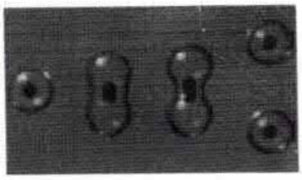
درس ۱

تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می‌کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می‌کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی‌مانده، می‌توان سن آن شئ یا موجود را پیدا کرد. در حل این‌گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(0)=1$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.



تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

جدول (۱)

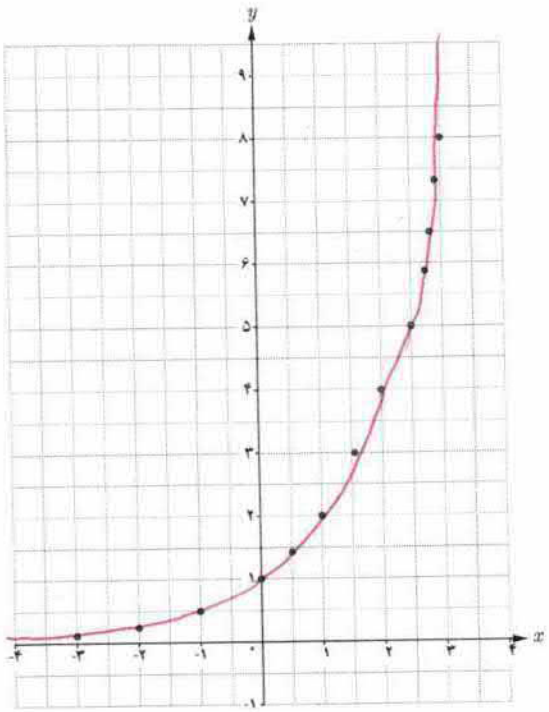
$m(t)$ جرم باکتری‌ها	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	۴?
۳۲?	۵
۶۴?	۶
۱۲۸?	۷
۱۰۲۴	۱۰?

الف) در زمان‌های $t=5$ و $t=6$ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید. ۳۲ گرم ۶۴ گرم

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟ $t=8$ و $t=10$

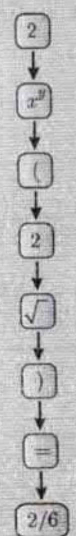
پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟ بله $m(t)=2^t$ یا 2^n

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



خواندنی

به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیازمندیم. برای محاسبه $۲^{\sqrt{۲}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:



اکنون مقادیر $۲^{۰/۵}$، $۳^{\sqrt{۵}}$، $۳^{۱+\sqrt{۲}}$ و $۳^{۱-\sqrt{۵}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به‌دست آورید.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.

پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟ اگر خطی موازی محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

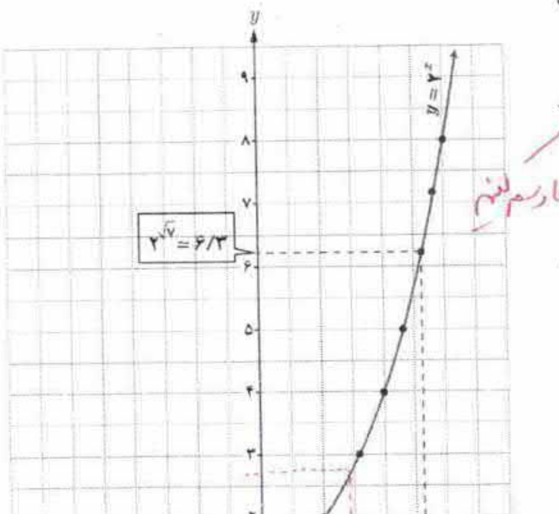
ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید. ۲٫۸

ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$۲^{-۱}$ $۲^۵$ $۲^{\frac{۳}{۲}}$ $۲^{\frac{۵}{۲}}$

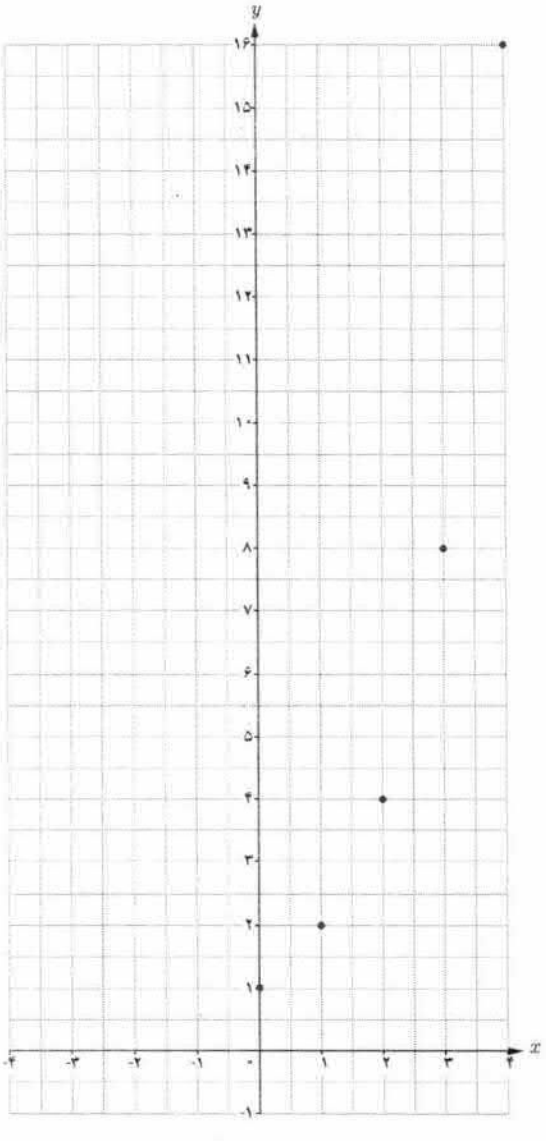
ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

با کاهش نقاط فقط به محور xها نزدیک می‌شود



توجه کنید دامنهٔ $y=۲^x$ شامل اعداد اصم مثل $\sqrt{۷}$ است.

اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحلهٔ یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.



جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$۲^{۰}=۱$
۱	$۲^{۱}=۲$
۲	$۲^{۲}=۴$
۳	$۲^{۳}=۸$ ؟
۴ :	$۲^{۴}=۱۶$:
۹ ؟	$۲^{۹}=$ ؟ ۵۱۲

نمودار روبه‌رو رابطهٔ بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد.

با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و nام از دنباله زیر به‌دست می‌آید :

$$۲^{۱}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, \dots, ۲^{n}.$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t، از رابطه $m(t)=۲^{t}$ به‌دست می‌آید.

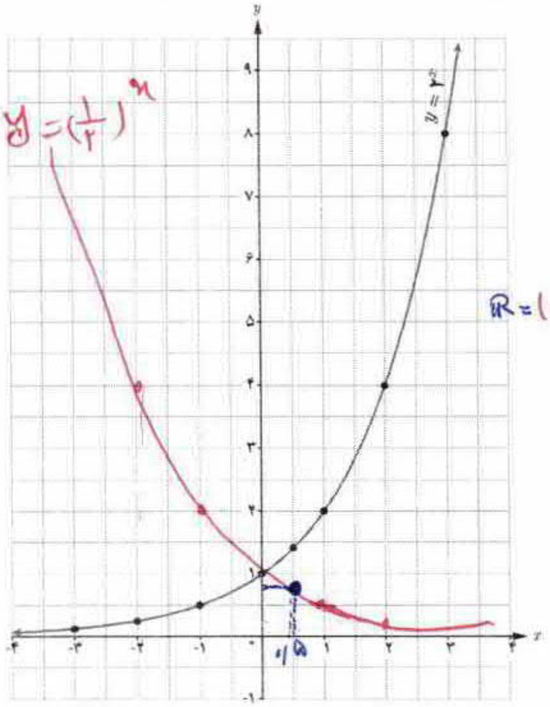
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^{x}	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	$۲^{\frac{۱}{۲}}$	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	$۲^{۱}$	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\sqrt[۳]{۲}=۱/۲۶$	$\sqrt{۲}=۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴}=۱/۵۶$	۲	$\sqrt{۸}=۲/۸۳$	۴	۸

کار در کلاس

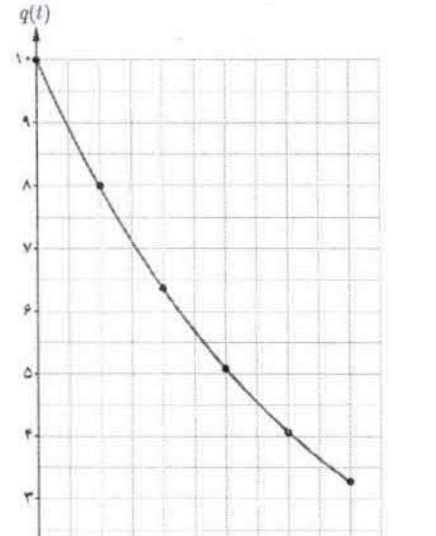


الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=۲^x$ مقایسه کنید. نسبت به محور y ها تقارن دارند

ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید. دامنه هر ۲ تابع $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ و برد آنها $(۰,+\infty)$ است.

> هر تابع با ضابطه $f(x)=a^x$، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

پ) نقطه $\left(۰/۵ , (\frac{۱}{۲})^{۰/۵}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.



❖ مثال : توابع زیر همگی نمایی هستند :

$$g(x)=(\tfrac{۱}{۲})^x\ ,\ h(x)=(\tfrac{۳}{۲})^x\ ,\ f(x)=(۳/۱۴)^x$$

❖ تذکر : در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x)=ka^x$ $(k\neq ۰ , a>۰ , a\neq ۱)$ **رفتار نمایی** دارد. به‌عنوان مثال، توابع $f(x)=۳\times ۲^x$ یا $g(x)=(\frac{۲}{۵})^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.

❖ مثال : اگر ۱۰ گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t)=۱۰\left(\frac{۴}{۵}\right)^t$ به‌دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً ۴ دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با :

$$q(۴)=۱۰\left(\frac{۴}{۵}\right)^۴=۴/۰۹۶gr$$

نمودار این تابع برای $۰\leq t\leq ۵$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

❖ **مثال** : فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر ۵۷۳۰ سال باشد (یعنی پس از ۵۷۳۰ سال نصف مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به‌دست می‌آید.

الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0)=10\,gr$ و بعد از ۲۰۰۰ سال داریم

$$Q(2000)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}}\approx 7.85\,gr$$

ب) اگر $t=5730$، آن‌گاه $Q(5730)=10\times\frac{1}{2}=5\,gr$ یعنی بعد از ۵۷۳۰ سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

کار در کلاس

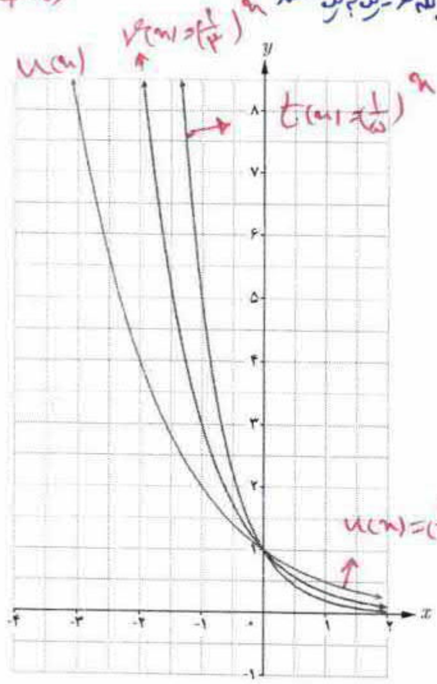
۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=2^x$، $g(x)=3^x$ و $h(x)=5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید $D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,\infty)$

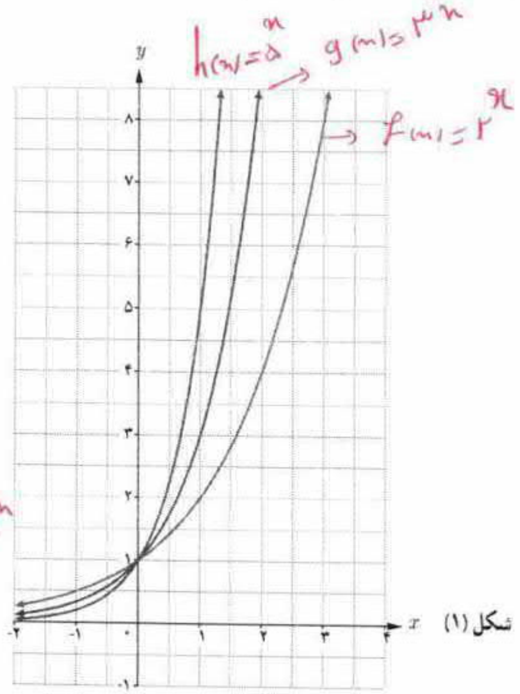
۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟ بله زیرا هر خطی موازی محور xها رسم شود شکل را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟

$D=(-\infty,+\infty)$
$R=(0,+\infty)$
بله هر یک به یک هستند



شکل (۲)



شکل (۱)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$2^4, (\frac{1}{2})^2, 2^2, 2^3, (\frac{1}{2})^4, (\frac{1}{2})^3$

$(\frac{1}{2})^4 < (\frac{1}{2})^3 < (\frac{1}{2})^2 < 2^2 < 2^3 < 2^4$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ـ اگر $a>1$، با افزایش مقدار x، مقادیر f ......افزایش...... می‌یابند.

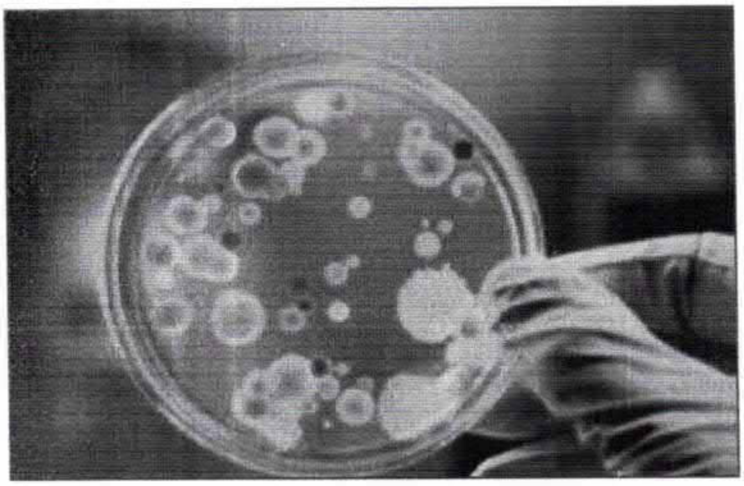
ـ اگر $0<a<1$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f ......کاهش...... می‌یابند.

در سال‌های قبل، توان‌های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی‌های مقدماتی آنها آشنا شده‌ایم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم :

۱) $a^0 = 1$ ۲) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ۳) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ۴) $(a^x)^y = a^{xy}$

۵) $(ab)^x = a^x b^x$ ۶) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ ۷) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

تمرین



۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

$m(t) = 2^{t/100}$

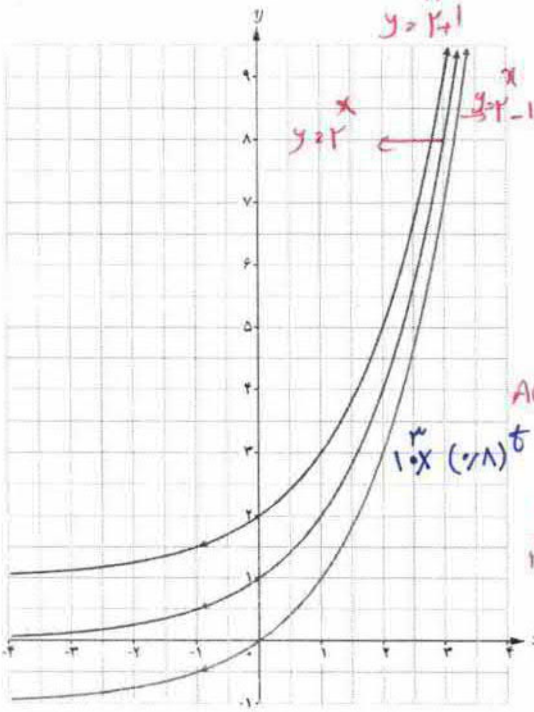
الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

$m(t) = 2^{t/100}$

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

$m(20) = 2^{20/100} = 2^{\frac{2}{10}}$

ابتدا نمودار $y=a^x$ را رسم می‌کنیم سپس ۲ واحد روی محور yها بالا می‌بریم و آن را $y=a^x+۲$ می‌نامیم
و سپس ۲ واحد نسبت به نمودار $y=a^x$ پایین می‌بریم آن را $y=a^x-۲$ می‌نامیم



۲ نمودار توابع $y=۲^x$ ، $y=۲^x+۱$ و $y=۲^x-۱$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^x$ ، $y=a^x+۲$ و $y=a^x-۲$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($a>۱$).

۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطهٔ $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟ $A(۸)=۱۰(۰/۸)^۸$

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟ $۱۰\times(۰/۸)^t$

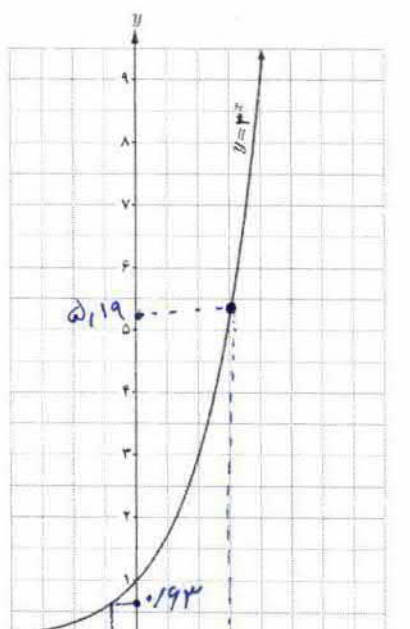
۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید. $۳^{\sqrt{۸}}$ ، $۳^{\sqrt{۷}}$ و $۳^{\sqrt{۶}}$

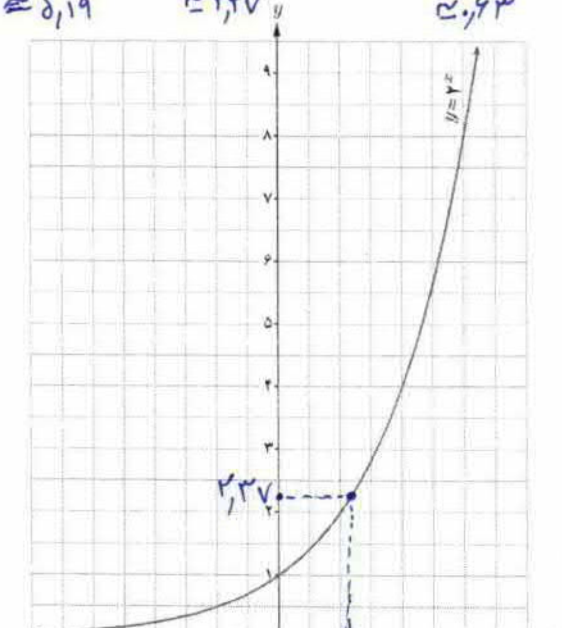
ب) نامعادلهٔ توانی $\frac{۱}{۱۰۲۴} < ۴^{۲x-۱}$ را حل کنید. $۲^{۴x-۲} > ۲^{-۱۰} \Rightarrow x > -۲$

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ ($a>۱$). $x>y>z$

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

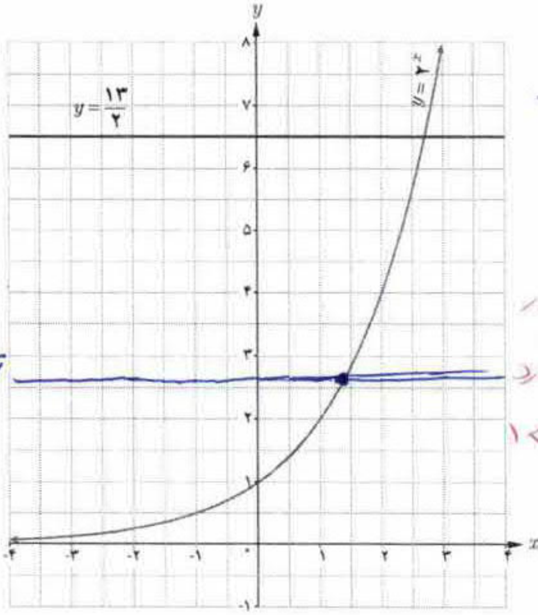
الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$ $\simeq ۰٫۶۳$ ب) $۲^{۱/۲۵}$ $\simeq ۲٫۳۷$ پ) $۳^{\frac{۳}{۲}}$ $\simeq ۵٫۱۹$





۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



الف) $۲<x<۳ \to ۲^۲<y<۲^۳$

ب) $\sqrt{۴}<\sqrt{۷}<\sqrt{۹}$

$۲<\sqrt{۷}<۳$

بین $\sqrt{۷}$ بین ۲و۳ روی محور yها است و طول نقطه برخورد خط و منحنی بین $۱<x<۲$ است.

۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

۱ لایه $۰/۷ \to$ ۷۰٪ درصد

۲ لایه $(۰/۷)^۲ \to ٪۴۹$

n لایه $(۰/۷)^n \to \frac{۷^n}{۱۰^n} = \frac{۷^n}{۱۰۰\times۱۰^{n-۲}} = ٪\frac{۷^n}{۱۰^{n-۲}}$

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

$\frac{۷^n}{۱۰۰\times۱۰^{n-۲}} < \frac{۴}{۱۰۰} \Rightarrow$

$۰/۷^{n-۲}\times۷^۲ < ۴ \to$

$۰/۷^{n-۲} < \frac{۴}{۴۹} \xrightarrow{\text{طرفین } \log_{۰/۷}}$

$\log_{۰/۷} ۰/۷^{n-۲} > \log_{۰/۷}\frac{۴}{۴۹}$

$n-۲ > \log_{۰/۷}\frac{۴}{۴۹} \to$

$n > \log_{۰/۷}\frac{۴}{۴۹} + ۲ \to n > ۲ + ۲\log_{۰/۷}\frac{۲}{۷}$