

مشتق پذیری و پیوستگی

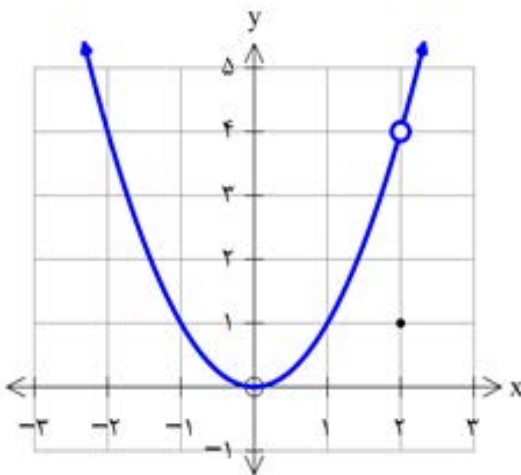
در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است. در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است. در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم :



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{4 - 1}{0} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

چون در این نقطه پیوسته نیست پس خط مماس وجود ندارد

اگر برای بررسی مشتق پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار بگیریم :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} =$$

فصل چهارم: مشتق ۸۵

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

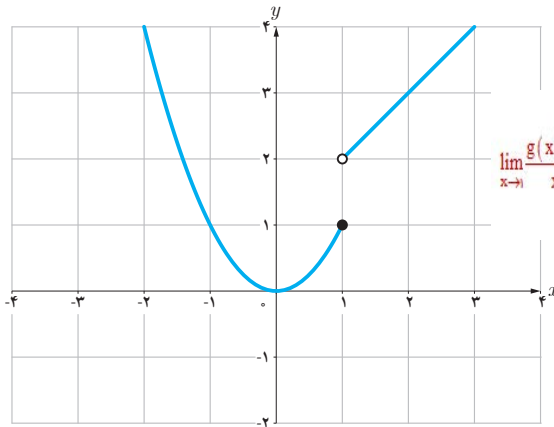
ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

بله

کاردرکلاس

تابع g (شکل زیر) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ چون در این نقطه تابع پیوسته نیست



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x - 1} = \frac{1}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow g'(1) \text{ وجود ندارد}$$

توابع f و g فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x = 2$ و $x = 1$ ناپیوسته بودند و همان گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه : اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آن گاه f در a پیوسته است.

اثبات : کافی است نشان دهیم : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} ((x - a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می توان نتیجه گرفت که :

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن گاه f در $x = a$ مشتق پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی توان مشتق پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

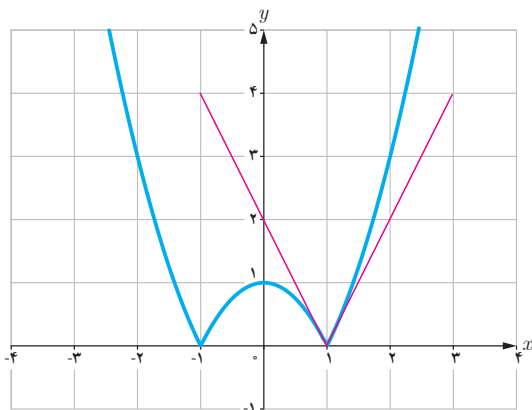
❁ **مثال :** مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خطهای مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = 1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = 1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتقهای راست و چپ f در $x = 1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط‌های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می‌نامیم.

در حقیقت:

$$f'_-(1) = \text{شیب نیم مماس چپ}$$

$$f'_+(1) = \text{شیب نیم مماس راست}$$

معادله این نیم مماس‌ها نیز به ترتیب عبارت‌اند از:

$$y - 0 = 2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2, \quad x \geq 1$$

$$y - 0 = -2(x-1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2, \quad x \leq 1$$

می‌باشند.

کاردرکلاس

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نیست پس مشتق پذیر نیست

شان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس‌های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x=a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر

تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

حل کار در کلاس:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - 1|}{x + 1}$$

حد راست

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x-1) = -2$$

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نیست پس مشتق پذیر نیست

حد چپ

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -(x-1) = 2$$

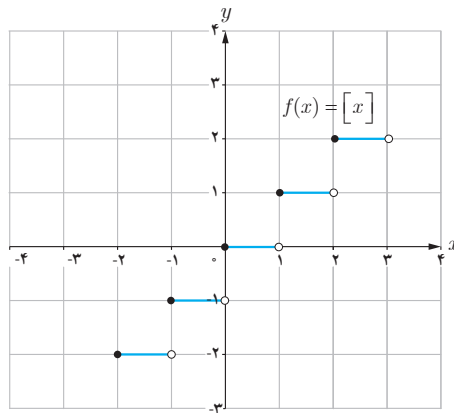
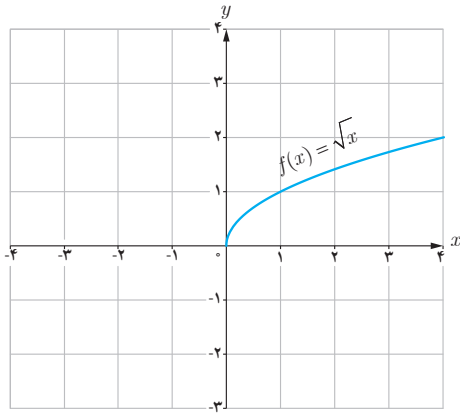
$$f'_+(-1) = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x+1) \rightarrow y = -2x - 2$$

معادله نیم مماس چپ

$$f'_-(-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x+1) \rightarrow y = 2x + 2$$

معادله نیم مماس راست

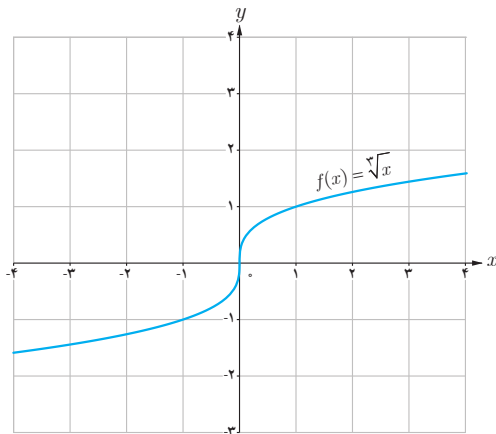
❁ **مثال :** توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

❁ **مثال :** تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می گیریم. مشتق پذیری این تابع را

در $x = 0$ بررسی کنید.

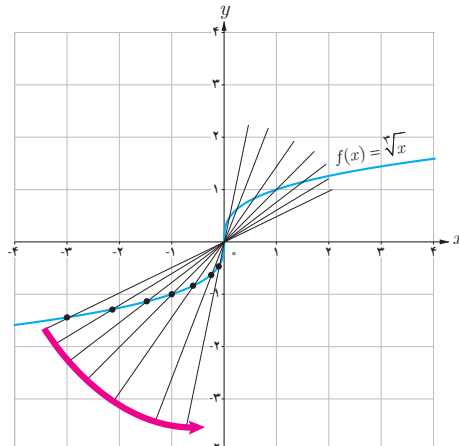
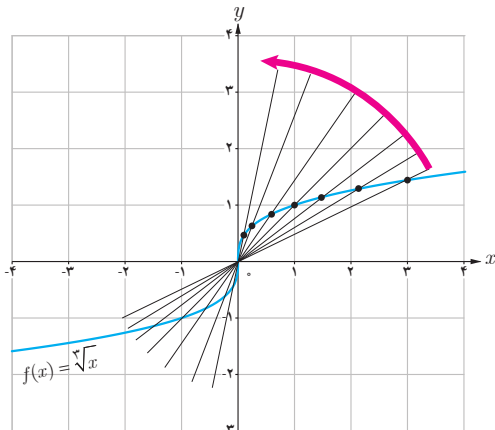


$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل ها نشان می دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می شویم خطهای قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «مماس قائم»

منحنی می نامیم.



اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$ در این صورت خط $x=a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

تابع f در $x=a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد!

۱ در f پیوسته نباشد.

۲ در f پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

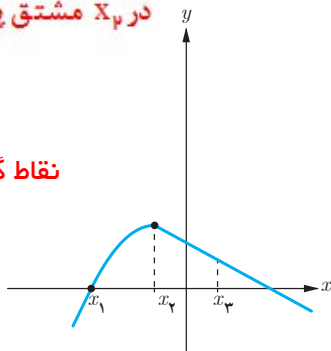
ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

کاردرکلاس

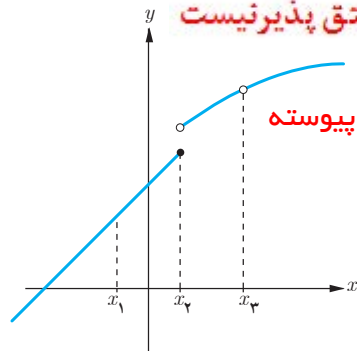
در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

در x_1 مشتق پذیر نیست



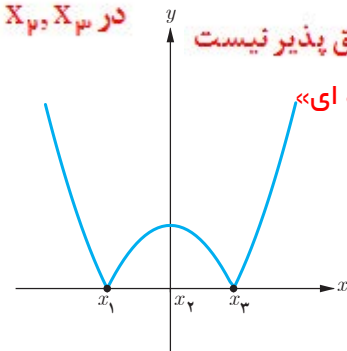
نقاط گوشه‌ای

در x_2, x_3 مشتق پذیر نیست

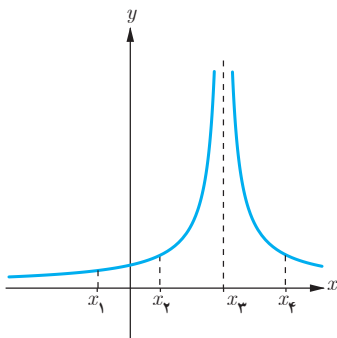


ناپیوسته

در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست

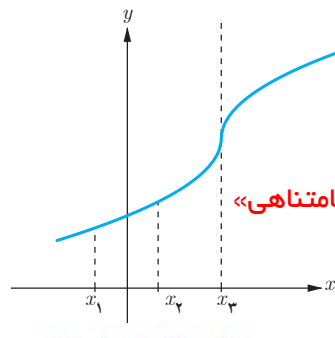


«نقاط گوشه‌ای»



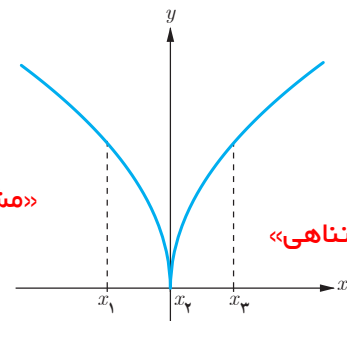
در x_3 مشتق پذیر نیست

نقطه ناپیوستگی



در x_3 مشتق پذیر نیست

«مشتق نامتناهی»



در x_3 مشتق پذیر نیست

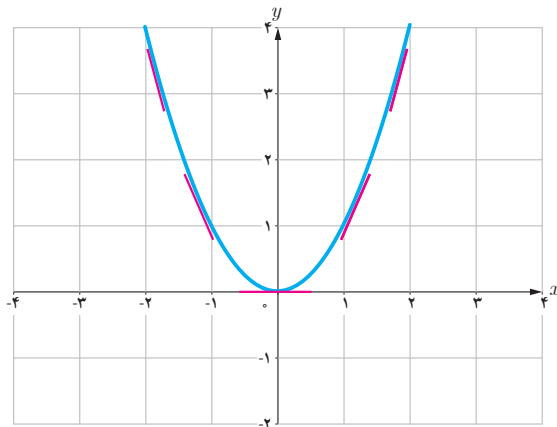
«مشتق نامتناهی»

۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت



تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.

جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده‌اند).

x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	۲
$f'(x)$	-۶	-۴	-۲	۰	۱	$2\sqrt{3}$	۴

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می‌دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می‌زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می‌نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

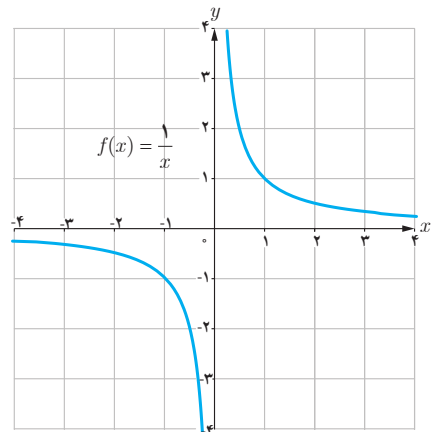
بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \text{ و } f'(5^\circ) = 10^\circ$$

❖ **مثال:** اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید:
با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x=3$.

❖ **حل:** $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می‌توان

محاسبه کرد، به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ ، $f'(3)$ را به طور مستقیم نیز می‌توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

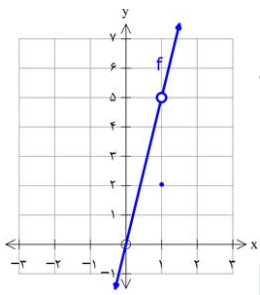
$$D_f = \mathbb{R}$$

$D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$ تابع در نقطه $x=1$ پیوسته نیست لذا $f'(1)$ وجود ندارد

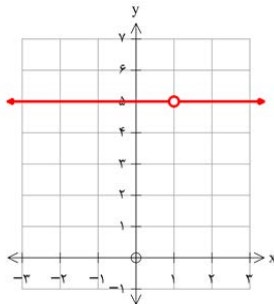
$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{تعریف نشده} & x = 1 \end{cases}$$

اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

کارد کلاس



تابع $f(x)$



تابع مشتق: $f'(x)$

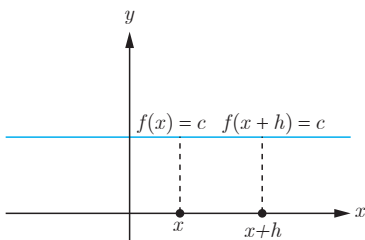
اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

محاسبه تابع مشتق برخی توابع

۱ اگر $f(x) = c$ آن‌گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن‌گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.



۲ اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 3x^2$. ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می شود، اما در عوض دستور مهم تری را ثابت کرده ایم.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ بار}} = nx^{n-1}$$

۲ به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$.

❖ مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدید که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

* ۲ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[n]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی ها الزامی است.

۵ اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ax+ah+b - ax-b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

۷ اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم. **مثال:** مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^2$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^3+1)(-x^2+7x-2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2+7x-2) + (2x^3+1)(-2x+7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2-4}{3x+1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x+1) - 3(x^2-4)}{(3x+1)^2}$

۱ مشتق تابع های زیر را به دست آورید :

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5)$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2 + x - 1}$

۲ اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید.

مشتق توابع مثلثاتی

توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ مشتق پذیر هستند و داریم :

$f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = -\sin x$

❁ **اثبات :** با استفاده از تعریف مشتق داریم :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} \right) \end{aligned}$$

در حسابان (۱) دیدیم که : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

بنابراین : $f'(x) = (\sin x)(0) + (\cos x)(1)$ و در نتیجه $f'(x) = \cos x$

به طریق مشابه اگر $g(x) = \cos x$ داریم :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\cos x)(0) - (\sin x)(1) = -\sin x \Rightarrow g'(x) = -\sin x \end{aligned}$$

با استفاده از دو دستور فوق می توان مشتق بسیاری از توابع مثلثاتی را به دست آورد.

-۱

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

$$g(x) = \sqrt{x}(3x^2 + 5) \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 5) + 6x\sqrt{x}$$

$$h(x) = \frac{x}{3x^2 + x - 1} \rightarrow h'(x) = \frac{1(3x^2 + x - 1) - x(6x + 1)}{(3x^2 + x - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 1}{(3x^2 + x - 1)^2}$$

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p) = 5 \times 8 + 3 \times (-6) = 40 - 18 = 22$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2} = \frac{5 \times 8 - 3 \times (-6)}{8^2} = \frac{40 + 18}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

-۲

❖ **مثال :** مشتق $f(x) = \tan x$ را به دست آورید.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\sin x)(\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

کارد کلاس

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x)$$

مشتق توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin x \tan x$

ب) $g(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$

$$g'(x) = \frac{-5 \sin x (1 - \sin x) - (-\cos x)(5 \cos x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{-5 \sin x + 5 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{5 - 5 \sin x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{5}{1 - \sin x}$$

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

❖ **مثال :** اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

❖ **حل :** اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$. آن گاه: $h(x) = f(g(x))$

$$h'(x) = g'(x) f'(g(x)) = (2x + 3) f'(g(x))$$

اگر $g(x) = u$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x + 3) (4) (x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

❖ **مثال :** مشتق تابع $y = \sin^2 x$ را به دست آورید.

❖ **حل :** با فرض $\sin x = u$ داریم: $y = u^2$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 2u = (\cos x)(2)(\sin x) = 2 \sin x \cos x$$

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = (x^2 + 1)^2(5x - 1) \quad f'(x) = 2(x^2 + 1)(2x)(5x - 1) + 5(x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1)^2(10x^2 - 6x + 5)$$

$$\text{ب) } g(x) = \cos^2 x$$

$$\text{پ) } h(x) = \sin(3x^2 + 5)$$

$$g'(x) = -2 \cos x \sin x$$

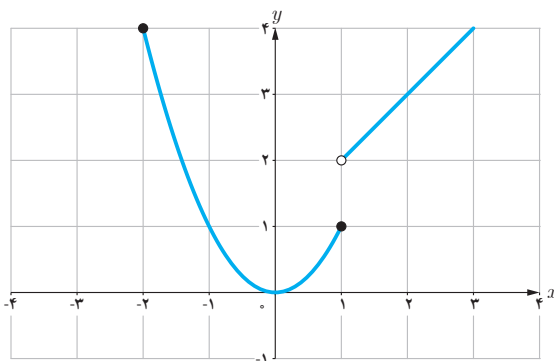
$$h'(x) = 6x \cos(3x^2 + 5)$$

مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد
تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد،
گوییم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

❖ مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر
می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[-2, 1]$ و $(1, \infty)$ مشتق پذیر است. ولی
 f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد پس در $x=1$ مشتق راست ندارد

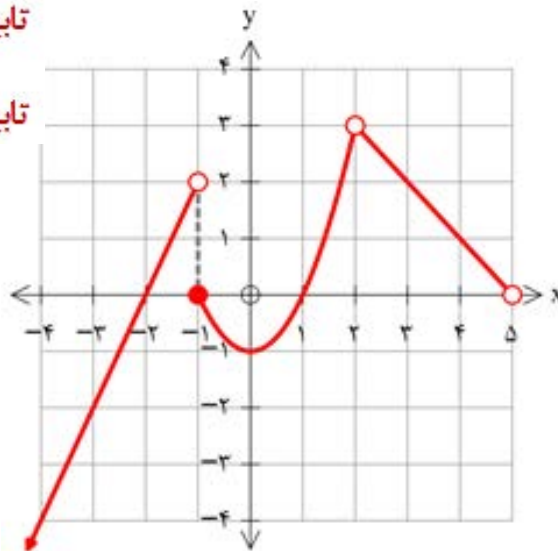
$$f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$$

تابع در بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ ناپیوست است

بررسی کنید.

تابع در بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است

تابع در بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است



مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y = f(x)$ با نماد $y' = f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y = f(x)$ را به $y'' = f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y' = f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

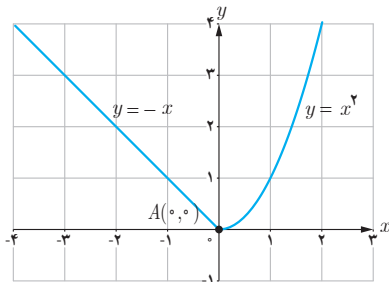
❖ مثال: اگر $y = 3x^4 + 2x^2 - 1$ آن گاه:

$$y' = 12x^3 + 4x, \quad y'' = 36x^2 + 4$$

$$f(x) = |x - 2| \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ -x + 6 & x > 2 \end{cases}$$

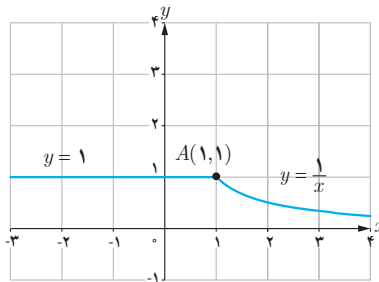
۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x = 2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



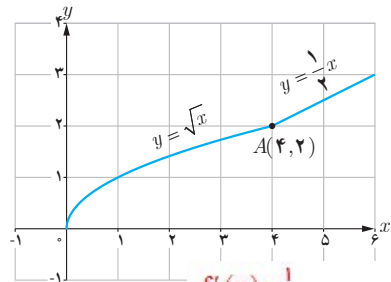
(الف)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 0 \\ f'_-(0) &= -1 \end{aligned} \rightarrow f'(0) \text{ وجود ندارد}$$



(ب)

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= -1 \\ f'_-(1) &= 0 \end{aligned} \rightarrow f'(1) \text{ وجود ندارد}$$



(پ)

$$\begin{aligned} f'_+(4) &= \frac{1}{2} \\ f'_-(4) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \rightarrow f'(4) \text{ وجود ندارد}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 6 & x > 3 \end{cases} \text{ تابع ۳}$$

(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

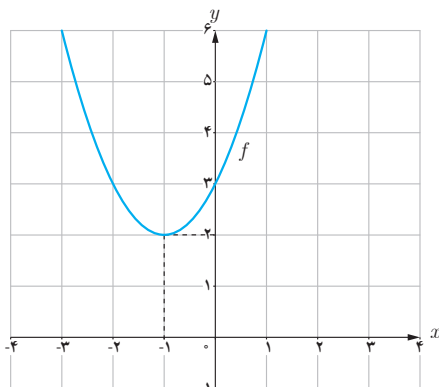
(ب) در $x = 2$ برابر ۳ شود.

(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

(ث) در تمام نقاط منفی باشد.



۵

(الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل

مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(3) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(2)$$

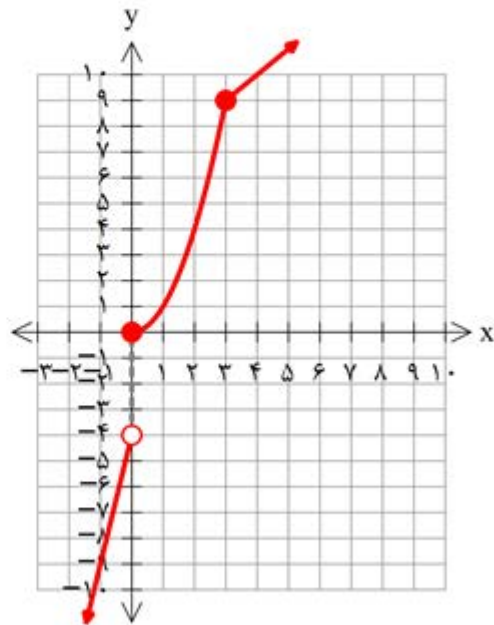
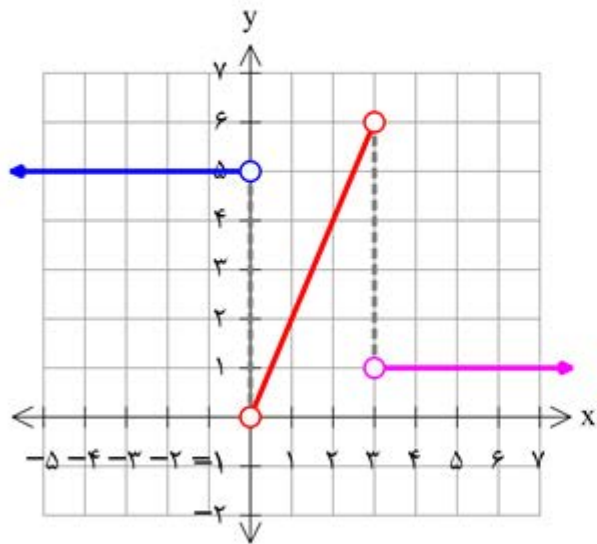
(ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

(پ) تابع مشتق را رسم کنید.

ت نمودار $f'(x)$

تمرین ۳ الف نمودار $f(x)$



(ب)

$$f(3) = 9$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = 1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

$$f(0) = 0$$

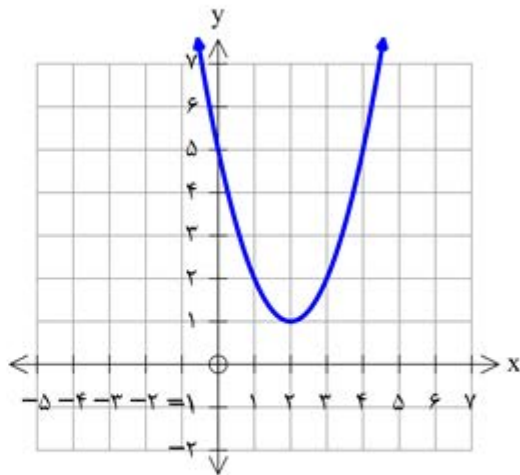
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - 4 - 0}{x - 0} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

در $x=0, x=3$ مشتق پذیر نیست

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ 2x & 0 < x < 3 \text{ (پ)} \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

تمرین ۴ الف:



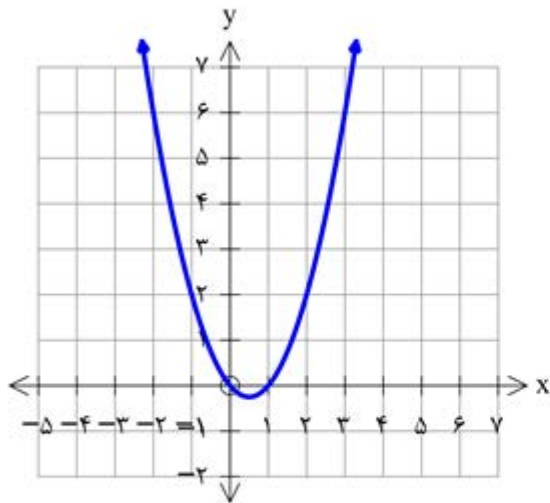
$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

همیار

ب:



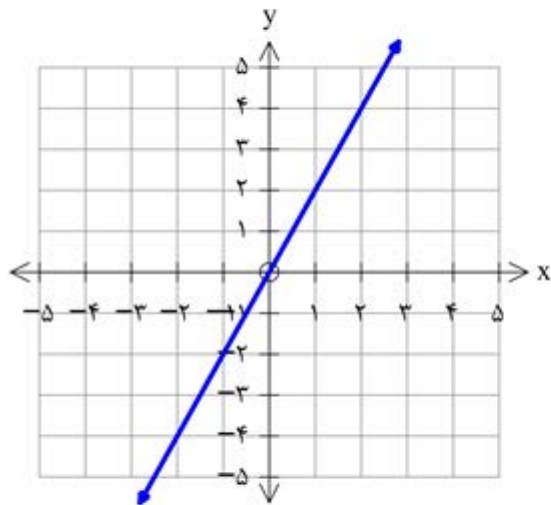
$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f'(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

hamyar.in

۱۰

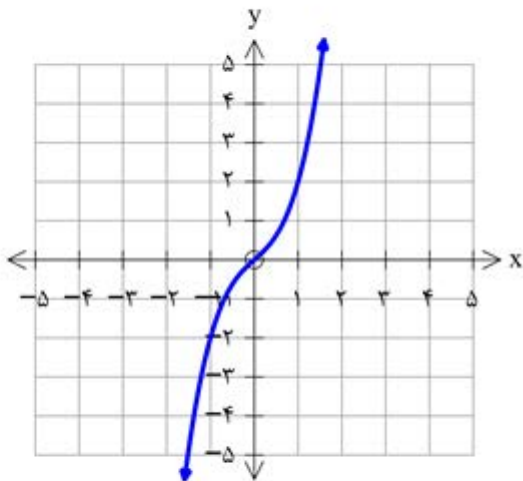


$$f(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2$$

hamyar.in

۱۱



$$f(x) = x^3 + x$$

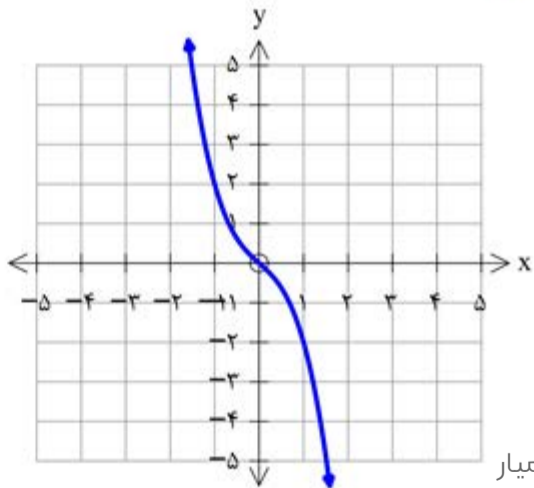
$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

همیار

شماره:

$$f(x) = -x^3 - x$$

$$f'(x) = -3x^2 - 1 < 0$$



تمرین ۵ الف :

ب)

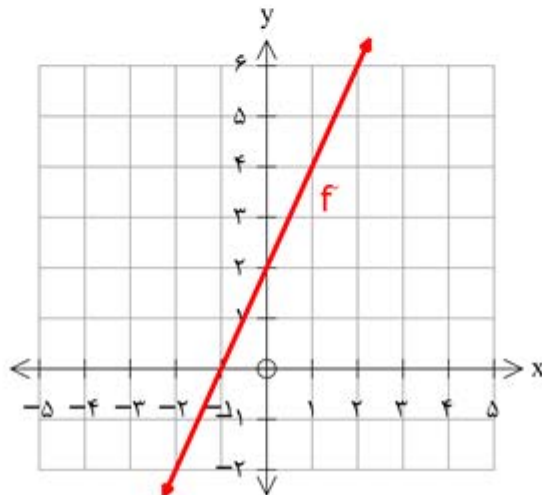
$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(3) = 8, f'(2) = 6, f'(0) = 2, f'(-1) = 0$$

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

$$f'(3) > f'(2) > f'(0) > f'(-1)$$

پ) تابع مشتق :



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \quad f(1) = 4$$

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

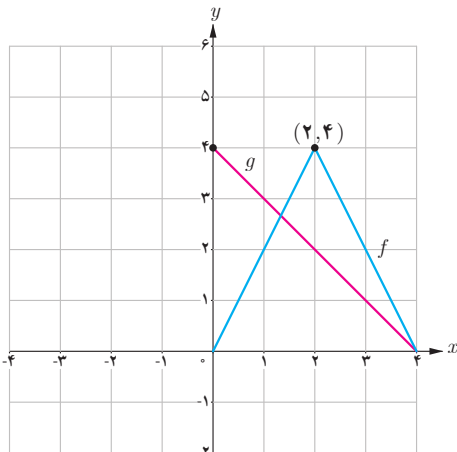
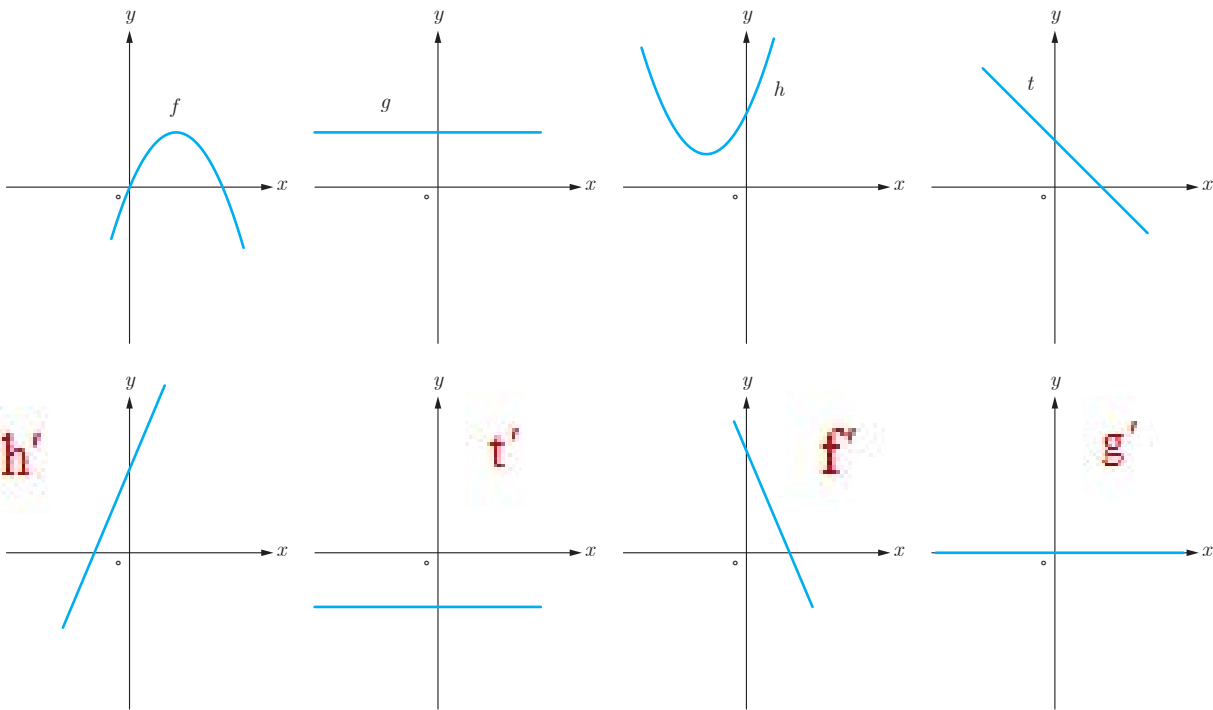
حد چپ با حد راست در نقطه $x=1$ برابر نیست پس پیوسته نیست در نتیجه مشتق پذیر نیست

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f_1(x) = 5x - 3 \rightarrow f_1'(x) = 5 \quad f_2(x) = 5x + 1 \rightarrow f_2'(x) = 5 \quad f_3(x) = 5x + 4 \rightarrow f_3'(x) = 5$$

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{x^2 - c - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} (x + c) = c$$

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{-(x^2 - c) - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} -(x + c) = -c$$

$$f'_+(-c) = \lim_{x \rightarrow -c^+} \frac{-(x^2 - c) - 0}{x + c} = \lim_{x \rightarrow -c^+} -(x - c) = c$$

$$f'_-(-c) = \lim_{x \rightarrow -c^-} \frac{x^2 - c - 0}{x + c} = \lim_{x \rightarrow -c^-} (x - c) = -c$$

$$f'_+(c) \neq f'_-(c) \quad f'_+(-c) \neq f'_-(-c)$$

نتیجه می گیریم تابع در نقاط ۲ و ۲- مشتق پذیر نیست

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 2$$

$$f(2) = 4 \quad f'_+(2) = -2, f'_-(2) = 2$$

$$f(3) = 2 \quad f'(3) = -2$$

$$g(1) = 3 \quad g'(1) = -1$$

$$g(2) = 2 \quad g'(2) = -1$$

$$g(3) = 1 \quad g'(3) = -1$$

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

$$h'(2) = \begin{aligned} f'_+(2)g(2) + f(2)g'(2) &= (-2) \times 2 + 4(-1) = -8 \\ f'_-(2)g(2) + f(2)g'(2) &= 2 \times 2 + 4(-1) = 0 \end{aligned}$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست

$$h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = (-2) \times 1 + 2 \times (-1) = -4$$

$$k'(1) = \frac{2 \times 3 - 2 \times (-1)}{(3)^2} = \frac{8}{9} \quad k'_+(2) = \frac{-2 \times 2 - 4 \times (-1)}{(2)^2} = \frac{0}{9} = 0$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست

$$k'(3) = \frac{-2 \times 1 - 2 \times (-1)}{(1)^2} = 0 \quad k'_-(2) = \frac{2 \times 2 - 4 \times (-1)}{(2)^2} = 2$$

۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^2$

پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

۱۴ مشتق توابع مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

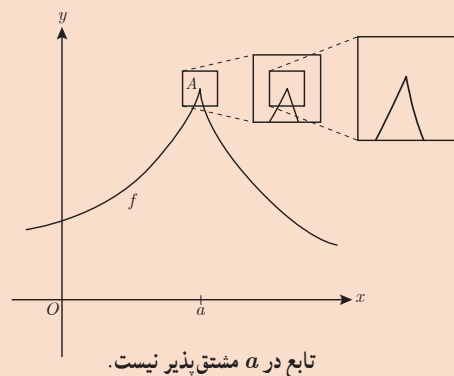
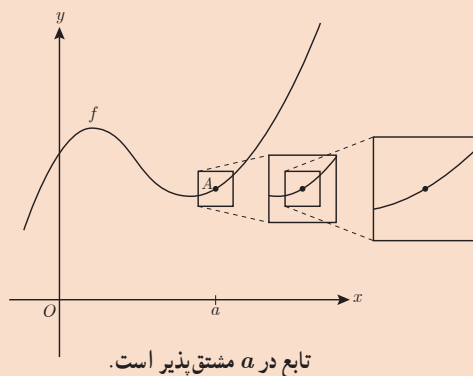
پ) $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos x$

ب) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

ت) $f(x) = \sin x \cos^2 x$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



تمرین ۱۱

$$(\lambda f + \mu g)'(1) = \lambda f'(1) + \mu g'(1) = \lambda \times \lambda + \mu \times \Delta = 19$$

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = \lambda + \Delta = 8$$

تمرین ۱۲:

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x - \circ}{x - \circ} = 1$$

$\rightarrow f'_+(\circ) \neq f'_-(\circ) \Rightarrow f'(\circ)$ وجود ندارد

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{x^r - \circ}{x - \circ} = \circ$$

$$f'(x) = 6x(2x - 5)^2 + 4(2x - 5)(2x^2 - 4) = (2x - 5)(24x^2 - 20x - 16) \quad (\text{الف})$$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1}} \right) (x^2 + 1) + 2x^2 (\sqrt{2x+1}) \quad (\text{ب})$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(-2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 1)}{(-2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x - 2}{(-2x + 2)^2} \quad (\text{پ})$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2} \quad (\text{ت})$$

$$f(x) = \sin^p x + \cos^p x \rightarrow f'(x) = p \cos x \sin^{p-1} x - p \sin x \cos^{p-1} x$$

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-2 \cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

$$f(x) = \tan^p x - p \cos x \rightarrow f'(x) = p(\tan^{p-1} x) \sec^2 x + p \sin x$$

$$f(x) = \sin x \cos^p x \rightarrow f'(x) = \cos x \cos^{p-1} x - p \sin^p x \sin x$$