درس ۲

تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t)=۵۱۲$، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t)=۲^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون‌پذیر است و از این رو $t=m^{-۱}(۵۱۲)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

خواندنی

جان‌نپر (John Napier)

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد، مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

t (زمان)	$m(t)=p$، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

$\Rightarrow$

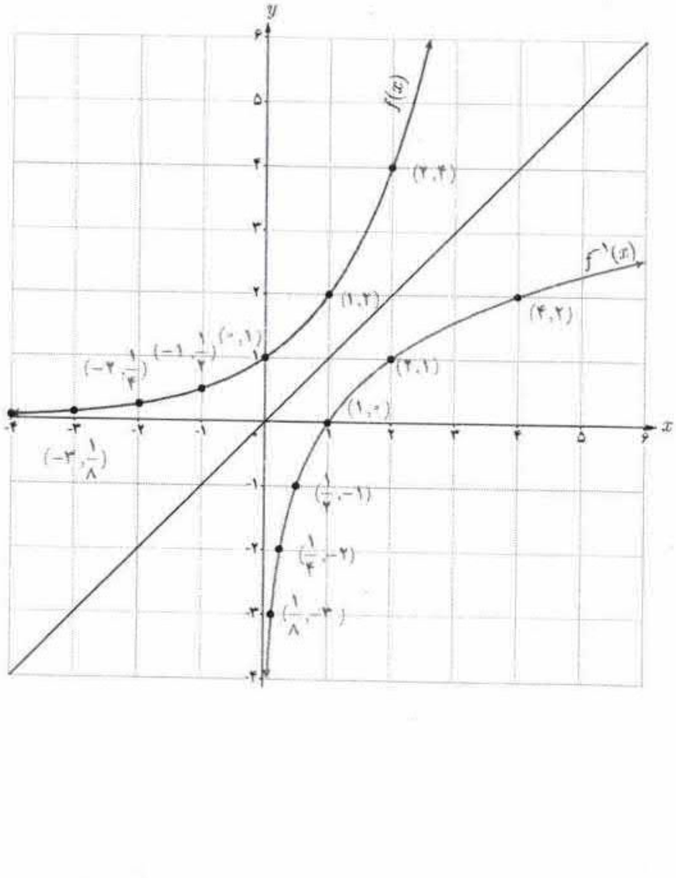
p	$m^{-۱}(p)$، زمان رسیدن به جرم p	t (زمان)
۱		۰
۲		۱
۴		۲
۸		۳
۱۶		۴
۳۲		۵

نمودارهای تابع $y=f(x)=۲^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y=۲^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y=x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه (۲,۴) روی تابع نمایی $y=۲^x$ و نقطه (۴,۲) که قرینه آن نسبت به خط $y=x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

$D_f=(-\infty,+\infty)$ ، $R_f=(۰,+\infty)$

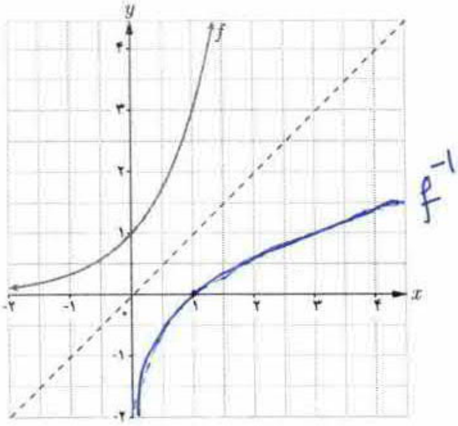
$D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$ ، $R_{f^{-۱}}=(-\infty,+\infty)$

توجه کنید که دامنه f با برد $f^{-۱}$ برابر است و برد f با دامنه $f^{-۱}$.



فعالیت

۱ باتوجه به نمودار تابع $f(x)=۳^x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-۲)=۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=-۲$
$f(-۱)=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳}$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۳})=-۱$
$f(۰)=۳^{۰}=۱$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۱)=۰$
$f(۱)=۳^{۱}=۳$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۳)=۱$
$f(\frac{۳}{۲})=۳^{\frac{۳}{۲}}$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۳^{\frac{۳}{۲}})=\frac{۳}{۲}$
$f(۲)=۳^{۲}=۹$	$\Leftrightarrow$	$f^{-۱}(۹)=۲$

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ ($\frac{۱}{۹}$ و ۲-) روی نمودار f قرار دارد. ✓

ـ نقطه ($\frac{۱}{۳}$ و ۱-) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ✗

ـ نقطهٔ (۰ و ۱) روی نمودار f قرار دارد. ✗

ـ نقطه (۲- و $\frac{۱}{۹}$) روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد. ✓

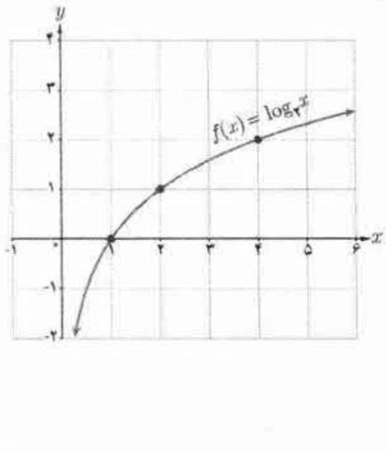
ـ تابع $f^{-۱}$ یک به یک است. ✓

فرض کنید داریم $f(x)=۳^x$ و $y=f^{-۱}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y=\log_۳ x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون $f^{-۱}$ است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y=\log_a x$ نشان داده می‌شود.

✤ مثال : وارون تابع $f(x)=۵^x$ تابع $f^{-۱}(x)=\log_۵ x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ تابع $g^{-۱}(x)=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ است.

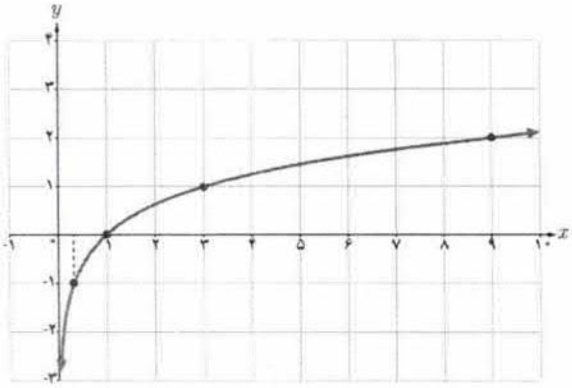


✤ مثال : با توجه به نمودار $f(x)=\log_۲ x$ ، می‌توان دید :

$f(۱)=۰$

$f(۲)=۱$

$f(۴)=۲$



❖ مثال : مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x) = \log_{۳} x$ به‌دست آمده‌اند.

$f(۱) = ۰$

$f(۳) = ۱$

$f(\frac{۱}{۳}) = -۱$

$f(۹) = ۲$

به‌طور کلی

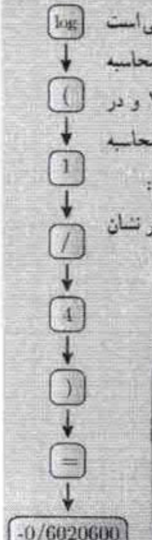
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

به عنوان مثال، $۳ = \log_{۲} ۸$ زیرا $۸=۲^۳$ و یا $\log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$، زیرا $۱۰^۳=۱۰۰۰$.

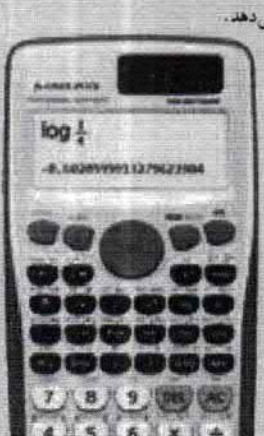
همچنین $\log_{۱۰} \frac{۱}{۱۰۰} = -۲$ ، زیرا $\frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰^۲} = ۱۰^{-۲}$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین‌حساب کافی است از دگمه log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{۱۰} ۱۰$ ابتدا دگمه log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دگمه = را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{۱۰} \frac{۱}{۴}$ به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم:



و ماشین‌حساب مقدار آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهد.



❖ مثال : فرض کنید $f(x) = \log_{۱۰} x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x=۱۰$　　ب) $x=۱۰۰$

پ) $x=-۲$　　ت) $x=۱۰۰۰$

❖ حل :

الف) $f(۱۰) = \log_{۱۰} ۱۰ = ۱$، زیرا $۱۰^۱=۱۰$.

ب) $f(۱۰۰) = \log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲$، زیرا $۱۰^۲=۱۰۰$.

پ) $f(-۱۰)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(۱۰۰۰) = \log_{۱۰} ۱۰۰۰ = ۳$، زیرا $۱۰^۳=۱۰۰۰$.

❖ **مثال** : با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم :

$۳^۴=۸۱$	$۲^{۱۰}=۱۰۲۴$	$۵^۳=۱۲۵$	$۶^۲=۳۶$	$۲^۵=۳۲$
$\log_۳ ۸۱=۴$	$\log_۲ ۱۰۲۴=۱۰$	$\log_۵ ۱۲۵=۳$	$\log_۶ ۳۶=۲$	$\log_۲ ۳۲=۵$

❖ **مثال** : تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_۷ ۱=۰$ ب) $\log_۳ \frac{۱}{۲۷}=-۳$

❖ **حل** :

الف) اگر $\log_۷ ۱=۰$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۷^۰=۱$.

ب) اگر $\log_۳ \frac{۱}{۲۷}=-۳$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $\frac{۱}{۲۷}=۳^{-۳}$.

❖ **مثال** : مقادیر زیر را محاسبه کنید :

الف) $\log_۲ ۸$ ب) $\log_۶ ۶$ پ) $\log_۴ ۱$

❖ **حل** :

الف) اگر $a=\log_۲ ۳۲$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۳۲=۲^a$ و از این رو $a=۵$.

ب) اگر $b=\log_۶ ۶$ ، آن‌گاه $۶=۶^b$ و در نتیجه $b=۱$.

پ) اگر $c=\log_۴ ۱$ ، آن‌گاه $۴^c=۱$ و در نتیجه $c=۰$.

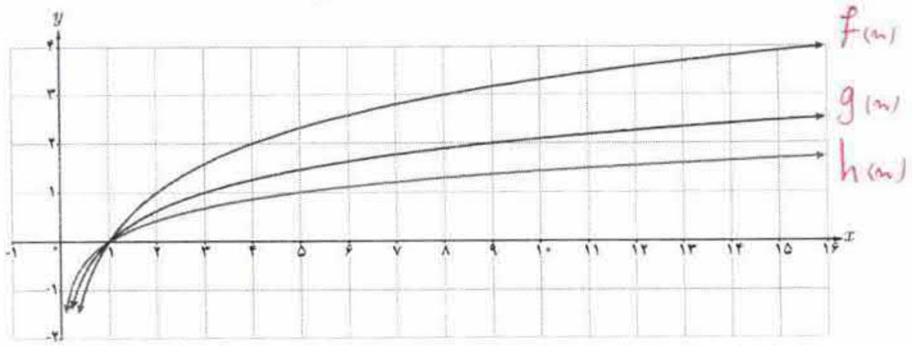
کار در کلاس

۱ الف) نمودار سه تابع $f(x)=\log_۲ x$ ، $g(x)=\log_۳ x$ و $h(x)=\log_۵ x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

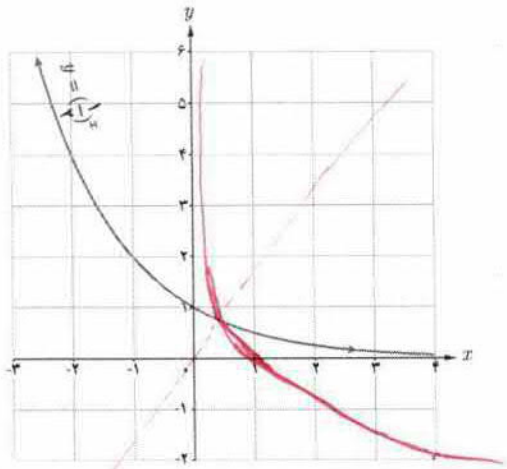
ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

(۵,۱) و (۹,۲) و (۱۶,۴) ∈ f(x)

h(x) متعلق به ، متعلق به g(x) است



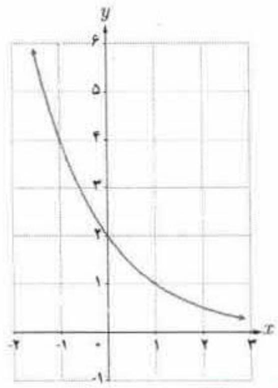
پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید. نسبت به خط $y=x$ قرینه هم‌اند



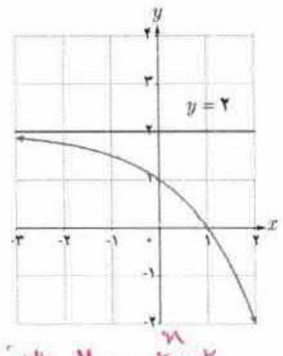
۲ مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

با بررسی نقاط کار تشخیص ضابطه و نمودار ساده‌تر است.

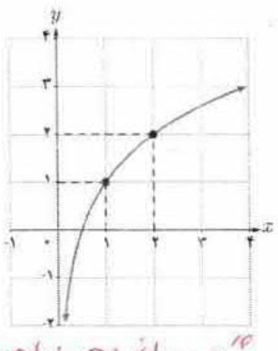
الف) $y=-۲^x+۲$ ب) $y=\log_۲(x+۱)$ پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$



ب) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$



الف) $y=-۲^x+۲$



شکل ب را نمی‌دهد زیرا مجانب قائم آن باید $x=-۱$ باشد نه $x=۰$

مفهوم مجانب قائم جزو اهداف نیست.

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۳ ۸۱$

$\log_۳ ۳^۴ = ۴\log_۳ ۳ = ۴$

ب) $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$

$=۱$

پ) $\log_۲ ۸$

$\log_۲ ۲^۳ = ۳\log_۲ ۲ = ۱$

تمرین

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$$\log_{10} 0/01 \quad , \quad \log_6 \frac{1}{6} \quad , \quad \log_2 \sqrt{2} \quad , \quad \log_7 \sqrt[3]{7^2}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y=27$ نمودار تابع $y=3^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
ب) خط $y=100$ نمودار تابع $y=(0/01)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=2^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

ـ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است. × مبنا را معلوم نکرده است

ـ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود. ✓

ـ تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است. ✓

ـ تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند. ×

ـ اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d,b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد. ✓

ـ اگر $a>b>0$ آنگاه $\log_{10} a < \log_{10} b$. × در مبنای بیشتر از ۱ تابع لگاریتم صعودی است

$a>b \to \log_{10} a > \log_{10} b$

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = 1+\log_2 x$ ب) $y=-3^x-2$ پ) $y = 4(\frac{1}{3})^x$