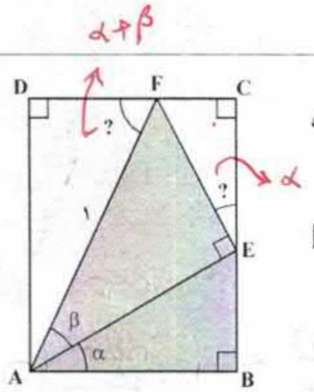
درس ۴

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$ آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به‌کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{ll} F\hat{E}C+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ & \text{: زاویه } E \text{ نیم صفحه است.} \\ \alpha+90^\circ+A\hat{E}B=180^\circ & \text{: مجموع زوایای داخلی } ABE \end{array}\right\}\Rightarrow F\hat{E}C=\alpha$$

اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Rightarrow A\hat{F}D=\alpha+\beta$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\overset{\Delta}{ADF}$ را با توجه به اینکه $AF=1$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

$\sin(\alpha+\beta)=AD$

$\cos(\alpha+\beta)=DF$

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

$\sin\beta=EF$

$\cos\beta=AE$

ت) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

$$\overset{\Delta}{ABE}:\begin{cases}\sin\alpha=\frac{BE}{AE}=\frac{BE}{\cos\beta}\rightarrow BE=\sin\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha=\frac{AB}{AE}=\frac{AB}{\cos\beta}\rightarrow AB=\cos\alpha\cos\beta\end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{ECF}:\begin{cases}\sin\alpha=\frac{FC}{EF}=\frac{FC}{\sin\beta}\rightarrow FC=\sin\alpha\sin\beta\\ \cos\alpha=\frac{EC}{EF}=\frac{EC}{\sin\beta}\rightarrow EC=\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحهٔ قبل روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا ت کامل کنید.

$$AD = BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$DF = AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است. بازهم روابط برقرار هستند.

در فعالیت فوق زوایای به‌کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

پس همواره داریم :

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

مثال : مقدار $\sin ۷۵^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin۷۵^\circ=\sin(۴۵^\circ+۳۰^\circ)=\sin۴۵^\circ\cos۳۰^\circ+\cos۴۵^\circ\sin۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال : درستی رابطهٔ $\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cot\theta$ را نشان دهید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}=\frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}^{۱}\cos\theta+\cancel{\cos\frac{\pi}{۲}}\sin\theta}{\cancel{\cos\frac{\pi}{۲}}\cos\theta-\underbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}_{۱}\sin\theta}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\cot\theta$$

$\sin 105 = \sin(60+45) = \sin 60 \cos 45 + \cos 60 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 105 = \cos(60+45) = \cos 60 \cos 45 - \sin 60 \sin 45$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

تمرین

$\tan 105 = \frac{\sin 105}{\cos 105} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

۱) $\cos 15^\circ = \cos(60-45) = \cos 60 \cos 45 + \sin 60 \sin 45$

۲) $\tan 105^\circ =$ حل

۳) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin\beta = \frac{5}{13}$

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha)$
$= \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$
$= 2\sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha)$
$= \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

ادامه تمرین ۲

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$
$= \frac{3}{5} \times (\frac{-12}{13}) + \frac{4}{5} \times (\frac{5}{13}) = \frac{-36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{-16}{65}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$
$= \frac{4}{5}(-\frac{12}{13}) + \frac{3}{5}(\frac{5}{13})$
$= \frac{-48}{65} + \frac{15}{65} = \frac{-33}{65}$