درس ۳

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به‌دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات $\sin 3$ یا $\cos 3$ چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

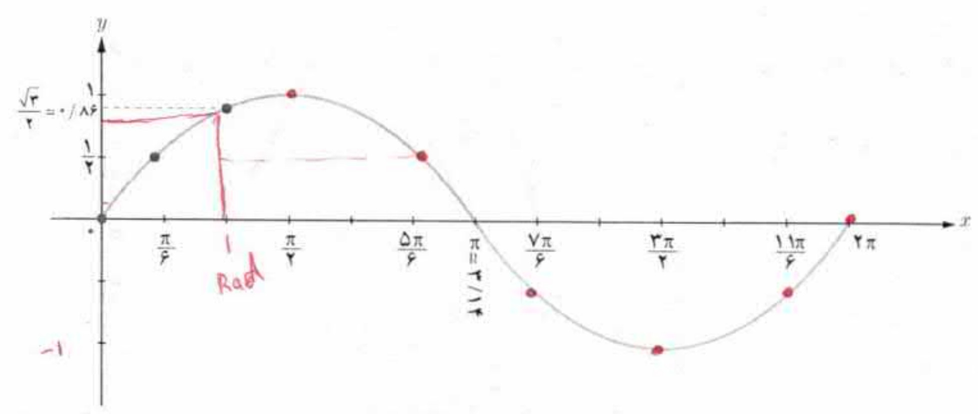
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0,2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}=0/86$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

۲ جدول بالا به‌صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. باتوجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به‌دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور yها بررسی کنید).

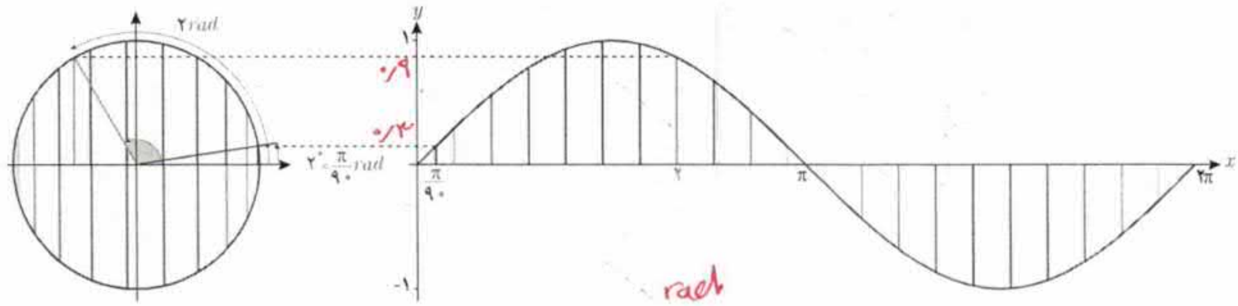
$$f=\left\{(0,0),(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}),(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{\pi}{2},1),(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}),(\pi,0),(\frac{7\pi}{6},-\frac{1}{2}),(\frac{3\pi}{2},-1),(\frac{11\pi}{6},-\frac{1}{2}),(2\pi,0)\right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه $[0,2\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin 1$ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟ بالای محور طول‌ها در قسمت مثبت بین صفر و یک و نزدیک یک

$\sin 1 \approx 0/84$

۴ در تابع $y=\sin x$، همیشه x را برحسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود. باتوجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin ۲$ و $\sin ۲^{\circ}$ را بیان کنید.



$\underset{rad}{\sin(۲)} = ۰/۹$ $\quad$ $\sin(۲^{\circ}) = \sin(\frac{\pi}{۹۰})_{rad} = ۰/۰۳$

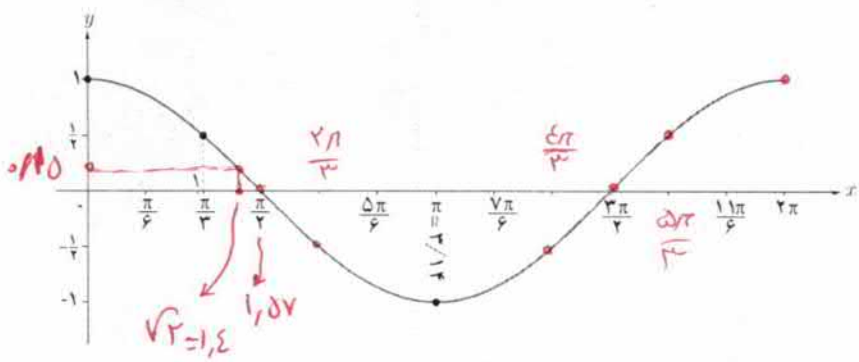
فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y=\cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به‌دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$f=\left\{(۰,۱),(\frac{\pi}{۳},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۲},۰),(\frac{۲\pi}{۳},-\frac{۱}{۲}),(\pi,-۱),(\frac{۴\pi}{۳},-\frac{۱}{۲}),(\frac{۳\pi}{۲},۰),(\frac{۵\pi}{۳},\frac{۱}{۲}),(۲\pi,۱)\right\}$$

خواندنی

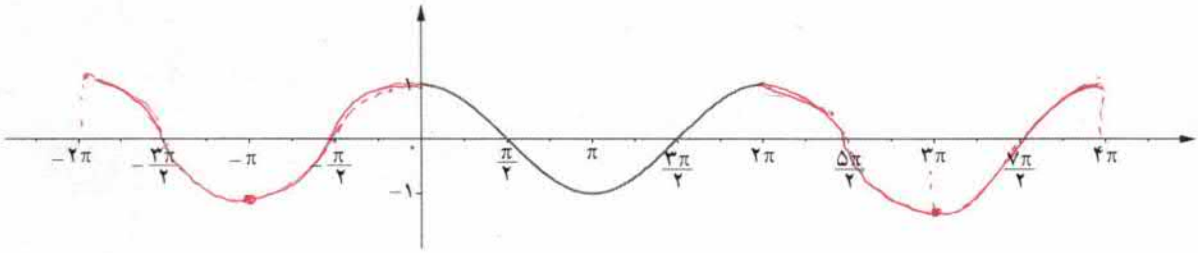
در همهٔ ماشین حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری برحسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین‌حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos\sqrt{۲}$ را حساب کرده‌اند.



۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها بیابید و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

$\underset{Rad}{\cos(\sqrt{۲})} = \underset{Rad}{\cos(۱,٤)} = ۰/۱۵۵۹$

۳ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و نیز $\cos(-x)=\cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y=\cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور xها به‌دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[-2\pi , 0]$ و $[0 , 2\pi]$ و $[2\pi , 4\pi]$ با هم متفاوت هستند؟ خیر؛ مقادیر برابر هستند.



۴ باتوجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟ بله که وجود دارد.

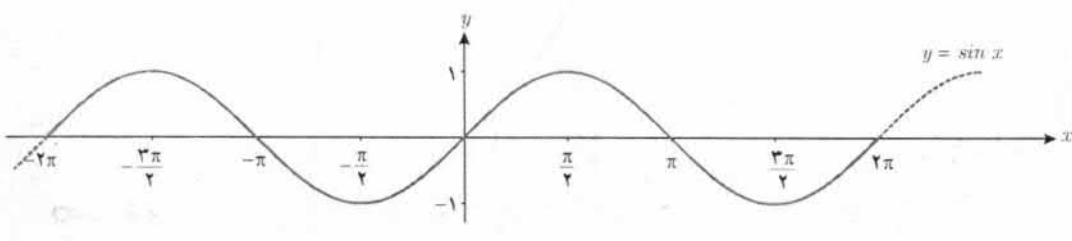
ب) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟ خیر

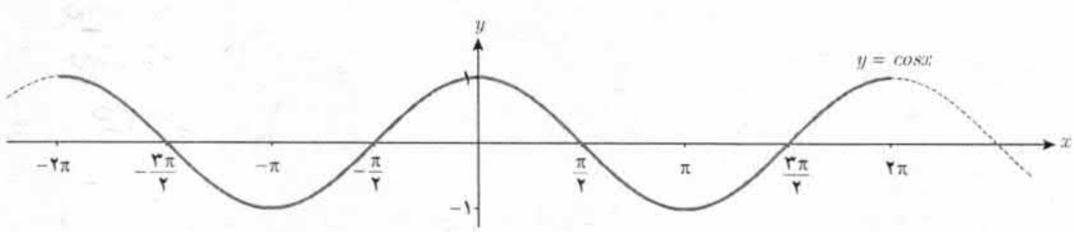
پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ در این بازه چقدر است؟ $y_{Max}=1$ $y_{Min}=-1$

تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1,1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y=\sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y=\cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y=\cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y=\sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتی بالا، می‌توان نمودار آنها را به‌صورت زیر رسم کرد.

زیرا $\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$





کار در کلاس

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

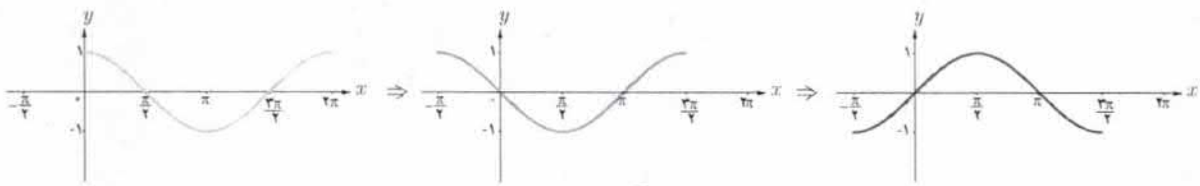
الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. نادرست

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است. درست.   پ) $\cos ۳=\cos ۳^\circ$. نادرست

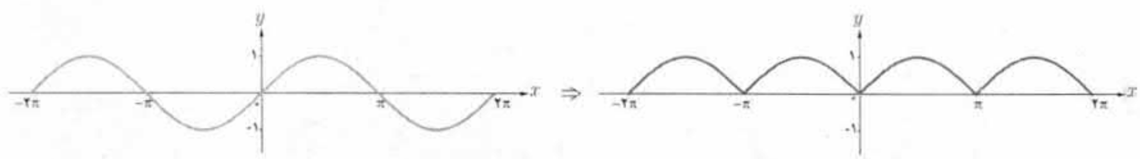
ت) اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱<\cos x<۰$ است. نادرست.   ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. نادرست.

ج) $x=\pi$ صفر تابع $f(x)=\cos x$ است. نادرست.

❖ **مثال** : با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$، نمودار توابع $y=-\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ و $y=|\sin x|$ در زیر رسم شده است.

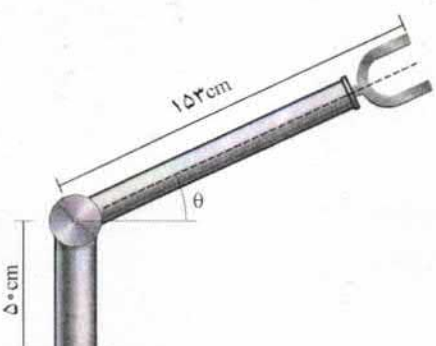


$y=\cos x$ $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$ $y=-\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

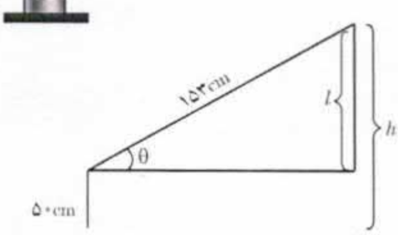


$y=\sin x$ $y=|\sin x|$

❖ **مثال** : روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. باتوجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲})$



❖ **حل** :کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



$$\sin\theta=\frac{l}{۱۵۳}\rightarrow l=۱۵۳\sin\theta$$

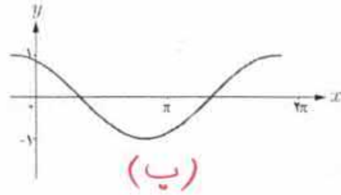
sin

$$\Rightarrow h=۵۰+l=۵۰+۱۵۳\sin\theta$$

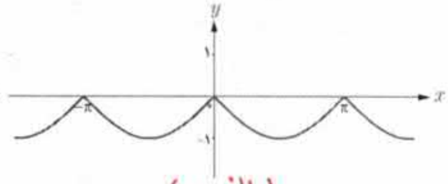
تمرین

۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

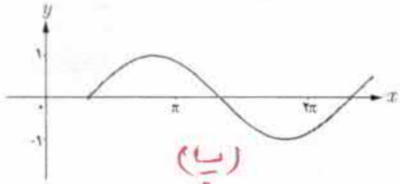
الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{6})$ پ) $y=\sin(x \cancel{+} - \frac{\pi}{3})$



(ب)



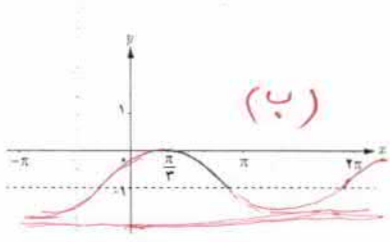
(الف)



(پ)

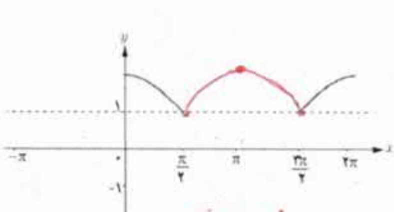
۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{6})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})-1$ پ) $y=1+|\cos x|$



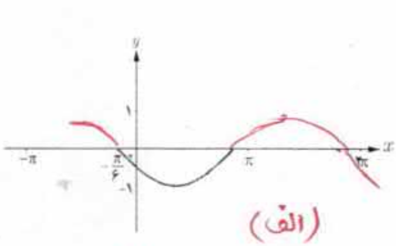
(ب)

$y_{Max}=0$
$y_{Min}=-2$



(پ)

$y_{Max}=2$
$y_{Min}=0$



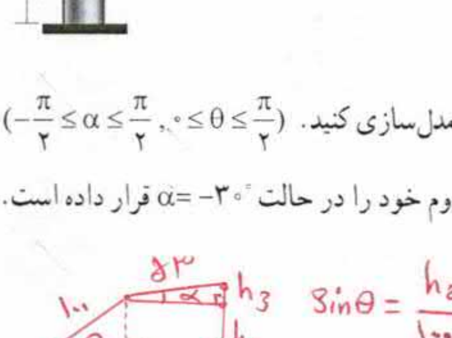
(الف)

$y_{Max}=1$
$y_{Min}=-1$

۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

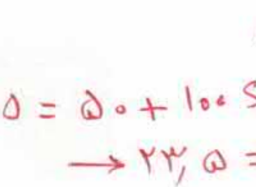
۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(0, \pi)$ یک به یک است؟ ؟ (پ) $\to (\frac{\pi}{3}, \pi)$

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.



الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳/۵ cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha=-30^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟



(الف)

$\sin\theta = \frac{h_2}{100} \to h_2 = 100\sin\theta$

$\sin\alpha = \frac{h_3}{53} \to h_3 = 53\sin\alpha$

$h = h_1 + h_2 + h_3 = 50 + 100\sin\theta + 53\sin\alpha$

(ب)

$23.5 = 50 + 100\sin\theta + 53(-\frac{1}{2})$

$\to 23.5 = 50 + 100\sin\theta - 26.5 \to \sin\theta = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \to \theta = 30^\circ$