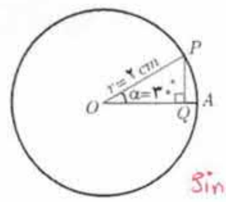
درس ۱

رادیان

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱ دایرهٔ مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

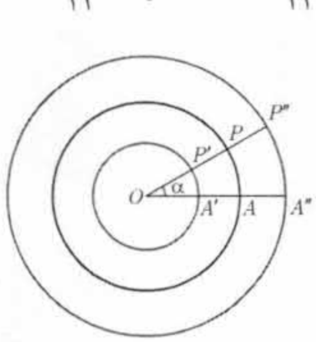
اندازه ضلع PQ در مثلث $\overset{\Delta}{OPQ}$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سال گذشته به‌دست آورید.

$\sin\alpha = \frac{PQ}{OP} \rightarrow \sin 30 = \frac{PQ}{2} \rightarrow PQ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

۲ باتوجه به اینکه کمان 30° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی $\widehat{PA}$) را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$\rightarrow \frac{1}{360} \times 30 = \frac{1}{12}$

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3}\ cm$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را که روبه‌رو به زاویه $\alpha=30^\circ$ هستند به‌دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 1 = \frac{\pi}{6}\ cm$$

$$\widehat{P''A''} = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 3 = \frac{\pi}{2}\ cm$$

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

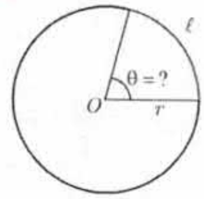
$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6} \qquad \frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\frac{\pi}{2}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

پ) اگر در شکل صفحهٔ قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

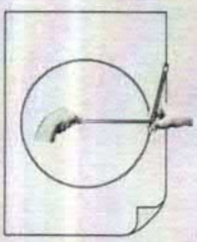
$$\frac{\frac{1}{12}\times 2\pi \times r}{r}=\dots\frac{\pi}{6}\dots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه °۳۰ به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت ...$\frac{\pi}{6}$... است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

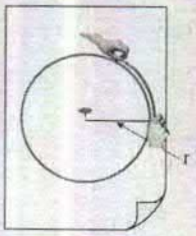
۳ در یک دایره به شعاع r، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازهٔ زاویهٔ θ تقریباً چند درجه است؟ (از نقاله استفاده کنید) $\frac{L}{r}=1$ Rad



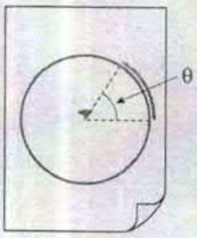
$1_{Rad}=۵۷{,}۳$ deg



به کمک یک تکه نخ یک دایره رسم کنید.



نخ را بر روی محیط دایره قرار دهید.

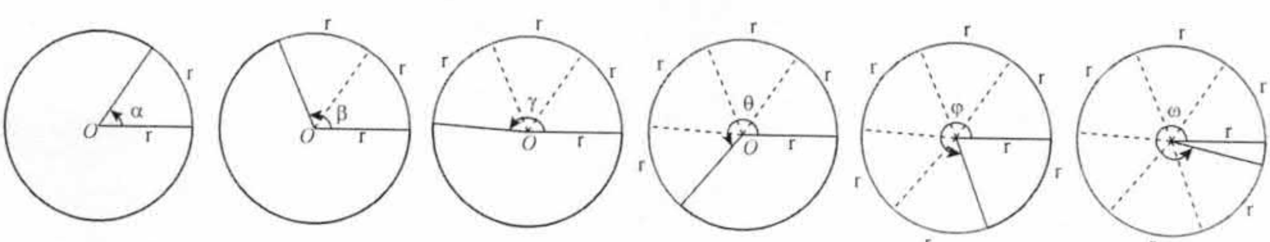


ابتدا و انتهای نخ را به مرکز وصل کنید تا زاویه‌ای مرکزی به‌وجود آید. توضیح دهید چرا این زاویه یک رادیان است.

همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازهٔ زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازهٔ زاویهٔ θ برابر ۱ **رادیان** است.

> یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است. معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



$\alpha=\frac{r}{r}=1\ rad$ $\quad\beta=\frac{2r}{r}=2\ rad$ $\quad\gamma=\frac{3r}{r}=3\ rad$ $\quad\theta=\frac{4r}{r}=4\ rad$ $\quad\varphi=\frac{5r}{r}=5\ rad$ $\quad\omega=\frac{6r}{r}=6\ rad$

❖ **مثال :** اندازه یک زاویهٔ نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائمه (90°) برحسب رادیان چقدر است؟

❖ **حل :** می‌دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم :

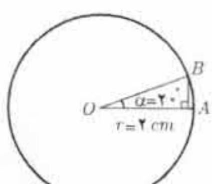
$$\frac{\frac{2\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \ rad$$

پس یک زاویه 180° برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس :

$$\frac{\frac{2\pi r}{4}}{r} = \frac{\frac{\pi}{2} r}{r} = \frac{\pi}{2} \ rad$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta = \frac{l}{r}$$



❖ **مثال :** در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را برحسب رادیان به‌دست آورید، سپس طول $\widehat{AB}$ را پیدا کنید.

❖ **حل :** از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویهٔ 180° برابر π رادیان است. بنابراین داریم :

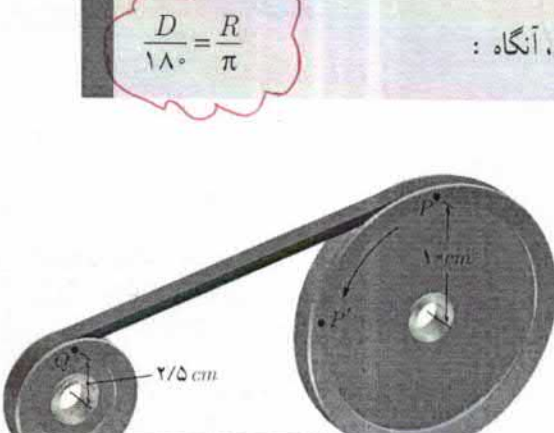
$$\frac{20}{\alpha\ (\text{برحسب رادیان})} = \frac{180}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{20\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \ rad$$

پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{9}$ رادیان است. اکنون برای به‌دست آوردن طول $\widehat{AB}$ داریم :

$$\alpha = \frac{\widehat{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{9} = \frac{\widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{AB} = \frac{2\pi}{9} cm$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$



❖ **مثال :** در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $10\,cm$ و $2/5cm$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطهٔ P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi rad \simeq 3/14 rad$)

❖ **حل :** ابتدا مسافتی را که نقطهٔ P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی می‌کند به‌دست می‌آوریم.

$$\theta = \frac{\widehat{PP'}}{r} \Rightarrow \widehat{PP'} = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi \ cm = 15/7 cm$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقرهٔ کوچک‌تر نیز $5\pi \ cm$ حرکت می‌کند. برای این قرقره داریم :

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{5\pi}{2/5} = \frac{5\pi}{\frac{5}{2}} = 2\pi \ rad$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی‌گردد.

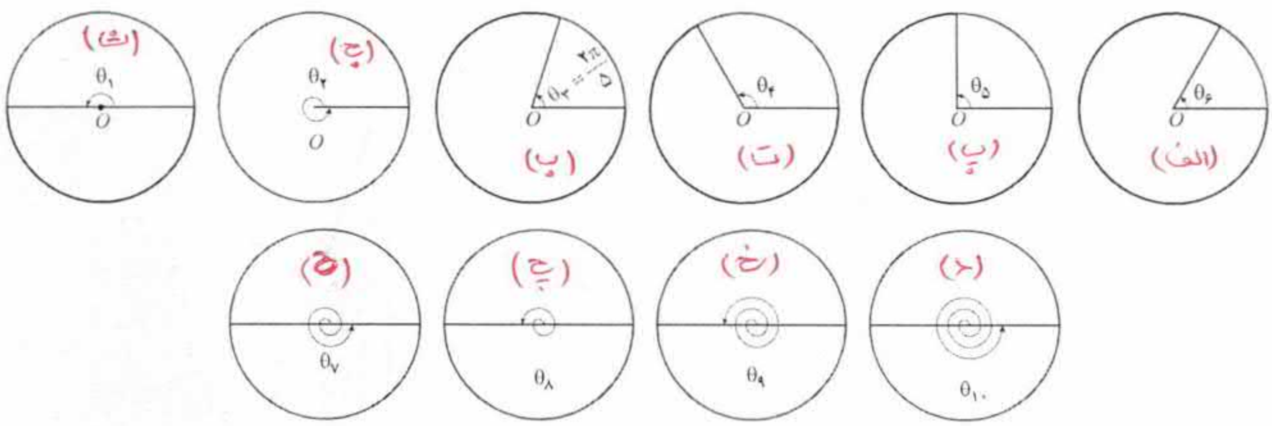
کار در کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

زاویه برحسب درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	390°	420°
زاویه برحسب رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

۲ در زیر، اندازهٔ برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ث) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π چ) 3π ح) 4π خ) 5π د) 6π



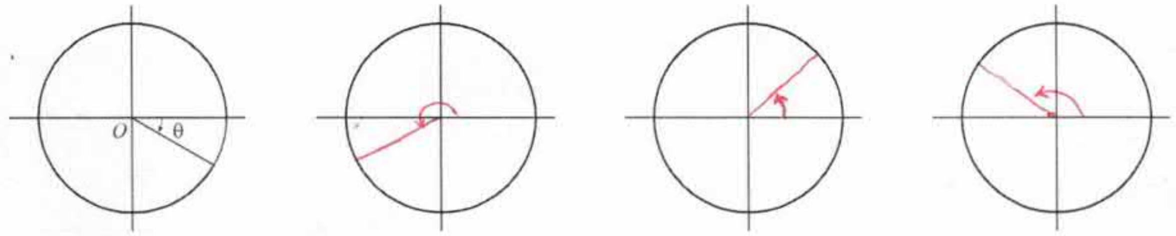
۳ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته‌شده را در جاهای خالی بنویسید.

θ(رادیان) / نسبت	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	تعریف نشده	0	0
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0	تعریف نشده	تعریف نشده

شایسته است به این جدول زاویه‌ی π رادیان هم اضافه شود.

تمرین

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} =$

انتهای کمان در ربع دوم است.

$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} =$

انتهای کمان در ربع اول است.

$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} =$

انتهای کمان در ربع سوم است.

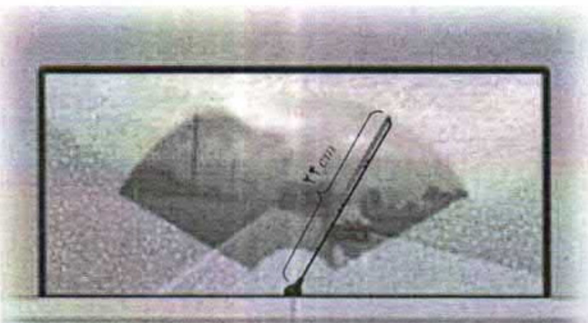
$\theta = -\frac{\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع چهارم است.

۲ طول برف پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه °۱۲۰ طی می‌کند. $(\pi \simeq 3/14)$

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

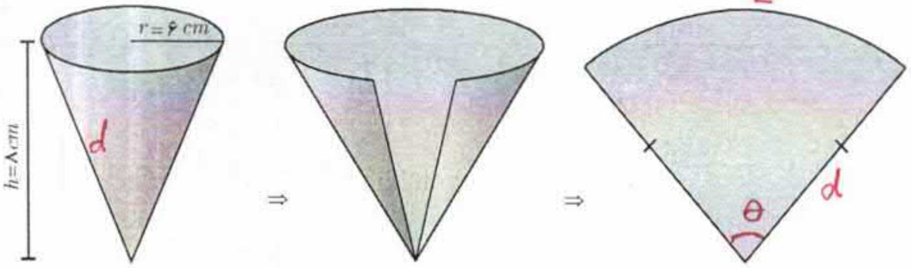


الف) $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{2\pi}{3}$

ب) $\frac{2\pi}{3} = \frac{L}{24}$ $\quad \theta = \frac{L}{r}$

$\rightarrow L = \frac{2\pi \times 24}{3} = 16\pi \approx 50{,}24$ cm

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r = 6\ cm$ و ارتفاع آن $h = 8cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[1] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



۱ـ به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.

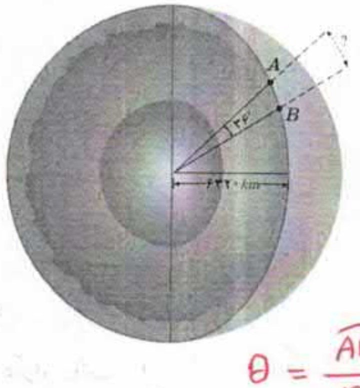
$d^2 = r^2 + h^2$

$\rightarrow d^2 = 36 + 64 = 100$

$\rightarrow d = 10$

طول کمان = محیط قاعده مخروط $= 2\pi r = 12\pi$

$\theta = \frac{L}{d} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6}{5}\pi$ Rad



۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

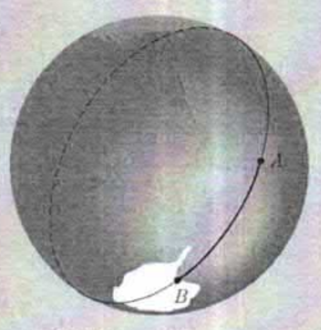
$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۳۶}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۱}{۵} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{\pi}{۵}$ rad

اندازه زاویه برحسب رادیان

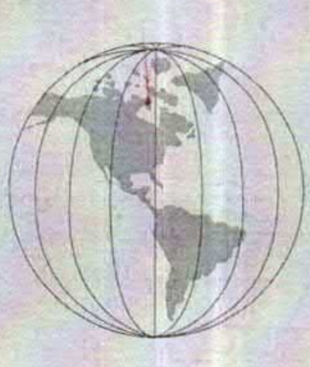
$\theta = \frac{\widehat{AB}}{r} \rightarrow \frac{\pi}{۵} = \frac{\widehat{AB}}{۶۳۲۰} \rightarrow \widehat{AB} = \frac{\pi}{۵} \times ۶۳۲۰ = ۳۹۶۸٫۹۶ \simeq ۳۹۶۹$ Km

خواندنی

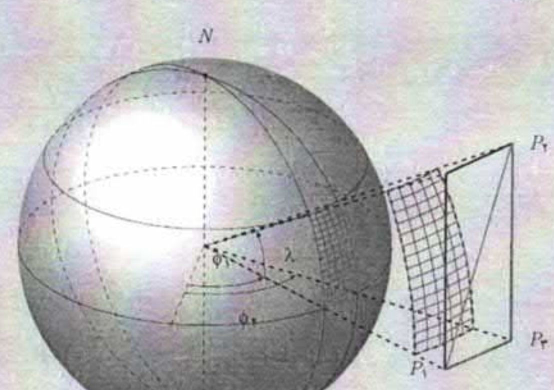
به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کرهٔ زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف‌النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به‌دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این‌صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایرهٔ عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف‌النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف‌النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین



نصف‌النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.