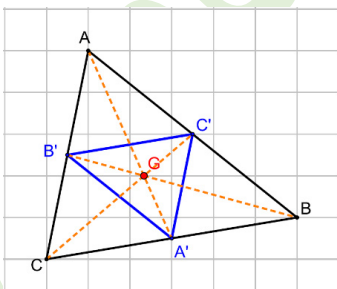
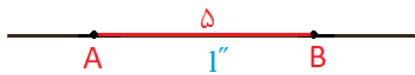


با توجه به شکل واضح است که عرض رودخانه در طول مسیر ثابت در نظر گرفته شده است. پس یا از نقطه B یا از A روش هرون را برای پیدا کردن نقطه M اجرا می‌کنیم.

۳- سه خط دو به دو ناموازی 1 و 1' و 1'' در صفحه مفروض‌اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی 1 و 1'، و موازی 1'' باشد.



ابتدا روی خط 1' پاره خط دلخواه AB به طول ۵ سانتی‌متر را مشخص می‌کنیم. خط 1' را تحت بردار \overline{BA} انتقال می‌دهیم تا خط 1 به دست آید این خط 1 را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. از نقطه M موازی خط 1' خطی رسم می‌کنیم تا خط 1' را در نقطه N قطع کند. پاره خط MN جواب مسئله است.



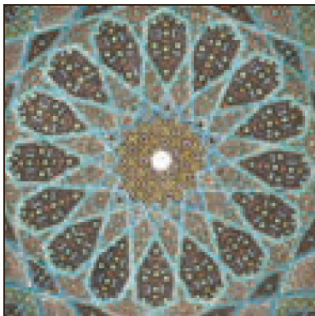
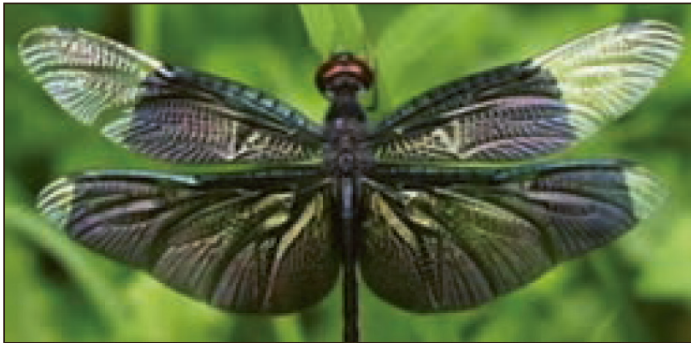
۴- فرض کنید محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث A'B'C' مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $K = -\frac{1}{3}$ باشد. الف) جایگاه رأس‌های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟ A' وسط BC، B' وسط AC و C' وسط AB قرار دارند.

باتوجه به خاصیت مرکز ثقل می‌دانیم که $GA' = \frac{1}{3}GA$ همچنین نقطه G بین A و A' و پس نقطه A' مجانس نقطه A به مرکز تجانس G و نسبت تجانس $-\frac{1}{3}$ است. همین مطلب در مورد نقاط B' و C' نیز صدق می‌کند.

ب) مساحت مثلث A'B'C' چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

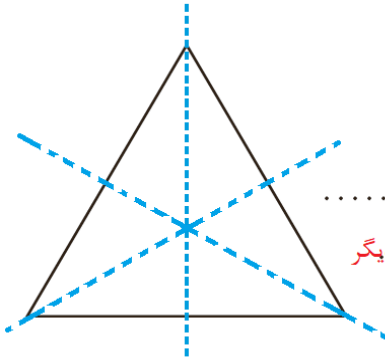
با توجه به ویژگی تجانس مساحت مثلث A'B'C'، $\frac{1}{9}$ مساحت مثلث ABC است.

تبدیل‌های تقارنی یک شکل هندسی



در بسیاری از مناظر طبیعی، گیاهان و جانوران، ساختار اتم‌ها، معماری، هنرهای مختلف دستی و نیز شکل‌های هندسی می‌توان نوعی نظم و تعادل مشاهده کرد. در این درس تبدیلی‌هایی را مرور می‌کنیم که یک شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند. چنین تبدیلی‌هایی را تبدیلی‌های تقارنی آن شکل می‌نامیم. فعالیت صفحه بعد برای روشن‌تر شدن این موضوع، طراحی شده است.





مثلث متساوی الاضلاعی را در نظر بگیرید :

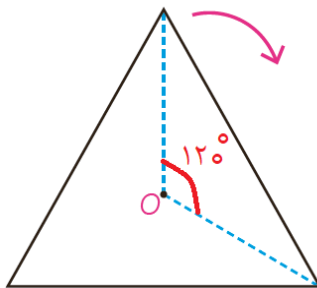
الف) بازتاب این مثلث نسبت به خط داده شده چگونه است؟... **خود مثلث است.**

ب) آیا تحت این بازتاب تصویر هر نقطه از شکل لزوماً خود آن نقطه است؟... **خیر...**

پ) آیا تحت این بازتاب، تصویر هر نقطه از شکل، روی خود شکل است؟... **بله...**

ت) آیا خط بازتاب دیگری برای این مثلث سراغ دارید؟... **بله عمود منصف دو ضلع دیگر**
این مثلث چند خط بازتاب دارد؟... **سه تا..**

ث) آیا غیر از بازتاب، تبدیل دیگری سراغ دارید که هر نقطه از شکل را به نقطه‌ای از همان شکل ببرد؟... **بله دوران..**



برای مثال آیا با مرکز O (نقطه هم‌رسی نیم‌سازها) می‌توانید دوران‌هایی معرفی کنید

که شکل را بر خودش منطبق کند؟... **120° ...**

اگر $0 < \alpha \leq 360^\circ$ زاویه دوران باشد، چند دوران به مرکز O و زاویه α می‌توانید

مشخص کنید؟... **120° و 240° و 360°**

تعریف: اگر شکلی تحت یک بازتاب بر خودش منطبق شود، گوییم آن شکل **تقارن بازتابی (خطی)** دارد و اگر آن شکل تحت دورانی با زاویه $0 < \alpha \leq 360^\circ$ بر خودش منطبق شود، گوییم **تقارن دورانی (چرخشی)** دارد.

همان‌گونه که در این فعالیت دیدید در مثلث متساوی الاضلاع، سه بازتاب و سه دوران متفاوت می‌توان معرفی کرد که نقاط این مثلث را به نقاطی از همین مثلث نظیر کند.

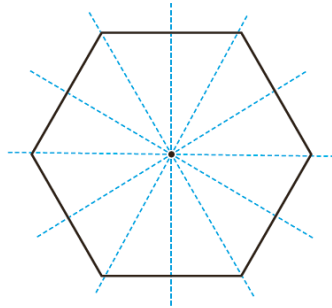
به عبارتی، تحت این تبدیل‌ها تصویر این مثلث بر خودش منطبق می‌شود؛ چنین تبدیل‌هایی را تبدیل‌های تقارنی این مثلث می‌نامیم. در این کتاب برای شناسایی تبدیل‌های تقارنی یک شکل، شکل را تنها در یک جهت (خلاف یا موافق جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران می‌دهیم؛ با این تعریف، مثلث متساوی الاضلاع دارای ۶ تبدیل تقارنی است. دقت کنید که دوران 360° ، تبدیل انتقال با بردار صفر و تبدیل تجانس با نسبت تجانس $k=1$ ، هر شکل را به خود آن شکل نظیر می‌کنند که پیش از این، آنها را «تبدیل‌های همانی» نامیدیم. بنابراین تمام تبدیل‌های همانی فقط تبدیل تقارنی به شمار می‌رود.

تعریف: تبدیل طولی‌ای T را **تبدیل تقارنی** شکل F می‌نامیم به شرط اینکه تبدیل یافته شکل F، تحت آن تبدیل بر خود شکل F منطبق شود؛ یعنی داشته باشیم: $T(F) = F$

تعریف: تقارن دورانی با زاویه 180° را **تقارن مرکزی** نیز می‌نامند.
در این حالت مرکز دوران را **مرکز تقارن** شکل می‌گویند.

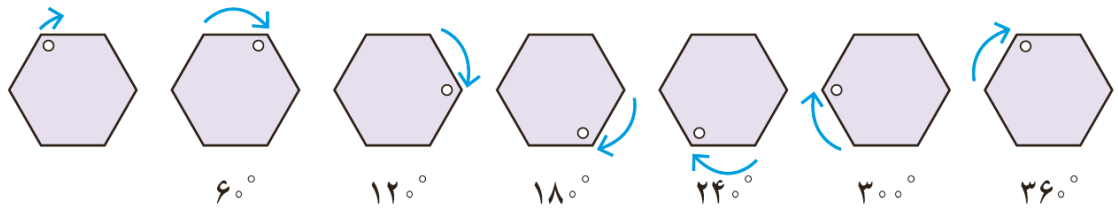
مثال

شش ضلعی منتظم، ۶ تقارن بازتابی و ۶ تقارن دورانی دارد.



تقارن‌های بازتابی :

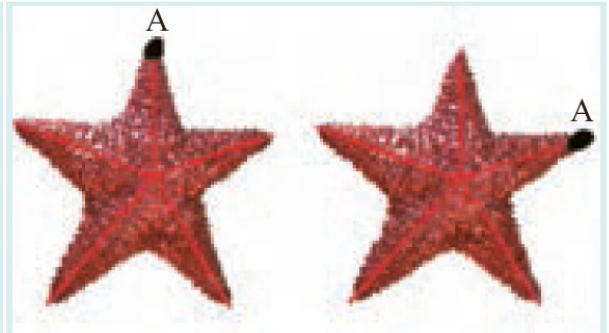
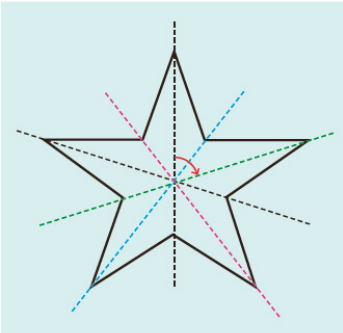
تقارن‌های دورانی :



همان‌طور که اشاره شد تقارن دورانی با زاویه 36° ، انتقال با بردار صفر و تجانس با نسبت تجانس $k=1$ تبدیل‌های

همانی هستند.

تبدیل‌های همانی را تقارن همانی نیز می‌نامند؛ با این تعریف، هر شکلی دارای تقارن همانی است.



تعداد کل تقارن‌ها	تعداد تقارن‌های بازتابی	تقارن‌های دورانی
...۱۰ تا...	...۵ تا...	36° ، 72° ، 144° ، 216° ، 288°

تعداد تبدیل‌های تقارنی را در هر شکل مشخص کنید.







الف) پاره‌خط (ب) خط (پ) دایره

الف) پاره خط دو تقارن دورانی دارد که مرکز آن وسط پاره خط و زاویه‌های آن 180° و 360° است. و یک تقارن بازتابی دارد که عمود منصف پاره خط است.

ب) خط بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

پ) دایره بی شمار تقارن دورانی و بی شمار تقارن بازتابی دارد.

الف) با تکمیل جدول زیر تعداد تبدیل‌های تقارنی n ضلعی منتظم را مشخص کنید.

n	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$...	n
n ضلعی منتظم								
تعداد تقارن‌های بازتابی	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		n تا
تعداد تقارن‌های دورانی	۳ تا	۴ تا	۵ تا	۶ تا	۷ تا	۸ تا		n تا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۶ تا	۸ تا	۱۰ تا	۱۲ تا	۱۴ تا	۱۶ تا		$2n$ تا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	خیر	بله	خیر	بله	خیر	بله		

ب) n ضلعی منتظم در چه صورتی مرکز تقارن دارد؟

اگر n زوج باشد شکل مرکز تقارن دارد.






پ) الگویی برای پیدا کردن زاویه‌های دوران در تقارن‌های دورانی یک n ضلعی منتظم ارائه کنید.

$$\frac{360^\circ}{n}, \left(\frac{360^\circ}{n} \times 2\right), \left(\frac{360^\circ}{n} \times 3\right), \dots, \left(\frac{360^\circ}{n} \times n\right)$$

۲- تقارن‌های خطی و دورانی متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مثلث متساوی‌الساقین و دوزنقه متساوی‌الساقین را

مشخص کنید و در جدولی بنویسید.

کدام یک از این شکل‌های هندسی، مرکز تقارن دارند؟

چند ضلعی	مستطیل	لوزی	مثلث متساوی‌الساقین	دوزنقه متساوی‌الساقین	متوازی‌الاضلاع
					
تعداد تقارن‌های بازتابی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	ندارد
تعداد تقارن‌های دورانی	۲ تا	۲ تا	یک	یک	۲ تا
تعداد کل تبدیل‌های تقارنی	۴ تا	۴ تا	۲ تا	۲ تا	۲ تا
آیا شکل مرکز تقارن دارد؟	بله	بله	خیر	خیر	بله

محور بازتاب مستطیل عمود منصف‌های طول و عرض است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف‌ها (یا قطر ها) است.

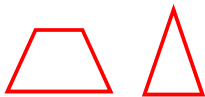
محور بازتاب لوزی قطرهای آن و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است.

محور بازتاب مثلث متساوی‌الساقین عمود منصف قاعده است و مرکز دوران محل برخورد عمود منصف‌های سه ضلع است. زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

محور بازتاب دوزنقه متساوی‌الساقین محل عمود منصف قاعده ها است و مرکز دوران محل برخورد قطر ها است. زاویه دوران 360° است یعنی تقارن دورانی همانی دارد.

مرکز دوران متوازی‌الاضلاع محل برخورد قطر های آن است.

۳- الف) شکلی رسم کنید که خط بازتاب داشته باشد، ولی مرکز تقارن نداشته باشد (یعنی تقارن خطی داشته باشد، اما تقارن دورانی غیرهمانی نداشته باشد).



مثلاً و دوزنقه متساوی الساقین خط بازتاب دارند، ولی تقارن دورانی غیرهمانی ندارند.

ب) شکلی رسم کنید که مرکز تقارن داشته باشد، ولی خط بازتاب نداشته باشد (یعنی تقارن دورانی غیرهمانی داشته باشد، اما تقارن خطی نداشته باشد).

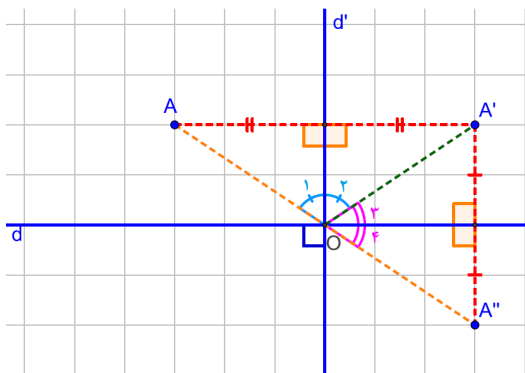


متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد ولی خط بازتاب ندارد.

۴- نشان دهید اگر شکلی دو خط بازتاب عمود بر هم داشته باشد، محل تلاقی این دو خط، مرکز تقارن شکل است (در واقع هر شکل که دارای دو تقارن بازتابی باشد که دو خط بازتاب آن بر هم عمود باشند، دارای تقارن دورانی است).

d و **d'** دو خط بازتاب عمود بر هم هستند و نقطه **A** یک نقطه ی دلخواه از شکل است.

$$\left. \begin{aligned} S(A) = A' &\Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ S(A') = A'' &\Rightarrow \hat{O}_3 = \hat{O}_4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AOA''} = \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 + \hat{O}_4 = 2\hat{O}_2 + 2\hat{O}_3 = 2(\hat{O}_2 + \hat{O}_3) \Rightarrow \widehat{AOA''} = 180^\circ \quad (1)$$



$$\left. \begin{aligned} S(A) = A' &\Rightarrow OA = OA' \\ S(A') = A'' &\Rightarrow OA' = OA'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA = OA'' \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می گیریم که نقطه **O** مرکز دوران به زاویه 180° است.

با توجه به جدول سؤال قبل مستطیل و لوزی همین خاصیت را دارند. اما سؤال این است که آیا اگر شکلی مرکز تقارن داشته باشد حتماً دو محور بازتاب عمود برهم دارد؟ پاسخ با یک مثال نقض داده می شود

متوازی الاضلاع مرکز تقارن دارد یعنی یک دوران با زاویه 180° اما محور بازتاب ندارد.

۵- جدول زیر را کامل کنید.

شکل					
تقارن بازتابی	یک	ندارد	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تقارن دورانی	یک	یک	۳ تا	۶ تا	۸ تا
تعداد تبدیل های تقارنی	۲ تا	یک	۶ تا	۱۲ تا	۱۶ تا