

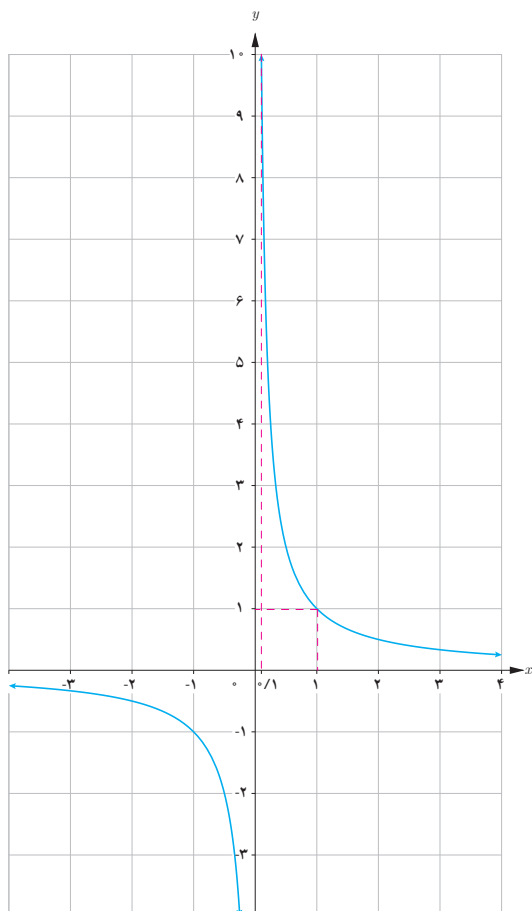
حدهای نامتناهی



درس

در سال قبل با حد یک تابع در یک نقطه آشنا شدیم. دیدیم که l حد تابع f در نقطه a است هرگاه بتوانیم مقادیرهای $f(x)$ را به دلخواه (هر قدر که بخواهیم) به l نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a (از دو طرف a) نزدیک کرده باشیم اما x برابر a نشده باشد در این درس با رفتار برخی دیگر از توابع در همسایگی محذوف یک نقطه آشنا می‌شویم.

فعالیت



در سال قبل با نمودار تابع گویای $f(x) = \frac{1}{x}$ آشنا شدیم می‌خواهیم رفتار این تابع را در همسایگی راست $x = 0$ بررسی کنیم.

۱ جدول زیر رفتار تابع را به ازای برخی از مقادیر x نشان می دهد آن را تکمیل کنید.

x	$0/1$	$0/01$	$0/001$	$0/0001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$	10	100	1000	10000	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

۲ اگر بخواهیم $f(x)$ از یک میلیون بزرگ تر شود مقدار x از چه عددی باید کوچک تر شود؟ $0/0000001$

۳ وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود آیا مقادیر تابع به عددی خاص نزدیک می شوند؟ چرا؟

خیر ، کسر به عدد خیلی بزرگی نزدیک می شود (بیکران افزایش می یابد)

با توجه به این فعالیت مشاهده می شود که وقتی x با مقادیر بزرگ تر از صفر به صفر نزدیک می شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می یابد. به بیان دیگر می توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی در نظر بگیریم بزرگ تر کرد به شرطی که x را

به اندازه کافی با مقادیر بزرگ تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می نویسیم : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty$.

❁ **تذکر :** این نماد نشان می دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی شود و مثبت بی نهایت فقط یک نماد است که نمایش می دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می تواند بزرگ تر باشد.

کاردر کلاس

برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$

الف) جدول زیر را کامل کنید :

x	$-\frac{1}{2}$	$-0/2$	$-0/1$	$-0/001$	$-0/0001$	$-0/00001$	$\dots \rightarrow$	0
$f(x)$	-2	-5	-10	-1000	-10000	-1000000	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده

ب) اگر بخواهیم مقدار $f(x)$ از $10^6 - 1$ کوچک تر شود x باید چگونه انتخاب شود؟ **منفی یک میلیونیم** $\frac{-1}{1000000}$

پ) وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ چه تغییری می کند؟

به سمت $-\infty$ نزدیک می شود بدون هیچ محدودیتی مرتباً کاهش می یابد

ت) در مورد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ چه می توان گفت؟

مرتباً کاهش می یابد

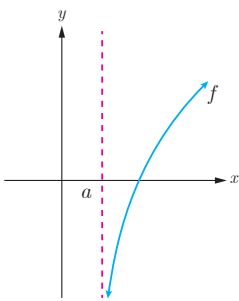
با توجه به آنچه در فعالیت و کار در کلاس صفحه‌ی قبل مشاهده شد تعریف زیر را می‌توان ارائه داد.

تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی

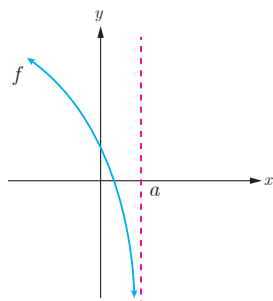
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که می‌توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

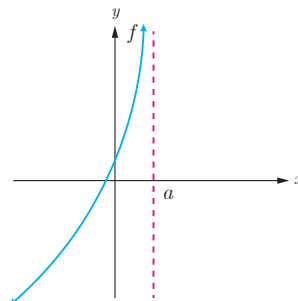
❁ **تذکر:** تعریف حدهای یک طرفه نامتناهی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ نیز مشابه تعاریف فوق است. توصیف حالت‌های مختلف حدهای یک طرفه نامتناهی در شکل‌های زیر آمده است.



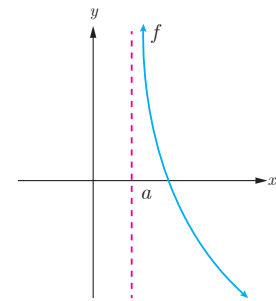
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



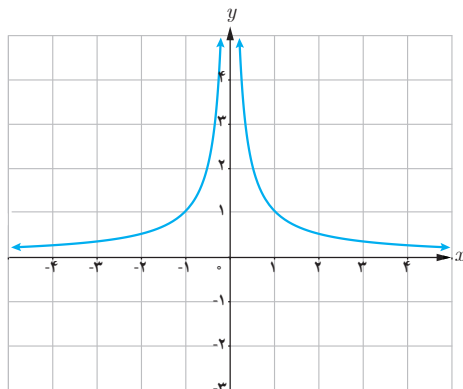
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



❁ **مثال:** نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در شکل روبه‌رو رسم شده

است می‌خواهیم رفتار تابع f را در همسایگی محذوف نقطه $x = 0$

بررسی کنیم به جدول صفحه بعد توجه کنید :

فصل سوم : حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۴۹

x	$-\infty/5$	$-\infty/1$	$-\infty/1$	$-\infty/0.1$	$\dots \rightarrow$	\circ	$\leftarrow \dots$	$\circ/0.01$	$\circ/0.1$	$\circ/1$	$\circ/5$
$f(x)$	-2	-10	-100	-1000	$\dots \rightarrow$	تعریف نشده	$\leftarrow \dots$	1000	100	10	2

مشاهده می شود با نزدیک کردن x به اندازه کافی به صفر، مقدارهای $f(x)$ را می توان به دلخواه بزرگ کرد بنابراین $f(x)$ از هر عدد دلخواهی بزرگ تر می شود و در نتیجه مقدار حد تابع یک عدد خاصی نمی شود و حد متناهی ندارد. در اینجا می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد مثبت بزرگ تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

تعریف مشابهی از حد در مورد تابع هایی که وقتی x به a نزدیک می شود و مقدار تابع خیلی کوچک تر می شود در زیر وجود دارد.

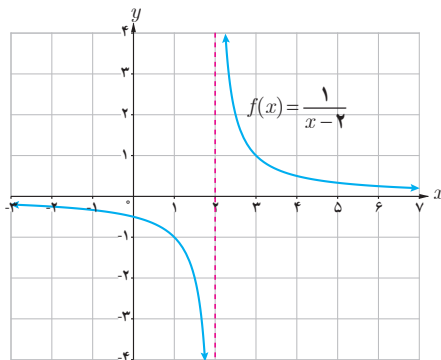
تعریف :

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد در این صورت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی اینکه می توانیم مقدارهای $f(x)$ را به میزان دلخواه از هر عدد منفی کوچک تر کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی به a نزدیک کرده باشیم.

❖ **مثال :** برای حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

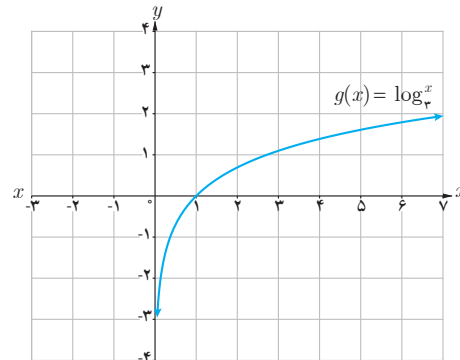
❖ **مثال :** در مورد حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ می توان گفت : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = +\infty$

نمودار توابع f, g, h در شکل‌های زیر داده شده‌اند با توجه به آنها حدود خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.

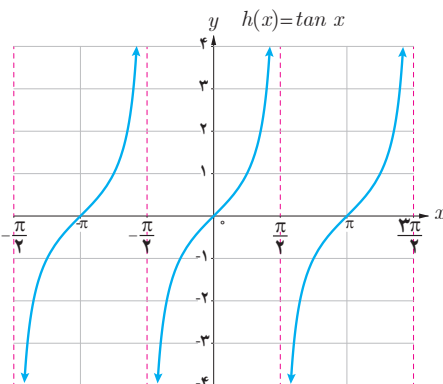


$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \cdot -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \cdot +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} h(x) = \cdot -\infty$$

خواندنی

بی‌نهایت مفهومی انتزاعی است که در رشته‌های مختلف ریاضیات با تغییرات مختلف به کار می‌رود و معمولاً به معنای «فراتر از هر مقدار» است و برای توصیف مقادیر بیش از هر عدد به کار می‌رود و نشانه آن در ریاضیات ∞ می‌باشد.

این نماد به صورت چیزی است که محدود نیست و در آن هیچ محدودیت فضایی و زمانی وجود ندارد. در حسابان بی‌نهایت به معنای حدی بی‌کران است $x \rightarrow \infty$ یعنی متغیر x فراتر از هر مقدار در نظر گرفته شده رشد می‌کند.

بی‌نهایت دارای دو مفهوم فیزیکی و ریاضی است که کاملاً با یکدیگر متفاوت‌اند مفهوم فیزیکی بی‌نهایت دارای تعریف دقیقی نیست و در جاهای مختلف دارای تعاریف متفاوت است. به عنوان مثال می‌گوییم اگر جسم در کانون عدسی محدب قرار گیرد تصویر در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. حال اگر دو عدسی با فواصل کانونی متفاوت در نظر بگیریم و اجسامی را روی کانون این دو عدسی قرار دهیم. طبق قاعده تصاویر هر دو در بی‌نهایت تشکیل می‌شود. اما تصویر این دو دقیقاً در یک نقطه تشکیل نمی‌شود. یعنی بی‌نهایت برای این دو عدسی متفاوت است اما مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات کاملاً متفاوت با بی‌نهایت فیزیکی است در ریاضیات می‌گوییم «بی‌نهایت مقداری است که از هر مقدار دیگر بیشتر است» این مفهوم دقیقاً همان مفهومی است که در «حد در بی‌نهایت» در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در حد تابع می‌گوییم $x \rightarrow \infty$ یعنی اینکه x از هر عدد انتخاب شده‌ای بزرگ‌تر باشد.

برخی از قضایای حدهای بی نهایت^۱

❖ **قضیه ۱:** اگر n یک عدد طبیعی باشد؛ آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{عدد زوج باشد،} \\ -\infty & \text{عدد فرد باشد،} \end{cases} n$$

❖ **مثال:** با توجه به قضیه فوق می توان نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

❖ **قضیه ۲:** الف) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و برعکس.

ب) اگر $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ و برعکس.

❖ **مثال:** $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$ و در نتیجه $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{|x-1|} = +\infty$

کارد در کلاس

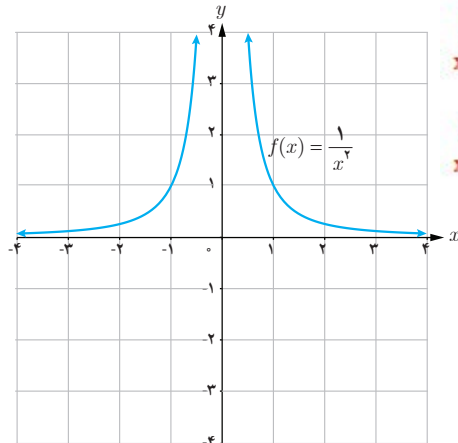
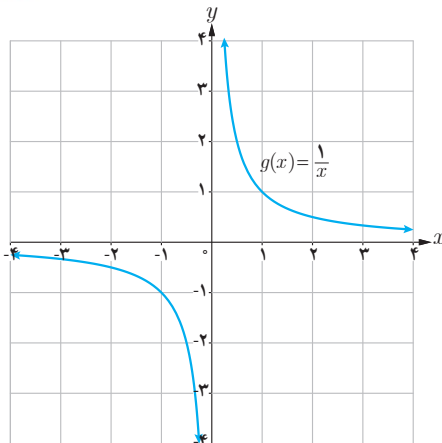
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

با استفاده از نمودار توابع داده شده و همچنین قضایای بالا حاصل حدود زیر را به دست آورید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

۱- ما در این کتاب به بیان برخی از قضایای حدهای بی نهایت پرداخته و آنها را اثبات نمی کنیم.

❁ **قضیه ۳:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ آن گاه :

(الف) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

(ب) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(پ) اگر $L > 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

(ت) اگر $L < 0$ و مقادیر $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

❁ **تذکر:** قضیه ۳ در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❁ **مثال:** هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای به وسیله تابعی، با ضابطه $f(x) = \frac{255x}{100-x}$

محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است دامنه تابع $(0, 100)$ می‌باشد.

مثلاً برای هزینه ۲۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه $63/75$ میلیون تومان لازم است.

برای پاک‌سازی ۹۵ درصد از آلودگی‌ها $f(95) = 4/845$ و در نتیجه نزدیک به پنج میلیارد تومان برای این کار لازم است. با

توجه به قضیه فوق داریم : $\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{255x}{100-x} = +\infty$

و این بدان معنا است که با نزدیک شدن x به عدد 100 مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش تعیین شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد

لذا نمی‌توان صد درصد آلودگی‌های رودخانه را پاک‌سازی کرد.

سد شهید عباسپور، اندیکا، خوزستان (عکاس: سیدمهدی حسینی)

❁ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2}$ را به دست آورید.

حل: از آنجا که $4 - x^2 = (2-x)(2+x)$ وقتی x در همسایگی چپ ۲، باشد. مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند.

از طرفی $\lim_{x \rightarrow 2^-} x+1 = 3$ طبق بند (الف) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{4-x^2} = +\infty$

❖ **مثال :** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x}$ را به دست آورید.

حل : وقتی x در همسایگی راست صفر باشد حد صورت کسر برابر -1 و حد مخرج کسر برابر صفر است و از آنجا که در

همسایگی راست صفر $\sin x$ مقداری مثبت است. در نتیجه طبق بند (ب) قضیه فوق $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{\sin x} = -\infty$

❖ **مثال :** حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ را به دست آورید.

حل : از آنجا که حد فوق به صورت $\frac{0}{0}$ در می آید و چون $x \neq -1$ پس می توان صورت و مخرج کسر را بر $x-1$ تقسیم کرد. داریم :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x}{x+1} = +\infty$$

کارد در کلاس

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-x}{x+2} = \frac{1-(-2)}{+} = +\infty \quad x > -2 \rightarrow x+2 > 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} = \frac{1-2}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \quad x < 2 \rightarrow x-2 < 0$

پ) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)} = \frac{1+1}{0^+} = +\infty$

❖ **قضیه ۴ :** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ (و یا $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$) آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

❖ **تذکر :** قضیه فوق در حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال :** حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x}$ را به دست آورید.

حل : در یکی از کار در کلاس های قبل به صورت شهودی دیده شد که : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \tan x = +\infty$ از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x+1}{\tan x} = 0 \quad \text{طبق قضیه فوق} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x+1) = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 0+1=1 \quad \text{الف:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x^3 + x^2}{x^2} = \frac{1+0+0}{0} = +\infty \quad \text{ب:}$$

فعالیت

۱ توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = x + 1$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ را به دست آورید.

ب) تابع $f+g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} ((f+g)(x))$ را محاسبه کنید.

پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۲ تابع $f \times g$ را به صورت یک تابع گویا بنویسید و حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times g(x)$ را محاسبه کنید و ارتباط آن را با $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ بیان کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) (x+1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} = \frac{0+1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) = +\infty \times 1 = +\infty$$

همان‌طور در فعالیت فوق مشاهده کردید به‌طور کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

❖ **قضیه ۵:** اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ آن‌گاه:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty \quad \text{ب) اگر } L > 0 \text{ آن‌گاه}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = -\infty \quad \text{ب) اگر } L < 0 \text{ آن‌گاه}$$

❖ **تذکر:** قضیه فوق برای حالتی که $x \rightarrow a^+$ یا $x \rightarrow a^-$ نیز برقرار است.

❖ **مثال:** برای به دست آوردن حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x + 1 + \frac{1}{x^2} \right)$ از آنجا که $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$ با توجه به بند الف

قضیه فوق حاصل حد برابر $+\infty$ می‌شود.

❖ **مثال:** حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{\sin^2 x}{x^2}$ از طرفی $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و با توجه به بند الف قضیه

فوق حاصل حد برابر $+\infty$ خواهد شد.

۱- این قضیه در حالت $l = 0$ در این کتاب بررسی نمی‌شود و در ارزشیابی‌ها رعایت این مسئله الزامی است. همچنین حالت $\infty - \infty$ در این کتاب مورد بررسی قرار نمی‌گیرد.

فصل سوم : حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت ۵۵

کارد در کلاس

الف $\lim_{x \rightarrow \circ} (f(x) + g(x)) = -\infty$

ب $L > \circ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ} (f(x)g(x)) = -\infty$

پ $L < \circ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ} (f(x)g(x)) = +\infty$

۱ قضیه ۵، را در حالتی که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ بازنویسی کنید.

۲ حاصل حدود زیر را به دست آورید در هر مرحله مشخص کنید از کدام قضیه استفاده کرده اید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1}$

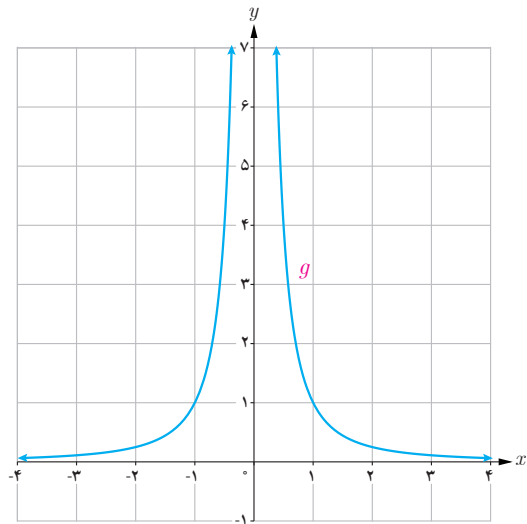
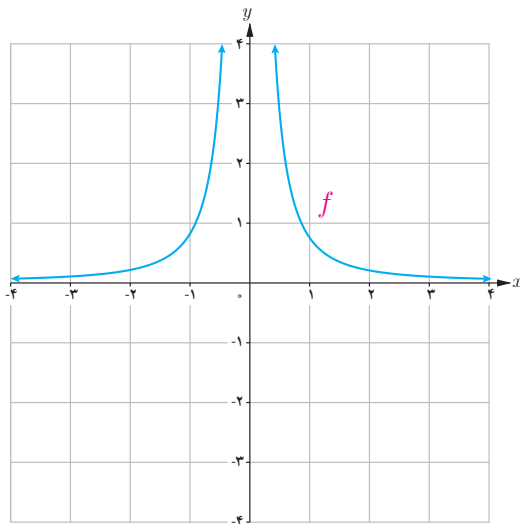
ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x^2 + 4x + 4}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - \cos 2x}{x}$

مجانب قائم

به نمودارهای هر یک از توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ در اطراف نقطه صفر توجه کنید.



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x = 0$ را در هر دو منحنی، مجانب قائم نمودار می گویند.

تعریف :

خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

مخرج در نزدیکی یک با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0} = -\infty$$

صورت هم در ۱ برابر ۲ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p + x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{0} = +\infty$$

در عبارت $\frac{1}{x}$ مخرج در نزدیکی صفر همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و صورت هم برابر ۱ است

پس حد عبارت برابر $+\infty$ است طبق قضیه ۵ الف یک بعلاوه بی نهایت میشود بی نهایت

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-p)^+} \frac{x+p}{x^p + px + p} = \lim_{x \rightarrow (-p)^+} \left(\frac{1}{x+p} \right) = \frac{1}{0} \xrightarrow{x > -p \rightarrow x+p > 0} +\infty$$

بعد ساده کردن مخرج در نزدیکی -۲ همواره با مقادیر مثبت به صفر میل می کند و حد صورت هم برابر ۱

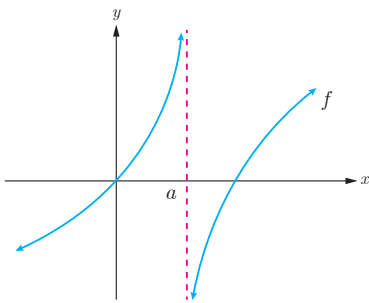
است پس ، حد عبارت برابر $+\infty$ است

مخرج در نزدیکی صفر با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد صورت

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{p - \cos px}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

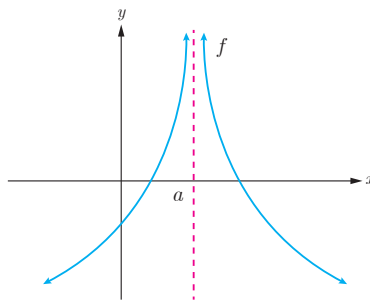
هم در صفر برابر ۱ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

❁ مثال : در هر یک از شکل های زیر خط $x = a$ یک مجانب قائم منحنی داده شده است.



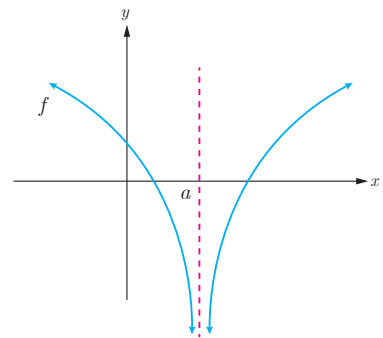
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



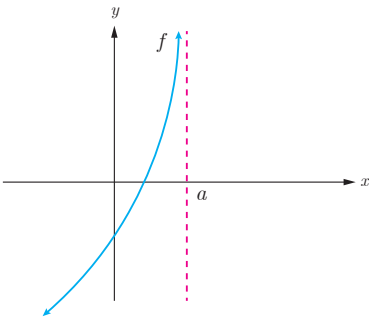
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

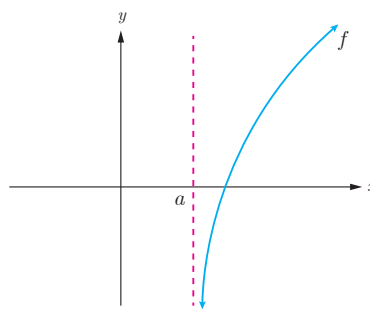


$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

❁ مثال : کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشند؟

حل : شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ می توانستیم بگوییم $x = -1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

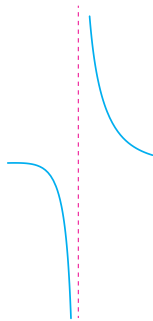
خط $x = 3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به صورت $x = -1$ دارد.

❖ مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

$$f(x) = \frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$



پس خط $x = 0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به صورت روبه رو خواهد بود.

کارد کلاس

مجانب های قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6}$ را در صورت وجود به دست آورید.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 6} = \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-3)}$$

$$(x+2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

x	-2	3
	$+$	$-$
	$+$	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{1 \cdot 2}{0^+ \cdot (-5)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{1 \cdot 2}{0^- \cdot (-5)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-3)} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 0^-} = -\infty$$

تمرین

۱ با استفاده از قضایای حدهای نامتناهی درستی حدهای زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2} = +\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -2} \left| \frac{5-x}{2+x} \right| = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^4} = +\infty$$

۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$$

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ بوده و دارای دو مجانب قائم باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $\{1\} - [-2, 2]$ بوده و دارای مجانب قائم باشد.

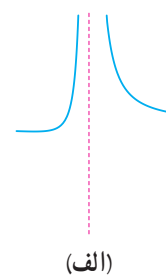
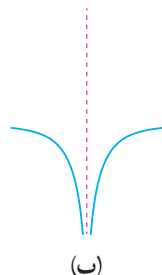
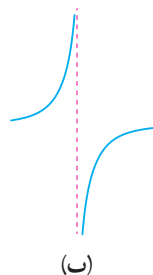
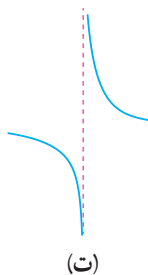
۵ مجانب‌های قائم توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = \frac{2x-1}{3-x}$$

$$\text{ب) } g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$$

۶ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x-|x|}$ در مجاورت مجانب قائم خود چگونه است؟

۷ کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1}$ را در همسایگی $x=1$ نمایش می‌دهد؟ چرا؟



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + x^p}}{x^p}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{a + x^p} = \sqrt{a} \quad \text{طبق قضیه سه}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0 \quad \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + x^p}}{x^p} = \frac{\sqrt{a}}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -p} \left| \frac{a - x}{p + x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -p} |a - x| = a \quad \text{طبق قضیه سه}$$

$$\lim_{x \rightarrow -p} |p + x| = 0 \quad \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -p} \left| \frac{a - x}{p + x} \right| = \frac{a}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{(x - p)^q}$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (x - p)^q = 0 \quad \text{طبق قضیه سه} \quad \longrightarrow \lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{(x - p)^q} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{(x+2)(x-2)} = \frac{4}{(4)(0^-)} = -\infty$$

	-۲	۲
	+	+

با توجه به تعیین علامت مخرج در نزدیکی عدد ۲ با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد صورت هم در ۲ برابر ۴ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+4)(x-3)} = \frac{9+6-1}{7 \times 0} = \frac{14}{0} = -\infty$$

x	-۴	۳
	+	-

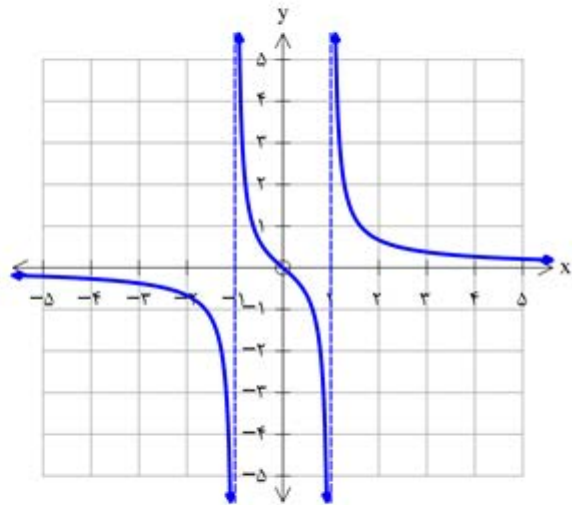
با توجه به تعیین علامت مخرج در نزدیکی عدد ۳ با مقادیر منفی به صفر میل می کند و حد صورت هم در ۳ برابر ۱۴ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{(3+x)(3-x)} = \frac{4}{6 \times 0^-} = -\infty$$

x	-۳	۳
	-	+

با توجه به تعیین علامت مخرج در نزدیکی عدد ۳ با مقادیر مثبت به سمت صفر میل می کند و حد صورت هم در ۳ برابر ۴ است پس حد عبارت برابر $-\infty$ است

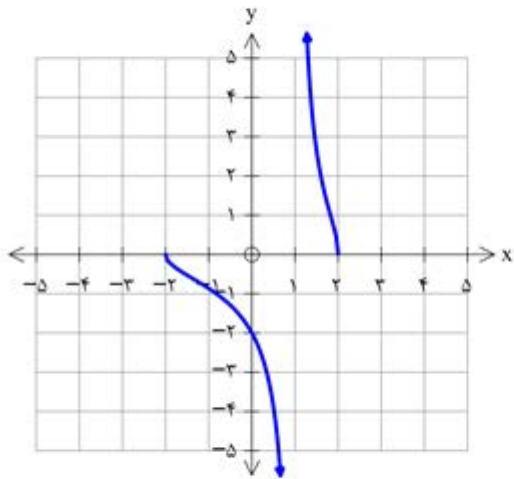
تمرین ۳:



$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

همیار

تمرین ۴:



$$f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$$

hamyar.in

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{2 - x}$$

$$2 - x = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^x - 1}{2 - x} \rightarrow \frac{\Delta}{0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2^x - 1}{2 - x} \rightarrow \frac{\Delta}{0} = +\infty \end{cases} \rightarrow x = 2 \text{ مجانب قائم است}$$

$$g(x) = \frac{x^x + x}{x^x - x}$$

$$x^x - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

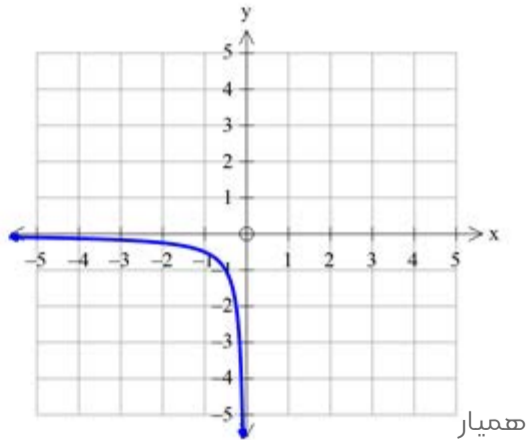
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x + x}{x^x - x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = -1 \rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم است}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x + x}{x^x - x} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \pm\infty$$

تمرین ۶:

$$D_f = (-\infty, 0)$$

$y = 0$ مجانب افقی



همیار

تمرین ۷: الف در دست است

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^p - px + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(x-1)^p} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^p - px + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{(x-1)^p} = \frac{1}{0} = +\infty$$

