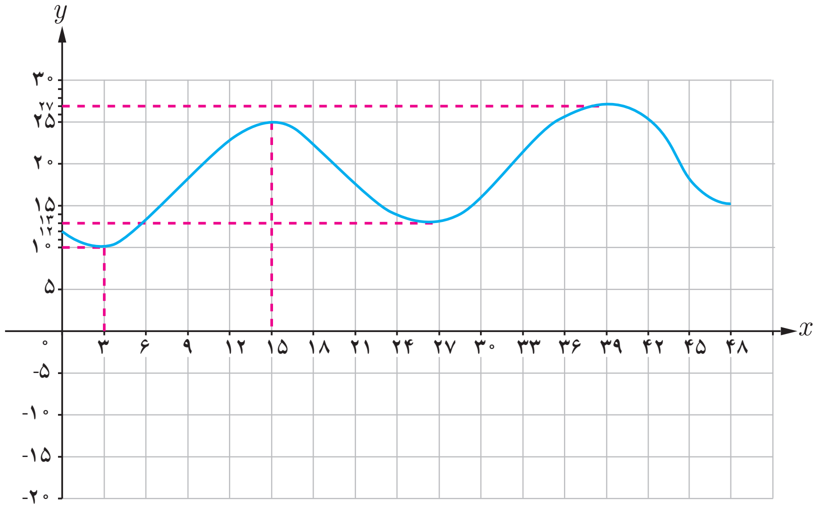
درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

در نقطه ۳ کمترین دما هست که برابر با ۱۰ می باشد ودر نقطه ۲۹ بیشترین دما هست که برابر با ۲۷ است



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.

نقاط به طول ۳ و ۲۷ به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \le f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \ge f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۲۵ , ۱۵) و (۲۷ , ۳۹) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x =$ ۱۵ و $x =$ ۳۹ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۱۰ , ۳) و (۱۳ , ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x =$ ۱۰ و $x =$ ۱۳ اتفاق افتاده‌اند.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک بازه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در بازهٔ I «مینیمم مطلق» این تابع در این بازه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن بازه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر بازهٔ موردنظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر بازهٔ مورد نظر است.

تذکر : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

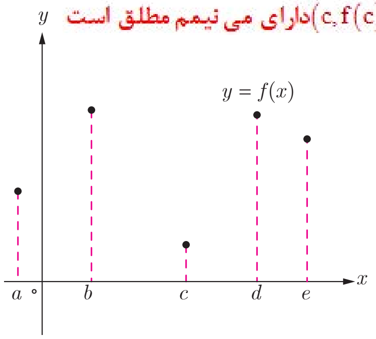
کاردرکلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

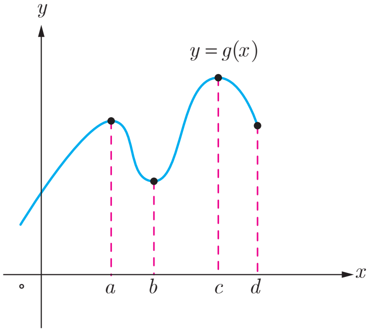
درنقطه (b,f(b))دارای ماکزیمم مطلق
ودر نقطه (c,f(c))دارای می نیمم مطلق است

درنقطه (c,g(c))دارای ماکزیمم مطلق
ولی می نیمم مطلق ندارد

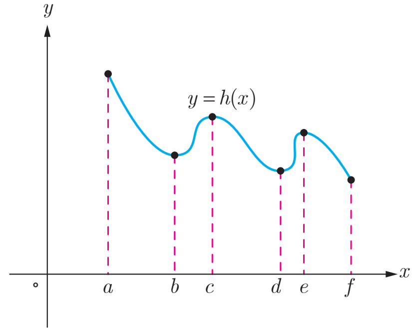
درنقطه (a,h(a))دارای ماکزیمم مطلق
ودر نقطه (f,h(f))دارای می نیمم مطلق است



(الف)

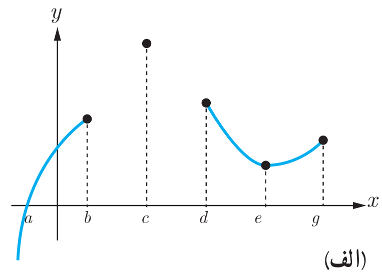


(ب)

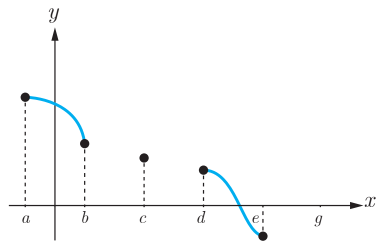


(پ)

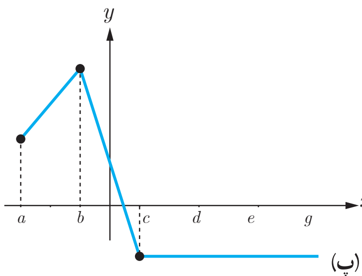
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



(الف)

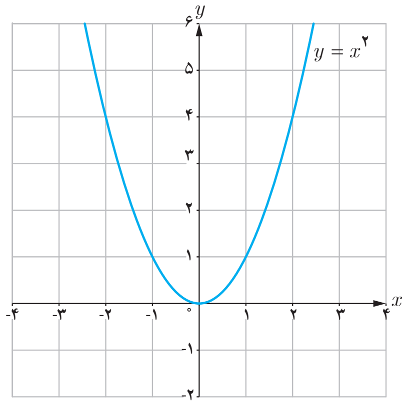


(ب)

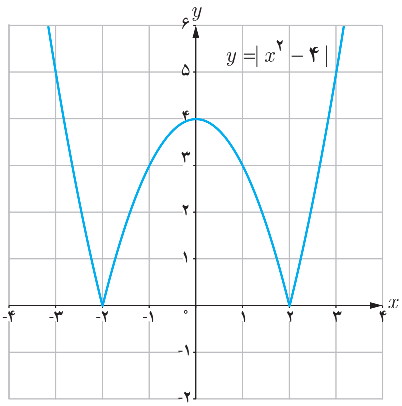


(پ)

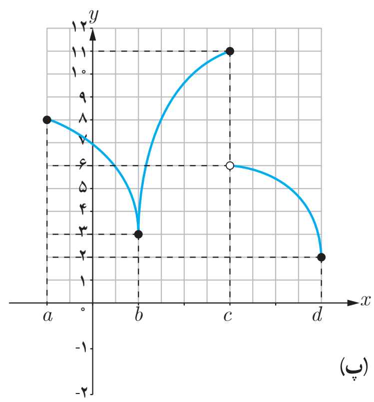
۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.



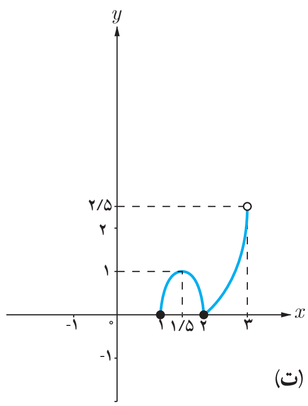
(الف)



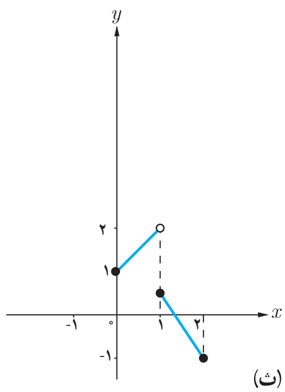
(ب)



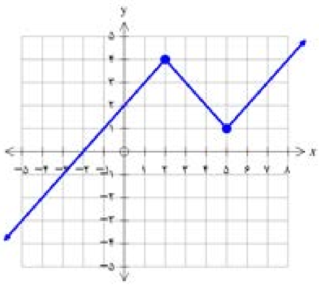
(پ)



(ت)



(ث)



۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۴ , ۲) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۱ , ۵) مینیمم نسبی دارد.

حل کاردرکلاس ۲:

الف) $(c, f(c))$ ماکزیمم مطلق است ونسبی نیست $(e, f(e))$ می نیمم نسبی است ومطلق نیست

ب) $(a, g(a))$ ماکزیمم مطلق است ونسبی نیست و $(e, g(e))$ می نیمم مطلق است ونسبی نیست

پ) $(b, h(b))$ ماکزیمم مطلق ونسبی است و تمام نقاط $[c, +\infty)$ می نیمم نسبی ومطلق است و تمام نقاط $(c, +\infty)$ می نیمم نسبی است.

حل کاردرکلاس ۲:

الف) در نقطه $x=0$ می نیمم مطلق ونسبی دارد ومقدار آن برابر با صفر است وماکزیمم نسبی ومطلق ندارد

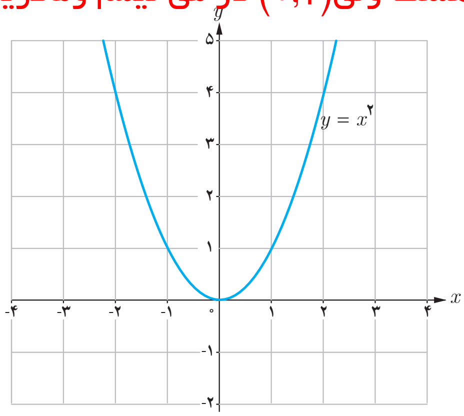
ب) درنقطه $x=0$ ماکزیمم نسبی دارد ومقدار آن برابر با ۴ است و ماکزیمم مطلق ندارد ودر نقاط $x=2, x=-2$ می نیمم مطلق ونسبی دارد که مقدار هر دو برابر صفر است

پ) در نقطه $x=c$ دارای ماکزیمم نسبی ومطلق است ومقدار آنها برابر ۱۱ است ودر نقطه $x=d$ دارای می نیمم مطلق با مقدار ۲ ودر نقطه $x=b$ دارای می نیمم نسبی با مقدار ۳ می باشد

ت) ماکزیمم مطلق ندارد ودر نقطه $x=1/5$ دارای ماکزیمم نسبی با مقدار ۱ می باشد در نقطه $x=2$ دارای می نیمم نسبی با مقدار صفر می باشد ودر نقاط $x=1, x=2$ دارای می نیمم مطلق با مقدار صفر است.

ث) ماکزیمم مطلق ونسبی ندارد ومی نیمم مطلق در نقطه $x=2$ با مقدار ۱- دارد

در [۰,۱]می نیمم مطلق برابر صفر وماکزیمم مطلق برابر یک هست ولی(۰,۱) در می نیمم وماکزیمم مطلق ندارد



۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

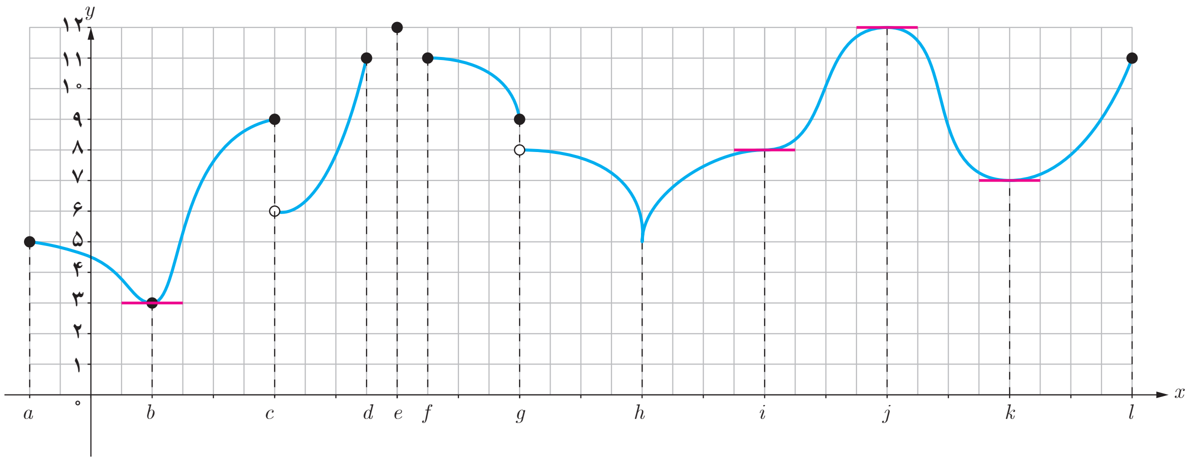
الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[۰ , ۱]$ و $(۰ , ۱)$ بررسی کنید.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

در X=۰ می نیمم مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. b,c,h,k,j

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. a,c,d,e,f,g,h,l

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید. b,i,j,k

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ خیر

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ صفر

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ بله نقطه i

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟ بله نقطه e

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

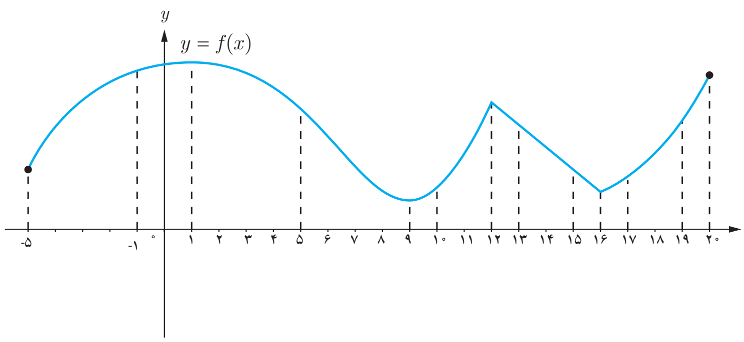
الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست. **نادرست**

ب) اگر $f'(c)=0$، آنگاه $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است. **نادرست**

پ) اگر $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$. **درست**

فعالیت

۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع **پیوسته** را نشان می‌دهد.



الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در **بازه‌های بستهٔ** زیر بررسی کنید.

$[-۱,۰]$ ، $[۵,۱۰]$ ، $[۱۳,۱۵]$ ، $[۱۰,۱۳]$ ، $[۱۶,۲۰]$

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در **بازه‌های باز** زیر بررسی کنید.

$(-۱,۰)$ ، $(۵,۱۰)$ ، $(۱۳,۱۵)$ ، $(۱۰,۱۳)$ ، $(۱۶,۲۰)$

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. **درست**

ب) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است. **نادرست**

قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه : اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a,b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم مقدار ماکزیمم مطلق و هم مقدار مینیمم مطلق دارد.

حل فعالیت صفحه ۱۱۶ سوال ۱:

الف)

[۱۳,۱۵] → min = ۱۵, max = ۱۳   [۱۰,۱۳] → min = ۱۰, max = ۱۲   [۱۶,۲۰] → min = ۱۶, max = ۲۰

[−۱,۰] → min = −۱, max = ۰   [۵,۱۰] → min = ۹, max = ۵

ب)

(۱۰,۱۳) → max : x = ۱۲, min وجود ندارد

(۵,۱۰) → min : x = ۹, max وجود ندارد

(۱۶,۲۰) → min, max وجود ندارد

(۱۳,۱۵) → min, max وجود ندارد

(−۱,۰) → min, max وجود ندارد

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترمم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

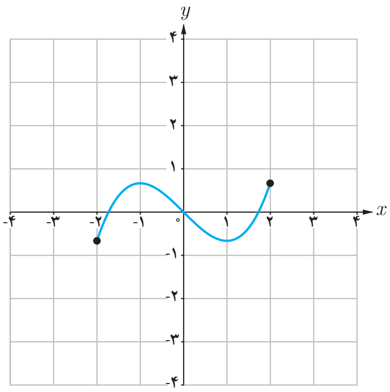
۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳-x$ را در بازهٔ $[-۲ , ۲]$ بیابید.



حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $(-۲ , ۲)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲ , ۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^۲-۱$ و مقدار f' در $x=\pm ۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.

بنابراین $x=\pm ۱$ طول نقاط بحرانی و $x=\pm ۲$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳} \qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳} \qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳} \qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.

مثال : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^2-1|$ را روی بازه $[-2\,,\,2]$ پیدا کنید.

حل : نقاط $x=\pm 2$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & x\leq -1 \text{ یا } 1\leq x\\ 1-x^2 & -1\leq x\leq 1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}2x & x<-1 \text{ یا } 1<x\\ -2x & -1<x<1\end{cases}$$

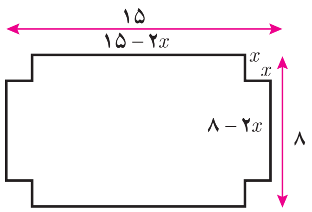
حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت :

$$f'_+(1)=2 \quad,\quad f'_-(1)=-2 \quad,\quad f'_+(-1)=2 \quad,\quad f'_-(-1)=-2$$ و

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm 1$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=0$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=0$ و $x=\pm 1$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm 1$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm 2$ و مقدار آن برابر ۳ است.

در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می‌خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.

مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[1] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟



حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$$\text{طول قوطی مورد نظر} = 15-2x \qquad 0\leq x\leq \frac{15}{2}$$

$$\text{عرض قوطی} = 8-2x \qquad 0\leq x\leq 4$$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(15-2x)(8-2x)=4x^3-46x^2+120x \quad,\quad 0\leq x\leq 4$$

۱ــ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

چون V روی $[0 , 4]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

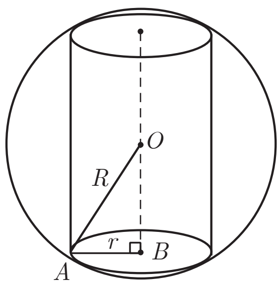
$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x - 5)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = 6$$

اما $x = 6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{5}{3}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(0) = 0$ ، $V(4) = 0$ و $V(\frac{5}{3}) > 0$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x = \frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینچ باشد.

مثال : در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل : فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB ، $OB = \frac{h}{2}$ و داریم :



$$AB^2 + OB^2 = OA$$

بنابراین $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$.

حجم این استوانه برابر است با :

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h \Rightarrow V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3 \quad ; \quad 0 \leq h \leq 2R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[0 , 2R]$، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم :

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

از طرفی $V(0) = 0$ و $V(2R) = 0$

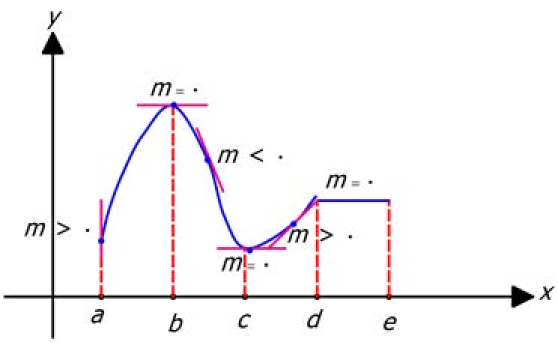
بنابراین تابع V به ازای $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ ، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$ ، مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

$$(b,c)\to m<۰\ ,(a,b),(c,d)\to m>۰\ ,\ (d,e)\to m=۰$$

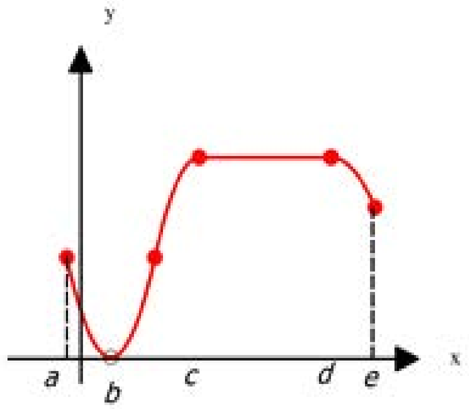
ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

$$(b,c)\to f'<۰\ ,(a,b),(c,d)\to f'>۰\ ,\ (d,e)\to f'=۰$$

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.

در بازه ی (a,b) اکیداً صعودی ودر بازه ی (b,c)اکیداً نزولی ودر بازه (c,d) اکیدا صعودی در بازه (d,e)تابع ثابت است.

۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازهٔ $[a , e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد :



ــ تابع f در بازهٔ (a , e) مشتق‌پذیر باشد.

ــ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a , b) و (b , c) و (c , d) و (d , e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ــ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

در بازه ی (a,b) نزولی و بازه ی (b,c) صعودی ودر بازه ی (c,d) تابع ثابت و دربازه ی (d,e) نزولی است.

با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

قضیه :

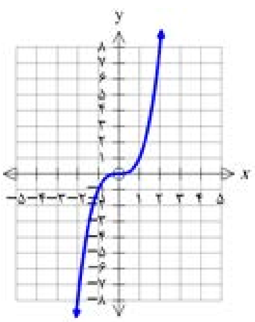
فرض کنیم تابع f بر بازه $[a , b]$ پیوسته و بر بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

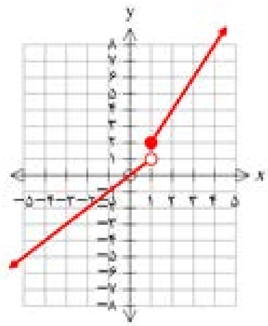
الف) اگر به ازای هر x در (a , b)، $f'(x) > ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) < ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) = ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ یک تابع ثابت است.

کار در کلاس



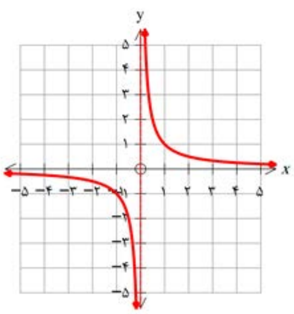


۱ توابع $f(x) = \begin{cases} ۲x & x \geq ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x^۳$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟ خیر

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟ بله

۲ تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ را در نظر بگیرید.



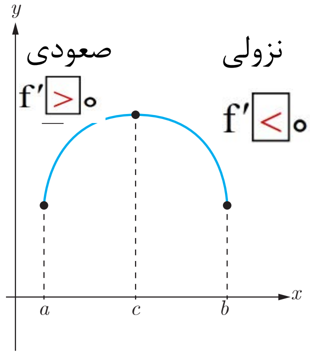
الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty , ۰)$ و $(۰ , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟ خیر

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

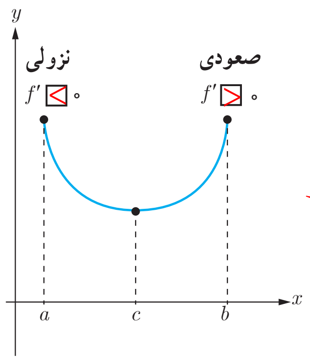
فعالیت

فرض کنیم $c \in (a\,,b) \subseteq D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و f بر $(a\,,b)$ پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.



۱ اگر تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,c)$ در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند $(c\,,b)$ در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c مشخص نمایید.



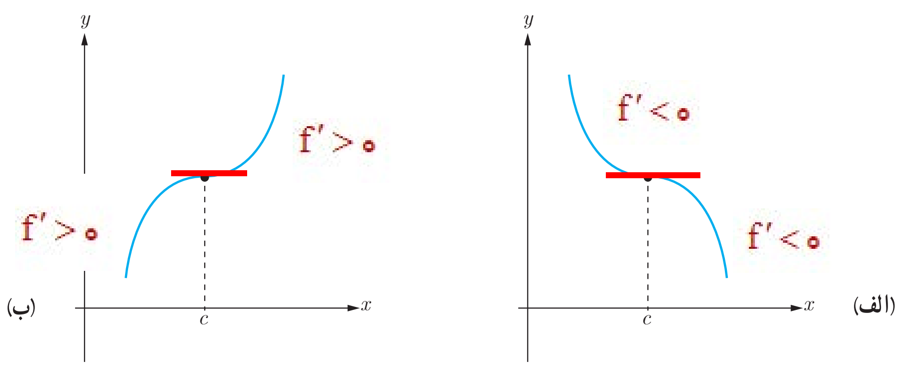
۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

اگر تابع f در بازه ی (a,c) در سمت چپ آن نزولی ودر بازه مانند (c,b) در سمت راست آن صعودی باشد در این صورت x=c یک نقطه می نیمم نسبی تابع f است

۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c)=0$.

الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟



نقاط اکستریمم ندارند زیرا علامت f′ در شکل های الف و ب در دو طرف نقطه ی x=c یکسان می باشد

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x) > ۰$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x) < ۰$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x) < ۰$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x) > ۰$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۲x^۲ - ۴x + ۶$ را در بازهٔ $[-۳ , ۴]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل : از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۴x - ۴ \qquad f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \quad \text{یا} \quad x = -\frac{۲}{۳}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x = ۲$ و $x = -\frac{۲}{۳}$ است و نقاط $x = -۳$ و $x = ۴$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم :

$$(-۳ , -۲۷) \; , \; (-\frac{۲}{۳} , \frac{۲۰۲}{۲۷}) \; , \; (۲ , -۲) \; , \; (۴ , ۲۲)$$

لذا $x = ۴$ و $x = -۳$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم :

x		$-\frac{۲}{۳}$		۲	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}, ۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -۲ است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	-۳		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	-۲۷	↗	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	↘	-۲	↗	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

x	s		a		b		c		d		e		t
f'		+	۰	−	۰	+	۰	+	۰	صفر	۰	+	
f		↗	max	↘	min	↗		↗	max	—	min	↗	

کار در کلاس

a — Max وبحرانی است

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.

b — Min وبحرانی است

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s, t]$ بررسی کنید.

c — نه max نه min نقطه عطف مماس افقی است وبحرانی است

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

d — Max وبحرانی است

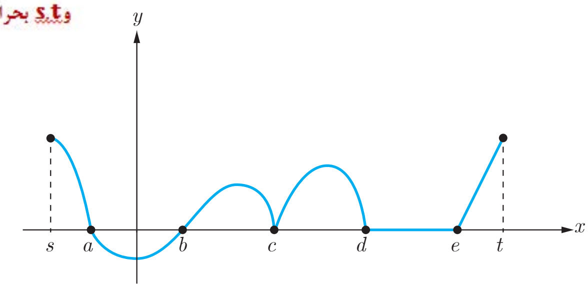
e — Min وبحرانی است

پ) آیا نقاط (d, e) ءزاب اکسترمم نسبی دنتسه؟

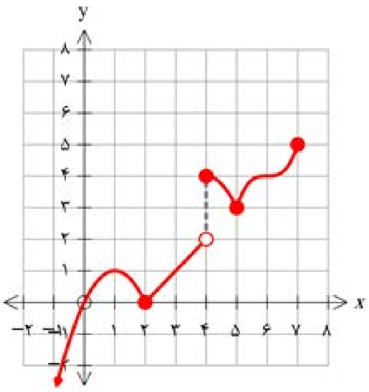
بله زیرا تابع در این بازه ،تابع ثابت است

تمام بازه (d, e) هم max نسبی وهم min نسبی وهمگی بحرانی هستند

و s,t بحرانی نیستند



تمرین



۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

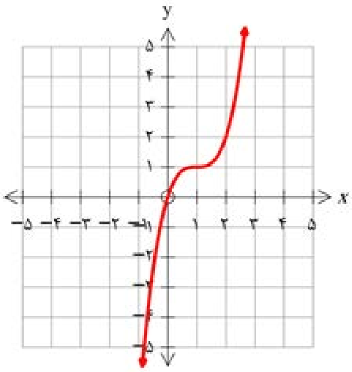
نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.

نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع نقطهٔ بحرانی نباشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.



۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a\,,b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a\,,b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a\,,b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.

پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

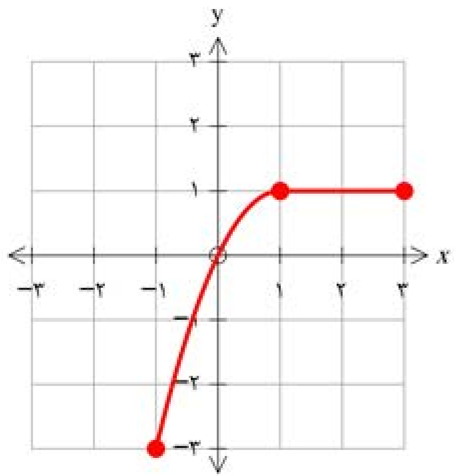
۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=3x^2-2x+5 \qquad [-2\,,1]$

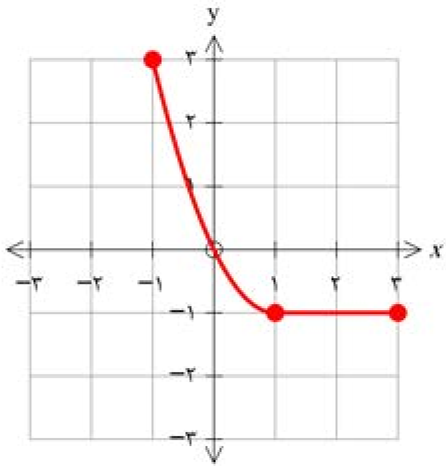
ب) $f(x)=x^3-3x \qquad [-1\,,2]$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}$

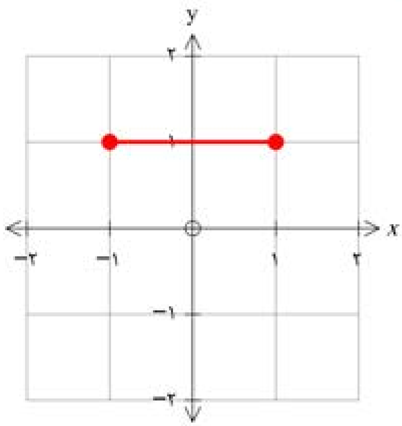
تمرین ۳: الف)



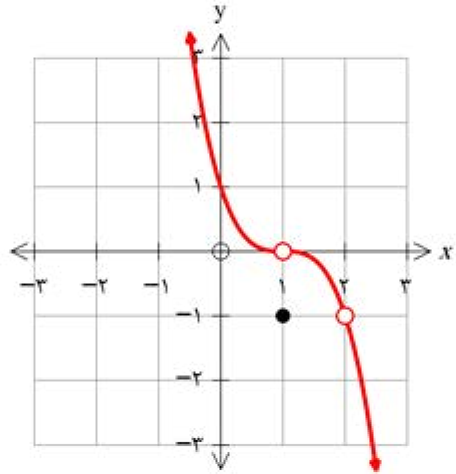
ب)



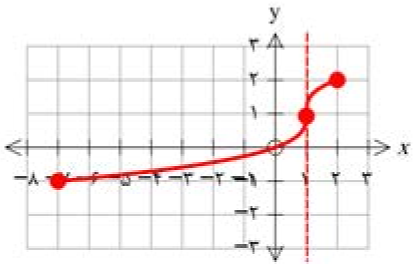
پ)



تمرین ۴: الف)

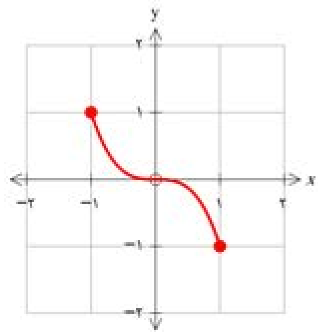


ب)

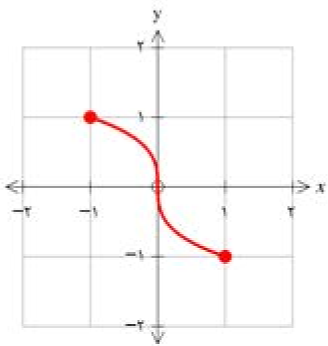


در نقطه (۱،۱) مشتق پذیر نیست

پ)

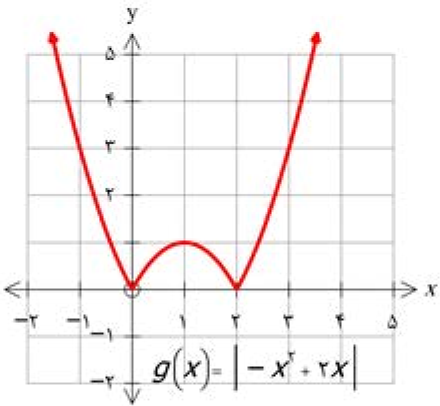


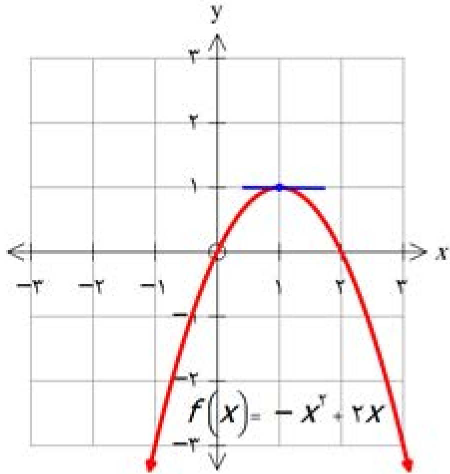
در مبدا مشتق برابر صفر است



در مبدا مشتق تعریف نشده است

تمرین ۵:





این تابع در نقطه (۱و۱) دارای ماکزیمم مطلق روی دامنه خود یعنی اعداد حقیقی دارد ولی تابع قدر مطلق آن دارای ماکزیمم مطلق نیست

تمرین ۶: الف

$$f(x)=۳x^۲-۲x+۵ \qquad [-۲,۱]$$

$$f'(x)=۶x-۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۶x-۲=۰ \to x=\frac{۱}{۳}$$

$$x=-۲ \to f(-۲)=۳(-۲)^۲-۲(-۲)+۵=۱۲+۴+۵=۲۱ \to \text{مطلق } \max \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۲۱ \end{matrix} \right.$$

$$x=\frac{۱}{۳} \to f\left(\frac{۱}{۳}\right)=۳\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲-۲\left(\frac{۱}{۳}\right)+۵=\frac{۱-۲+۱۵}{۳}=\frac{۱۴}{۳} \to \text{مطلق } \min \left| \begin{matrix} \frac{۱}{۳} \\ \frac{۱۴}{۳} \end{matrix} \right.$$

$$x=۱ \to f(۱)=۳(۱)^۲-۲(۱)+۵=۳-۲+۵=۶$$

ب)

$$f(x)=x^3-3x \qquad [-1,2]$$

$$f'(x)=3x^2-3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \to x=\pm 1$$

$$x=-1 \to f(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=2 \to$$ مطلق $\max\Big|\begin{smallmatrix}-1\\2\end{smallmatrix}$

$$x=1 \to f(1)=(1)^3-3(1)=-1-3=-4 \to$$ مطلق $\min\Big|\begin{smallmatrix}1\\-4\end{smallmatrix}$

$$x=2 \to f(2)=(2)^3-3(2)=8-6=2 \to$$ مطلق $\max\Big|\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$

پ)

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<2\\ 4-x & x\ge 2\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x<2\\ -1 & x>2\end{cases}$$

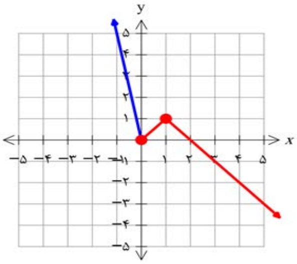
x	0		2	
f'		+		−
f	0		2	

نسبی $\max\Big|\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$

$$f(x)=x^{3}+ax+b\xrightarrow{(1,2)}1+a+b=2\rightarrow \underline{a+b=1}$$

$$f'(x)=3x^{2}+a\xrightarrow{f'(1)=0}3+a=0\rightarrow a=-3\xrightarrow{a+b=1}b=4$$

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.



۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$f(-1)=5 \quad , \quad f(4)=-2 \quad , \quad f(0)=0$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy=100\text{cm}^2$ و $h=2\text{cm}$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

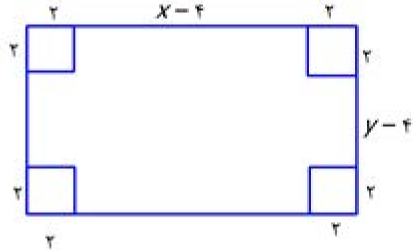
۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$

ب) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

تمرین ۹:



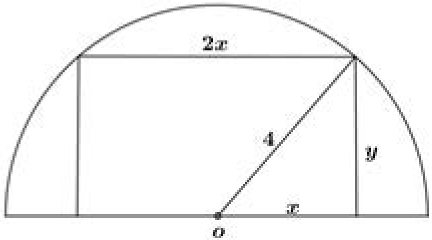
$$V = 2(x-4)(y-4) = 2xy - 8x - 8y + 32$$

$$\xrightarrow{xy=100 \to y=\frac{100}{x}} V_{(x)} = 232 - 8x - \frac{800}{x} = \frac{232x - 8x^2 - 800}{x}$$

$$V'_{(x)} = \frac{(232-16x)x - 1(232x - 8x^2 - 800)}{x^2} = \frac{-8x^2 + 800}{x^2}$$

$$V'_{(x)} = 0 \to -8x^2 + 800 = 0 \to x^2 = 100 \to x = 10 \to y = 10$$

تمرین ۱۰:



$$x^2 + y^2 = 16 \to y^2 = 16 - x^2 \to y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$S = 2xy = 2x\left(\sqrt{16 - x^2}\right)$$

$$S'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} + \frac{2x(-2x)}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \to 32 - 4x^2 = 0 \to x^2 = 8 \to x = \sqrt{8} \to y = \sqrt{8}$$

تمرین۱۱: الف)

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x^2-x-2)=6(x-2)(x+1)\xrightarrow{f'(x)=0}\begin{cases}x-2=0\rightarrow x=2\\ x+1=0\rightarrow x=-1\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

در بازه های $(2,+\infty)$ ، $(-\infty,-1)$ صعودی ودر بازه ی $(-1,2)$ نزولی است

ب)

$$f(x)=\frac{x}{x-2}\qquad D_f=\mathbb{R}-\{2\}$$

$$f'(x)=\frac{1(x-2)-1(x)}{(x-2)^2}=\frac{-2}{(x-2)^2}<0$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	

در بازه $(-\infty,2)$ نزولی ودر بازه $(2,+\infty)$ نزولی هست