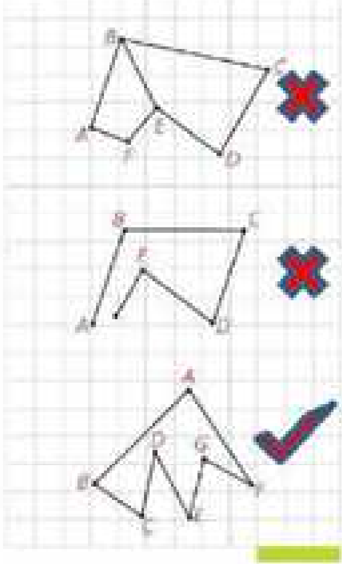
هم کلاسی

Hamkelasi.ir

فصل ۳ : چند ضلعی ها

درس اول : چهار ضلعی ها

صفحه ۵۴



تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq ۳$) پاره‌خط متوالی که:

۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

هر یک از این پاره‌خط‌ها یک ضلعِ چند ضلعی است.

هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک‌اند، دو ضلع مجاور و نقطهٔ مشترک آن دو را رأس می‌نامند. هر دو زاویهٔ چندضلعی را که هر دو در یک ضلعِ چندضلعی مشترک‌اند، دو زاویهٔ مجاور به آن ضلع در چندضلعی می‌نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل‌های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع‌های چند ضلعی n تا باشند، آن را n ضلعی می‌نامند.

کدام یک از شکل‌های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع‌ها و رأس‌های آن چند تاست؟ ۷ ضلع و ۷ رأس

برخی ضلع‌های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.

مجاور : AB,BC – BC,CD – CD,DE –... غیر مجاور : AB,CD – AB,DE – BC,EF –...

صفحه ۵۵

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟ دو قطر

n ضلعی $A_1A_2...A_n$ را درنظر می‌گیریم. از رأس A_1، n−۳ قطر می‌توان رسم کرد.

با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرها در n ضلعی $n(n-۳)$ است؟ خیر

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟ $۴ = (۳ - ۴)۴$

آیا جواب به‌دست آمده درست است؟ خیر

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبهٔ قطرها می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

زیرا هر راس دو بار شمرده شده است.

در هر n ضلعی تعداد قطرها $\frac{n(n-۳)}{...}$ است. $\frac{n(n-۳)}{۲}$

کاردرکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبهٔ تعداد قطرهای nضلعی به‌کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر ...$n-1$... پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با ...$\frac{n(n-1)}{2}$... پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرها و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

با هم برابرند ، به عبارت دیگر $\frac{n(n-1)}{2}=n+\frac{n(n-3)}{2}$

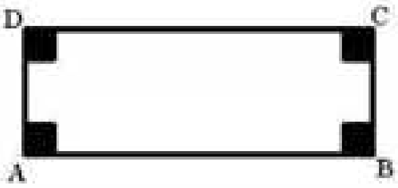
کار در کلاس صفحه ۵۶

کاردرکلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید :

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

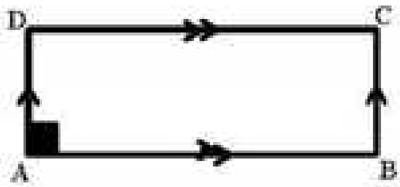
ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟



الف: فرض : $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

حکم: $AB \parallel CD \quad , \quad AD \parallel BC$

برهان: $\left.\begin{matrix} AB\perp AD \\ CD \perp AD\end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel CD \quad , \quad \left.\begin{matrix} AD\perp AB \\ BC \perp AB\end{matrix}\right\} \Rightarrow AD \parallel BC$



ب : فرض : $\angle A=90^\circ \ , AD \parallel BC \ , AB \parallel CD$

حکم: $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90^\circ$

برهان :

$\boxed{1}$ $AD \parallel BC \Rightarrow \angle A=\angle B=90^\circ$ ، مورب AB

$\boxed{2}$ $AB \parallel CD \Rightarrow \angle A=\angle D=90^\circ$ ، مورب AD

$\boxed{1},\boxed{2} \Rightarrow \angle A=\angle B=\angle D=90^\circ \Rightarrow \angle C=90^\circ$

ب) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

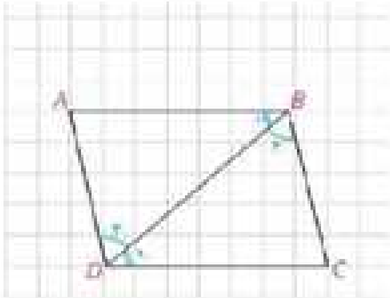
در لوزی ABCD قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت ...ض ز ض... هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویهٔ ..$\angle A_2$...... و ..$\angle C_2$...... هم‌اندازه‌اند. در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل BC و AD نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.

پاسخ (ت) : بنا به تعریف مربع ، هر چهار ضلع مربع با هم برابرند پس هر مربع نوعی لوزی است. از طرف دیگر هر لوزی نیز نوعی متوازی الاضلاع است.

فعالیت ۱ صفحه ۵۶



فعالیت ۱

متوازی‌الاضلاع ABCD را درنظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت .... هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، .... = AD و .... = AB.

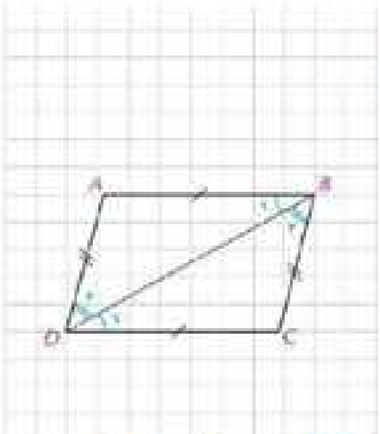
پاسخ :

$$\left.\begin{array}{r} \text{مورب } BD,\ AD \parallel BC \Rightarrow \angle B_1 = \angle D_2 \\ \text{مورب } BD,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_2 = \angle D_1 \\ BD = BD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta CDB \Rightarrow \left|\begin{array}{l} AD = BC \\ AB = CD \end{array}\right.$$

عکس قضیهٔ ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع‌های مقابل دوبه‌دو هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می‌کنیم. به حالت ......ز ض ز...... $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. از هم‌نهشتی این دو مثلث نتیجه می‌گیریم، اندازهٔ $\angle B_1$ برابر اندازهٔ ......$\angle D_2$...... است.

بنابراین ضلع AB موازی ضلع .....CD..... است. از چه قضیه‌ای آن را نتیجه گرفته‌اید؟ قضیه ی خطوط موازی و مورب



$\angle D_2 = \angle B_2 \Rightarrow AD \parallel BC$

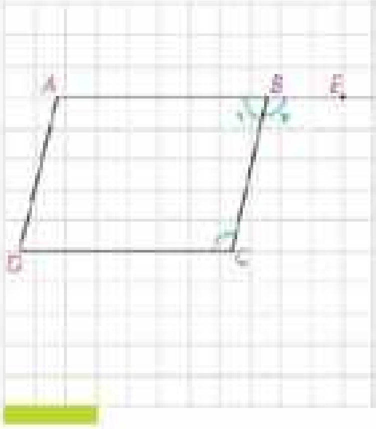
موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع‌های AD و BC را چگونه نتیجه می‌گیرید؟

بنابراین چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مکمل اند

زیرا AB || CD و BC مورب است.

فعالیت ۲



چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

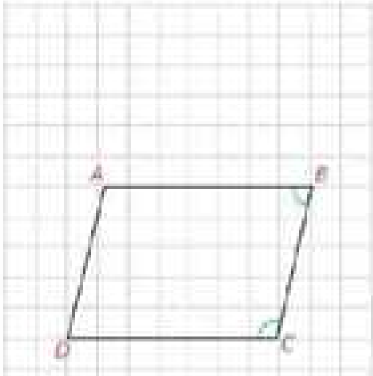
با توجه به شکل، $\angle B_2 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle B_1$ و $\angle C$ ......مکمل...... می‌باشند.

بنابراین قضیهٔ زیر ثابت شده است:

قضیهٔ ۲: در متوازی‌الاضلاع هر دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند.

صفحه ۵۸

عکس قضیهٔ ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویهٔ مجاور آن مکمل باشند، متوازی‌الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD، دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل‌اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع ......CD...... است.

به همین ترتیب دو زاویهٔ $\angle B$ و $\angle A$ نیز مکمل‌اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع ......BC...... است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD ......متوازی الاضلاع...... است.

قضیهٔ ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه‌اند.

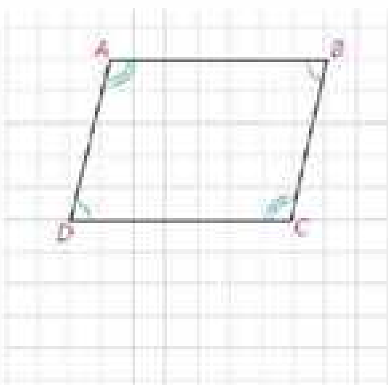
با توجه به قضیهٔ قبل آن را ثابت کنید.

می‌توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle B + \angle C = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle B + \angle C \Rightarrow \angle A = \angle C$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 180^\circ \\ \angle A + \angle D = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A + \angle B = \angle A + \angle D \Rightarrow \angle B = \angle D$$

عکس قضیهٔ ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

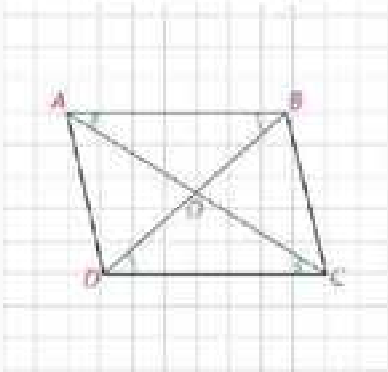


فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویهٔ مقابل هم‌اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle C$ و $\angle A$ هم‌اندازه‌اند. می‌دانیم مجموع اندازه‌های زاویه‌های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می‌کنید هر دو زاویهٔ مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل‌اند؟

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=۳۶۰^\circ \xrightarrow[\angle B=\angle D]{\angle A=\angle C} ۲\angle A+۲\angle B=۳۶۰^\circ \xrightarrow{\div ۲} \angle A+\angle B=۱۸۰^\circ \quad \boxed{۱}$$

$$\left.\begin{matrix}\angle A=\angle C\\ \angle B+\angle D\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\boxed{۱}} \angle A+\angle B=\angle B+\angle C=\angle C+\angle D=\angle A+\angle D=۱۸۰^\circ \Rightarrow AB \parallel CD\,,AD \parallel BC$$

فعالیت ۳



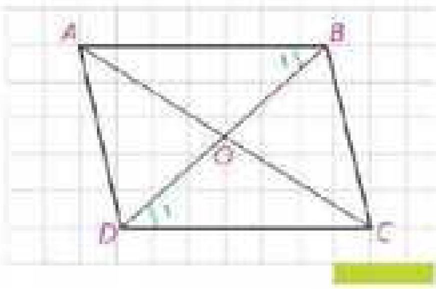
در متوازی‌الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تلاقی آن دو را O می‌نامیم. $\Delta AOB \cong \Delta COD$، چرا؟

بنابراین، $OB = OD$ و $OA = OC$. در نتیجه؛

قضیهٔ ۴: در هر متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند

$$\left.\begin{matrix}\text{مورب} \quad AC\ ,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle A_۱=\angle C_۱\\ \text{(بنا به قضیه ۱)} \quad AB=CD\\ \text{مورب} \quad BD\ ,\ AB \parallel CD \Rightarrow \angle B_۱=\angle D_۱\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta OAB=\Delta OCD$$

فعالیت ۴



فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می‌دهید این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است؟

$$\left.\begin{matrix}OA=OC\\ \text{متقابل به رأس} \quad \hat{O}_۱=\hat{O}_۲\\ OB=OC\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OAB \cong \Delta OCD \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{D}_۱ \Rightarrow AB \parallel CD$$

به روش مشابه ثابت می شود : $\Delta OAD \cong \Delta OBC \Rightarrow \hat{B}_۲=\hat{D}_۲ \Rightarrow AD \parallel BC$

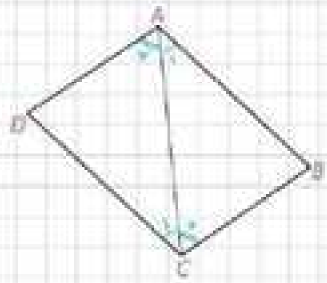
فعالیت ۵

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازهٔ $\angle A_1$ با اندازهٔ ...$\angle C_2$... برابر است.

بنابراین، بنابر حالت هم‌نهشتی ..ض ز ض..، $\Delta ABC \cong \Delta CDA$.

در نتیجه اندازهٔ $\angle A_2$ برابر اندازهٔ زاویهٔ ...$\angle C_1$... است که از آن نتیجه می‌گیرد ضلع AD موازی ضلع ...BC... است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. یعنی!



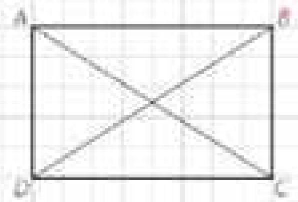
هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟ خیر

زاویه قائمه

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت AC=BD؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.



بنابراین در هر مستطیل قطرها مساوی‌اند.

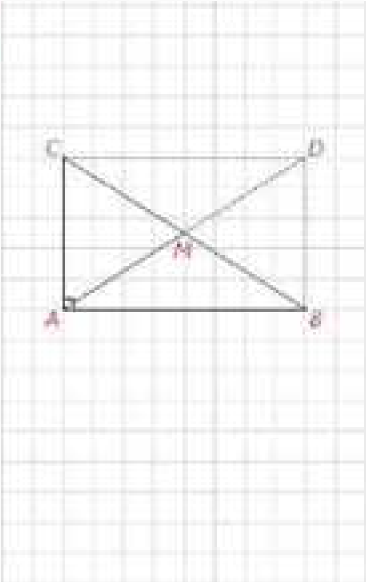
$$\left.\begin{array}{c} AD = BC \\ \angle C = \angle D = 90^\circ \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow AC = BD$$

اگر دو قطر یک چهارضلعی هم‌اندازه باشند، آیا می‌توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟ خیر (توضیح : در ذوزنقه متساوی الساقین نیز قطرها مساوی اند)

اگر این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ AC = BD \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \Delta ADC \cong \Delta BCD \Rightarrow \angle C = \angle D$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل یکدیگرند . پس : $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = ۹۰^\circ$



فعالیت ۶

ویژگی مهمی در مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانهٔ وارد بر وتر است درنظر می‌گیریم.

روی نیم‌خط AM نقطه D را چنان در نظر می‌گیریم که AM = MD .

چرا چهارضلعی ABDC متوازی‌الاضلاع است؟ زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند

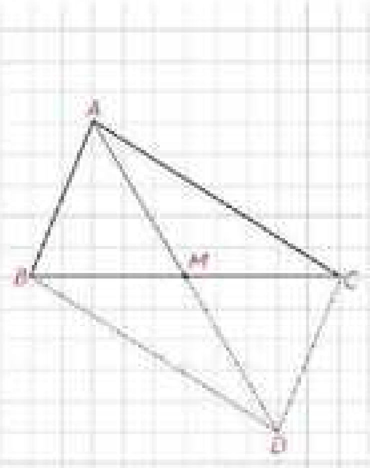
چرا این چهارضلعی مستطیل است؟
زیرا زاویه A قائمه است و هر متوازی الاضلاعی که زاویه قائمه دارد ، مستطیل است

در مورد قطرها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
قطرهای هر مستطیل باهم مساوی اند.

اندازهٔ AM چه رابطه‌ای با اندازهٔ BC دارد؟ آن را بیان کنید. $AM = \frac{BC}{۲}$

در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازهٔ میانهٔ وارد بر وتر ......نصف...... اندازهٔ وتر است.

اگر در مثلثی اندازهٔ میانهٔ وارد بر یک ضلع، نصف اندازهٔ آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

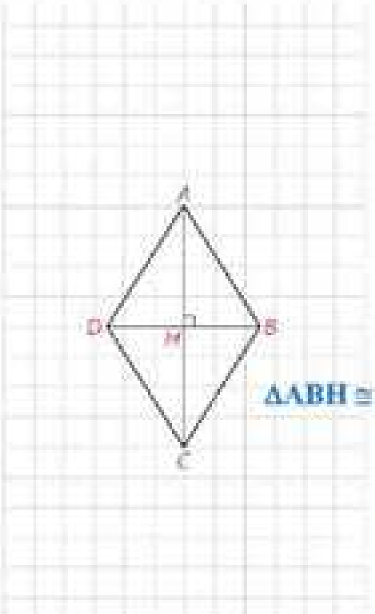


در مثلث ABC، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم‌خط AM نقطهٔ D را چنان در نظر می‌گیریم که $MD = AM$.

آیا می‌توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرهای AD و BC منصف یکدیگرند؟ بله
چگونه نتیجه می‌گیرید $\angle A$ قائمه است؟
بنا به قضایای قبل هر چهار ضلعی که قطرهایش یکدیگر را نصف کنند مستطیل است لذا تمام زاویه های داخلی آن قائمه اند.

ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟ بله ، هر چهار ضلع لوزی با هم برابرند.

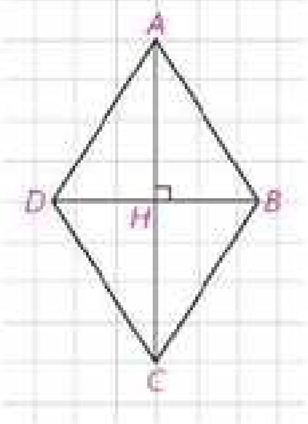


قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرها منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟ متساوی الساقین
نقطهٔ تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD ، AH چه پاره‌خطی است؟ میانه
چرا پاره‌خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟ زیرا $\triangle ABH \cong \triangle ADH$
بنابراین؛

در هر لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند و قطرها روی نیمساز های زاویه‌ها می‌باشند.

کار در کلاس صفحه ۶۱

۱ــ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.

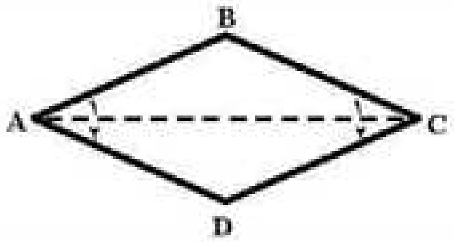


فرض: $AB \parallel CD, AD \parallel BC, AC \perp BD$

حکم: $AB = BC = CD = DA$

برهان : قطرهای هر متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می کنند و از طرف دیگر $AC \perp BD$ پس در ΔABD ، AH عمود منصف ضلع BD است . لذا مثلث متساوی الساقین می باشد . به طریق مشابه در ΔABC نیز BH عمود منصف ضلع AC می باشد بنا براین می توان نتیجه گرفت که $AB = BC = CD = DA$ پس چهار ضلعی $ABCD$ لوزی است.

۲ـ نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویهٔ آن باشد، لوزی است.



فرض : $AB \parallel CD, AD \parallel BC, \angle A_1 = \angle A_2$

حکم : $AB = BC = CD = DA$

برهان : در دو مثلث ABC, ACD داریم :

$$\left.\begin{matrix} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B = \angle D \end{matrix}\right\} \longrightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \quad \boxed{1}$$

$$\left.\begin{matrix} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \boxed{1} \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2 \\ AC = AC \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \left| \begin{matrix} AB = AD \\ BC = CD \end{matrix}\right.$$

از طرف دیگر در هر متوازی الاضلاع ، اضلاع موازی مساوی اند پس : $AB = BC = CD = DA$

اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.

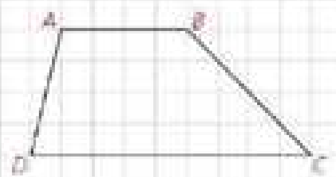
۱-مستطیلی که دو ضلع مجاورش مساوی باشند مربع است. ۲- مستطیلی قطرهایش بر هم عمودند مربع است . ۳- مستطیلی قطرهایش نیمساز زاویه های داخلی باشند مربع است.

۱- هر لوزی که یکی از زاویه های آن قائمه باشد مربع است. ۲- هر لوزی که قطرهای مساوی دارد مربع است.

در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟
اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز باهم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه شکلی ایجاد می‌شود؟

جک به طور کامل بسته نمی شود . زیرا مجموع طول های دو ضلع بالایی با مجموع طول های دو ضلع پایینی مساوی نیست.

صفحه ۶۲



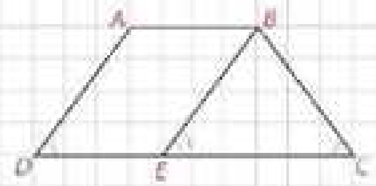
هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ ......مکمل..... هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ ......مکمل..... هستند.

اگر در یک ذوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعدهٔ دیگر نیز عمود است؛ چرا؟ زیرا دو زاویه مجاور به یک ساق ، مکمل اند.

در این صورت ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.



فعالیت ۷

ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD را که در آن AD = BC است، درنظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ DC را در E قطع کند. در این صورت چهارضلعی ABED ......متوازی الاضلاع...... است.

چرا دو زاویهٔ $\angle D$ و $\angle E_1$ هم اندازه‌اند؟

$DC, AD \parallel BE \Rightarrow \angle D = \angle E_1$ مورب

چرا؟ BC = BE

زیرا اگر دو زاویه از مثلثی با هم برابر باشند ، اضلاع روبرو به آنها نیز با هم برابرند

بنابراین اندازهٔ $\angle E_1$ برابر اندازهٔ ......$\angle C$...... است.

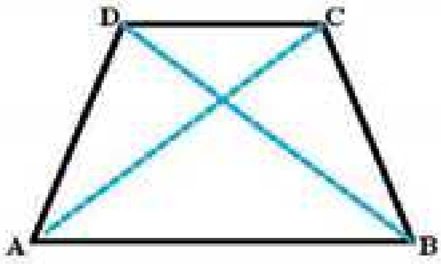
اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین :

در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

به کمک ویژگی ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

صفحه ۶۲

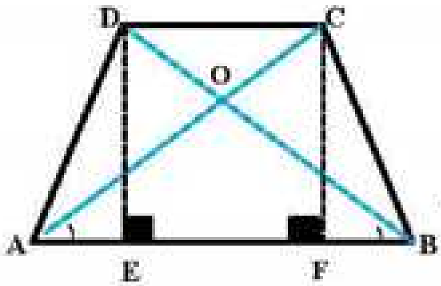
در هر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطرها اندازه‌های مساوی دارند و بر عکس.



فرض: $AB \parallel CD \; , \; AD = BC$ حکم: $AC = BD$

برهان: در دو مثلث ABD , ABC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \angle A = \angle B \\ AB = AB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow AC = BD$$



برعکس

فرض: $AB \parallel CD \; , \; AC = BD$ حکم: $AD = BC$

برهان: عمودهای DE, CF را بر AB وارد می کنیم جهار ضلعی $CDEF$ مستطیل است. پس $DE = CF$

$$\left.\begin{array}{l} \angle E = \angle F = 90^\circ \\ AC = BD \\ CF = DE \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر ویک ضلع}} \Delta ACF \cong \Delta BDE \Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1 \Rightarrow OA = OB$$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB \\ AC = BD \end{array}\right\} \Rightarrow OC = OD$$

پس دو مثلث OAD, OBC بنا به حالت (ض ز ض) همنهشت اند . در نتیجه $AD = BC$

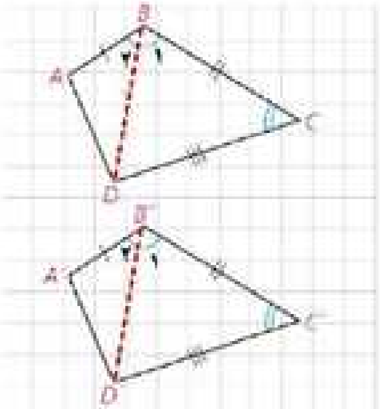
تمرین صفحه ۶۳

تمرین

۱ــ در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟

پاسخ :

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n \Rightarrow \cancel{n}(n-۳)=۲\cancel{n} \Rightarrow n-۳=۲ \Rightarrow n=۵$$



الف ۲ـ در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

ب اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

پاسخ قسمت الف :

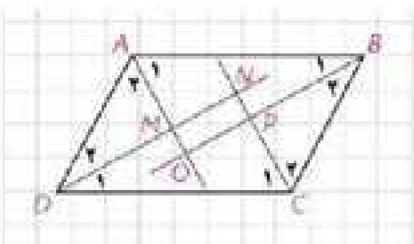
قطرهای BD , $B'D'$ را در دو چهارضلعی رسم می کنیم بدیهی است که دو مثلث BCD , $B'C'D'$ همنهشت اند

پس : $\angle B_۱ = \angle B'_۱ \xrightarrow{\angle B = \angle B'} \angle B_۲ = \angle B'_۲$

در دو مثلث ABD , $A'B'D'$:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ \angle B_۲ = \angle B'_۲ \\ BD = B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle A'B'D' \xrightarrow{\triangle BCD \cong \triangle B'C'D'} \square ABCD \cong \square A'B'C'D'$$

پاسخ قسمت ب : دراین حالت کافی است قطرهای AC , $A'C'$ را رسم نموده و مانند قسمت الف عمل کنیم.



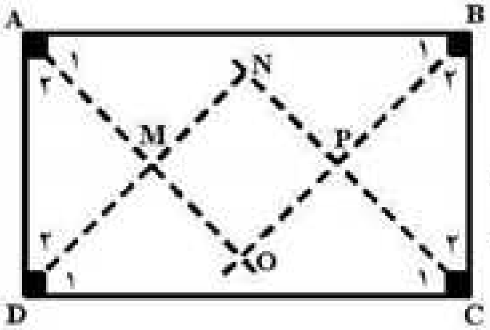
۳ـ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی MNPQ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر ABCD مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی MNPQ مربع است.

$$\square ABCD ; \angle A + \angle B = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \frac{\angle A}{۲} + \frac{\angle B}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow \triangle OAB ; \angle A_۱ + \angle B_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow \angle O = ۹۰^\circ \quad \boxed{۱}$$

به روش مشابه ثابت می شود :

$\Delta OAB; \angle C_۱ + \angle D_۱ = ۹۰° \Rightarrow \angle N = ۹۰°$ $\boxed{۲}$, $\Delta PBC; \angle B_۲ + \angle C_۲ = ۹۰° \Rightarrow \angle P = ۹۰°$ $\boxed{۳}$

$\boxed{۱}, \boxed{۲}, \boxed{۳} \Rightarrow \angle M = \angle N = \angle P = \angle O = ۹۰° \Rightarrow$ چهارضلعی MNPO مستطیل است



اگر چهارضلعی ABCD مستطیل باشد:

$\Delta CDN ; \angle C_۱ = \angle D_۱ = ۴۵° \Rightarrow CN = DN$ $\boxed{۱}$

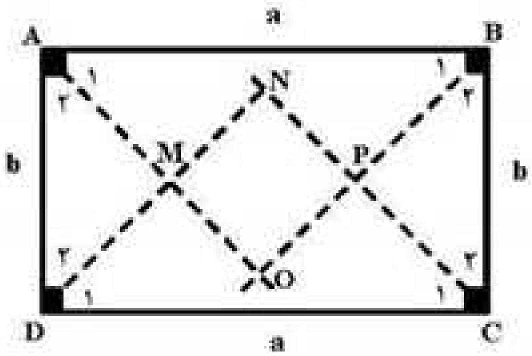
$$\left.\begin{array}{r} \angle A_۲ = \angle B_۲ = ۴۵° \\ AD = BC \\ \angle D_۲ = \angle C_۲ = ۴۵° \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta BCP \cong \Delta ADM \Rightarrow PC = DM \quad \boxed{۲}$$

$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - PC = DN - DM \Rightarrow PN = MN$

پس طول و عرض مستطیل MNPO با هم برابرند. به عبارت دیگر □MNPO مربع است.

صفحه ۶۴

۴ـ در مسئلهٔ قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازهٔ ضلع مربع را برحسب a و b محاسبه کنید.



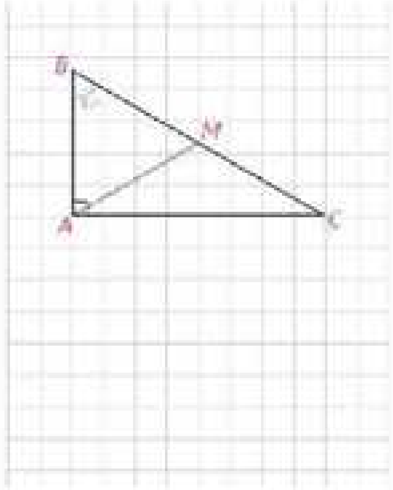
$\Delta DCN; \angle N = ۹۰° \Rightarrow CN^۲ + BN^۲ = CD^۲$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CN^۲ = a^۲ \Rightarrow CN = \frac{a}{\sqrt{۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۱}$

$\Delta BCP; \angle P = ۹۰° \Rightarrow PC^۲ + PB^۲ = BC^۲$

$\xrightarrow{CN = DN} ۲CP^۲ = b^۲ \Rightarrow CP = \frac{b}{\sqrt{۲}} = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$ $\boxed{۲}$

$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow CN - CP = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} - \frac{b\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow PN = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(a - b)$



۵ـ مثلث قائم‌الزاویهٔ $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازهٔ $\angle C$ برابر ۳۰° است، در نظر می‌گیریم. میانهٔ وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMC و AMB چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB=\frac{BC}{۲}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویه ۳۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن نصف اندازهٔ وتر است.

سپس با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید، $AC=\frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$.

یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه ۶۰° باشد، اندازهٔ ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{\ }}{}$ اندازهٔ وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازهٔ یک زاویهٔ آن ۴۵° باشد و نشان دهید که اندازهٔ هر ضلع زاویهٔ قائمه در آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازهٔ وتر است.

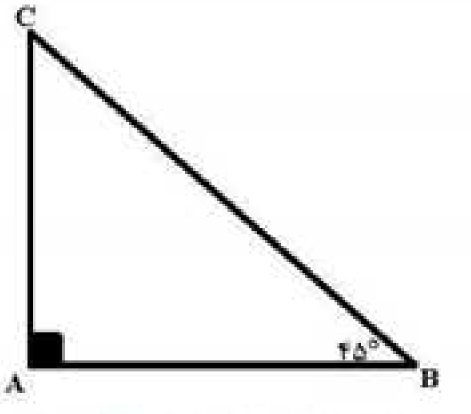
پاسخ : در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس :

$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ, \angle C = ۳۰^\circ \Rightarrow \angle B = ۶۰^\circ$$

$$\Delta ABM; AM = BM \Rightarrow \angle A_۱ = \angle B = ۶۰^\circ \Rightarrow AM = BM = AB \Rightarrow AB = \frac{BC}{۲}$$

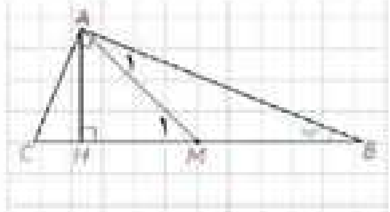
$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ \Rightarrow AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \xrightarrow{AB=\frac{BC}{۲}} AC^۲ = BC^۲ - \left(\frac{BC}{۲}\right)^۲$$

$$\Rightarrow AC^۲ = \frac{۳BC^۲}{۴} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}BC$$



$$\Delta ABC; \angle A = ۹۰^\circ, \angle B = ۴۵^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB^۲ + AC^۲ = BC^۲ \end{cases}$$

$$۲AB^۲ = BC^۲ \Rightarrow AB^۲ = \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}BC$$



۶ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۱۵° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازهٔ وتر است.

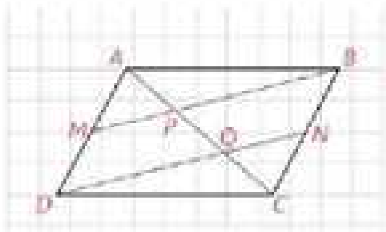
در مثلث قائم الزاویه میانه وارد وتر نصف وتر است پس:

$$\Delta ABC; AM = MB = \frac{BC}{۲} \Rightarrow \angle A_{۱} = \angle B = ۱۵^\circ \Rightarrow \angle M_{۱} = \angle A_{۱} + \angle B = ۳۰^\circ$$

از طرف دیگر در مثلث قائم الزاویه ضلع روبرو به زاویه ی ۳۰ درجه نصف وتر است

$$\Delta AMH ; \angle H = ۹۰^\circ, \angle M_{۱} = ۳۰^\circ \Rightarrow AH = \frac{AM}{۲} \Rightarrow AH = \frac{\frac{AM}{۲}}{\frac{۲}{۱}} = \frac{AM}{۴}$$

۷ـ در متوازی‌الاضلاع ABCD ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.



پاسخ : اگر در یک چهار ضلعی دو ضلع موازی و مساوی باشند آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.در چهار ضلعی BMDN داریم:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \xrightarrow{\div ۲} BN = MD \\ BN \parallel MD \end{array}\right\} \Rightarrow BM \parallel DN$$

$$\Delta ADQ ; MP \parallel DQ \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MQ} = ۱ \Rightarrow AP = PQ$$

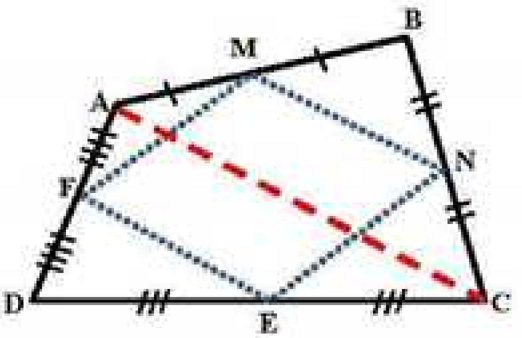
$$\Delta BCP ; BP \parallel QN \Rightarrow \frac{CQ}{QP} = \frac{CN}{NB} = ۱ \Rightarrow CQ = PQ$$

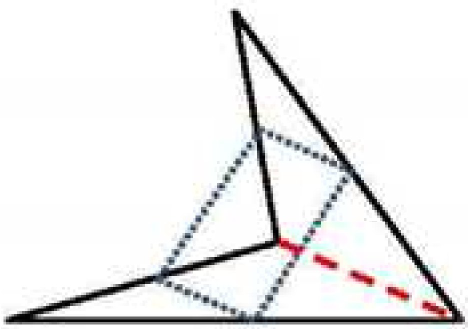
$$\Rightarrow AP = PQ = QC$$

۸ــ ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته‌باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟

چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟





برهان : فرض کنیم نقاط F,E,N,M به ترتیب وسطهای اضلاع AD,CD,BC,AB از جهار ضلعی $ABCD$ باشند باید ثابت کنیم جهار ضلعی $MNEF$ متوازی الاضلاع است . قطر AC را رسم می کنیم :

$$\Delta ABC;\frac{BM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel AC,MN=\frac{AC}{۲}\ \boxed{۱}$$

$$\Delta ACD;\frac{DE}{DC}=\frac{DF}{DA}=\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}EF\parallel AC,EF=\frac{AC}{۲}\ \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲}\Rightarrow MN\parallel EF\ ,\ MN=EF$$

به عبارت دیگر در جهار ضلعی $MNEF$ دو ضلع موازی و مساوی اند لذا جهار ضلعی $MNEF$ متوازی الاضلاع است.

اگر قطرهای جهار ضلعی $ABCD$ بر هم عمود باشند .جهار ضلعی $MNEF$ مستطیل است .زیرا قطرهای جهار ضلعی $ABCD$ جهار ضلعی $MNEF$ موازی اند.

اگر قطرهای جهار ضلعی $ABCD$ با هم مساوی باشند .جهار ضلعی $MNEF$ لوزی است . و اندازه هر ضلع این لوزی نصف طول قطر جهار ضلعی $ABCD$ است.

$$MN=EF=\frac{AC}{۲}\ ,\ FM=EN=\frac{BD}{۲}\Rightarrow MN+NE+EF+FM=۲\left(\frac{AC}{۲}+\frac{BD}{۲}\right)=AC+BD$$

سوال های تکمیلی :

۱- یک n ضلعی ۹۰ قطر دارد . مجموع زاویه های داخلی آن را حساب کنید.

۲- اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی ۳ ضلع اضافه شود ۳۶ قطر به قطرهای آن اضافه می شود . مجموع زاویه های داخلی n ضلعی را حساب کنید.

۳- مجموع زاویه های خارجی n ضلعی محدب را حساب کنید.

۴- ثابت کنید یک چند ضلعی محدب نمی تواند بیش از سه زاویه حاده داشته باشد.

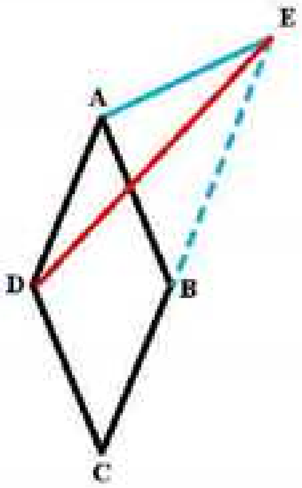
۵- در شش ضلعی محدب ABCDEF زاویه های روبرو دو به دو متساوی اند
$(\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F)$. ثابت کنید اضلاع روبرو دو به دو با هم موازی اند.

۶- نشان دهید در هر چهار ضلعی محدب ، زاویه ی حاده بین نیمسازهای دو زاویه مقابل ، مساوی نصف تفاضل دو زاویه ی دیگر است.

۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر خطی (به جز قطر های متوازی الاضلاع) که از مرکز می گذرد . آن را به دو ذو زنقه همنهشت تقسیم می کند.

۸- ثابت کنید در هرذوزنقه متساوی الساقین زاویه های مقابل مکمل اند و برعکس.

۹- روی امتداد ضلع BC از لوزی ABCD نقطه E را چنان اختیار می کنیم که $AE = CD$ نشان دهید DE نیمساز زاویه $\angle AEB$ است.



۱۰- در مربع ABCD از رأس A خط دلخواهی رسم می کنیم تا ضلع CD را در نقطه E قطع کند. اگر F نقطه ی برخورد نیمساز زاویه ی $\angle BAE$ با ضلع BC باشد . ثابت کنید : $BF + DE = AE$

۱۱- نشان دهید برای آنکه چهار نیمساز زاویه های داخلی یک ذوزنقه از یک نقطه بگذرند کافی است که مجموع طول های قاعده ها ، مساوی مجموع طول ساق ها باشد.

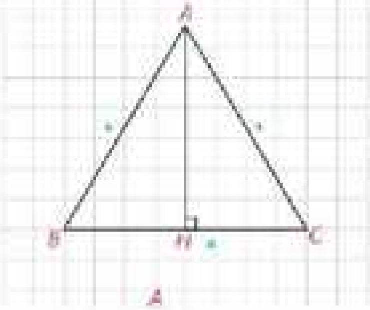
۱۲- از متوازی الاضلاعی طول دو قطر و یک ضلع معلوم است . این متوازی الاضلاع را رسم کنید

نقد و بررسی :

- در تعریف چند ضلعی صفحه ۵۴ از شرط هم صفحه بودن رئوس حرفی به میان نیامده است . چندضلعی که رئوس آن در یک صفحه نباشند چند ضلعی فضایی نام دارد این چند از نظر مجموع زاویه های داخلی ، محدب و مقعر بودن و ... با چندضلعی در صفحه متفاوت است .
- تعریف چند ضلعی محدب صفحه ۵۵ بدون ارائه هیچ گونه کاربردی در حل مسائل و قضیه های کتاب مطرح شده است.
- تعریف چهارضلعی ها بسیار منطقی و خوب ارائه شده و نتایج و قضیه های حاصل از این تعریف ها کاملا با هم سازگارند.
- اگر چه اغلب قضیه ها به صورت فعالیت یا کار در کلاس مطرح شده است . ولی مشارکت دانش آموز در روند استدلال بسیار اندک است . و اغلب سوالهای مطرح شده در متن قضیه ها به طور شهودی نیز قابل پاسخ هستند.
- در کل فصل نامگذاری چهارضلعی ها فقط با چهار حرف ثابت D,C,B,A است که این باعث می شود دانش آموز در مواجه با مسائل خارج از چارچوب کتاب درسی دچار سردرگمی شود.
- مسائل کاربردی و مدل سازی در این فصل مطرح نشده است (به جز کار درکلاس صفحه ۶۱).
- در تمرین های صفحه ۶۴ متن سوال های ۵ و ۸ بسیار طولانی است و دانش آموز را دچار سردرگمی و اضطراب می کند.
- بهتر بود از مسائل ترسیم با خطکش و پرگار نیز در تمرینات استفاده می شد.

فصل ۳

درس دوم : مساحت و کاربردهای آن



کار در کلاس

فرض کنیم اندازهٔ هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

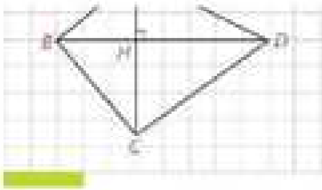
$$\Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow BH = CH = \frac{a}{۲}$$

به کمک قضیهٔ فیثاغورث نشان دهید $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$.

$$\Delta ABH \; ; \angle H = ۹۰^\circ \Rightarrow AH^۲ + BH^۲ = AB^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ = a^۲ - \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲}AH \times BC \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \times a = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$



در چهارضلعی ABCD دو قطر AC و DB بر هم عمودند.

$S_{ADB} = \ldots\ldots\ldots$

$S_{DBC} = \ldots\ldots\ldots$

$$S_{\Delta ADB} = \frac{۱}{۲}BD \times AH$$

$$S_{\Delta DBC} = \frac{۱}{۲}BD \times CH$$

۶۵

با جمع این دو مساحت داریم:

$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD(\ldots + \ldots) = \frac{۱}{۲}BD\ldots$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}BD \times (AH + HC) = \frac{۱}{۲}BD \times AC$$

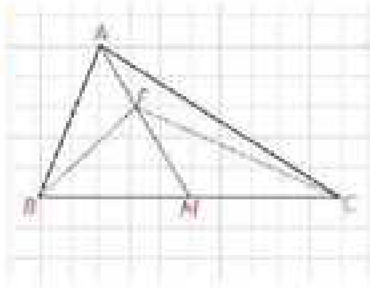
بنابراین:

مساحت هر چهار ضلعی که قطرهای آن بر هم عمودند برابر است با نصف حاصلضرب اندازه های دو قطر آن چهار ضلعی

کار در کلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانهٔ AM به‌جز نقطهٔ M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



الف : در مثلث **ABC** ارتفاع **AH** را رسم می کنیم:

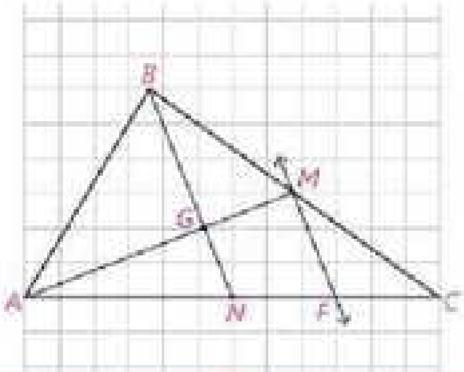
$$\left.\begin{aligned} S_{\Delta ABM} &= \frac{۱}{۲} AH \times BM \\ S_{\Delta ACM} &= \frac{۱}{۲} AH \times CM \end{aligned}\right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\Delta ABM} = S_{\Delta ACM}$$

ب : بله زیرا **FM** نیز میانه **BFC** است.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانهٔ مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانهٔ AM و BN از ΔABC را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطهٔ G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانهٔ BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = ۳NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = ۳GM$. چرا؟



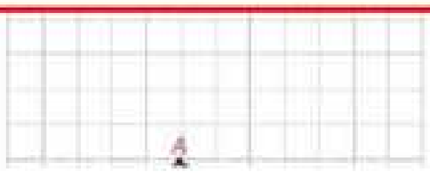
$$\Delta BCN ; MF \parallel BN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = ۱$$
$$\Rightarrow CF = FN$$

$$AN = NC = ۲NF$$
$$\Rightarrow AF = AN + FN = ۲FN + FN = ۳FN$$

$$\Delta AMF ; MF \parallel GN \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AG}{GM} = \frac{AN}{NF} = ۲$$
$$AG = ۲GM \Rightarrow AM = ۳GM$$

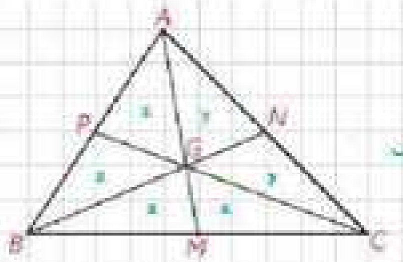
بنابراین، $GM = \frac{۱}{۳}AM$ و $AG = \frac{۲}{۳}AM$ و G بین A و M است؛ در نتیجه G تنها نقطه‌ای روی نیم‌خط AM است که $AG = \frac{۲}{۳}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{۲}{۳}BN$. پس برای هر دو میانهٔ دلخواه نقطهٔ G با این ویژگی به‌دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G همرس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB=۲MN$ پس $AG=۲GM$ و $BG=۲GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.



سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند؛ به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانه نظیر آن رأس است.

و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.

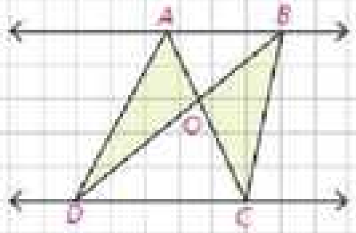


با رسم سه میانهٔ مثلث نشان دهید، سه میانهٔ مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$، چرا؟ زیرا GM میانه مثلث BGC است

به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانهٔ AM را درنظر بگیرید. $2z + x = 2y + x$ در نتیجه $y = y$.

میانهٔ BN را درنظر بگیرید. $2z + y = 2x + y$ در نتیجه $z = x$. پس، $x = y = z$



ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به‌طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$.

چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$؟

این ویژگی که در هر ذوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.

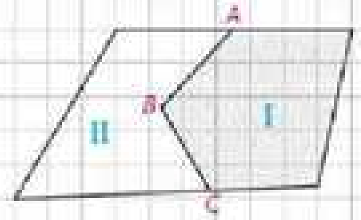
$$S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta ACD} - S_{\Delta OCD} = S_{\Delta BCD} - S_{\Delta OCD} \Rightarrow S_{\Delta AOD} = S_{\Delta BOC}$$

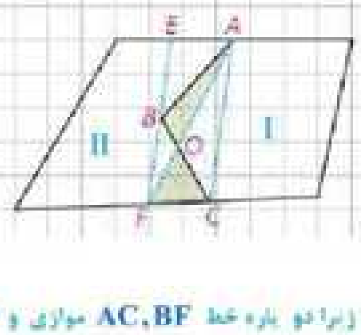
یک مسئله.

در شکل دو مزرعهٔ I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به‌طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟

فکر اصلی این عمل براساس مسئلهٔ قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.



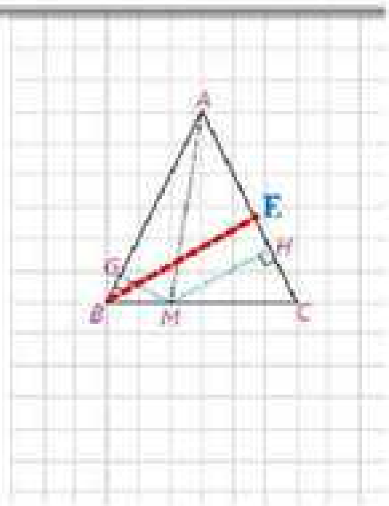


زیرا دو پاره خط AC، BF موازی و AF، BC یکدیگر را در نقطه O قطع کرده اند پس بنا به قضیه قبل $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta OCF}$

با توجه به اینکه چهار ضلعی AEBC نیز ذوزنقه می باشد و به روش مشابه می توان به جای AF، BC از EC، AB استفاده کرد.

در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطهٔ دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C درنظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMC} و S_{AMB} را بنویسید.

مساحت مثلث ΔABC را نیز وقتی پاره‌خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید. چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

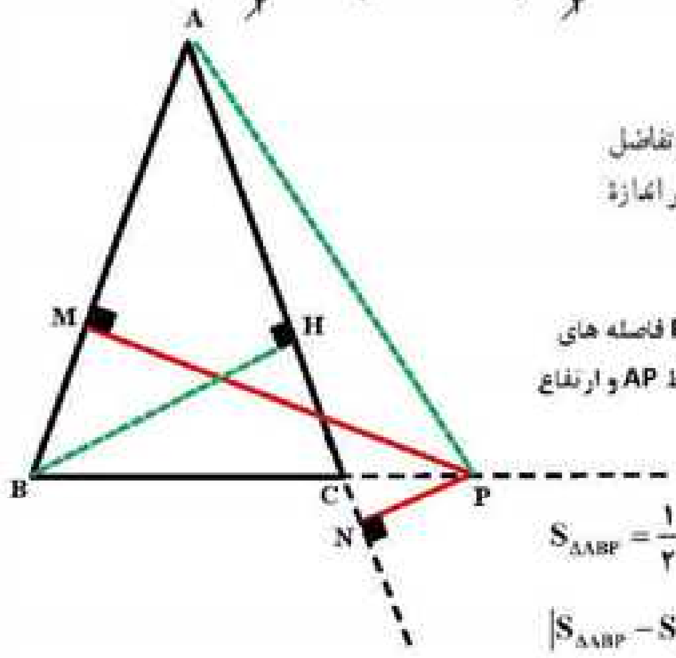


در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از AC، AB برابر ارتفاع وارد بر ساق مثلث است

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} AB \times MG \quad , S_{\Delta ACM} = \frac{1}{2} AC \times MH \quad , S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB=AC} \frac{1}{2} AC \times MG + \frac{1}{2} AC \times MH = \frac{1}{2} AC \times BE$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} AC} \times (MG + MH) = \cancel{\frac{1}{2} AC} \times BE \Rightarrow MG + MH = BE$$



به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدرمطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعدهٔ BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازهٔ ارتفاع وارد بر ساق است.

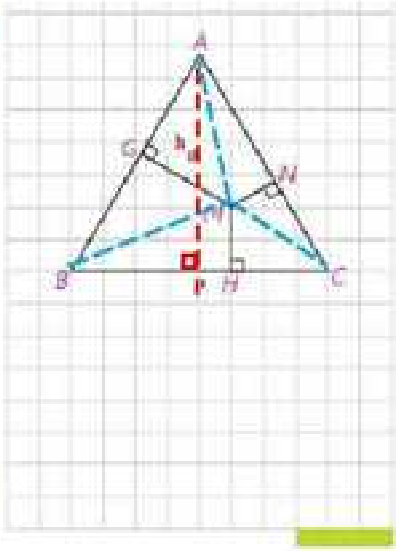
فرض کنیم P نقطه ای روی امتداد ضلع BC باشد . اگر PM و PN فاصله های نقطه P از دو ساق مثلث ABC $(AB = AC = a)$ باشند . پاره خط AP و ارتفاع BH از مثلث ABC را رسم می کنیم.

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} AB \times PM \quad , S_{\Delta ACP} = \frac{1}{2} AC \times PN \quad , S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

$$\left|S_{\Delta ABP} - S_{\Delta ACP}\right| = S_{\Delta ABC} \xrightarrow{AB=AC=a} \left|\frac{1}{2} a \times PM - \frac{1}{2} a \times PN\right| = \frac{1}{2} a \times BH$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2} a} \times |PM - PN| = \cancel{\frac{1}{2} a} \times BH \Rightarrow |PM - PN| = BH$$

فعالیت



نقطهٔ دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازهٔ a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید. مساحت‌های سه مثلث MAC ، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت ΔABC چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$MH + MN + MG = AP$...

مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث

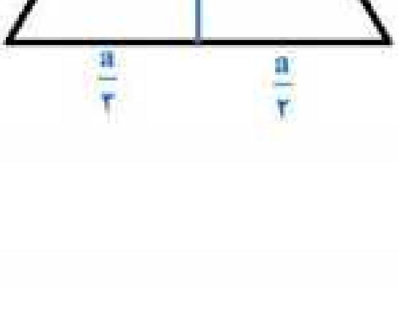
۶۸

$$S_{\Delta AMB} = \frac{۱}{۲}AB \times MG = \frac{۱}{۲}a \times MG \;,\; S_{\Delta AMC} = \frac{۱}{۲}AC \times MN = \frac{۱}{۲}a \times MN \;,\; S_{\Delta BMC} = \frac{۱}{۲}BC \times MH = \frac{۱}{۲}a \times MH$$

$$S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} + S_{\Delta BMC} = S_{\Delta ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}a \times MG + \frac{۱}{۲}a \times MN + \frac{۱}{۲}a \times MH = \frac{۱}{۲}a \times AP \Rightarrow MG + MN + MH = h_a$$

سوال بالای صفحه ۶۹

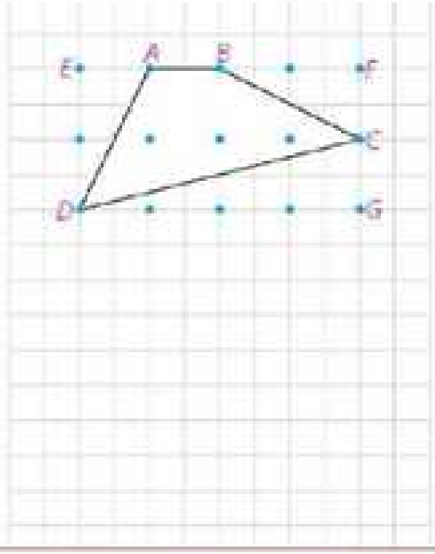
اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع فاصله‌های نقطهٔ M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۲، ۴ و ۶ باشند، اندازهٔ ضلع مثلث را محاسبه کنید.



$$h = ۲ + ۴ + ۶ = ۱۲$$

$$h^۲ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ = a^۲ \Rightarrow ۱۲^۲ = a^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ = \frac{۳}{۴}a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۹۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۹۲} = ۸\sqrt{۳}$$



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصلهٔ هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطهٔ مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است.

$S_{\square DEFG} = ۴ \times ۲ = ۸$

$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BCF} = \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۱ , S_{\triangle CDG} = \frac{۴ \times ۱}{۲} = ۲$

$S_{\square ABCD} = ۸ - (۱ + ۱ + ۲) = ۴$

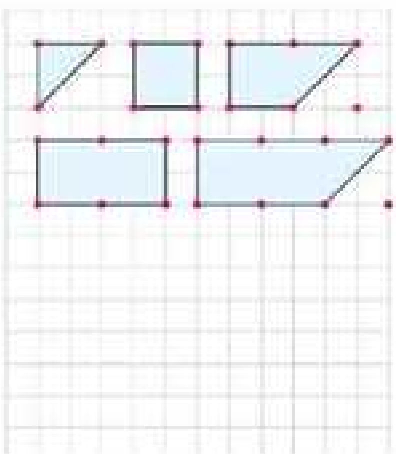
فعالیت صفحه ۶۹

فعالیت

۱ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

حداقل ۳ نقطه مرزی - زیرا برای رسم مثلث شبکه ای حداقل به سه نقطه نیاز داریم

۲ــ یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطهٔ درونی می‌تواند داشته باشد؟ صفر



جدول زیر را با محاسبهٔ مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای کامل کنید.

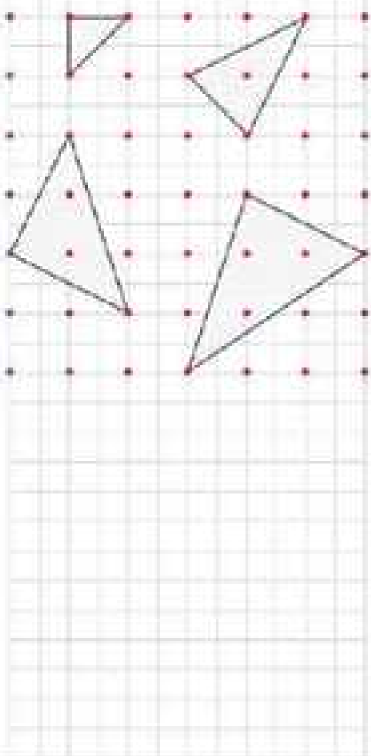
$i = ۰ , b = ۳, ۴, ۵, \ldots\ldots$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$	۳

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه‌ای وجود دارد؟

$S = \frac{b}{۲} - ۱ + ۰$

۴ـ اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای ۳ = b باشند. با توجه به شکل‌ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه‌گیری $S=\frac{b}{2}-1+0$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده‌اید درنظر داشته باشید.)

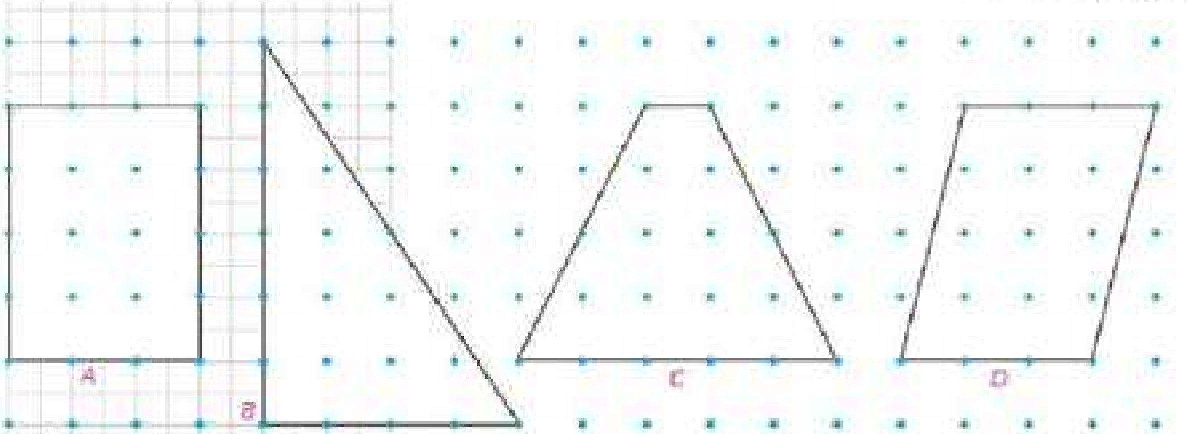


تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2}-1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$

با تکمیل جدول بالا و مقایسهٔ اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب‌هایی ظاهر می‌شوند.

$S=\frac{b}{\dots}\dots+\dots i\dots$

کاردرکلاس صفحه ۷۱



$S_A = ۳\times۴ = ۱۲$

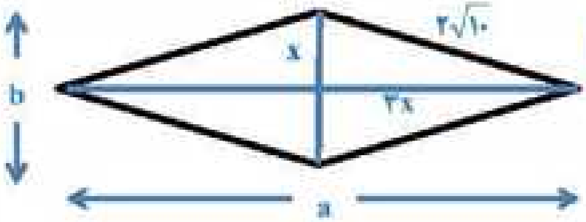
$S_B = \frac{۴\times۶}{۲} = ۱۲$

$S_C = \frac{۴\times(۱+۵)}{۲} = ۱۲$

$S_D = ۴\times۳ = ۱۲$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

تمرین صفحه ۷۲

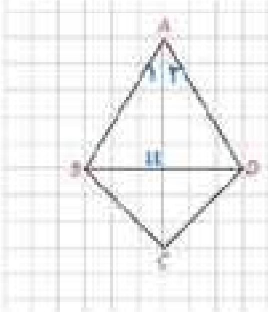


تمرین

۱ـ در یک لوزی اندازهٔ هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

$$x^۲+(۳x)^۲=\left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲ \Rightarrow x^۲+۹x^۲=۴۰ \Rightarrow ۱۰x^۲=۴۰ \Rightarrow x^۲=۴$$

$$\Rightarrow x=۲ \Rightarrow a=۱۲\ ,\ b=۴ \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۴=۲۴$$

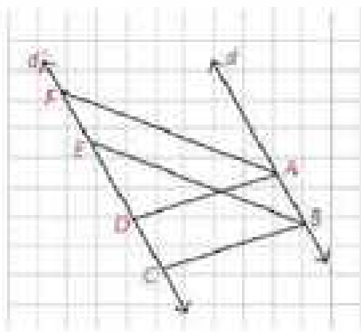


۲ـ در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل AB = AD و BC = CD است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است.

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ CB=CD \\ AC=AC \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow \angle A_۱=\angle A_۲$$

$$\left.\begin{array}{l} AB=AD \\ \angle A_۱=\angle A_۲ \\ AH=AH \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta ADH \Rightarrow \angle H_۱=\angle H_۲=۹۰^\circ$$

$$AC \perp BD \Rightarrow S_{\square ABCD}=\frac{۱}{۲}AC\times BD=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۶=۲۴$$

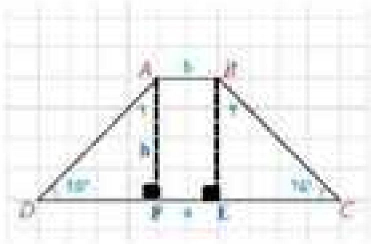


۳ـ در شکل دو خط d و d' موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری برحسب S چقدر است؟

فرض کنیم فاصله دو خط موازی d, d' برابر h باشد در این صورت :

$$S_{\square ABCD}=S_{\square ABEF}=AB\times h$$

۴ــ در ذوزنقهٔ شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور به یک قاعده °۴۵ است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.



عمودهای BF , AF را بر CD وارد می کنیم چهارضلعی ABCD مستطیل است پس :

$$AB = EF = b$$

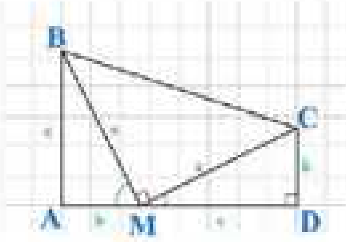
$$\Delta ADF; \angle A_۱ = \angle D = ۴۵^\circ \Rightarrow AF = DF = h$$

$$\Delta BCE; \angle B_۱ = \angle C = ۴۵^\circ \Rightarrow BE = CE = h$$

$$\Rightarrow CD = ۲h + b = a \Rightarrow h = \frac{a-b}{۲}$$

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}(a+b)h \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a+b}{۲} \times \frac{a-b}{۲} = \frac{a^۲ - b^۲}{۲}$$

۵ــ مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به‌دو طریق به‌دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



$$S_{\square ABCD} = \frac{۱}{۲}(AB + CD) \times AD = \frac{۱}{۲}(b+c)(b+c) = \frac{۱}{۲}(b+c)^۲$$

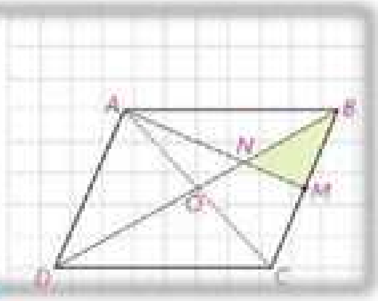
$$S_{\square ABCD} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} + S_{\Delta MBC} = \frac{۱}{۲}bc + \frac{۱}{۲}bc + \frac{۱}{۲}c^۲ = bc + \frac{۱}{۲}a^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(b+c)^۲ = bc + \frac{۱}{۲}a^۲ \xrightarrow{\times ۲} (b+c)^۲ = ۲bc + a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲ + \cancel{۲bc} + c^۲ = \cancel{۲bc} + a^۲ \Rightarrow b^۲ + c^۲ = a^۲$$

۶ــ در متوازی‌الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM قطر BD را در N قطع کرده‌است. نشان دهید :

$$S_{BMN} = \frac{۱}{۱۲} S_{ABCD}$$

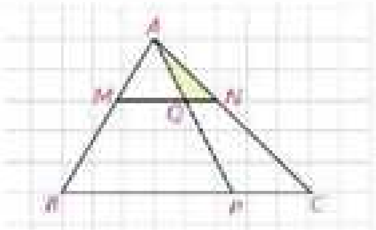


$$\Delta ABC \cong \Delta ACD \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{۱}{۲} S_{\square ABCD} \quad \boxed{۱}$$

میانه های هر مثلث آن را به شش قسمت با مساحت های مساوی تقسیم می کنند.

$$\Delta ABC; BM = MC, AO = OC \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{۱}{۶} S_{\Delta ABC} \quad \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱}, \boxed{۲} \Rightarrow S_{\Delta MNB} = \frac{۱}{۶}\left(\frac{۱}{۲} S_{\square ABCD}\right) = \frac{۱}{۱۲} S_{\square ABCD}$$



۷ـ در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB}=\frac{۱}{۲}$ ، همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

$$\frac{PC}{PB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{PC}{BC}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=۴S_{\Delta APC}\quad\boxed{۱}$$

$$\Delta ABC;MN\parallel BC\Rightarrow\begin{cases}\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{۱}{۳}\\ \Delta AQN\sim\Delta APC\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta ANQ}}{S_{\Delta APC}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_{\Delta APC}=۹S_{\Delta ANQ}\quad\boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=۹\left(۴S_{\Delta APC}\right)=۳۶S_{\Delta APC}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۱}{۳۶}$$

$$\frac{PB}{BC}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{S_{\Delta APB}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow S_{\Delta APB}=\frac{۳}{۴}S_{\Delta ABC}$$

$$\Delta ABC;MQ\parallel BP\Rightarrow\Delta AQM\sim\Delta ABP$$

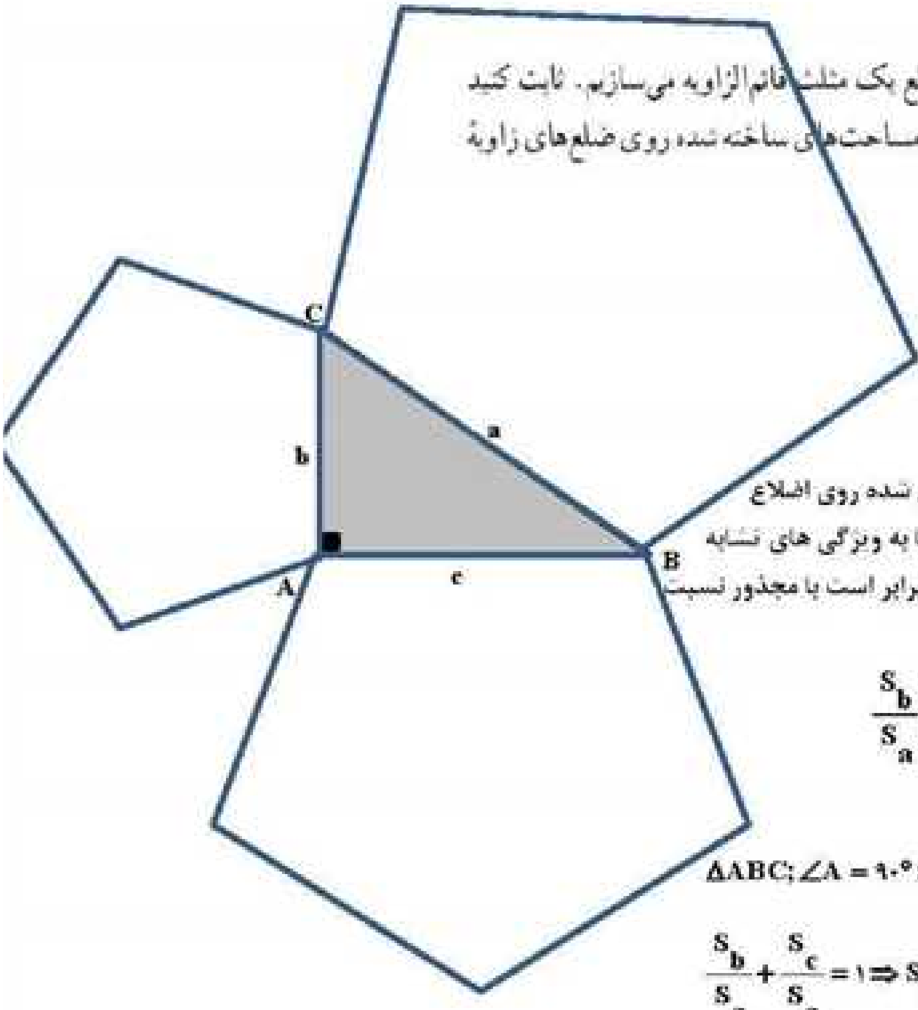
$$\Rightarrow\frac{S_{\Delta AMQ}}{S_{\Delta APB}}=\left(\frac{AM}{AB}\right)^{۲}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow S_{\Delta APB}=۹S_{\Delta AMQ}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{۸}{۹}S_{\Delta ABP}\quad\boxed{۲}$$

$$\boxed{۱,۲}\Rightarrow S_{\square BPQM}=\frac{۸}{۹}\left(\frac{۳}{۴}S_{\Delta ABC}\right)=\frac{۲}{۳}S_{\Delta ABC}\Rightarrow\frac{S_{\square BPQM}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{۲}{۳}$$

۸ـ زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به‌طور مساوی در آن شریک‌اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطهٔ M که $MC=۲۰$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعهٔ با مساحت‌های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

کافی است نقطه **N** را روی ضلع **AB** چنان اختیار کنیم که $AN=۲۰$ در این صورت دو ذوزنقه با قاعده های ۲۰ و ۱۸ و ارتفاع ۱۵ تشکیل می شود.

۹ـ سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع‌های زاویهٔ قائمه است.



اگر مساحت چندضلعی های متشابه تشکیل شده روی اضلاع a, b, c را به ترتیب S_a, S_b, S_c بنامیم بنا به ویژگی های تشابه نسبت مساحت های دو چند ضلعی متشابه برابر است با مجذور نسبت اضلاع متناظر آنها. به عبارت دیگر:

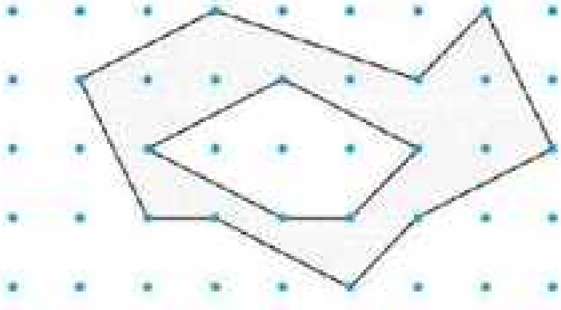
$$\frac{S_b}{S_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \ , \frac{S_c}{S_a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

از طرف دیگر:

$$\Delta ABC; \angle A = 90° \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{S_b}{S_a} + \frac{S_c}{S_a} = 1 \Rightarrow S_b + S_c = S_a$$

۱۰ـ با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید.



$$b = 14 \ , i = 5 , S = \frac{b}{2} - 1 + i$$

$$\Rightarrow S = 7 - 1 + 5 = 11$$

۱۱ــ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحداند مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

مساحت به روش معمول : $S = m \times n$

مساحت به کمک قضیه پیک :

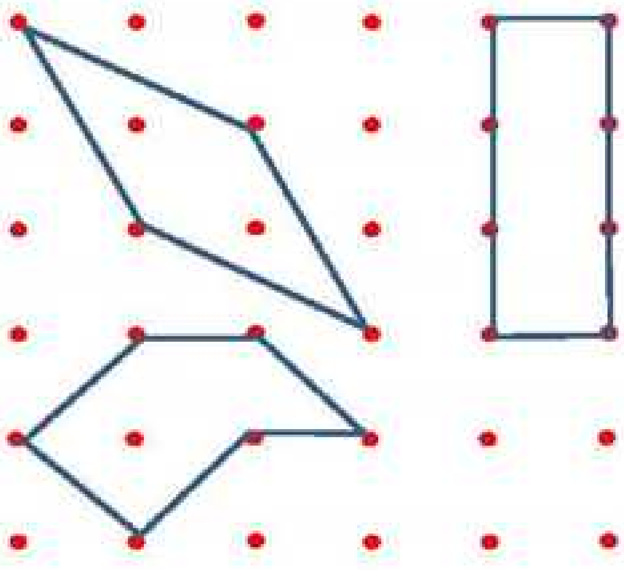
$$b = ۲m + ۲n$$

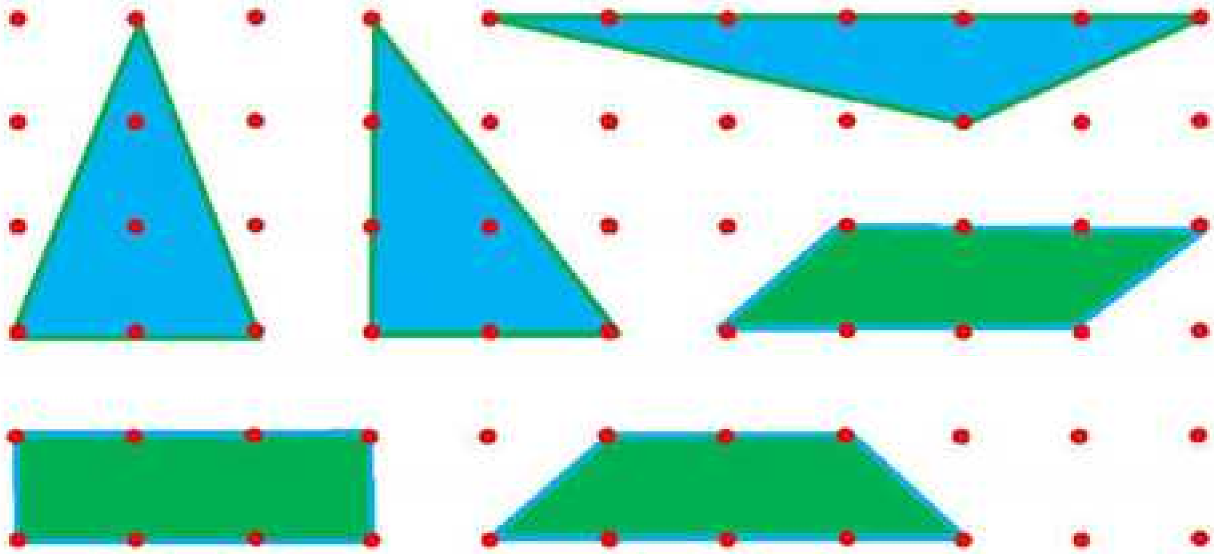
$$i = (m+۱) \times (n+۱) - (۲m+۲n) = mn - m - n + ۱$$

$$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i = \frac{۲m+۲n}{۲} - ۱ + (mn - m - n + ۱) = m + n - ۱ + mn - m - n + ۱ = mn$$

۱۲ــ مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت‌هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه‌ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل‌های چهارضلعی‌های نظیر آن را نیز رسم کنید.

b	۴	۶	۸
i	۲	۱	۰
$S = \frac{b}{۲} - ۱ + i$	۳	۳	۳



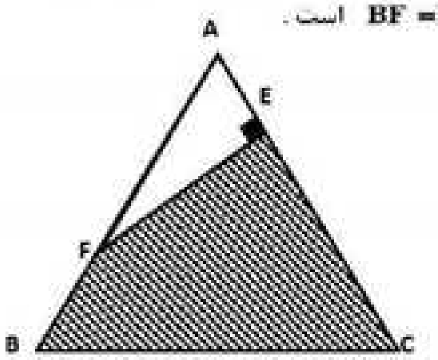


تمرینات تکمیلی :

۱- ثابت کنید مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل ضرب اندازه یک ساق در فاصله ی آن از وسط ساق دیگر.

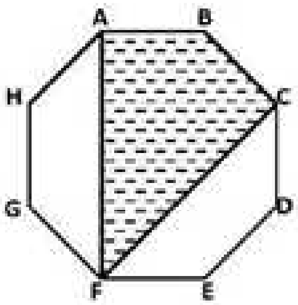
۲- در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع و $EF = ۲\sqrt{۳}$, $BF = ۲$ است .

مساحت ناحیه سایه زده را حساب کنید.

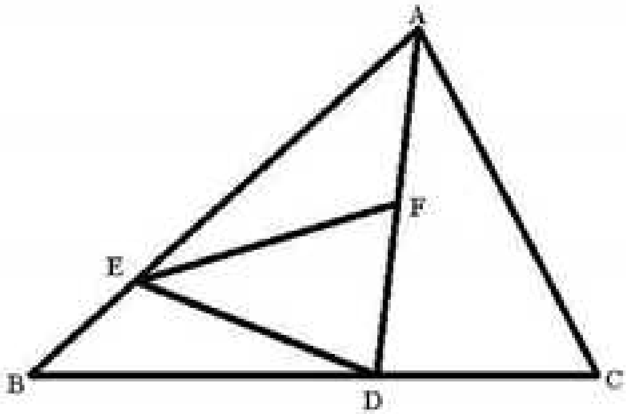


۳-اگر هشت ضلعی مقابل ، منتظم و محیط آن برابر ۳۲ باشد . و قطر های FA و FC زاویه ی EFG را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند .

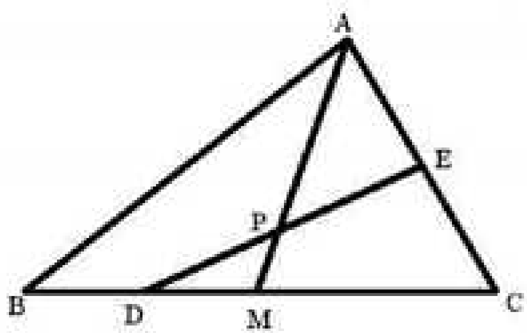
مساحت چهار ضلعی ABCF را حساب کنید ؟



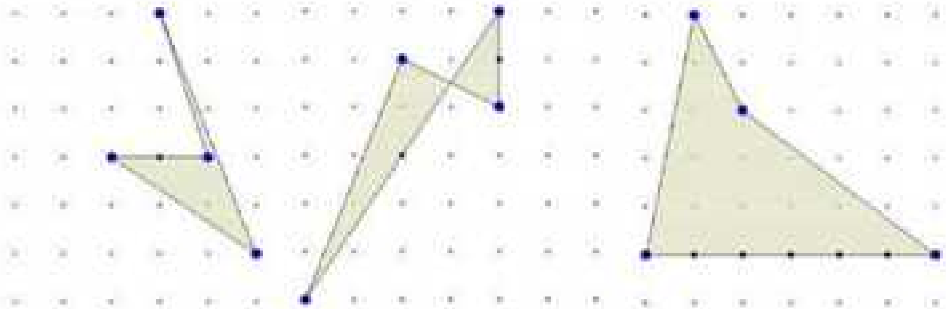
۴-در شکل مقابل مساحت ΔABC برابر ۹۰ سانتی متر مربع و $BD = ۲DC$, $BE = \frac{۱}{۴}EA$ و نقطه ی F وسط پاره خط AD است . مساحت ΔDEF را حساب کنید.



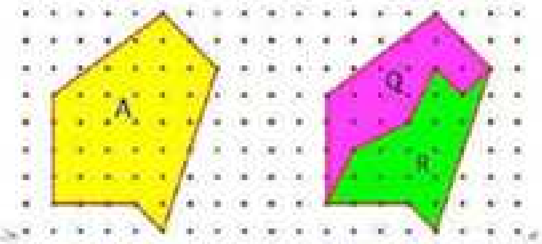
۵- در شکل مقابل AM میانه وارد بر BC است نشان دهید اگر $S_{\Delta ABC} = ۲S_{\Delta CDE}$ آنگاه $AP \times EP = DP \times MP$



۶- مساحت هر یک از شکل های زیر را به کمک قضیه پیک حساب کنید.

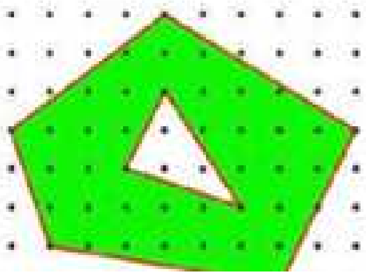


۷- در صفحه مختصات نقاطی که طول و عرض آنها اعداد صحیح می باشند را علامت گذاشته ایم . مربعی که هیچ یک از این نقاط ، نقطه درونی نباشد.حداکثر چه مساحتی دارد؟ آیا اگر این سوال را به کمک قضیه پیک حل می کردیم جواب نهایی تغییر می کرد ؟ چرا ؟



۸- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

$$S_Q + S_R = S_A$$



۹- به کمک قضیه پیک در شکل مقابل درستی یا نادرستی رابطه زیر را بررسی کنید:

مساحت قسمت رنگی = مساحت رنگ نشده - مساحت کل شکل

نقد و بررسی :

- اگر چه دانش آموز در دوره متوسطه اول با مساحت آشنا شده است ولی چیزی از اهمیت لزوم تعریف مساحت کم نمی کند . بهتر بود تعریف مساحت و اثبات فرمول های مساحت چند ضلعی های متعارف بررسی می شد.
- مساحت مثلث متساوی الاضلاع صفحه ۶۵ ارائه شده ولی هیچ مساله ی یا کاربردی برای مساحت مثلث متساوی الاضلاع بیان نشده است.
- همرسی سه میانه در فعالیت صفحه ۶۷ به روشی بسیار زیبا ثابت شده ولی درمورد کاربردهای فراوان این قضیه در حل مسائل هیچ اشاره ای نشده است.
- ایده استفاده از قضیه پیک در کتاب درسی بسیار پسندیده است و بهتر است که از این قضیه در سالهای بعد نیز استفاده شود.