درس ۲

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

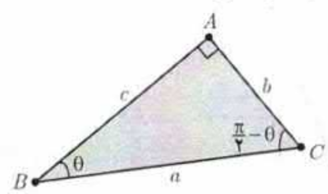
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند °۳۰، °۴۵، °۶۰) و نیز زوایای مرزی (°۰، °۹۰، °۱۸۰، °۲۷۰، °۳۶۰) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطهٔ بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمّم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازهٔ آنها °۹۰ باشد زاویه‌های متمّم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

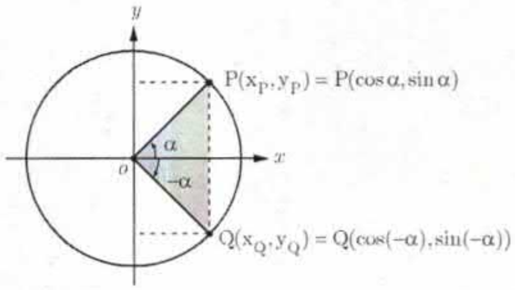
$\sin\theta=\frac{b}{a}$	$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{c}{a}$
$\cos\theta=\frac{c}{a}$	$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{b}{a}$
$\tan\theta=\frac{b}{c}$	$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{c}{b}$
$\cot\theta=\frac{c}{b}$	$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{b}{c}$

در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{2}-\theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.

الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$y_Q = -y_P \Rightarrow \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ قرینهٔ یکدیگرند. برای دو زاویهٔ قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

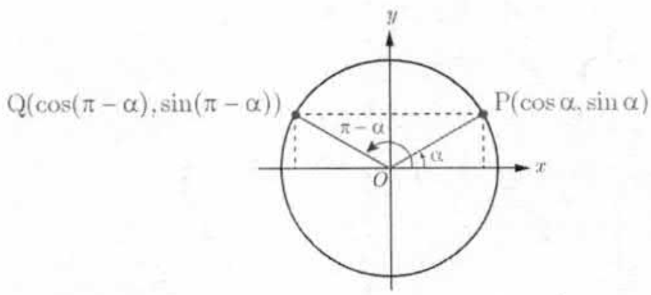
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوییم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.

فعالیت



در دایره مثلثاتی زیر نقطه $P(x_P,\ y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q,y_Q)=Q(-x_P,\cancel{-}y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور yها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q=-x_P \Rightarrow \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$y_Q=y_P \Rightarrow \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha)=\frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

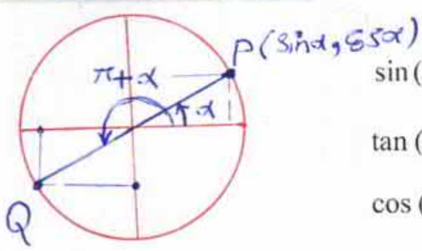
از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و $\pi-\alpha$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

زوایای α و $\pi+\alpha$ را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P,\ y_P)$ و $Q(x_Q,y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q,y_Q)=Q(-x_P,-y_P)$.
اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است.

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

مثال : مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.



$$\sin(-\frac{۷\pi}{۶})=-\sin(\frac{۷\pi}{۶})=-\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

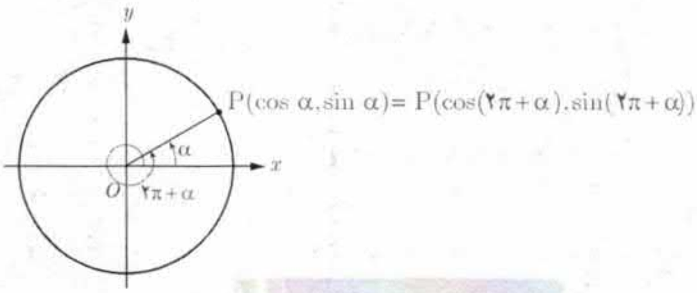
$$\tan(۲۲۵^\circ)=\tan(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ)=\tan ۴۵^\circ=۱$$

$$\cos(۱۲۰^\circ)=\cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ)=-\cos(۶۰^\circ)=-\frac{۱}{۲}$$

$Q(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $2\pi+\alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.



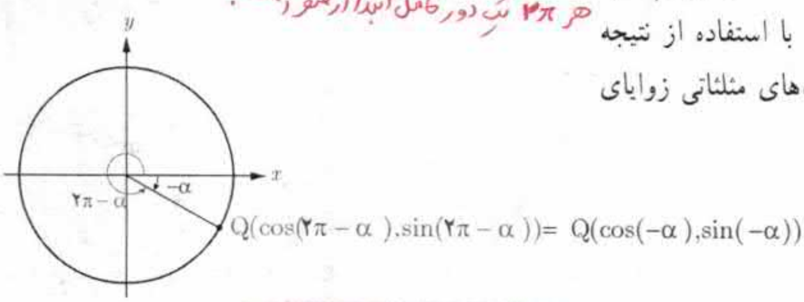
$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به‌صورت $2k\pi+\alpha$، نیز برقرار است. $(k\in\mathbb{Z})$

$$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

هر 2π یک دور کامل ابتدا از صفر است.

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $2k\pi-\alpha$ $(k\in\mathbb{Z})$ نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $2k\pi-\alpha$ به‌صورت زیر برقرارند.



$$\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(2k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(2k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan(\frac{5\pi}{3})=\tan(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\tan(\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$

ب) $\sin(405^\circ)=\sin(360^\circ+45^\circ)=\sin(45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

کار در کلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(210^\circ) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

ب) $\tan\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \tan\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

پ) $\cot(135^\circ) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

ت) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

زاویه / نسبت	$\alpha = \pi - \theta$	$\alpha = \pi + \theta$	$\alpha = 2k\pi - \theta$	$\alpha = 2k\pi + \theta$
انتهای کمان	ربع دوم	سوم.	چهارم	اوّل.
ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها	 نسبت / + / −: $\sin\alpha$ ✓ + ؛ $\cos\alpha$ ✓ − ؛ $\tan\alpha$ ✓ −	 نسبت / + / −: $\sin\alpha$ ✓ − ؛ $\cos\alpha$ ✓ − ؛ $\tan\alpha$ ✓ +	 نسبت / + / −: $\sin\alpha$ ✓ − ؛ $\cos\alpha$ ✓ + ؛ $\tan\alpha$ ✓ −	 نسبت / + / −: $\sin\alpha$ ✓ − ؛ $\cos\alpha$ ✓ − ؛ $\tan\alpha$ ✓ −
$\sin\alpha$	$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$	$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(2k\pi+\theta) = \sin\theta$
$\cos\alpha$	$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$	$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$	$\cos(2k\pi-\theta) = \cos\theta$	$\cos(2k\pi+\theta) = \cos\theta$
$\tan\alpha$	$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$	$\tan(2k\pi-\theta) = -\tan\theta$	$\tan(2k\pi+\theta) = \tan\theta$
$\cot\alpha$	$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$	$\cot(2k\pi-\theta) = -\cot\theta$	$\cot(2k\pi+\theta) = \cot\theta$

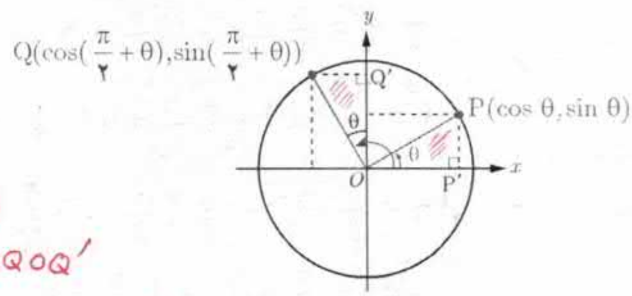
۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

$\alpha = 2k\pi - \theta \xrightarrow{k=0} \alpha = -\theta$

ستون سوم

فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی روبه‌رو زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ رسم شده‌اند.



$$\begin{cases} OP = OQ \\ \angle POP' = \angle QOQ' \end{cases}$$

الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند. به حالت وتر و یک زاویه حاده همنهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q = -y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$

$y_Q = x_p \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

به‌طور کلی برای دو زاویهٔ θ و $\frac{\pi}{2}+\theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\tan\theta$$

تمرین

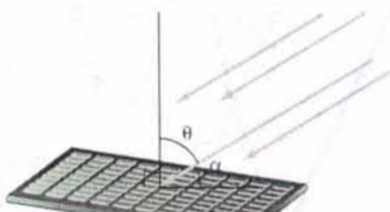
۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(۳۰۰^\circ)=$ ب) $\cot(۷۵۰^\circ)=$ پ) $\cos(-\frac{\pi}{۶})=$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴})=$ ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴})=$ ج) $\tan(-۸۴۰^\circ)=$

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ)=$ ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴})=$ خ) $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳})=$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I=k\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta=۰$ ، $\theta=\frac{\pi}{۶}$ و $\theta=\frac{\pi}{۳}$ بر حسب k به‌دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta+\cos(\pi-\theta)=۰$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)+\cos\theta=۱$

ج) $\cos(۷)=\cos(-۷)$

د) $\tan(\pi-\theta)=\tan\pi-\tan\theta$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۹ (حسابان ۱)

۱ :

الف) $\sin(300^\circ)=\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cot(750^\circ)=\cot(2\pi+\frac{\pi}{6})=\cot(4\pi+\frac{\pi}{6})=\cot(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\cos(-\frac{23\pi}{4})=\cos(\frac{23\pi}{4})=\cos(6\pi-\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ث) $\sin(\frac{5\pi}{4})=\sin(\pi+\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ج) $\tan(-840^\circ)=-\tan(840^\circ)=-\tan(5\pi-\frac{\pi}{3})=\tan(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$

چ) $\tan(-150^\circ)=-\tan(150^\circ)=-\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$

ح) $\cos(\frac{9\pi}{4})=\cos(\pi+\frac{\pi}{4})=-\cos(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

خ) $\tan(\frac{10\pi}{3})=\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos(\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$

***

۲ :

الف) $I=k\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=k\cos\alpha=k\sin\theta$

ب) $I=k\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=k\sin\theta\rightarrow\begin{cases}\theta=0\rightarrow I=0\\ \theta=\frac{\pi}{6}\rightarrow I=\frac{k}{2}\\ \theta=\frac{\pi}{3}\rightarrow I=\frac{k\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

پ) $I=k\xrightarrow{I=k\sin\theta}\sin\theta=1\rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$

۳ : الف) درست   ب) نادرست   ج) درست   د) درست

۱۰٤,۱