

در درس گذشته مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 به یکی از دو صورت زیر تعریف شد:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

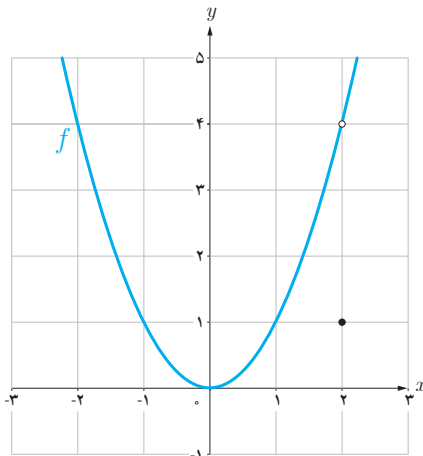
در صورت وجود حد (متناهی) فوق گفته می‌شود که f در x_0 مشتق پذیر است.

در مطالعه رفتار یک تابع، مشخص کردن نقاطی که تابع در آن نقاط مشتق پذیر نیست دارای اهمیت است.

در فعالیت زیر با یکی از حالت‌هایی که یک تابع در آن مشتق پذیر نیست آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ (شکل مقابل) را در نظر می‌گیریم:



الف) چگونه به کمک نمودار تابع و تعریف مشتق به عنوان شیب خط مماس می‌توانید استدلال کنید که $f'(2)$ وجود ندارد؟

اگر برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x = 2$ تعریف مشتق f در $x = 2$ را به کار بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \frac{4 - 1}{0} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

چون در این نقطه پیوسته نیست پس خط مماس وجود ندارد

حد صورت کسر برابر ۳ است و حد مخرج کسر برابر صفر است. وقتی $x \rightarrow 2$ ، داریم:

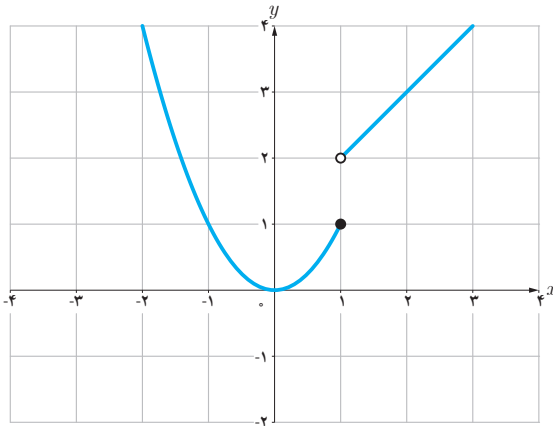
$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ موجود (و متناهی) نیست، پس $f'(2)$ وجود ندارد.

ب) نقطه دیگری (به جز $x = 2$) در نظر بگیرید. آیا تابع در این نقطه مشتق پذیر است؟ پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید.

بله



تابع g (شکل روبه‌رو) را به صورت $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ در نظر می‌گیریم.

چرا $g'(1)$ موجود نیست؟ چون در این نقطه تابع پیوسته نیست

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow g'(1) \text{ وجود ندارد}$$

توابع f و g و فعالیت و کار در کلاس قبل به ترتیب در $x=2$ و $x=1$ ناپیوسته بودند و همان‌گونه که مشاهده کردید، $f'(2)$ و $g'(1)$ موجود نبودند. بنابراین به نظر می‌رسد که اگر تابعی در یک نقطه مشتق‌پذیر باشد، الزاماً در آن نقطه باید پیوسته باشد. این مطلب را به عنوان یک قضیه ثابت می‌کنیم.

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left((x-a) \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} (x-a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) = 0 \cdot f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

با توجه به این قضیه به طور منطقی می‌توان نتیجه گرفت که:

اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x=a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

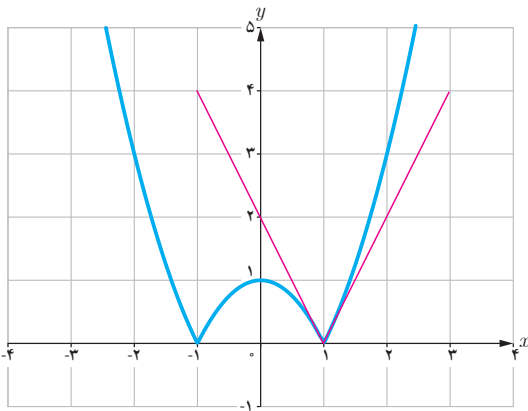
مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در $x=1$ بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1}$$

برای محاسبه $f'(1)$ ناچاریم حدهای راست و چپ را به دست آوریم.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = -2$$



بنابراین $f'(1)$ موجود نیست. به عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ وجود ندارد. اما حدهای یک طرفه فوق را می توان با وجود نیم خط های مماس بر منحنی در نقطه $x=1$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x=1$ نزدیک شویم، شیب نیم خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر 2 و اگر از سمت چپ به $x=1$ نزدیک شویم، شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -2 است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق های راست و چپ f در $x=1$ می نامیم و با $f'_+(1)$ و $f'_-(1)$ نمایش می دهیم.

در مثال قبل f در $x=1$ پیوسته است ولی f در آن مشتق پذیر نیست.

نیم خط های مماس راست و چپ را به اختصار، نیم مماس راست و چپ می نامیم.

در حقیقت:

$$f'_-(1) = \text{شیب نیم مماس چپ}$$

$$f'_+(1) = \text{شیب نیم مماس راست}$$

معادله این نیم مماس ها نیز به ترتیب عبارت اند از:

$$\text{نیم مماس راست} \quad y - 0 = 2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = 2x - 2, \quad x \geq 1$$

$$\text{نیم مماس چپ} \quad y - 0 = -2(x - 1) \quad \text{یا} \quad y = -2x + 2, \quad x \leq 1$$

کار در کلاس | چون حد چپ و حد راست با هم برابر

نیست پس مشتق پذیر نیست

نشان دهید که مشتق تابع f در مثال قبل در $x=-1$ نیز موجود نیست.

در صورت امکان معادله نیم مماس های راست و چپ در $x=-1$ را بنویسید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^p - 1| - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^p - 1|}{x + 1}$$

حد راست $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^p - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x - 1) = -2$

حد چپ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x^p - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-\cancel{(x + 1)}(x - 1)}{\cancel{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} -(x - 1) = 2$

$f'_+(-1) = -2 \Rightarrow y - 0 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x - 2$ معادله نیم مماس چپ

$f'_-(-1) = 2 \Rightarrow y - 0 = 2(x + 1) \rightarrow y = 2x + 2$

معادله نیم مماس راست

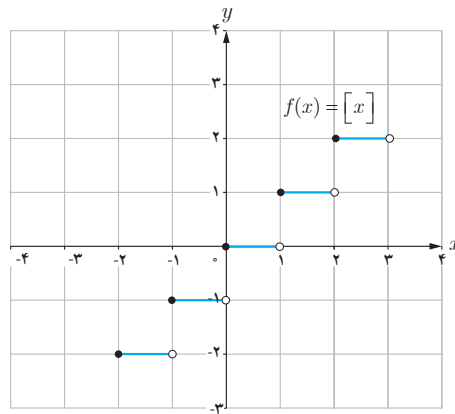
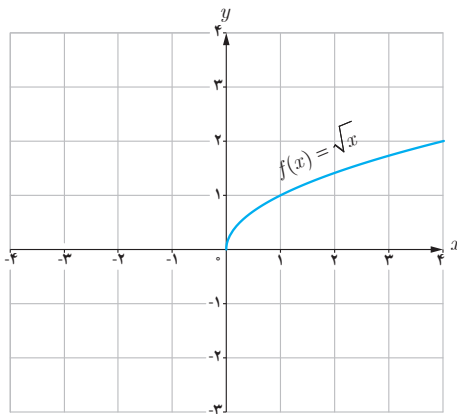
تعریف: مشتق راست و مشتق چپ تابع f در $x = a$ را با $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

یا به طور معادل:

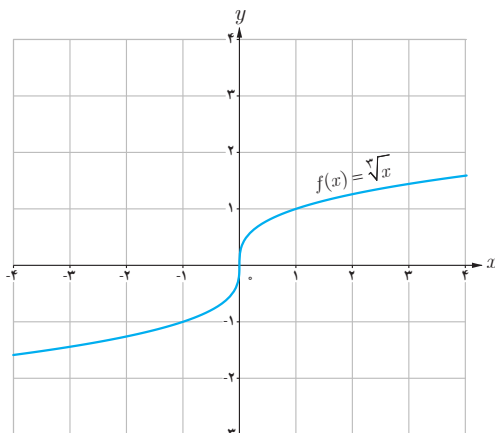
$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مثال: توابع $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در صفر پیوسته نیستند. بنابراین $f'(0)$ و $g'(0)$ موجود نیستند.



اکنون به بررسی حالت دیگری می‌پردازیم که در آن تابع مشتق پذیر نیست.

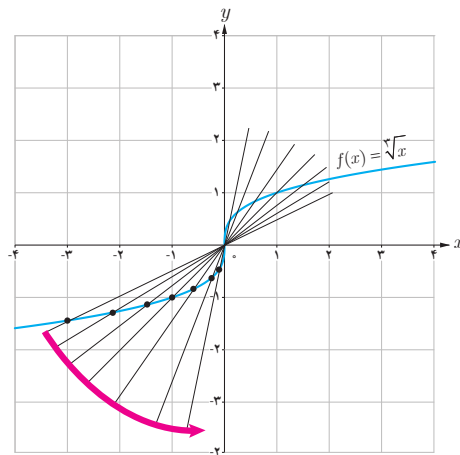
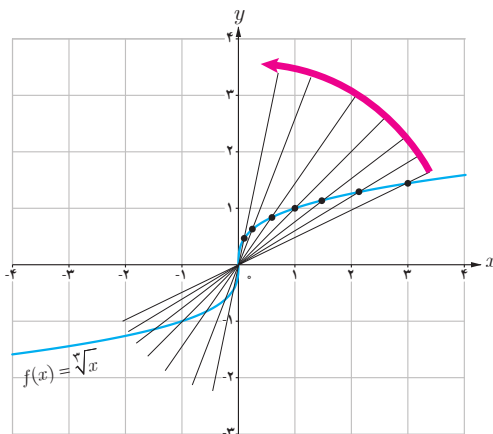
مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق پذیری این تابع را در $x = 0$ بررسی کنید.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

بنابراین تابع f در صفر مشتق پذیر نیست. شکل‌ها نشان می‌دهند که وقتی از سمت راست یا چپ به نقطه صفر نزدیک می‌شویم خط‌های قاطع به خط $x = 0$ نزدیک می‌شوند.

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. خط $x = 0$ را «**ماس**» **قائم**» منحنی می‌نامیم.



اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ یا $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ در این صورت خط $x = a$ را «مماس قائم» بر منحنی f در نقطه $(a, f(a))$ می‌نامیم. بدیهی است $f'(a)$ در این حالت وجود ندارد.

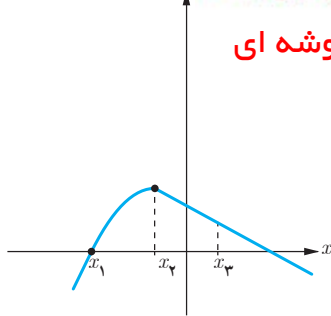
به طور خلاصه می‌توان گفت :

- ۱- تابع f در $x = a$ مشتق پذیر نیست هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.
 - ۱- f در a پیوسته نباشد.
 - ۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x = a$:
 - الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).
 - ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).
 - پ) هر دو نامتناهی باشند.

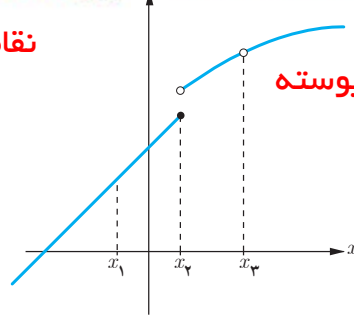
۱- همکاران محترم توجه دارند که ذکر مثال‌های پیچیده در این قسمت در زمره اهداف کتاب نیست.

در شکل‌های زیر مشخص کنید که هر تابع در کدام نقطه یا نقاط مشخص شده مشتق پذیر نیست.

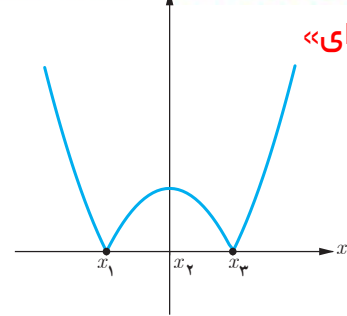
در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست



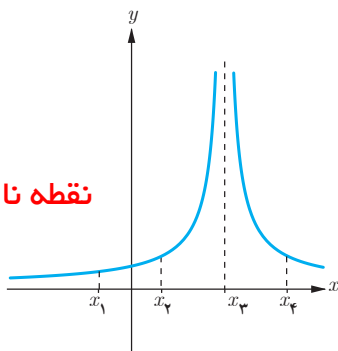
در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست



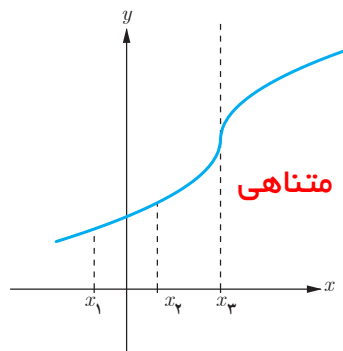
در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست



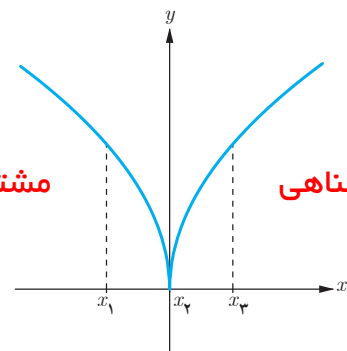
نقطه نا پیوستگی



مشتق نامتناهی



مشتق نامتناهی



در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست

در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست

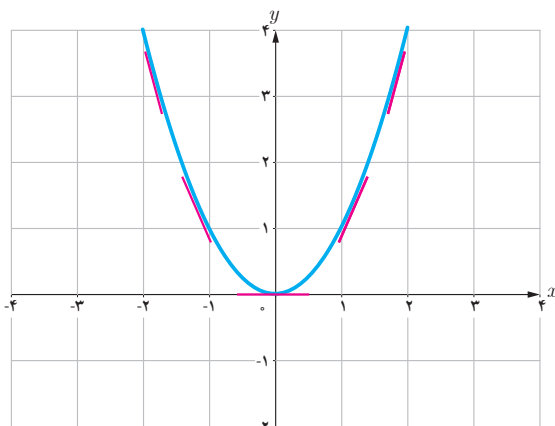
در x_1, x_2, x_3 مشتق پذیر نیست

تابع مشتق

تاکنون با مفهوم مشتق تابع در یک نقطه (معین) آشنا شده‌اید. حال به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مجموعه نقاط متعلق به دامنه یک تابع و مشتق تابع در آن نقاط هستیم.

فعالیت

تابع $f(x) = x^2$ را در نظر می‌گیریم.



جدول زیر را کامل کنید (مشتق تابع در برخی نقاط حساب شده اند).

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-6	-4	-2	0	1	$2\sqrt{3}$	4

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

$$f'(\sqrt{3}) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

می دانیم مشتق تابع در یک نقطه (در صورت وجود) برابر شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه است و از طرفی مماس بر منحنی در هر نقطه یکتاست، بنابراین $f'(x)$ تابعی از x است. حدس می زنید در چه نقاطی مشتق تابع $f(x) = x^2$ وجود دارد؟

اگر x عضوی از دامنه تابع f باشد، تابع مشتق f در x را با $f'(x)$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مشروط بر آنکه حد فوق موجود باشد. مجموعه تمام نقاطی از دامنه f که برای آنها f' موجود باشد را دامنه f' می نامیم.

به طور مثال برای تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. روش محاسبه ضابطه تابع f' نیز، در ادامه ارائه شده است.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x \end{aligned}$$

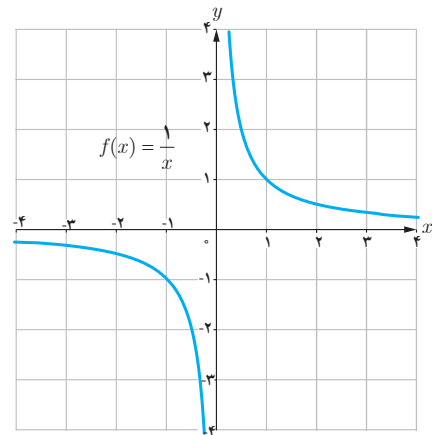
بنابراین $f'(x) = 2x$. همان گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f' ، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x) = x^2$ در هر نقطه را می توان حساب کرد، به طور مثال:

$$f'(-\frac{1}{5}) = -\frac{2}{5}, f'(\sqrt{7}) = 2\sqrt{7} \text{ و } f'(50) = 100$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به دست آورید. $f'(3)$ را از دو روش به دست آورید: با استفاده از تابع مشتق و سپس با استفاده از تعریف مشتق در $x = 3$.

حل: $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اگر $x \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



با استفاده از دستور فوق داریم: $f'(3) = \frac{-1}{9}$ البته مشتق f در هر نقطه دیگر ($x \neq 0$) را نیز به کمک این دستور می توان محاسبه کرد، به طور مثال: $f'(\sqrt{5}) = \frac{-1}{5}$ و $f'(-2) = -\frac{1}{4}$ را به طور مستقیم نیز می توان حساب کرد:

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = -\frac{1}{9}$$

در عمل هنگام حل مسائل با توجه به شرایط هر یک از دو روش فوق ممکن است مورد استفاده قرار گیرد.

کار در کلاس

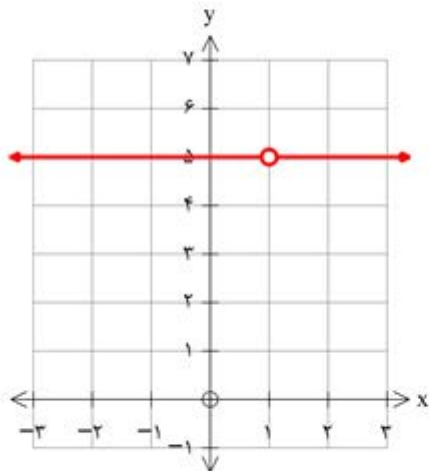
اگر $f(x) = \begin{cases} 5x & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ دامنه f و دامنه f' را محاسبه کنید و ضابطه f' را به دست آورید. نمودار f و نمودار f' را رسم کنید.

اکنون آماده هستیم که برای برخی از توابع، تابع مشتق را محاسبه کنیم.

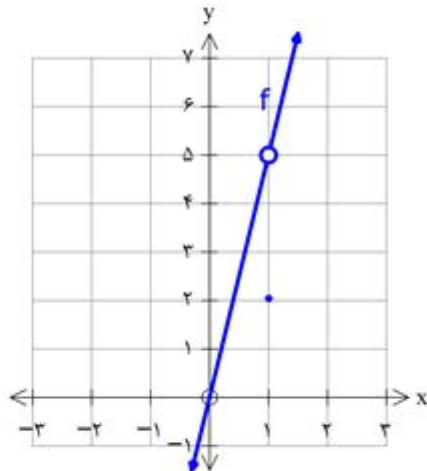
$$D_f = \mathbb{R}$$

تابع در نقطه ی $x=1$ پیوسته نیست لذا $f'(1)$ وجود ندارد

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 1 \\ \text{تعریف نشده} & x = 1 \end{cases}$$



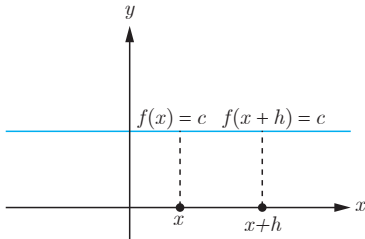
تابع مشتق: $f'(x)$



تابع $f(x)$

۱- اگر $f(x) = c$ آن گاه $f'(x) = 0$. به عبارت دیگر مشتق تابع ثابت در هر نقطه برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$



به طور مثال اگر $f(x) = 7$ و $g(x) = -\frac{2}{5}$ آن گاه $f'(x) = 0$ و $g'(x) = 0$.

۲- اگر $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{N}$ آن گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

این دستور کاربرد زیادی دارد. قبلاً ثابت کردیم که اگر $f(x) = x^2$ ، آن گاه $f'(x) = 2x$. همچنین اگر $f(x) = x^3$ ، به کمک این دستور نشان می دهیم که: $f'(x) = 3x^2$

ابتدا این رابطه آخر را ثابت می کنیم و از روش ارائه شده برای اثبات دستور مشتق $f(x) = x^n$ استفاده می کنیم. اگر $f(x) = x^3$ داریم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h[(x+h)^2 + x(x+h) + x^2]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^2 + x(x+h) + x^2] = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

سومین تساوی در اثبات فوق بر اساس اتحاد $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ به دست آمده است.

در حالت کلی می توان نشان داد که: $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$ ($n \in \mathbb{N}$) از این اتحاد در ادامه برای محاسبه مشتق $f(x) = x^n$ استفاده شده است.

اکنون اگر $f(x) = x^n$ ، محاسبات کمی دشوارتر می شود، اما در عوض دستور مهم تری را ثابت کرده ایم:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cancel{x} + h - \cancel{x})[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}] \\ &= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ terms}} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

۳- به طور کلی اگر n یک عدد صحیح باشد و $f(x) = x^n$ آن گاه: $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $x \neq 0$ قبلاً دیدیم که $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

همچنین با استفاده از دستور اخیر داریم: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

* ۴- اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $x > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

۵- اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a(x+h)+b} - \sqrt{ax+b})(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{ax} + ah + b - \cancel{ax} - b}{h(\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt{a(x+h)+b} + \sqrt{ax+b}} = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \end{aligned}$$

۶- اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h \cdot A} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

* در مورد توابع رادیکالی در این کتاب فقط مشتق تابع $\sqrt{f(x)}$ و $\sqrt[3]{f(x)}$ که $f(x)$ گویاست، مورد نظر است، رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها الزامی است.

۷- اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند، آن گاه توابع kf ($k \in \mathbb{R}$)، $f \pm g$ و fg و

$\frac{f}{g}$ ($g(a) \neq 0$) نیز در $x = a$ مشتق پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$ ب) $(kf)'(a) = kf'(a)$

پ) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ت) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی پردازیم.
مثال: مشتق چند تابع محاسبه شده است.

الف) $f(x) = -\frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3$

ب) $g(x) = x^5 + 4x^3 - \sqrt{2}x + 1 \Rightarrow g'(x) = 5x^4 + 12x^2 - \sqrt{2}$

پ) $h(x) = (2x^2 + 1)(-x^2 + 7x - 2) \Rightarrow h'(x) = 6x^2(-x^2 + 7x - 2) + (2x^2 + 1)(-2x + 7)$

ت) $t(x) = \frac{x^2 - 4}{3x + 1} \Rightarrow t'(x) = \frac{2x(3x + 1) - 3(x^2 - 4)}{(3x + 1)^2}$

کار در کلاس

۱) مشتق تابع های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = \frac{1}{x-4}$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

پ) $h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1}$

۲) اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ ، $g(2) = 8$ و $g'(2) = -6$ مقدار $(fg)'(2)$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ را به دست آورید.

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ مشتق پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

-۱

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

$$g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^\lambda \rightarrow g'(x) = \lambda \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2}\right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^{\lambda-1}$$

$$h(x) = \frac{x}{2x^2+x-1} \rightarrow h'(x) = \frac{1(2x^2+x-1) - x(4x+1)}{(2x^2+x-1)^2} = \frac{-2x^2-1}{(2x^2+x-1)^2}$$

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 5 \times \lambda + 3 \times (-6) = 40 - 18 = 22$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(2) = \frac{f'(2)g(2) - f(2)g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{5 \times \lambda - 3 \times (-6)}{8^2} = \frac{40 + 18}{64} = \frac{58}{64} = \frac{29}{32}$$

-۲

مثال: اگر $h(x) = (x^2 + 3x + 1)^4$ ، مطلوب است $h'(x)$.

حل: اگر $f(x) = x^4$ و $g(x) = x^2 + 3x + 1$ ، آن گاه $h(x) = f(g(x))$.

$$h'(x) = g'(x)f'(g(x)) = (2x+3)f'(g(x))$$

اگر $u = g(x)$ آن گاه لازم است که $f'(u)$ را پیدا کنیم.

$$f(u) = u^4 \Rightarrow f'(u) = 4u^3 = 4(g(x))^3 = 4(x^2 + 3x + 1)^3$$

بنابراین:

$$h'(x) = (2x+3)(4)(x^2 + 3x + 1)^3$$

دستور فوق را به صورت زیر نیز می توان ارائه کرد،

اگر f تابعی بر حسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

مثال: مشتق تابع $y = \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^5$ را به دست آورید.

حل: با فرض $\frac{x^2}{3x-1} = u$ داریم: $y = u^5$ و از آنجا:

$$y' = u' \cdot 5u^4 = \frac{2x(3x-1) - 3x^2}{(3x-1)^2} \cdot 5 \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4 = 5 \left(\frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}\right) \left(\frac{x^2}{3x-1}\right)^4$$

کار در کلاس

مشتق تابع های زیر را به دست آورید. $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 (2x)(5x - 1) + 5(x^2 + 1)^3 = (x^2 + 1)^2 (35x^2 - 6x + 5)$.

الف) $f(x) = (x^2 + 1)^2 (5x - 1)$

ب) $g(x) = \left(\frac{-3x-1}{x^2+5}\right)^8$

$$g'(x) = 8 \times \left(\frac{-3(x^2+5) - 2x(-3x-1)}{(x^2+5)^2} \right) \left(\frac{-3x-1}{x^2+5} \right)^7$$

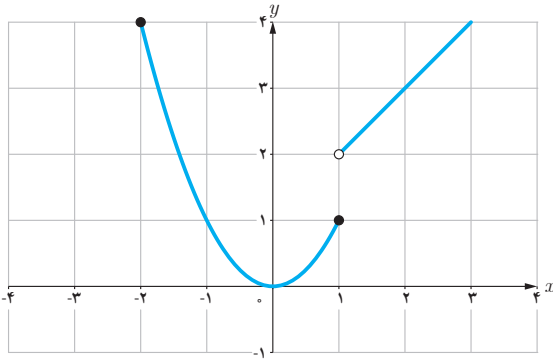
مشتق پذیری روی یک بازه

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق پذیر باشد.
تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است، هرگاه f در بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست و در b مشتق چپ داشته باشد.

مشتق پذیری روی بازه‌های $[a, b]$ و (a, b) را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a, b]$ مشتق پذیر است هرگاه **روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه a مشتق راست داشته باشد**

تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر است هرگاه **روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد و در نقطه b مشتق چپ داشته باشد**



اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر عدد حقیقی مشتق پذیر باشد، گوئیم f روی بازه $(-\infty, +\infty)$ مشتق پذیر است.

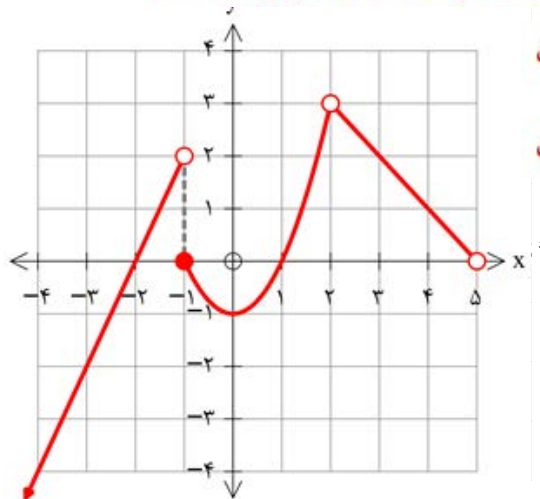
مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

f روی بازه‌های $[1, \infty)$ و $[-2, 1]$ مشتق پذیر است. ولی f روی بازه $[1, 2]$ مشتق پذیر نیست (چرا؟)

زیرا با اینکه روی بازه $(1, 2)$ مشتق پذیر است، اما در $x=1$ پیوستگی راست ندارد پس در $x=1$ مشتق راست ندارد

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & x < -1 \\ x^2-1 & -1 \leq x < 2 \\ -x+5 & 2 < x < 5 \end{cases}$ نمودار f را رسم کنید و مشتق پذیری f را روی بازه‌های $[-1, 1]$ ، $(2, 5)$ و $[-2, 0]$ بررسی کنید.

تابع در بازه $[-2, 0]$ مشتق پذیر نیست زیرا در $x=-1$ نا پیوست است



تابع در بازه $(2, 5)$ مشتق پذیر است

تابع در بازه $[-1, 1]$ مشتق پذیر است

مشتق مرتبه دوم

مشتق تابع $y=f(x)$ با نماد $y'=f'(x)$ نمایش داده شد. به همین ترتیب اگر تابع مشتق، مشتق پذیر باشد، مشتق مرتبه دوم $y=f(x)$ را به $y''=f''(x)$ نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن از تابع $y'=f'(x)$ نسبت به x مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $y=3x^2+2x-1$ آن گاه:

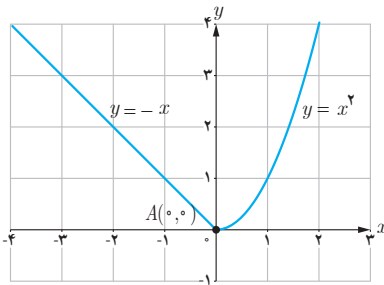
$$y' = 12x + 2, \quad y'' = 36x + 4$$

$$f(x) = |x-2| \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ -x+6 & x > 2 \end{cases}$$

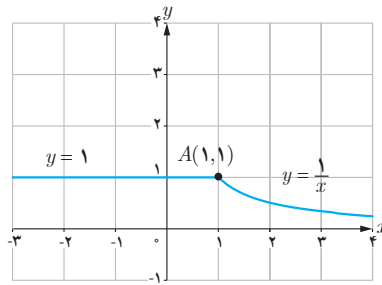
تمرین

۱ دو تابع مختلف مانند f و g مثال بزنید که هر دو در $x=2$ پیوسته باشند ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشند.

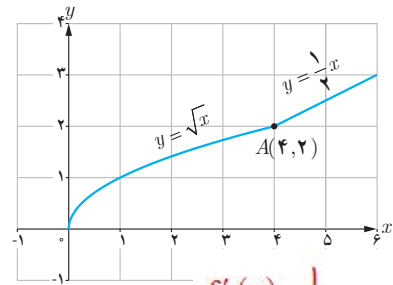
۲ با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ توابع داده شده در نقطه A ، نشان دهید که این توابع در نقطه A مشتق پذیر نیستند.



(الف)



(ب)



(پ)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= 0 \\ f'_-(0) &= -1 \end{aligned} \rightarrow f'(0) \text{ وجود ندارد}$$

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= -1 \\ f'_-(1) &= 0 \end{aligned} \rightarrow f'(1) \text{ وجود ندارد}$$

$$\begin{aligned} f'_+(4) &= \frac{1}{2} \\ f'_-(4) &= \frac{1}{4} \end{aligned} \rightarrow f'(4) \text{ وجود ندارد}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x+6 & x > 3 \end{cases} \text{ تابع } 3$$

(ب) نشان دهید که $f'(0)$ و $f'(3)$ وجود ندارند.

(ت) نمودار تابع f' را رسم کنید.

(الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

(پ) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که مشتق آن

(ب) در $x=2$ برابر ۳ شود.

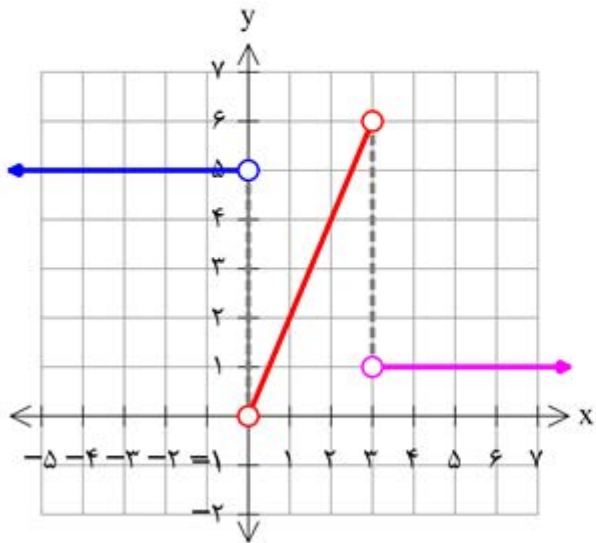
(ت) در تمام نقاط یکسان باشد.

(الف) در یک نقطه برابر صفر شود.

(پ) در تمام نقاط مثبت باشد.

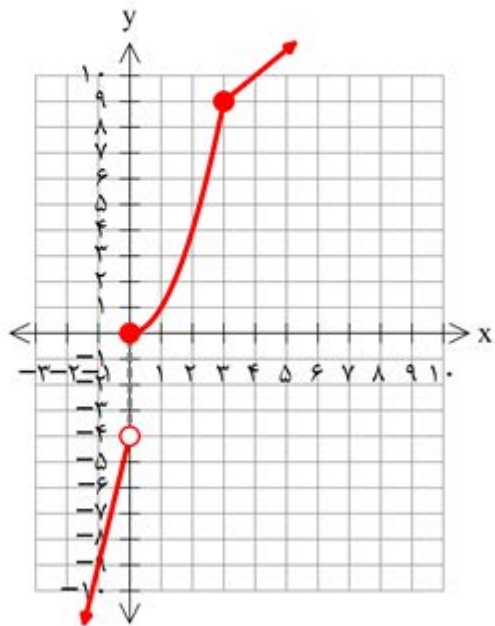
(ث) در تمام نقاط منفی باشد.

ت نمودار $f'(x)$



hamyar.in

تمرین ۳ الف نمودار $f(x)$



همیار

$$f(3) = 9$$

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 6 - 9}{x - 3} = 1$$

$$f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = 6$$

$$f(0) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

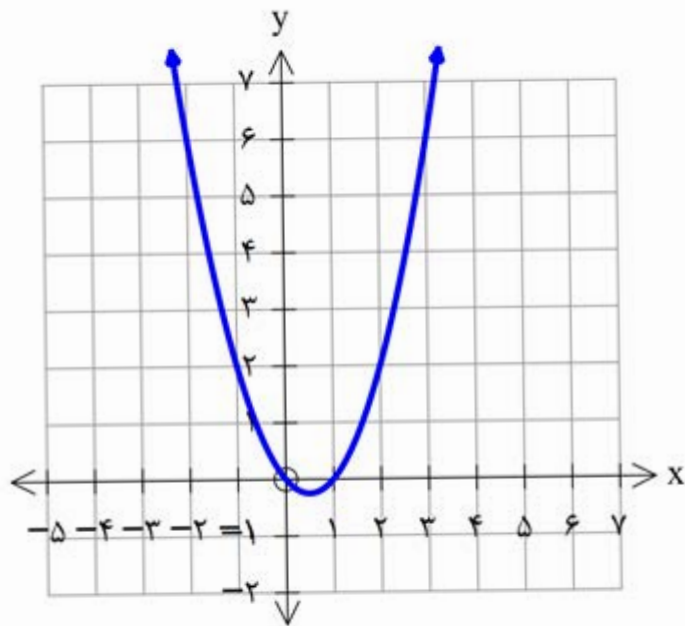
$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta x - 4 - 0}{x - 0} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

در $x=0, x=3$ مشتق پذیر نیست

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & x < 0 \\ \mu x & 0 < x < 3 \text{ (پ)} \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

تمرین ۴ الف :

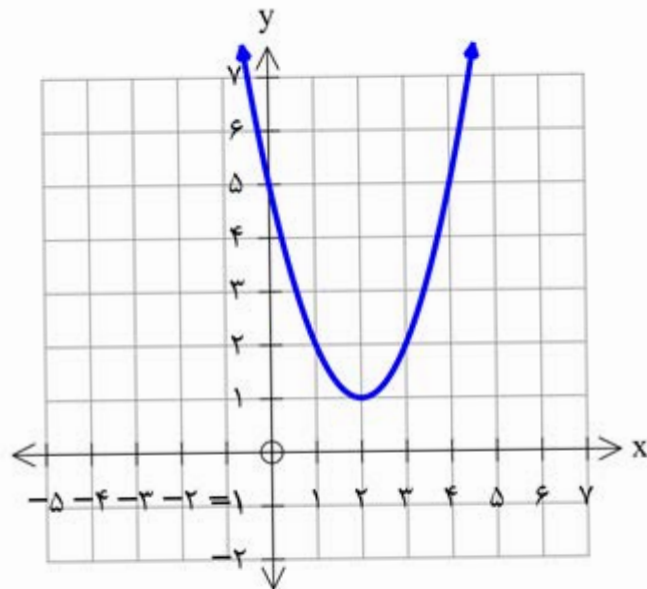
ب :



$$f(x) = x^2 - x$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$f'(p) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

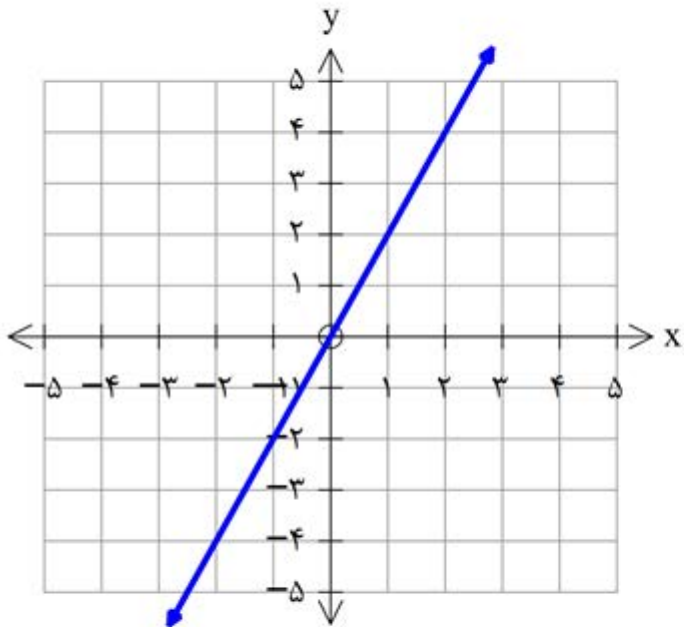


$$f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

۱:

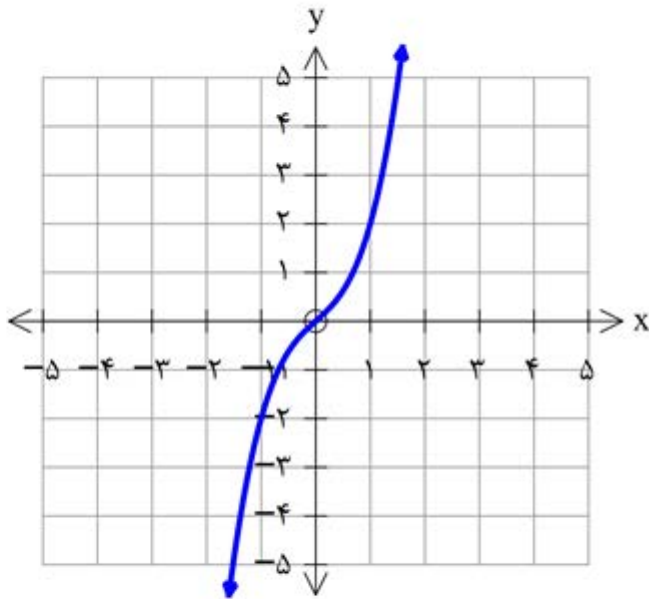


$$f(x) = 2x$$

$$f'(x) = 2$$

hamyar.in

۲:



$$f(x) = x^3 + x$$

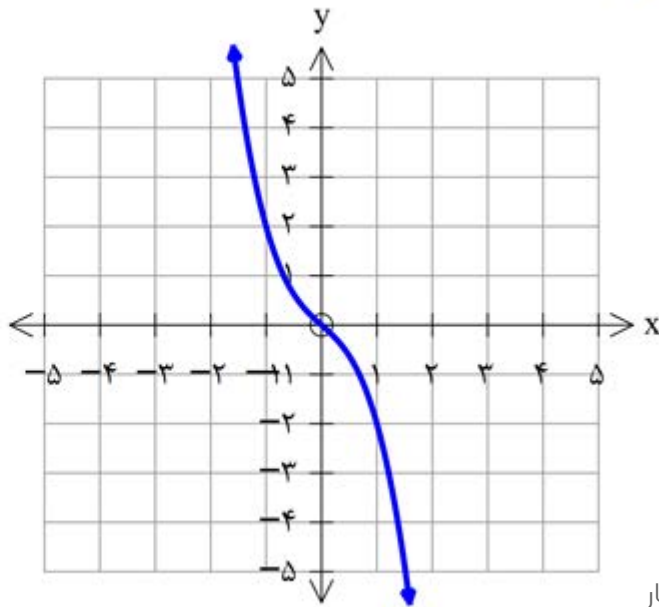
$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

همیار

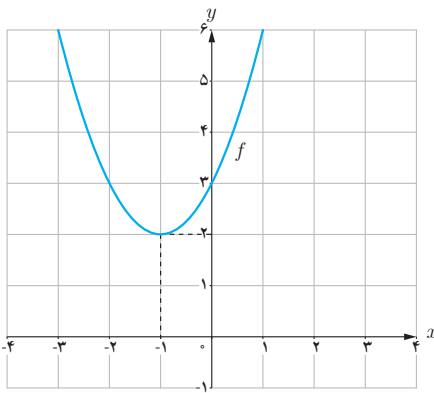
ش :

$$f(x) = -x^5 - x$$

$$f'(x) = -5x^4 - 1 < 0$$



۵



الف) با استفاده از نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (شکل مقابل) مقادیر زیر را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

$$f'(2) \text{ و } f'(-1) \text{ و } f'(0) \text{ و } f'(3)$$

ب) صحت ادعای خود در (الف) را با محاسبه مشتق تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ بررسی کنید.

پ) تابع مشتق را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 3) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \quad f(1) = 4$$

۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

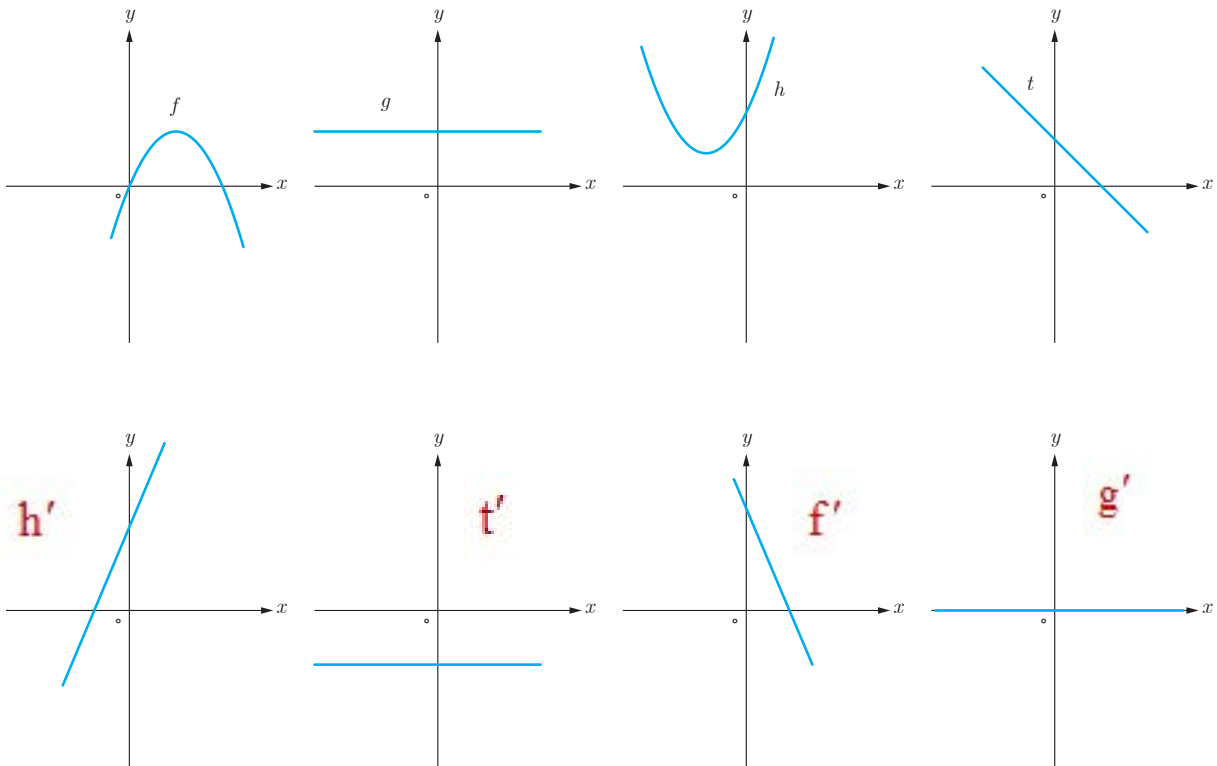
حد چپ با حد راست در نقطه $x=1$ برابر نیست پس پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نیست

۷ سه تابع مختلف مثال بزنید که مشتق آنها با هم برابر باشند.

$$f_1(x) = 5x - 3 \rightarrow f_1'(x) = 5 \quad f_2(x) = 5x + 1 \rightarrow f_2'(x) = 5 \quad f_3(x) = 5x + 4 \rightarrow f_3'(x) = 5$$

۸ اگر $f(x) = |x^2 - 4|$ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری f را در نقاط به طول های ۲ و -۲ بررسی کنید.

۹ نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آنها، نظیر کنید.



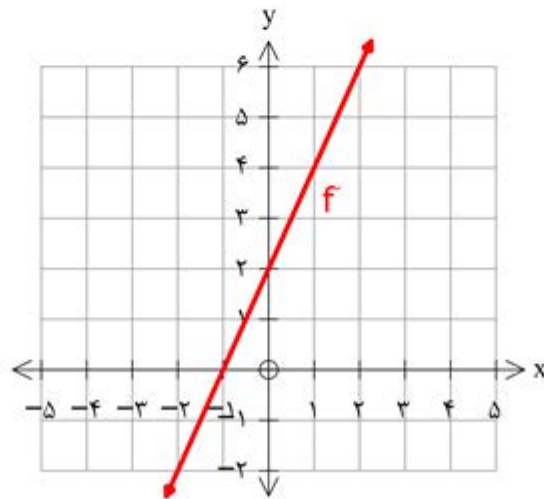
$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(3) = 8, f'(2) = 6, f'(0) = 2, f'(-1) = 0$$

$$f'(-1) < f'(0) < f'(2) < f'(3)$$

$$f'(3) > f'(2) > f'(0) > f'(-1)$$

پ) تابع مستقیم :



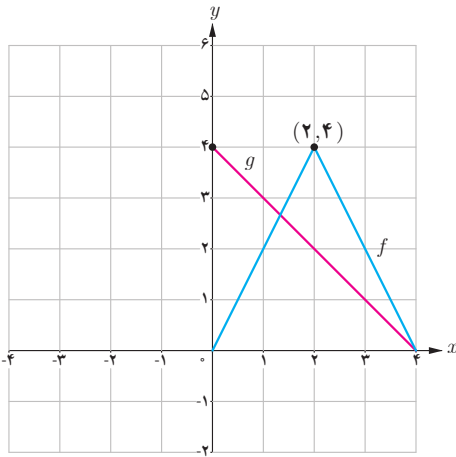
$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{x^2 - c - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^+} (x + c) = c$$

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{-(x^2 - c) - 0}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c^-} -(x + c) = -c$$

$$f'_+(-c) = \lim_{x \rightarrow -c^+} \frac{-(x^2 - c) - 0}{x + c} = \lim_{x \rightarrow -c^+} -(x - c) = c$$

$$f'_-(-c) = \lim_{x \rightarrow -c^-} \frac{x^2 - c - 0}{x + c} = \lim_{x \rightarrow -c^-} (x - c) = -c$$

$$f'_+(c) \neq f'_-(c) \quad f'_+(-c) \neq f'_-(-c)$$



۱۰ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

الف) اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$

ب) اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است، $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$

۱۱ اگر $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ مطلوب است، $(f+g)'(1)$ و $(3f+2g)'(1)$

۱۲ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست.

۱۳ مشتق توابع داده شده را بیابید.

الف) $f(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

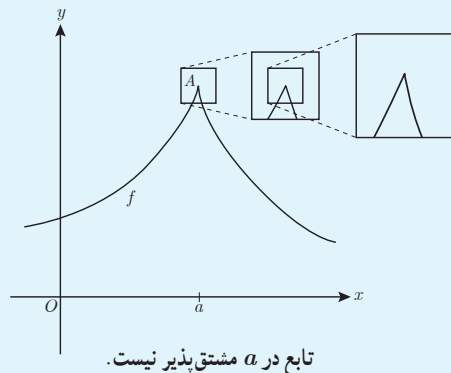
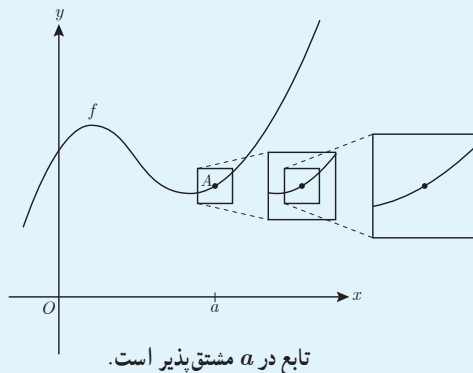
پ) $f(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

ب) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{-3x + 2}$

ت) $f(x) = \frac{9x - 2}{\sqrt{x}}$

خواندنی

مشتق پذیری در یک نقطه به صورت شهودی می تواند برحسب رفتار تابع در نزدیکی نقطه $A(a, f(a))$ تعبیر شود. اگر نمودار تابع را در نزدیک نقطه A در نظر بگیریم و مرتباً از نمای نزدیک تری به نمودار نگاه کنیم، هنگامی که f در a مشتق پذیر باشد، نمودار منحنی شبیه یک خط راست می شود.



$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f(1) = 2 \quad f'(1) = 2$$

$$f(2) = 4 \quad f'_+(2) = -2, f'_-(2) = 2$$

$$f(3) = 2 \quad f'(3) = -2$$

$$g(1) = 3 \quad g'(1) = -1$$

$$g(2) = 2 \quad g'(2) = -1$$

$$g(3) = 1 \quad g'(3) = -1$$

$$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 = 4$$

$$h'(2) = \begin{aligned} f'_+(2)g(2) + f(2)g'(2) &= (-2) \times 2 + 4(-1) = -8 \\ f'_-(2)g(2) + f(2)g'(2) &= 2 \times 2 + 4(-1) = 0 \end{aligned}$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست

$$h'(3) = f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = (-2) \times 1 + 2 \times (-1) = -4$$

$$k'(1) = \frac{2 \times 3 - 2 \times (-1)}{(3)^2} = \frac{8}{9} \quad k'_+(2) = \frac{-2 \times 2 - 4 \times (-1)}{(2)^2} = \frac{0}{9} = 0$$

در $x=2$ مشتق پذیر نیست

$$k'(3) = \frac{-2 \times 1 - 2 \times (-1)}{(1)^2} = 0 \quad k'_-(2) = \frac{2 \times 2 - 4 \times (-1)}{(2)^2} = 2$$

تمرین ۱۱

$$(\lambda f + \mu g)'(1) = \lambda f'(1) + \mu g'(1) = \lambda \times \lambda + \mu \times \Delta = 19$$

$$(f + g)'(1) = f'(1) + g'(1) = \lambda + \Delta = 8$$

تمرین ۱۲:

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{x - \circ}{x - \circ} = 1$$

$\rightarrow f'_+(\circ) \neq f'_-(\circ) \Rightarrow f'(\circ)$ وجود ندارد

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} \frac{x^2 - \circ}{x - \circ} = \circ$$

$$f'(x) = 6x(2x - 5)^2 + 4(2x - 5)(2x^2 - 4) = (2x - 5)(24x^2 - 20x - 16) \quad (\text{الف})$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2\sqrt{2x+2}} \right) (x^2 + 1) + 2x^2 (\sqrt{2x+2}) \quad (\text{ب})$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(-2x + 2) + 2(x^2 - 2x + 1)}{(-2x + 2)^2} = \frac{-2x^2 + 4x - 3}{(-2x + 2)^2} \quad (\text{پ})$$

$$f'(x) = \frac{9(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(9x - 2)}{(\sqrt{x})^2} \quad (\text{ت})$$