۳

فصل سوم

روابط طولی در مثلث

عکس: فرهاد کولی‌وند

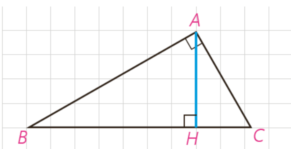
محاسبهٔ فاصله‌های غیرقابل دسترس یکی از مهم‌ترین کاربردهای روابط طولی در هندسه است. از جملهٔ آنها محاسبهٔ ارتفاع کوه‌های بلند است. رشته‌کوه اشترانکوه که ارتفاع آن در برخی نقاط به بیش از ۴۰۰۰ متر می‌رسد در استان لرستان واقع است.

تئودولیت (زاویه‌یاب) یکی از ابزارهای لازم برای این‌گونه محاسبات عملی است.

درس اوّل

قضیهٔ سینوس‌ها

یادآوری



منظور از روابط طولی، رابطه‌هایی است که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف، بحث می‌کند. در سال گذشته روابط طولی زیر را در مثلث قائم‌الزاویه دیدیم :

۱ـ $AB^2=BC.BH$

۲ـ $AC^2=BC.CH$

در هر مثلث قائم الزاویه هر ضلع قائم واسطهٔ هندسی وتر و تصویر آن ضلع بر وتر است.

۳ـ $AH^2=BH.CH$

در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی قطعه های ایجاد شده روی وتر است.

۴ـ $AB^2+AC^2=BC^2$

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر با مجموع مربع های دو ضلع دیگر برابر است.(قضیه فیثاغورس)

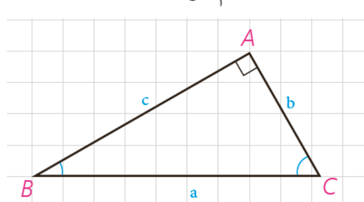
۵ـ $AB.AC=BC.AH$

در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائمه با حاصل ضرب ارتفاع وارد بر وتر در وتر برابر است.

اینک به ادامهٔ بحث در مثلث‌های دلخواه می‌پردازیم.

فعالیت ۱

در کتاب ریاضی ۱ (پایهٔ دهم) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه آشنا شدید. با توجه به تعریف سینوس زاویه در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، جاهای خالی را پر کنید :



$$\mathrm{Sin}B=\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{\mathrm{Sin}B}=a$$

$$\mathrm{Sin}C=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{c}{\mathrm{Sin}C}=a$$

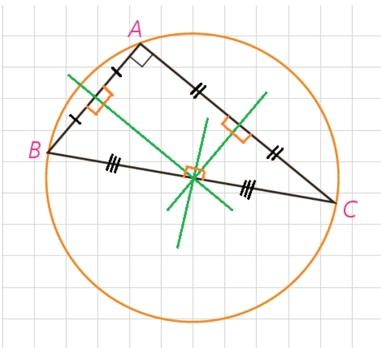
$$\mathrm{Sin}A=\mathrm{Sin}90^\circ=1\Rightarrow\frac{a}{\mathrm{Sin}A}=a$$

بنابراین داریم :

> در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ..ضلع.. به .سینوس.زاویه مقابل به آن.ضلع برابر است با اندازهٔ .وتر.مثلث..

فعالیت ۲

در کتاب هندسهٔ ۱ دیدیم که عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث در یک نقطه همرس‌اند و در این کتاب دیدیم که این نقطه، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره، کجاست و چرا قطر آن با وتر مثلث برابر است؟



محل برخورد عمود منصف ها در هر مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. پس مرکز این دایره وسط وتر است.

$\widehat{BAC} = 90^\circ$ یک زاویه محاطی است و اندازه کمان مقابل آن 180° یعنی وتر BC دایره را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند، یعنی قطر دایره است.

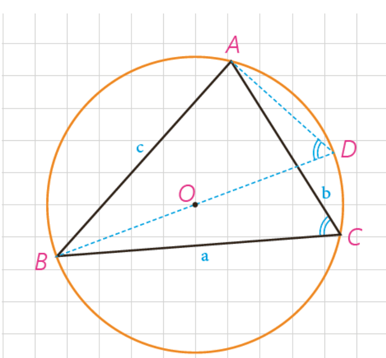
با توجه به نتیجهٔ فعالیت (۱) می‌توانیم بگوییم :

> در هر مثلث قائم‌الزاویه، نسبت اندازهٔ هر ضلع به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازهٔ .....قطر..... دایرهٔ محیطی مثلث.

اکنون نشان می‌دهیم این نتیجه‌گیری برای هر مثلث دلخواه نیز درست است.

فعالیت ۳

مثلث دلخواه ABC‏ ($\hat{A} < 90^\circ$) و دایرهٔ محیطی آن به مرکز O را در نظر می‌گیریم.



قطر BD را رسم، و D را به A وصل می‌کنیم. $(BD = 2R)$

۱ــ زوایای $\hat{C}$ و $\hat{D}$ چرا با هم برابرند؟

این دو زاویه محاطی هستند و هردو روبه رو به کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند پس هم اندازه اند.

اندازهٔ آنها برابر است با نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$.

۲ــ چرا مثلث ABD در رأس A قائم‌الزاویه است؟

زیرا زاویهٔ A محاطی روبه رو به قطر دایره است. $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BCD}}{2} = \dfrac{180^\circ}{2}$

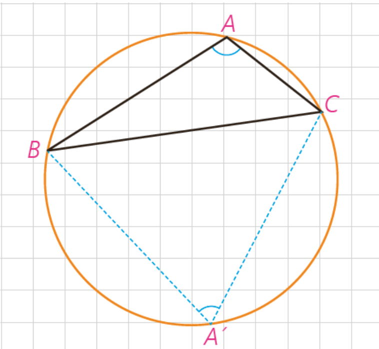
۳ــ با توجه به دو قسمت قبل، داریم :

$$\mathrm{Sin}C = \mathrm{Sin}D \;\text{و}\; \mathrm{Sin}D = \frac{c}{BD} \Rightarrow \mathrm{Sin}C = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\mathrm{Sin}C} = 2R$$

۴ـ به‌طور مشابه خواهیم داشت :

$$\frac{a}{\text{Sin}A}=\text{۲}R \quad , \quad \frac{b}{\text{Sin}B}=\text{۲}R$$

۵ـ حال مثلث ABC ($\hat{A}>\text{۹۰}^\circ$) را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC را به B و C وصل می‌کنیم. زوایای $\hat{A}$ و $\hat{A}'$ نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟



این دو زاویه مکمل هم هستند.

راه اول : چهارضلعی ABA'C محاطی است پس بنا بر قضیه زوایای مقابل مکمل هستند.

راه دوم:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}&=\frac{\overparen{BA'C}}{\text{۲}}\\ \hat{A}'&=\frac{\overparen{BAC}}{\text{۲}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}'=\frac{\overparen{BA'C}}{\text{۲}}+\frac{\overparen{BAC}}{\text{۲}}=\frac{\overparen{BA'C}+\overparen{BAC}}{\text{۲}}=\frac{\text{۳۶۰}^\circ}{\text{۲}}$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{A}'=\text{۱۸۰}^\circ$$

$\hat{A}+\hat{A}'=\text{۱۸۰}^\circ$ بنابراین $\hat{A}'$ زاویه‌ای حاده است.

با توجه به آنچه از مثلثات می‌دانید، جاهای خالی را پر کنید :

$$\sin A=\sin(\text{۱۸۰}^\circ-A')=\sin A'$$

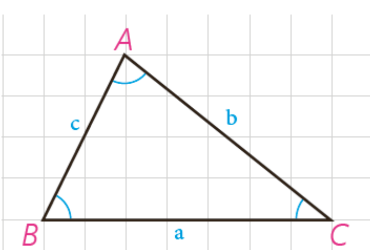
در مثلث $A'BC$، طبق نتیجهٔ قسمت (۳) می‌توانیم بنویسیم :

$$\frac{a}{\sin A'}=\text{۲}R \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{\sin A}=\text{۲}R$$

طول قطر برابر با ۲R است.

نتیجه

در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازهٔ هر ..ضلع.. به سینوس زاویهٔ روبه‌رو به آن برابر است با ..طول..قطر..دایرهٔ..محیطی..مثلث..



قضیهٔ سینوس‌ها: در مثلث ABC با اضلاع BC=a ، AC=b و AB=c داریم:

$$\frac{a}{\text{Sin}A}=\frac{b}{\text{Sin}B}=\frac{c}{\text{Sin}C}=\text{۲}R$$

که R شعاع دایره محیطی مثلث است.

مثال ۱ : در مثلث ABC، $BC=۱۰cm$ و $\hat{A}=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایرهٔ محیطی مثلث و اندازه زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

حل : به کمک قضیهٔ سینوس‌ها می‌توان نوشت :

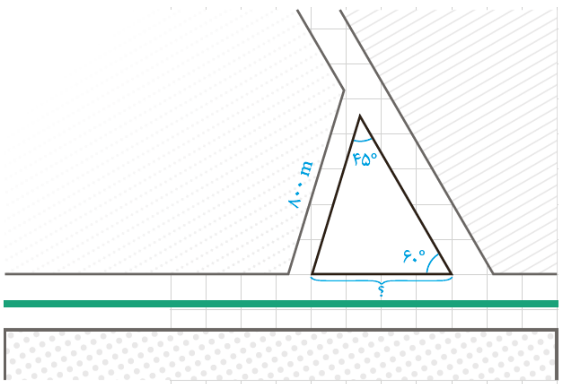
$$\frac{a}{\sin A}=۲R \Rightarrow \frac{۱۰}{\sin ۱۲۰^\circ}=۲R \text{ و } \sin ۱۲۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲R=\frac{۱۰}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad \text{و} \quad R=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۳}$$

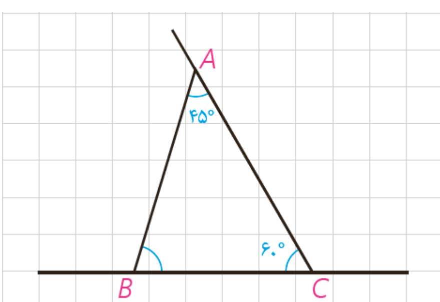
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=۲R \Rightarrow \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin B}=\frac{۲۰\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۲۰\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow B=۴۵^\circ \text{ یا } ۱۳۵^\circ \text{ و } \hat{A}=۱۲۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۴۵^\circ \Rightarrow \hat{C}=۱۵^\circ$$

مثال ۲ : از یک بلوار افقی، یک خیابان فرعی باریک با زاویهٔ ۶۰° جدا شده است. اکنون شهرداری منطقه می‌خواهد یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویهٔ ۴۵° از خیابان فرعی اول جدا، و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویهٔ ۶۰° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



حل : با یک شکل مناسب مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم. اولاً با توجه به مجموع اندازه‌های زوایای داخلی مثلث، روشن است که $\hat{B}=۱۸۰^\circ-(۴۵^\circ+۶۰^\circ)=۷۵^\circ$ ؛ یعنی خیابان فرعی باید با زاویهٔ ۷۵° از بلوار جدا شود. ثانیاً به کمک قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ABC داریم :

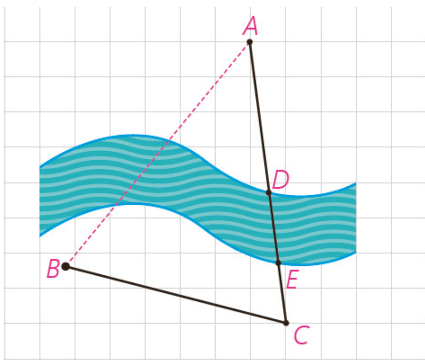


$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{۸۰۰}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{BC}{\sin ۴۵^\circ} \Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۸۰۰\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow BC=\frac{۸۰۰\sqrt{۶}}{۳}\approx ۶۵۳/۲m$$

یعنی خیابان فرعی را باید از فاصله تقریبی ۶۵۳/۲ متر با زاویهٔ ۷۵° بنا کنیم.

کار در کلاس



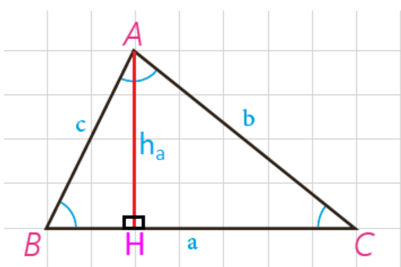
می‌خواهیم روی یک رودخانهٔ عمیق بین دو نقطهٔ A و B در دو طرف رودخانه، پلی بنا کنیم. برای محاسبات مربوط به احداث پل، باید فاصله ابتدا و انتهای آن (یعنی طول AB) را به‌دست بیاوریم؛ امّا امکان اندازه‌گیری مستقیم (به‌دلیل وجود رودخانه) وجود ندارد. برای این کار از نقطهٔ A در جهتی حرکت می‌کنیم تا با عبور از قسمت کم‌عمق رودخانه (DE) به نقطه C برسیم و طول BC را اندازه‌گیری می‌کنیم؛ سپس با زاویه‌یاب (تئودولیت) زاویهٔ دید AC از نقطهٔ B ($\hat{B}$) و زاویهٔ دید AB از C ($\hat{C}$) را اندازه می‌گیریم. به‌صورت زیر نشان دهید با داشتن طول BC و زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ می‌توان فاصلهٔ AB را به‌دست آورد:

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow\frac{BC}{\sin(۱۸۰^\circ-(B+C))}=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=\frac{BC\times\sin C}{\sin(B+C)}$$

اگر BC=۳km و $\hat{B}=۷۰^\circ$ و $\hat{C}=۶۰^\circ$ به کمک ماشین حساب طول AB را به‌دست آورید.

$$AB=\frac{BC\times\sin C}{\sin(B+C)}\Rightarrow AB=\frac{۳\times\sin ۵۰^\circ}{\sin(۷۰^\circ+۶۰^\circ)}\approx\frac{۳\times ۰/۵}{۰/۷۶}\approx ۱/۹۷$$

تمرین



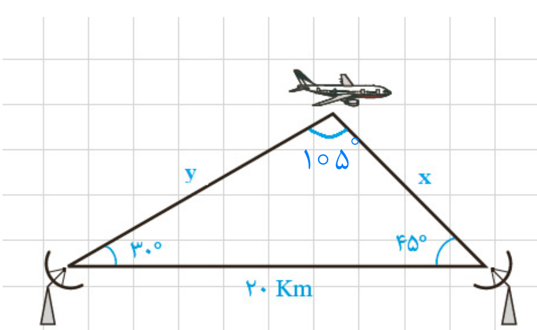
۱ــ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) با ارتفاع $AH=h_a$ داریم:

$$\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{۱}{۲}bc\\ S=\frac{۱}{۲}a.h_a\end{array}\right\}\Rightarrow bc=ah_a\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}}(bc)^۲=(ah_a)^۲\Rightarrow b^۲c^۲=a^۲h_a^۲$$

$$\Rightarrow b^۲c^۲=(b^۲+c^۲)h_a^۲\Rightarrow b^۲c^۲=b^۲h_a^۲+c^۲h_a^۲\xrightarrow{\div b^۲c^۲h_a^۲}\frac{b^۲c^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}=\frac{b^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}+\frac{c^۲h_a^۲}{b^۲c^۲h_a^۲}\Rightarrow\frac{۱}{h_a^۲}=\frac{۱}{c^۲}+\frac{۱}{b^۲}$$

۲ــ دو ایستگاه رادار، که در فاصلهٔ ۲۰ کیلومتری از هم واقع‌اند، هواپیمایی را با زاویه‌های ۳۰ و ۴۵ درجه رصد کرده‌اند. فاصلهٔ هواپیما را از دو ایستگاه به‌دست آورید.



$$\frac{۲۰}{\sin ۱۰۵^\circ}=\frac{x}{\sin ۳۰^\circ}=\frac{y}{\sin ۴۵^\circ}\Rightarrow\begin{cases}\frac{۲۰}{۰/۹۶}=\frac{x}{۰/۵}\Rightarrow x\approx ۱۰/۴۱۶\\ \frac{۲۰}{۰/۹۶}=\frac{y}{۰/۷۰۷}\Rightarrow y\approx ۱۴/۷۲\end{cases}$$

درس دوم

قضیهٔ کسینوس‌ها

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A}=90^\circ$). با داشتن طول‌های دو ضلع (AB=c) و (AC=b) می‌توانیم اندازه وتر مثلث (BC=a) را بر حسب b و c به‌دست آوریم : $a^2=b^2+c^2$

حال می‌بینیم که اگر $\hat{A}$ مساوی 90° هم نباشد، می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

فعالیت ۱

در مثلث ABC ($\hat{A}<90^\circ$)، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم. با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، جاهای خالی را پر کنید :

$$\cos A=\frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c \times \cos A \quad \text{و} \quad CH = b - AH = b - c.\cos A$$

$$\sin A=\frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c \times \sin A$$

$$\Delta BHC: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c.\sin A)^2 + (b - c.\cos A)^2$$

حال به کمک اتحادهای جبری و اتحاد مثلثاتی $\sin^2A+\cos^2A=1$، نشان دهید :

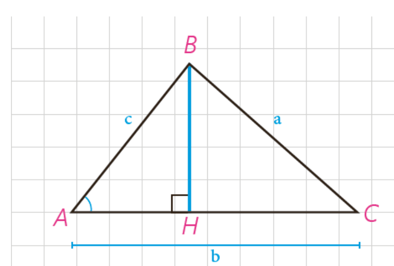
$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$

$$a^2=(c.\sin A)^2+(b-c.\cos A)^2 = c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc.\cos A$$

$$= b^2 + c^2(\underbrace{\sin^2 A + \cos^2 A}_{1}) - 2bc.\cos A$$

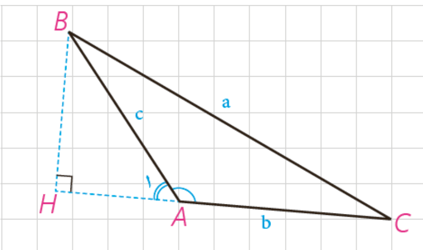
$$= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$



اکنون در مثلث ABC $(\hat{A}>90^\circ)$ ارتفاع BH را در بیرون مثلث رسم می‌کنیم.

اگر $\hat{A}_1$ زاویهٔ خارجی رأس A باشد با توجه به اینکه $\hat{A}_1=180-\hat{A}$ داریم: $\sin A_1 = \sin A$ و $\cos A_1 = -\cos A$ و در مثلث ABH نیز با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی می‌توان نوشت:



$\cos A_1 = \frac{AH}{c}$ و $\sin A_1 = \frac{BH}{c} \Rightarrow AH = c \times (-\cos A)$ و

$BH = c \times \sin A$ و $CH = b + AH = b - c.\cos A$

$\Delta BHC:\ BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c.\sin A)^2 + (b - c.\cos A)^2$

و با ساده کردن عبارت‌ها نشان دهید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$a^2 = (c.\sin A)^2 + (b - c.\cos A)^2 = c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc.\cos A$$

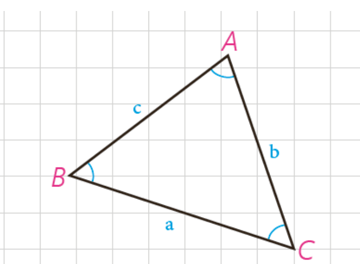
$$= b^2 + c^2\underbrace{(\sin^2 A + \cos^2 A)}_{1} - 2bc.\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

سؤال : در حالتی که زاویهٔ A قائمه باشد، این رابطه به چه صورت در می‌آید؟

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos 90^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

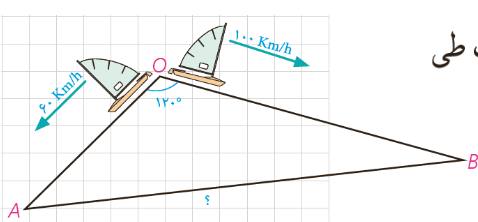


قضیهٔ کسینوس‌ها: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آنها:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

مثال : دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های $60 km/h$ و $100 km/h$ و با زاویهٔ 120° از هم دور می‌شوند. نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر هستند؟



حل : با توجه به نقطهٔ شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:

$OA=۶۰\times ۰/۵=۳۰$ و $OB=۱۰۰\times ۰/۵=۵۰$

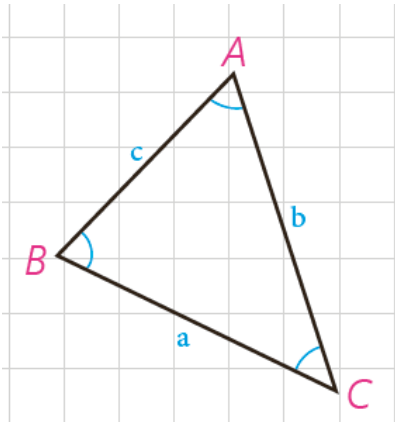
حال به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم :

$$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA.OB.\cos۱۲۰^\circ \text{ و } \cos۱۲۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

$$AB^۲=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times۳۰\times۵۰\left(-\frac{۱}{۲}\right)=۴۹۰۰\Rightarrow$$

$$AB=۷۰km$$

کاردرکلاس



در مثلث ABC، $AB=۲\sqrt{۲}$ و $AC=\sqrt{۶}+\sqrt{۲}$ و $\hat{A}=۶۰^\circ$

۱ــ طول ضلع BC را به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها به‌دست آورید.

$$BC^۲=AC^۲+AB^۲-۲\times AC\times AB\times \cos A \Rightarrow$$

$$BC^۲=(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})^۲+(۲\sqrt{۲})^۲-۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\cos۶۰^\circ \Rightarrow$$

$$۶+۲+۲\sqrt{۱۲}+۸-۲(۲\sqrt{۲})(\sqrt{۶}+\sqrt{۲})\times\frac{۱}{۲}=۱۶+۲\sqrt{۱۲}-۲\sqrt{۱۲}-۴=۱۲$$

$BC^۲=۱۲$ و $BC=۲\sqrt{۳}$

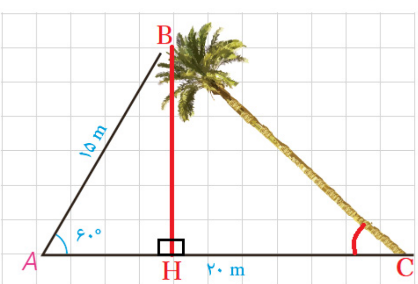
۲ــ اندازهٔ $\hat{C}$ را به کمک قضیهٔ سینوس‌ها به‌دست آورید و از آنجا اندازهٔ $\hat{B}$ را هم بیابید.

$$\frac{C}{\sin C}=\frac{a}{....}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{۶}}{۶} \text{ و } \hat{C}=۲۴^\circ$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\sin۶۰^\circ}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=\frac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{\sin C}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow\sin C=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۳}}\Rightarrow\sin C=\frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۶}$$

$$\Rightarrow\hat{B}=۱۸۰-(\hat{A}+\hat{C})=۹۶^\circ$$

تمرین



۱ــ یک درخت کج از نقطهٔ A روی زمین، که در فاصلهٔ ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویهٔ ۶۰° دیده می‌شود. اگر فاصلهٔ A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است :

الف) طول درخت

$$a^۲=۲۰^۲+۱۵^۲-۲\times۲۰\times۱۵\times\cos۶۰^\circ=۴۰۰+۲۲۵-۳۰۰$$

$$\Rightarrow a^۲=۳۲۵\Rightarrow a=۵\sqrt{۱۳}$$

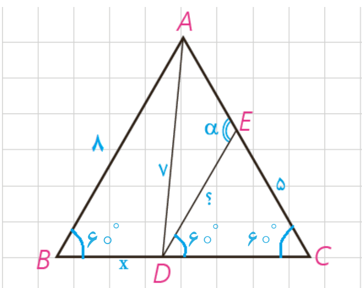
ب) زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

$$\frac{۵\sqrt{۱۳}}{\sin ۶۰^\circ}=\frac{۱۵}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\frac{۱۵\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۵\sqrt{۱۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۱۳}}\approx ۰/۷۲\Rightarrow \hat{C}\approx ۴۶^\circ$$

پ) فاصلهٔ نوک درخت از زمین

$$\sin ۶۰^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{BH}{۱۵}\Rightarrow BH=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۲ــ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D ، که به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟(CD >BD) نقطهٔ E ، که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



$$۷^۲=x^۲+۸^۲-۲\times x\times ۸\times \sin ۶۰^\circ\Rightarrow ۴۹=x^۲+۶۴-۸x$$

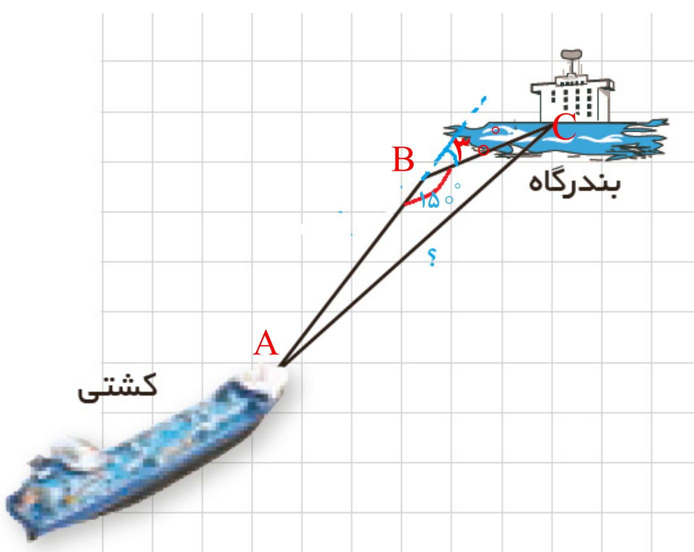
$$\Rightarrow x^۲-۸x+۱۵=۰\Rightarrow (x-۵)(x-۳)=۰\ \Rightarrow x=۵\ ,\ x=۳$$

$$\xrightarrow{BD<DC} BD=۳\quad ,\quad DC=۵$$

$DC=CE=۵$ درنتیجه مثلث DCE متساوی الساقین است و چون یک زاویه ۶۰° دارد پس متساوی الاضلاع است یعنی

$DE=۵$. درمثلث DCE زاویهٔ α یک زاویه خارجی است پس : $\alpha=۶۰^\circ+۶۰^\circ\Rightarrow \alpha=۱۲۰^\circ$

۳ــ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با ۳۰° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می گیرد. فاصلهٔ بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟



$$AB=۶۰\times ۱=۶۰\ \text{km}\quad ,\quad BC=۴۰\times ۰/۵=۲۰\ \text{km}$$

$$AC^۲=۶۰^۲+۲۰^۲-۲\times ۶۰\times ۲۰\times \cos ۱۵۰^\circ$$

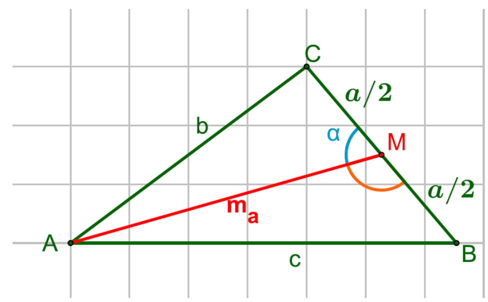
$$=۳۶۰۰+۴۰۰-۲\times ۱۲۰۰\times\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow AC^۲=۴۰۰۰+۱۲۰۰\sqrt{۳}=۴۰۰(۱۰+۳\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow AC=۲۰\sqrt{۱۰+۳\sqrt{۳}}$$

۴ـ در مثلث ABC، میانهٔ AM را رسم کرده‌ایم ($MB = MC = \frac{a}{۲}$). با نوشتن قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث AMB و AMC، $b^۲$ و $c^۲$ را محاسبه، و با جمع کردن دو تساوی حاصل، درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$b^۲ + c^۲ = ۲AM^۲ + \frac{a^۲}{۲} \quad \text{(قضیهٔ میانه‌ها)}$$



$$\overset{\Delta}{ACM}: b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - ۲\times\frac{a}{۲}\times m_a \times \cos\alpha$$

$$b^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ABM}: c^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - ۲\times\frac{c}{۲}\times m_a \times \cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

$$c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ - a.AM.\cos\alpha + \frac{a^۲}{۴} + AM^۲ + a.AM.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

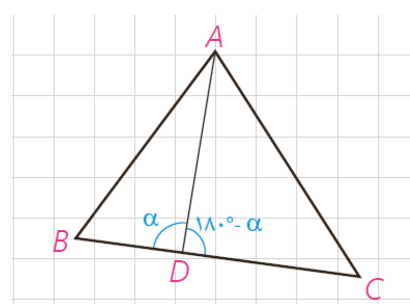
در حالت خاص AB=۴ و AC=۶ و BC=۸، طول میانه AM را به‌دست آورید.

$$AB = c = ۴,\ \ AC = b = ۶\ ,\ \ BC = a = ۸$$

$$b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM \Rightarrow AM = \frac{۲(b^۲ + c^۲) - a^۲}{۴} \Rightarrow AM = \frac{۲(۳۶ + ۱۶) - ۶۴}{۴} \Rightarrow AM = ۱۰$$

۵ـ در مثلث ABC، نقطهٔ دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها در دو مثلث ADB و ADC درستی تساوی زیر را ثابت کنید :

$$AB^۲ . DC + AC^۲ . DB = AD^۲ . BC + DB . DC . BC \quad \text{(قضیهٔ استوارت)}$$



$$\overset{\Delta}{ABD}: AB^۲ = AD^۲ + DB^۲ - ۲AD.DB.\cos\alpha$$

$$\xrightarrow{\times DC} AB^۲.DC = DC.AD^۲ + DC.DB^۲ - ۲DC.AD.DB.\cos\alpha \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲ = AD^۲ + CD^۲ - ۲AD.DC.\cos(۱۸۰^\circ - \alpha)$$

$$\xrightarrow{\times DB} AC^۲.DB = DB.AD^۲ + DB.DC^۲ + ۲DB.AD.DC.\cos\alpha \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} AB^۲.DC + AC^۲.DB = DC.AD^۲ + DC.DB^۲ \cancel{-۲DC.AD.DB.\cos\alpha} + DB.AD^۲ + DB.DC^۲ + \cancel{۲DB.AD.DC.\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow AB^۲.DC + AC^۲.DB = AD^۲(\underbrace{DC + DB}_{BC}) + BD.DC(\underbrace{DC + DB}_{BC})$$

$$\Rightarrow AB^۲.DC + AC^۲.DB = AD^۲.BC + DB.DC.BC$$

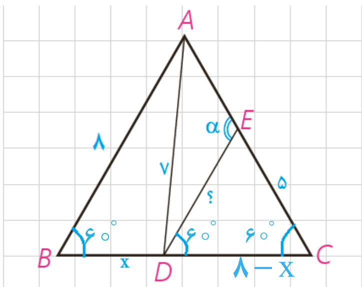
به کمک قضیهٔ استوارت، درستی قضیهٔ میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.

$DC = DB = \frac{a}{۲}\ ,\ AC = b\ ,\ \Rightarrow AB = c$

$\Rightarrow \frac{a}{۲}\times c^{۲} + \frac{a}{۲}\times b^{۲} = AD^{۲}\times a + \frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\times a \Rightarrow \frac{a}{۲}(c^{۲}+b^{۲}) = \frac{a}{۲}(۲AD^{۲}+\frac{a^{۲}}{۲})$

$\Rightarrow b^{۲}+c^{۲} = ۲AD^{۲}+\frac{a^{۲}}{۲}$

۶ــ مسئلهٔ ۲ را بار دیگر، این‌بار به کمک قضیهٔ استوارت حل کنید.



$AB = AC = BC = ۸\ ,\ AD = ۷\ ,\ DB = x\ ,\ DC = x - ۸\ ,\ DB < DC$

$AB^{۲}.DC + AC^{۲}.DB = AD^{۲}.BC + DB.DC.BC$

$\Rightarrow ۶۴(۸-x) + ۶۴x = ۴۹\times۸ + ۸x(۸-x)$

$\Rightarrow ۶۴\times۸ - \cancel{۶۴x} + \cancel{۶۴x} = ۴۹\times۸ + ۸x(۸-x)$

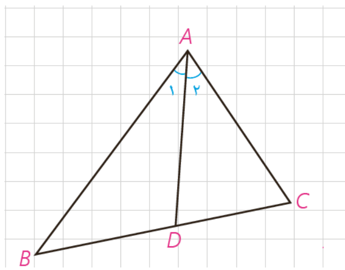
$\xrightarrow{\div ۸} ۶۴ = ۴۹ + ۸x - x^{۲} \Rightarrow x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x-۵) = ۰$

$\Rightarrow x = ۳\ ,\ x = ۵ \xrightarrow{DB<DC} x = DB = ۳\ ,\ DC = ۵$

درس سوم

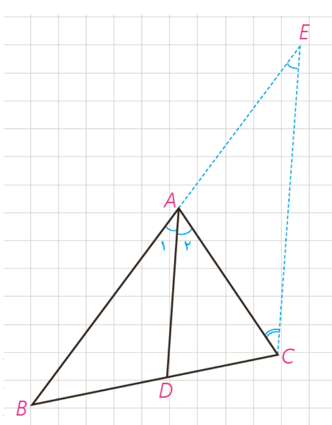
قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیمسازها

۱ــ قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی



قضیه ۱: در هر مثلث، نیمساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.

فرض : $\widehat{A_۱} = \widehat{A_۲}$ حکم : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$



اثبات : مطابق شکل از نقطهٔ C خطی موازی نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ E قطع کند.

الف) چرا $\widehat{A_۱} = \hat{E}$ و چرا $\widehat{A_۲} = \hat{C}$؟

$AD \parallel EC$, BE مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_۱} = \hat{E}$

$AD \parallel EC$, AC مورب $\xrightarrow{\text{ق خطوط موازی}} \widehat{A_۲} = \hat{C}$

ب) با توجّه به فرض، چه نتیجه‌ای دربارهٔ زوایای E و C می‌توان گرفت؟

با توجه به فرض می توان نتیجه گرفت که $\hat{E} = \hat{C}$.

مثلث AEC چه نوع مثلثی است؟

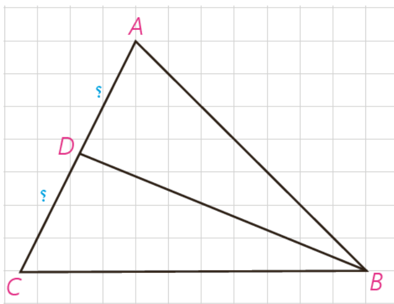
متساوی الساقین است .(اگر در یک مثلث دو زاویه برابر باشند آن مثلث متساوی الساقین است.)

ج) با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث EBC $(AD \parallel EC)$ نسبت $\frac{BD}{CD}$ با کدام نسبت برابر است؟ با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب) اثبات را کامل کنید :

$$AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

یکی از نتایج فوری این قضیه این است که در هر مثلث به سادگی می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند با داشتن طول‌های اضلاع مثلث، محاسبه کرد :

مثال : در مثلث ABC، AB=۷، AC=۵ و BC=۸ است. طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که نیمساز زاویهٔ B روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.



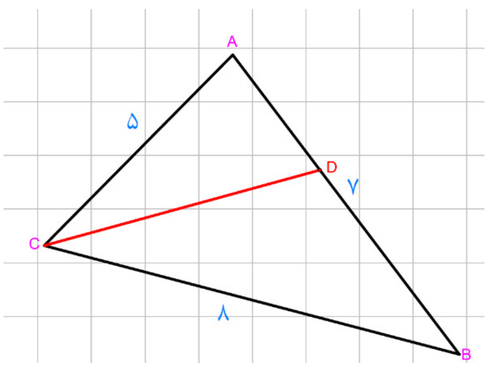
حل :

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=\frac{۷}{۸}\Rightarrow\frac{AD+CD}{CD}=\frac{۷+۸}{۸}\Rightarrow\frac{AC}{CD}=\frac{۱۵}{۸}\Rightarrow\frac{۵}{CD}=\frac{۱۵}{۸}$$

$$CD=\frac{۸\times ۵}{۱۵}=\frac{۸}{۳}\ ,AD=AC-CD=۵-\frac{۸}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نیمساز زاویهٔ C را رسم کنید و طول‌های دو قطعه‌ای را به‌دست آورید که این نیمساز روی AB جدا می‌کند.

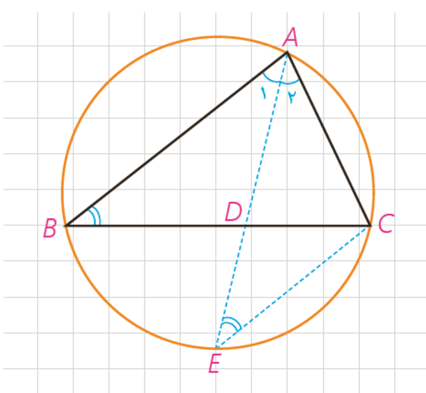


$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{۵}{۸}=\frac{AD}{BD}\Rightarrow\frac{۵+۸}{۸}=\frac{AD+BD}{BD}\Rightarrow\frac{۱۳}{۸}=\frac{۷}{BD}$$

$$BD=\frac{۸\times ۷}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳}\Rightarrow BD=۷-\frac{۵۶}{۱۳}=\frac{۳۵}{۱۳}$$

۲ــ محاسبهٔ طول نیمسازهای زوایای داخلی مثلث

در مثلث ABC برای محاسبهٔ طول نیمساز داخلی زاویهٔ $\hat{A}$ $(\hat{A}_۱=\hat{A}_۲)$، یعنی AD، AD را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در E قطع کند و E را به C وصل می‌کنیم.



الف) چرا $\hat{E}=\hat{B}$؟

زیرا این دو زاویه هردو محاطی هستند و روبه رو به یک کمان (کمان AC) هستند.

ب) چرا مثلث‌های ABD و AEC متشابه‌اند؟

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \hat{B}=\hat{E}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ق اول تشابه}}\overset{\Delta}{ABD}\sim\overset{\Delta}{AEC}$$

پ) نسبت‌های اضلاع متناظر آنها را بنویسید.

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AE}{AB}=\frac{CE}{BD}$$

ت) از تناسب اول نتیجه می‌گیریم :

$$AB.AC = AD.AE = AD(AD+DE) = AD^{۲}+AD.DE$$

و چون $AD.DE = BD.DC$ (چرا؟)

دو وتر AE و BC یکدیگر را در نقطهٔ D درون دایره قطع کرده اند بنا بر قضیه داریم : AD.DE = DB.DC

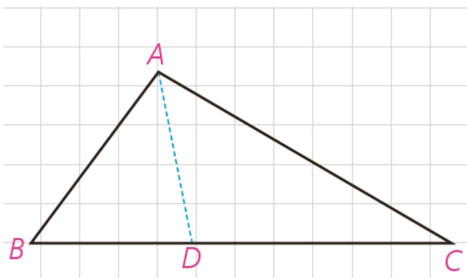
بنابراین :

$$AD^{۲} = AB.AC - BD.DC$$

قضیهٔ ۲: در هر مثلث، مربع اندازهٔ هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل‌ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل‌ضرب اندازه دو قطعه‌ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند.

مثال : در مثلث ABC، AB=۳، AC=۵ و BC=۷ است. طول نیمساز زاویهٔ A را بیابید.

حل : به کمک قضیهٔ (۱) طول‌های BD و CD را به‌دست می‌آوریم :



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BD+CD}{CD} = \frac{۸}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow \frac{۷}{CD} = \frac{۸}{۵} \Rightarrow CD = \frac{۳۵}{۸}\ ,\ BD = ۷ - \frac{۳۵}{۸} = \frac{۲۱}{۸}$$

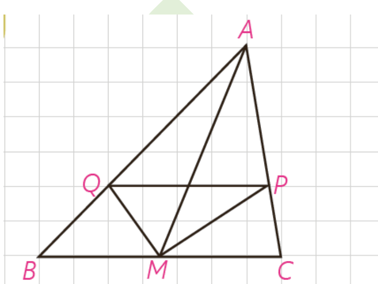
حال با توجه به قضیهٔ (۲) داریم :

$$AD^{۲} = AB.AC - BD.CD = ۳\times۵ - \frac{۳۵}{۸}\times\frac{۲۱}{۸} = ۱۵ - \frac{۷۳۵}{۶۴} = \frac{۲۲۵}{۶۴}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۱۵}{۸}$$

تمرین

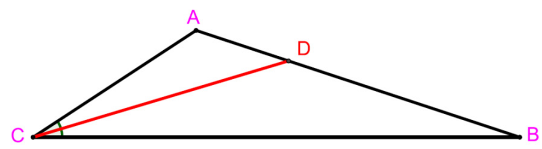
۱ــ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید : PQ||BC



در مثلث AMB پاره خط MQ نیمساز زاویه $\widehat{AMB}$ و در مثلث AMC پاره خط MP نیمساز زاویه $\widehat{AMC}$ است. پس داریم :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} \xrightarrow{MB=MC} \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QB}\\ \frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC} \xrightarrow{\text{عکس ق تالس}} PQ\|BC$$

۲ــ در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۴ و BC=۱۰ است. طول نیمساز زاویهٔ داخلی C را به‌دست آورید.



$$CD^{۲} = AC.BC - AD.BD$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰}{۴} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{۱۰+۴}{۴} = \frac{BD+DA}{DA} \Rightarrow \frac{۱۴}{۴} = \frac{۷}{DA}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{۲۸}{۱۴} = ۲ \Rightarrow BD = ۷ - ۲ = ۵$$

$$CD^{۲} = ۴\times۱۰ - ۲\times۵ = ۳۰ \Rightarrow CD = \sqrt{۳۰}$$

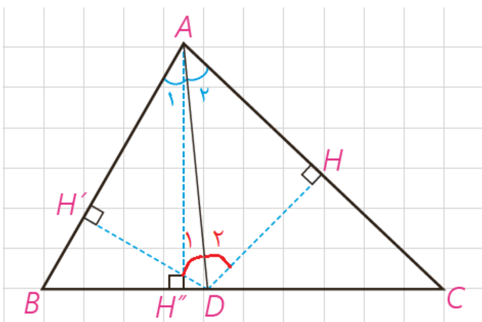
۳ــ با پر کردن جاهای خالی با فرض اینکه در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است، روش دیگری برای اثبات قضیهٔ نیمسازهای زوایای داخلی ارائه کنید:

الف) چرا $DH = DH'$؟

راه اول :

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A_۱}+\widehat{D_۱}=۹۰^\circ\\ \widehat{A_۲}+\widehat{D_۲}=۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A_۱}+\widehat{D_۱}=\widehat{A_۲}+\widehat{D_۲} \xrightarrow{\widehat{A_۱}=\widehat{A_۲}} \widehat{D_۱}=\widehat{D_۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D_۱}=\widehat{D_۲}\\ \widehat{A_۱}=\widehat{A_۲}\\ AD=AD\end{array}\right\} \longrightarrow DH = DH'$$



راه دوم : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است .پس $DH = DH'$

ب)

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}DH' \times AB}{\frac{۱}{۲}DH \times AC} = \frac{AB}{AC} \qquad (۱)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{۱}{۲}BD \times AH''}{\frac{۱}{۲}CD \times AH''} = \frac{BD}{CD} \qquad (۲)$$

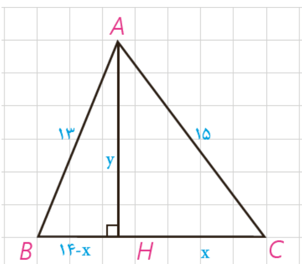
از مقایسهٔ (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

درس چهارم

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

با مسئله زیر در کتاب هندسهٔ ۱ مواجه شدید :

در مثلث ABC با اضلاع ۱۳، ۱۴، ۱۵، ارتفاع AH رسم شده است. به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های AHB و AHC اندازه‌های x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را نیز محاسبه کنید :



به عنوان یادآوری، مسئله را با هم حل می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} CH^۲+AH^۲=AC^۲ \\ BH^۲+AH^۲=AB^۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^۲+y^۲=۲۲۵ \\ (۱۴-x)^۲+y^۲=۱۶۹ \end{array}\right.$$

طرفین این دوتساوی را از هم کم می‌کنیم که با حذف $y^۲$ معادله‌ای بر حسب x به دست می‌آید :

$$x^۲-(۱۴-x)^۲=۵۶ \quad \Rightarrow \quad x^۲-۱۹۶-x^۲+۲۸x=۵۶$$

$$\Rightarrow \quad x=۹ \quad , \quad y=۱۲ \quad , \quad S=\frac{۱}{۲}BC.AH=۸۴$$

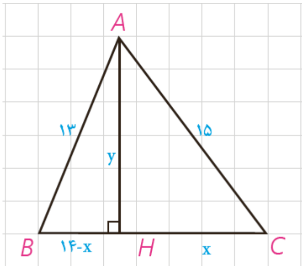
اگر همین روش را در حالت کلّی در مثلث ABC، که BC=a، AB=c و AC=b به کار ببریم، نتیجه می‌شود :

$$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} \quad \text{(دستور هرون)}$$

که در این دستور $P=\frac{a+b+c}{۲}$ نصف محیط مثلث است.

(اثبات کامل این دستور را می‌توانید در مجلهٔ ریاضی انتهای فصل ببینید.)

مثال : مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است با :



$$۲P=۱۳+۱۴+۱۵=۴۲ \Rightarrow P=۲۱$$

$$s=\sqrt{۲۱\times ۶\times ۷\times ۸}=\sqrt{۷^{۲}\times ۳^{۲}\times ۲^{۴}}=۸۴$$

و طول‌های سه ارتفاع مثلث نیز برابرند با :

$$h_a=\frac{۲s}{a}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۴}=۱۲ \quad h_b=\frac{۲s}{b}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۵}=\frac{۵۶}{۵}\ ,\ h_c=\frac{۲s}{c}=\frac{۲\times ۸۴}{۱۳}=\frac{۱۶۸}{۱۳}$$

کار در کلاس

چهارضلعی ABCD یک مزرعهٔ کشاورزی را نشان می‌دهد که تنها دو ضلع آن بر هم عمودند. طول‌های اضلاع زمین به سادگی قابل اندازه‌گیری، و اندازه‌های آنها در شکل مشخص شده‌است. با انجام دادن مراحل زیر مساحت این زمین را به‌دست آورید :

الف) اگر B را به D وصل کنیم، طول BD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

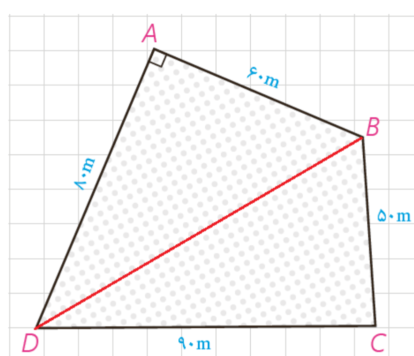
$$BD^{۲}=۶۰^{۲}+۸۰^{۲}=۳۶۰۰+۶۴۰۰=۱۰۰۰۰ \Rightarrow BD=۱۰۰$$

ب) مساحت مثلث ABD را چگونه به‌دست می‌آورید؟

مساحت برابر است با نصف حاصلضرب اضلاع قائمه :

$$S_{ABD}=\frac{۶۰\times ۸۰}{۲}=۲۴۰۰$$

پ) مساحت مثلث CBD را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.



$$P=\frac{۵۰+۹۰+۱۰۰}{۲}=۱۲۰\ ,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-C)}$$

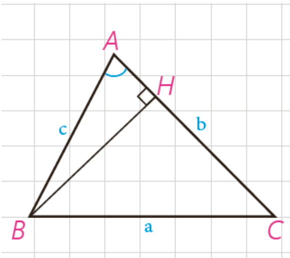
$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۲۰\times(۱۲۰-۱۰۰)\times(۱۲۰-۹۰)\times(۱۲۰-۵۰)}$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{۱۲۰\times ۲۰\times ۳۰\times ۷۰}=\sqrt{۳۶\times ۱۴\times ۱۰۰۰۰}=۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

ت) مساحت زمین کشاورزی برابر است با :

$$S=۲۴۰۰+۶۰۰\sqrt{۱۴}$$

فعالیت



می‌خواهیم دستور دیگری برای محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی به‌دست آوریم.

۱ــ در مثلث ABC، ارتفاع BH را رسم کرده‌ایم.

$$\sin A = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c.\sin A$$

۲ــ مساحت مثلث ABC را به کمک ارتفاع BH بنویسید.

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AC \times BH = \frac{۱}{۲} bc.\sin A$$

نتیجه

مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آنها:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} bc.\sin A = \frac{۱}{۲} ab.\sin C = \frac{۱}{۲} ac.\sin B$$

کار در کلاس

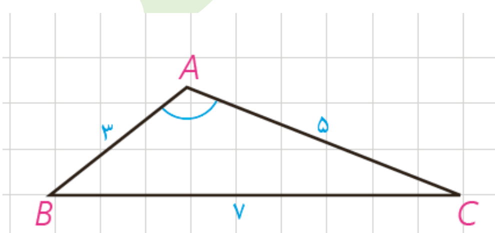
۱ــ مثلث ABC با اضلاع ۳ و ۵ و ۷ مفروض است. مساحت مثلث را با استفاده از دستور هرون به‌دست آورید.

$$P = \frac{۵ + ۷ + ۳}{۲} = \frac{۱۵}{۲} \Rightarrow S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times (\frac{۱۵}{۲} - ۵) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۷) \times (\frac{۱۵}{۲} - ۳)}$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{۱۵}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۹}{۲}} = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳}$$

۲ــ مساحت مثلث را با استفاده از دستور $S = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin A$ بنویسید.

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۵ \times \sin A = \frac{۱۵}{۲} \sin A$$

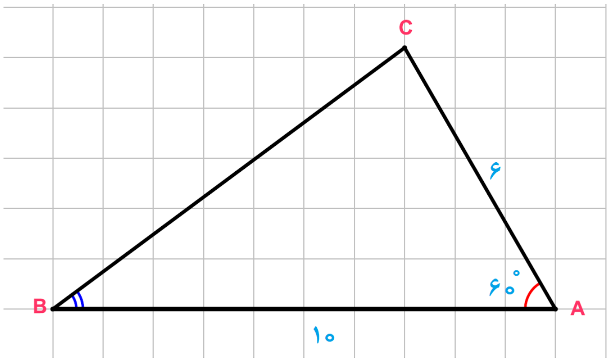


۳ــ از مقایسهٔ نتایج ۱ و ۲، اندازهٔ زاویهٔ منفرجهٔ $\hat{A}$ را به‌دست آورید.

$$\frac{۱۵}{۲} \sin A = \frac{۱۵}{۴}\sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ$$

تمرین

۱ــ در مثلث ABC، AB=۱۰، AC=۶ و $\hat{A}=۶۰^\circ$.



الف) طول BC را به‌دست آورید.

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲\times ۶\times ۱۰\times \frac{۱}{۲} = ۷۶ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۹}$$

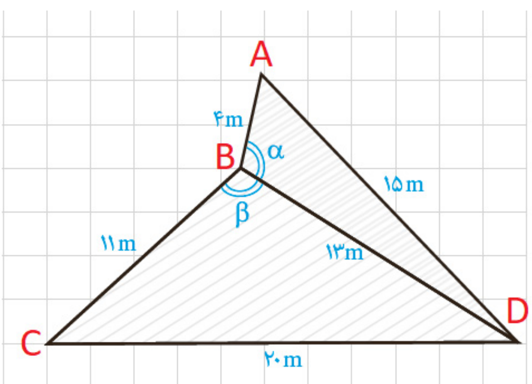
ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

$$S = \frac{۱}{۲}AC.AB.\sin A \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}\times ۶\times ۱۰\times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

پ) مقدار sinB را پیدا کنید.

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a} \Rightarrow \frac{\sin B}{۶} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲\sqrt{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \Rightarrow \sin B = \frac{۳\sqrt{۵۷}}{۳۸}$$

۲ــ دو زمین کوچک به شکل مثلث با یک دیوار به طول ۱۳ متر مطابق شکل از هم جدا شده‌اند. ابعاد زمین‌ها هم در شکل مشخص شده‌اند. اگر با برداشتن دیوار، دو زمین به یک زمین تبدیل شود، مساحت آن چقدر می‌شود؟



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

$$P_{ABD} = \frac{۴+۱۳+۱۵}{۲} = ۱۶\ m$$

$$P_{BCD} = \frac{۱۱+۱۳+۲۰}{۲} = ۲۲\ m$$

$$S_{ABD} = \sqrt{۱۶\times ۱۲\times ۳\times ۱} = ۲۴\ m^۲$$

$$S_{BCD} = \sqrt{۲۲\times ۱۱\times ۹\times ۲} = ۶۶\ m^۲$$

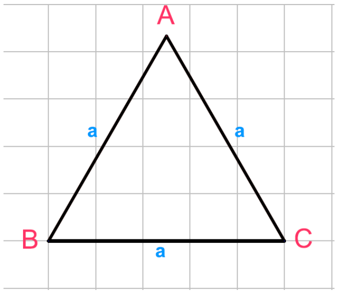
$$S_{ABCD} = ۲۴ + ۶۶ = ۹۰\ m^۲$$

نشان دهید دیوار مشترک با اضلاع ۴ متری و ۱۱ متری زاویه‌های برابر می‌سازد.

$(\alpha=\beta)$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABD} = \frac{۱}{۲}AB.BD.\sin\alpha \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۱۳\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱۲}{۱۳} \\ S_{BCD} = \frac{۱}{۲}BC.BD.\sin\beta \Rightarrow ۶۶ = \frac{۱}{۲}\times ۱۱\times ۱۳\sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{۱۲}{۱۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\beta$$

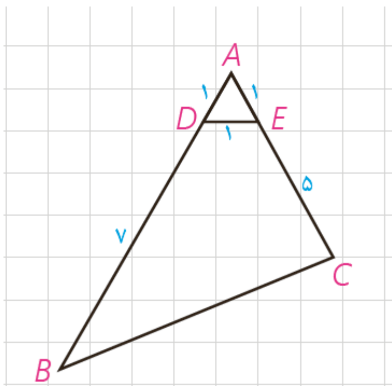
۳ـ دستور محاسبهٔ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون به‌دست آورید.



$$AB = AC = BC = a \Rightarrow P_{ABC} = \frac{۳a}{۲}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times (\frac{۳a}{۲} - a)^۳} = \sqrt{\frac{۳a}{۲} \times (\frac{a}{۲})^۳} = \sqrt{\frac{۳a^۴}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

۴ـ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی DECB را بیابید.



با توجه به این که مثلث ADE متساوی الساقین است پس $\widehat{DAE} = ۶۰^\circ$ در نتیجه :

$$BC^۲ = AC^۲ + AB^۲ - ۲AC.AB.\cos A$$

$$BC^۲ = ۳۶ + ۶۴ - ۲ \times ۶ \times ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۵۲ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۳}$$

$$S_{BCED} = S_{ABC} - S_{ADE}$$

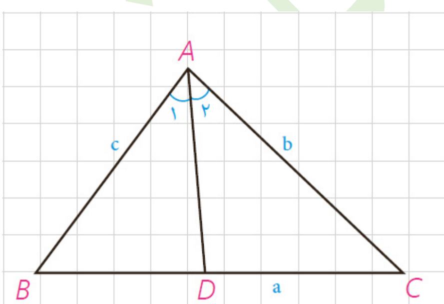
$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲}.AB.AC.\sin A \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۶ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \times ۱^۲ = S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_{BCED} = ۱۲\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۴۷}{۴}\sqrt{۳}$$

۵ـ در شکل، AD نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ است.

با پر کردن جاهای خالی، دستوری دیگر برای محاسبهٔ طول نیمساز زاویهٔ A به‌دست آورید.



$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$$

$$\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin A = \frac{۱}{۲}AB \times AD \times \sin\frac{A}{۲} + \frac{۱}{۲}AC \times AD \times \sin\frac{A}{۲}$$

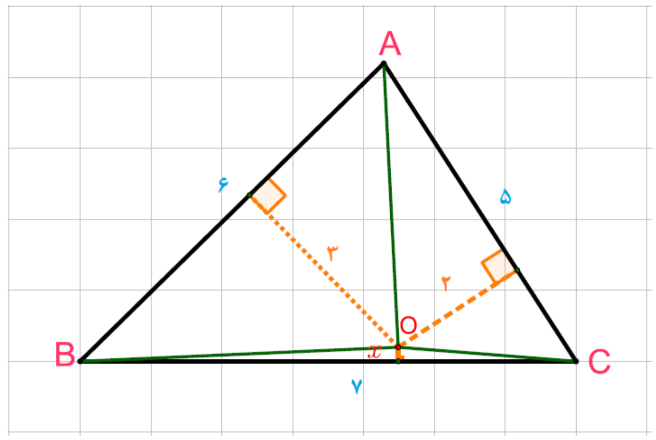
$$\Rightarrow AB.AC.\sin A = AD.\sin\frac{A}{۲}(AB + AC)$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB.AC.\sin A}{(AB + AC)\sin\frac{A}{۲}} = \frac{۲AB.AC.\sin\frac{A}{۲}\cos\frac{A}{۲}}{(AB + AC)\sin\frac{A}{۲}}$$

$\Rightarrow AD = ..d_a \Rightarrow$ (نیمساز رأس A) $d_a = \dfrac{۲bc.\cos\frac{A}{۲}}{b + c}$

۶ــ در مثلث ABC به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶، به فاصلهٔ ۲ و ۳ سانتی‌متر است از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

راهنمایی: از مساحت مثلث استفاده کنید.



$S_{ABC}=S_{OAB}+S_{OAC}+S_{OBC}$

$P_{ABC}=\frac{۵+۶+۷}{۲}=۹$

$S_{ABC}=\sqrt{۹\times۲\times۳\times۴}=۶\sqrt{۶}$

$S_{AOB}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۳=۹$

$S_{AOC}=\frac{۱}{۲}\times۵\times۲=۵$

$S_{BOC}=\frac{۱}{۲}\times۷\times x=\frac{۷}{۲}x$

$$۶\sqrt{۶}=۹+۵+\frac{۷}{۲}x\Rightarrow ۶\sqrt{۶}-۱۴=\frac{۷}{۲}x\Rightarrow x=\frac{۲}{۷}(۶\sqrt{۶}-۱۴)\approx ۰/۲$$

۷ــ در شکل، اولاً اندازهٔ زاویهٔ A را به‌دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی ABCD را بیابید. **راهنمایی:** B را به D وصل کنید.

مثلث BCD متساوی الساقین است و با توجه به اندازهٔ زاویه C ، اندازهٔ دو زاویه دیگر هرکدام ۳۰° خواهد بود . در این مثلث ارتفاع CH را رسم می کنیم. در مثلث قائم الزاویه CHD ، $\widehat{CDH}=۳۰^\circ$ در نتیجه : $CH=\frac{۷}{۲}$

$$\left.\begin{aligned}S_{BCD}&=\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲}\times BD=\frac{۷}{۴}BD\\ S_{BCD}&=\frac{۱}{۲}\times۷\times۷\times\sin۱۲۰^\circ=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{۷}{۴}BD=\frac{۴۹\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow BD=۷\sqrt{۳}$$

$P_{ABD}=\frac{۱۱+۱۳+۷\sqrt{۳}}{۲}=۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}$

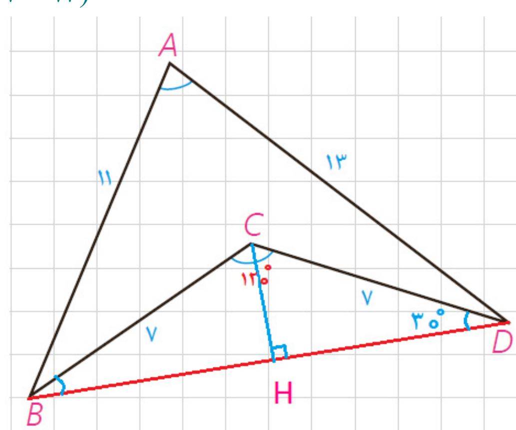
$S_{ABD}=\sqrt{(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳})(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۷\sqrt{۳})(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱۱)(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱۳)}$

$S_{ABD}=\sqrt{(۱۲+\frac{۷}{۲}\sqrt{۳})(۱۲-\frac{۷}{۲}\sqrt{۳})(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}+۱)(\frac{۷}{۲}\sqrt{۳}-۱)}$

$S_{ABD}=\sqrt{(۱۴۴-\frac{۱۷۴}{۴})(\frac{۱۴۷}{۴}-۱)}=\frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}\qquad(۱)$

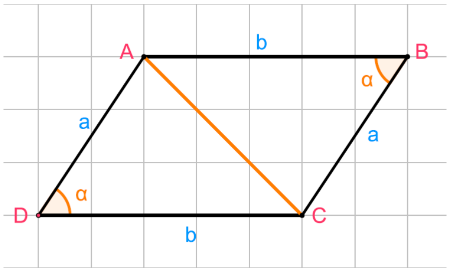
$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}\times۱۱\times۱۳\times\sin A=\frac{۱۴۳}{۲}\sin A\qquad(۲)$

$\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۱۴۳}{۲}\sin A=\frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}\Rightarrow\sin A=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\widehat{A}=۶۰^\circ$



$S_{ABCD}=S_{ABD}-S_{BCD}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{۱۴۳}{۴}\sqrt{۳}-\frac{۴۹}{۴}\sqrt{۳}=\frac{۹۴}{۴}\sqrt{۳}$

۸ــ ثابت کنید مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.



با توجه به خواص متوازی الاضلاع داریم :

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\times\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin\alpha \Rightarrow S_{ABCD} = a.b\sin\alpha$$

۹ــ به کمک قضیهٔ کسینوس‌ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $a^2>b^2+c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A}>90^\circ$

$$\hat{A}>90^\circ \Leftrightarrow \cos A<0 \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A<0 \Leftrightarrow -bc.\cos A>0$$

$$\underset{-(b^2+c^2)}{\overset{+(b^2+c^2)}{\rightleftarrows}} b^2+c^2-bc.\cos A>b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2>b^2+c^2$$

ب) $a^2<b^2+c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A}<90^\circ$

$$\hat{A}<90^\circ \Leftrightarrow \cos A>0 \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A>0 \Leftrightarrow -bc.\cos A<0$$

$$\underset{-(b^2+c^2)}{\overset{+(b^2+c^2)}{\rightleftarrows}} b^2+c^2-bc.\cos A<b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2<b^2+c^2$$

پ) $a^2=b^2+c^2$ اگر و تنها اگر $\hat{A}=90^\circ$

$$\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow \cos A=0 \underset{\div bc}{\overset{\times bc}{\rightleftarrows}} bc.\cos A=0 \Leftrightarrow -bc.\cos A=0$$

$$\underset{-(b^2+c^2)}{\overset{+(b^2+c^2)}{\rightleftarrows}} b^2+c^2-bc.\cos A=b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2$$

۱۰ــ به کمک نتیجهٔ تمرین ۹، حاده(تند)، قائمه یا منفرجه(باز) بودن زاویهٔ A را در هر یک از مثلث‌های زیر تعیین کنید :

الف) AB=۱۰ , AC=۶ , BC=۹

$a=9\ ,\ b=6\ ,\ c=10$

$a^2=81\quad ,\quad b^2+c^2=136 \Rightarrow a^2<b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}<90^\circ$

ب) AB=۸ , AC=۴ , BC=۹

$a=9\ ,\ b=4\ ,\ c=8$

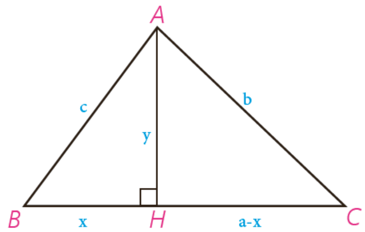
$a^2=81\quad ,\quad b^2+c^2=80 \Rightarrow a^2>b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}>90^\circ$

پ) AB=۸ , AC=۱۵ , BC=۱۷

$a=17\ ,\ b=15\ ,\ c=8$

$a^2=289\quad ,\quad b^2+c^2=289 \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$

اثبات دستور هرون (برای محاسبهٔ مساحت مثلث)



در مثلث ABC، AB=c و AC=b و AH=y و BC=a و BH=x و CH=a−x. با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH و تفاضل روابط به‌دست آمده خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x^{۲}+y^{۲}=c^{۲} \\ (a-x)^{۲}+y^{۲}=b^{۲} \end{cases} \Rightarrow b^{۲}-c^{۲}=(a-x)^{۲}-x^{۲}=a^{۲}+x^{۲}-۲ax-x^{۲}= a^{۲}-۲ax \;\Rightarrow\; x=\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲a} \;\Rightarrow$$

$$y=\sqrt{c^{۲}-x^{۲}}=\sqrt{c^{۲}-\left(\frac{a^{۲}+c^{۲}-b^{۲}}{۲a}\right)^{۲}}$$

با ساده کردن این عبارت جبری و تجزیهٔ آن به کمک اتحادهای جبری نتیجه می‌شود :

$$y=AH=\sqrt{\frac{۴a^{۲}c^{۲}-(a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})^{۲}}{۴a^{۲}}}=\frac{۱}{۲a}\sqrt{(۲ac+a^{۲}+c^{۲}-b^{۲})(۲ac-a^{۲}-c^{۲}+b^{۲})}$$

$$=\frac{۱}{۲a}\sqrt{\left[(a+c)^{۲}-b^{۲}\right]\left[b^{۲}-(a-c)^{۲}\right]}=$$

$$\frac{۱}{۲a}\sqrt{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}$$

حال با فرض a+b+c=۲p خواهیم داشت :

$$a+c-b=a+c+b-۲b=۲p-۲b=۲(p-b)$$

و به همین صورت :

$$b+c-a=۲(p-a)\quad,\quad b+a-c=۲(p-c)$$

و بنابراین :

$$AH=\frac{۱}{۲a}\sqrt{۲p\times ۲(p-a)\times ۲(p-b)\times ۲(p-c)}=$$

$$\frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad,\quad S=\frac{۱}{۲}AH.a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$