درس ۳

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به‌کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های سادهٔ لگاریتم به‌صورت زیر هستند :

مثال :

الف) $\log_a ۱ = ۰$، زیرا $a^۰ = ۱$

ب) $\log_a a = ۱$، زیرا $a^۱ = a$

مثال : نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a، b و c، که $c \neq ۱$، همواره داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

حل : فرض کنیم $x = \log_c a$ و $y = \log_c b$. پس طبق تعریف، $a = c^x$ و $b = c^y$. از این رو $ab = c^x . c^y = c^{x+y}$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab = x + y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

مثال : با توجه به مثال قبل، $\log_a b^۲ = \log_a(b \times b) = \log_a b + \log_a b = ۲\log_a b$. به‌طور مشابه $\log_a b^۳ = \log_a(b^۲ \times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = ۳\log_a b$ و به‌طور کلی اگر $a, b > ۰$ ، $a \neq ۱$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n = n$.

قرار داد : همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{۱۰} a$. همچنین، لگاریتم در پایه ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

مثال : فرض کنیم $a = \log ۲$. نشان دهید $\log ۵ = ۱ - a$.

حل : می‌دانیم $\log_{۱۰} ۱۰ = ۱$، پس طبق مثال بالا، $\log ۲ + \log ۵ = \log ۱۰ = ۱$ و در نتیجه $\log ۵ = ۱ - \log ۲ = ۱ - a$.

سوال ۱

$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a\times\frac{1}{b} = \log_c a + \log_c \frac{1}{b} = \log_c a + \log_c b^{-1} = \log_c a - \log_c b$

سوال ۲

الف) $\log 0/75 = \log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2 = \log 3 - 2\log 2 = b - 2a$

ب) $3\log (2^2)^{\frac{1}{3}} - \log \frac{1000}{4} = 3(\frac{1}{3})\log 2^2 - \log 1000 + \log 4 = 2\log 2 - 3 + 2\log 2 = 4a - 3$

پ) $\log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 1000 = \log \frac{10}{2} - \log 10^3 = \log 10 - \log 2 - 3 = 1 - a - 3 = -2 - a$

کار در کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c>0$ و $c\neq 1$، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a=\log 2$ و $b=\log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75$ ب) $3\log \sqrt[3]{4} - \log 250$ پ) $\log 0/005$

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادلهٔ شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به‌دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می‌گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند. تساوی‌های زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی هستند :

$$\log (x+1) = 3 \quad , \quad \log_2 x = \log_2 r \quad , \quad \log_2 x + \log_2(x-1)= \log_2 12$$

در حالت کلی داریم :

اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و بالعکس، اگر $x,y>0$ و $x=y$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

❖ مثال : معادلهٔ لگاریتمی $\log_5(x^2-2) = \log_5 x$ را حل کنید.

❖ حل : به سادگی می‌توان دید $x=2-x^2$ و از این‌رو $x^2-x-2=0$. از طرفی $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ و در نتیجه ریشه‌های معادله اخیر برابر است با ۲ و ۱-. **قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی آزمایش کردن جواب‌هاست**. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول $x=2$ است (چرا؟).

❖ مثال : معادله لگاریتمی $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

❖ حل : می‌دانیم $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5\left(\frac{x^3}{4}\right)$ ، بنابراین $\log_5\left(\frac{x^3}{4}\right) = \log_5 16$ و در نتیجه $\frac{x^3}{4} = 16$. از این رو $x^3=16\times 4=64$. بنابراین $x=4$. با جای‌گذاری $x=4$ در معادله بالا می‌توان دید این جواب قابل قبول است.

الف) $\log_5^{2x-1} = \log_5^{x}$ ابتدا دامنه را تعریف می‌کنیم $2x-1>0$ ، $x>\frac{1}{2}$ و $x>0$ $\xrightarrow[\text{آ}]{\text{اشتراک}}$ $x>\frac{1}{2}$

حل $2x-1=x \rightarrow x=1$ در دامنه برقرار است

ب) $\log_3 (x-1)(\frac{x}{2}+1) = 2 \rightarrow (x-1)(\frac{x}{2}+1) = 9 \xrightarrow{\text{در ۲ ضرب}} (x-1)(x+2)=18 \rightarrow x^2+x-2-18=0 \rightarrow$

$x^2+x-20=0 \rightarrow (x+5)(x-4)=0$ $\begin{cases} x=-5 & \text{غ ق ق} \\ x=4 & \text{ق ق} \end{cases}$

پ) $x(x+3)=10 \rightarrow x^2+3x-10=0 \rightarrow (x+5)(x-2)=0$ $\begin{cases} x=-5 \;\times \\ x=2 \;\checkmark \end{cases}$

فعالیت

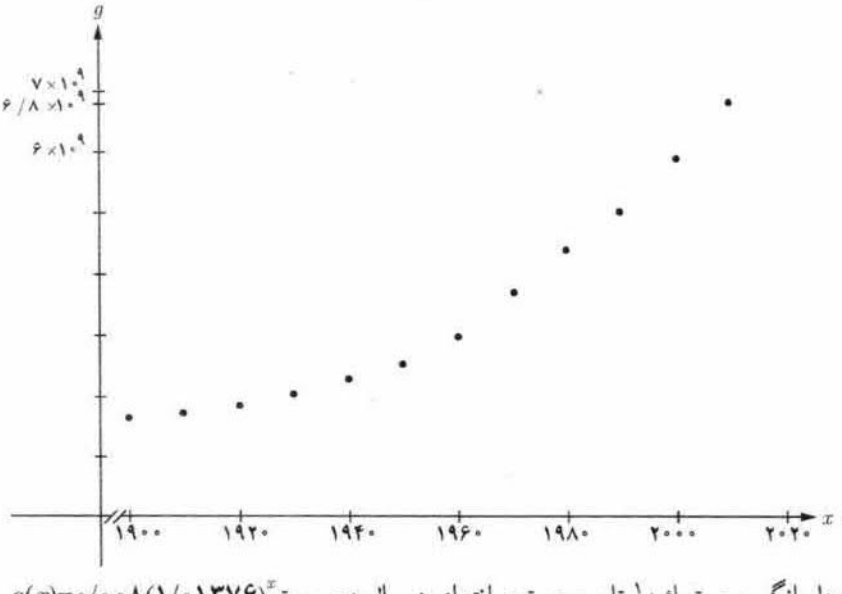
معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

الف) $\log_5(2x-1) = \log_5 x$ ب) $\log_3(x-1)+\log_3\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$ پ) $\log x+\log(x+3)=1$

کاربردهای لگاریتم

مثال : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست‌ویکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰



الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است :

ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور gها بیانگر جمعیت باشد[1]، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x)=۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^x$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$g(۲۰۱۶)=۰/۰۰۸\,(۱/۰۱۳۷۶)^{۲۰۱۶} \simeq ۷,۳۸۵,۰۷۴,۵۱۲$.

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x)= ۸\times ۱۰^{-۳}\,(۱/۰۱۳۷۶)^x = ۸\times ۱۰^{۹}$$

$$\Rightarrow (۱/۰۱۳۷۶)^x=۱۰^{۱۲} \Rightarrow x\log ۱/۰۱۳۷۶ = \log ۱۰^{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱۲}{\log ۱/۰۱۳۷۶} \simeq ۲۰۲۱$$

$(\log ۱/۰۱۳۷۶ = ۰/۰۰۵۹۳۵)$

۱ــ دقت کنید که نقطه ابتدایی دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

مثال : ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

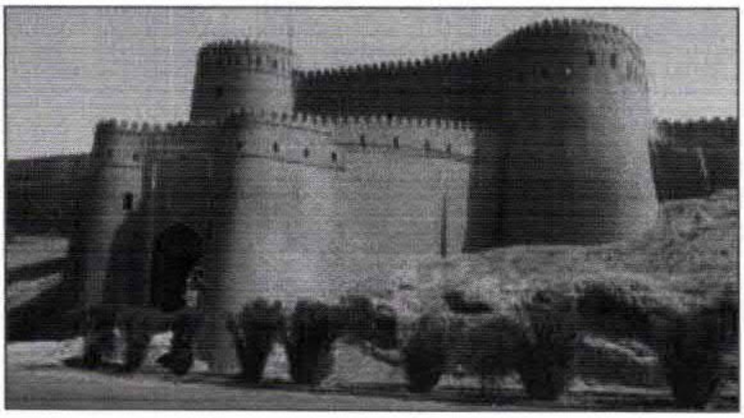
$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M.$$

از این رابطه می‌توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشتری برابر است با :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\,(۶/۶) = ۲۱/۷ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg.$$

خواندنی

جالب است بدانید که :
در زلزله ۶/۶ ریشتری بم (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که بیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت از بین رفت. با توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ۸ ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد شده در زلزله بم معادل انفجار $\frac{۶/۶\times ۱۰^{۹}}{۸} = ۸۲۵\times ۱۰^{۶}$ (۸۲۵ میلیون) تن TNT بوده است.



مثال : نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی‌گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴\times ۲^{\frac{-t}{۲۵}}$ به‌دست می‌آید. بنابراین، به‌عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰سال برابر است با :

$$m(۴۰) = ۲۴\left(۲^{-\frac{۴۰}{۲۵}}\right) \simeq ۷/۹۰ \text{ میلی‌گرم}$$

$m(t)$(جرم برحسب میلی‌گرم)	t (زمان برحسب سال)
۲۴	۰
$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$	۲۵
$\frac{۱}{۲^{۲}}\times ۲۴ = ۶$	۵۰
$\frac{۱}{۲^{۳}}\times ۲۴ = ۳$	۷۵
$\frac{۱}{۲^{۴}}\times ۲۴ = ۱/۵$	۱۰۰

سوال ۱

الف) $2\log_4^m - \log_4^m - 3 = 0 \to \log_4^m = 3 \to m = 4^3 = 64$

ب) $\log_2 \frac{12b-21}{b^2-3} = 2 \to \frac{12b-21}{b^2-3} = 4 \to 12b-21 = 4b^2-12 \to 4b^2-12b+9=0 \to (2b-3)^2=0$
$\Rightarrow b = \frac{3}{2}$

پ) $x^2-1=10 \to x^2=11 \to x=\pm\sqrt{11}$ ✓

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_4 m^2 - \log_4 m - 3 = 0$

ب) $\log_2(12b-21) - \log_2(b^2-3) = 2$

پ) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2-1) = -1$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = 2^t$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

$y = m(t) = 2^t \to \log_2^y = t$

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$m(t) = 2^t = 5000 \to$

$\log 2 = 0/301$

$\log_2^{5000} = t \Rightarrow \log_2^{5^4\times 2^3} = 4\log_2^5 + 3\log_2^2 = 4\log_2^{\frac{10}{2}} + 3 = 4(\log_2^{10} - \log_2^2) + 3 = 4\times\frac{1}{\log_{10}^2} - 1\times 4 + 3 = \frac{4}{0/301} - 1$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq 1, a, b > 0)$ ✗

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq 1, a, b, c, d > 0)$ ✓

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$ ✗

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است. ✗

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

$m(t) = 1 \times 2^{-\frac{t}{4}} = 2^{-\frac{t}{4}}$

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

ب) $2^{-\frac{t}{4}} = 0/01 \to \log 2^{-\frac{t}{4}} = \log 10^{-2} \Rightarrow -\frac{t}{4}\log 2 = -2 \to$
$-\frac{t}{4} = \frac{-2}{\log 2} \to t = \frac{8}{\log 2} = \frac{8}{0/301} \sim 26$ روز

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log 3 = 0/4771 , \log 2 = 0/301)$.

الف) $\log(18\times 375)$

تجزیه کنید

$\log 2 \times 3^2 \times 3 \times 5^3 = \log 2 + 3\log 3 + 3\log 5$

$0/301 + 3(0/4771) + 3(1 - 0/301)$

$\log 10 - \log 2$

ب) $\log\sqrt{0/75}$

$\log(\frac{3}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\log 3 - \log 2^2) = \frac{1}{2}(0/4771 - 2(0/301))$

پ) $\log_2 \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[4]{2}}$

$\log_2^{8^{\frac{1}{2}}} - \log_2^{2^{\frac{1}{4}}} = \log_2^{2^{\frac{3}{2}}} - \log_2^{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{2}\times 1 - \frac{1}{4}\times 1 = \frac{5}{4}$

۶ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

■ $\log_b a \times \log_a b = 1$ ✓

■ $\log 5 = \log 3 + \log 2$ ✗

۷ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

$m(t) = 128 \times 2^{-\frac{t}{30}} \qquad t = 300$

$m(300) = 128 \times 2^{-\frac{300}{30}} = 128 \times 2^{-10} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ جرم باقی مانده بعد از ۳۰۰ سال