درس ۱

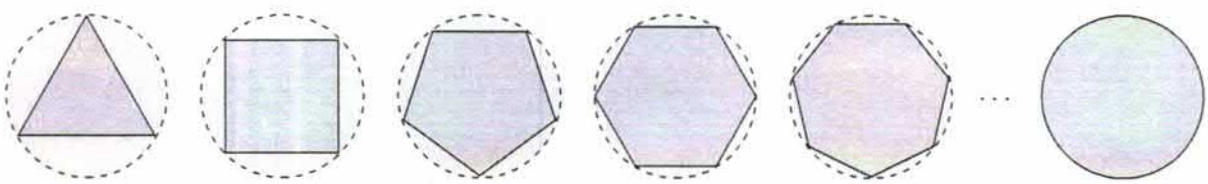
مفهوم حد و فرایندهای حدی

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به‌صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟ دایره

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟ $\pi(1)^2 = \pi$

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر ۳/۱۴۱۵۹=π در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد:

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد π، که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هراندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (پی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. پی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است :

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبهٔ به‌دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پاپیروسی نوشته شده است که درحال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را با تقریب بسیار خوبی ($3/2150 > \pi > 3/1058$) به‌دست آورد.

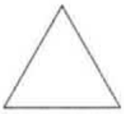
غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطیه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد :

گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π — پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد
خرد و دانش و آگاهی دانشمندان — ره سرمنزل مقصود بما آموزد
۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹ — ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$\pi = 3/1415926535 \ldots$

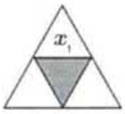
فعالیت



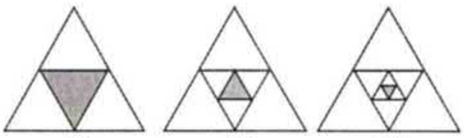
یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_1 = \frac{2}{2} = 1$ و $P_1 = \frac{6}{2} = 3$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$			...	$\frac{1}{2^n}$
P_n	۳	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$			...	$\frac{3}{2^n}$

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟ صفر

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = 3x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

✤ مثال : رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

✤ حل : تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq ۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود — x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

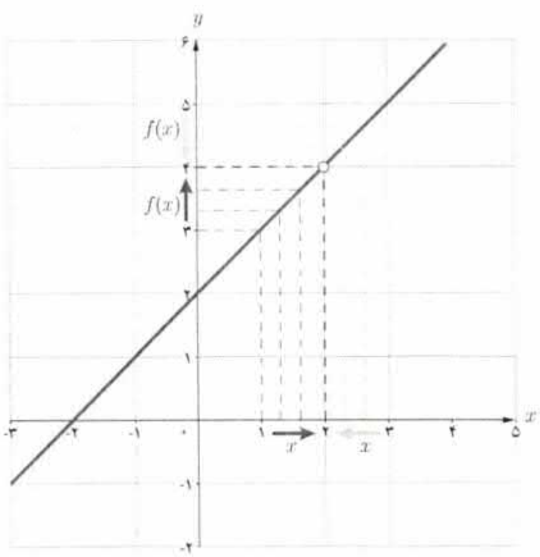
x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید :

نمودار تابع f، خط راست $y=x+۲$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(۲,۴)$ حذف شده است.



با وجود اینکه مقدار تابع در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x\rightarrow ۲$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\rightarrow ۲} f(x)=۴$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کار در کلاس

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x)=x+۳$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ و $h(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۴ & x=۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

$h(۳)=$ ۴ $\qquad g(۳)=$ تعریف نشده $\qquad f(۳)=$ ۶

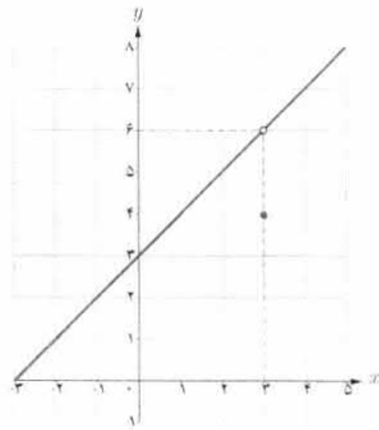
۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

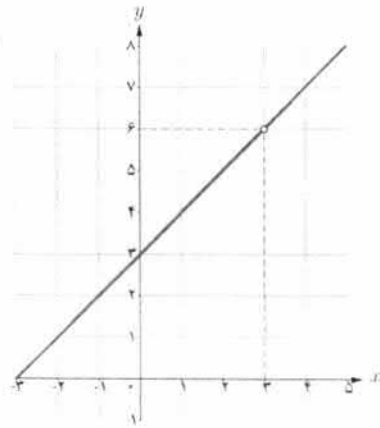
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow$	۳	$\leftarrow$	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$h(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱

۳ نمودارهای توابع f ، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

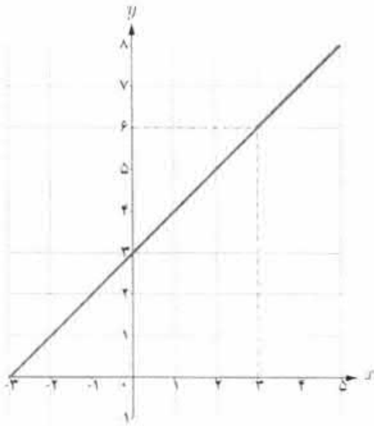
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

هر سه تابع به عدد ۶ نزدیک می‌شوند.

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ۶ است به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = ۶ \qquad \lim_{x\to ۳} g(x) = ۶ \qquad \lim_{x\to ۳} h(x) = ۶$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

تفاوت در مقدار در نقطه‌ی $x=۳$ و شباهت در برابر بودن حدهای آنها در $x=۳$

تفاوت در برابر بودن یا نبودن مقدار تابع با حد تابع در $x=۳$

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

ب) ممکن است یک تابع درنقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

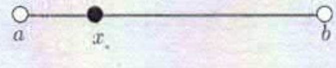
در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازهٔ باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

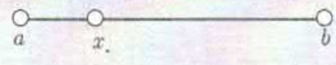
تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



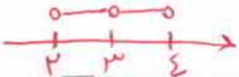
به همین ترتیب :

اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0 , x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r , x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

(۲،۴)-{۳} همسایگی ۳   (۳،۴) همسایگی راست ۳   (۲،۳) همسایگی چپ ۳



۲ آیا بازهٔ (۲،۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

طبق تعریف بازه (۲،۳) همسایگی راست ۲ می‌باشد.

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

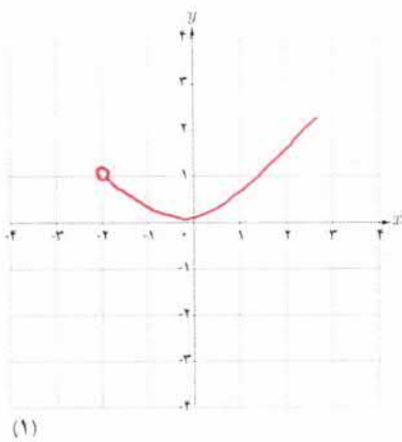
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲- تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

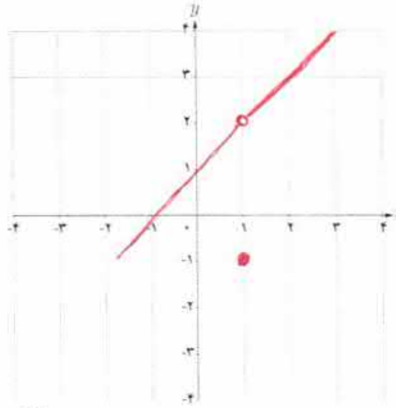
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.

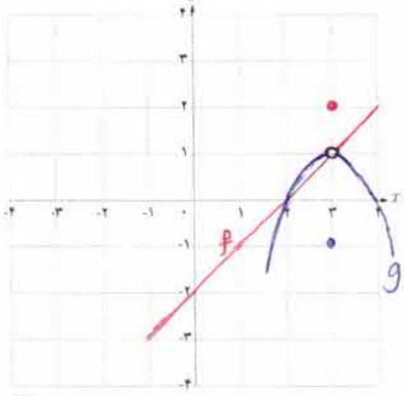
۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.



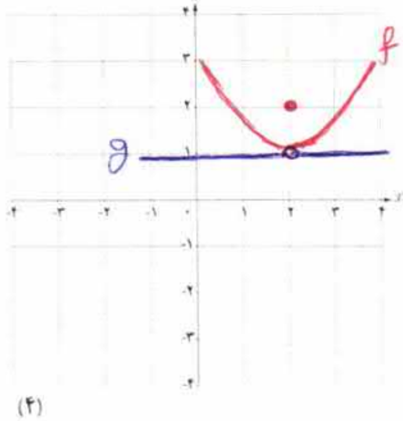
(۱)



(۲)



(۳)

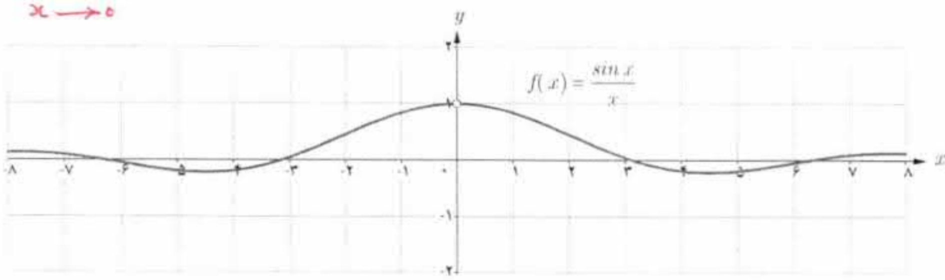


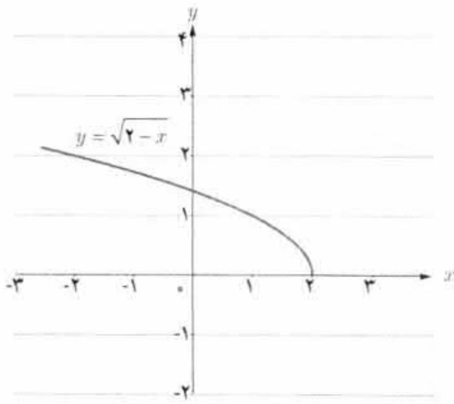
(۴)

x	$\frac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳

۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



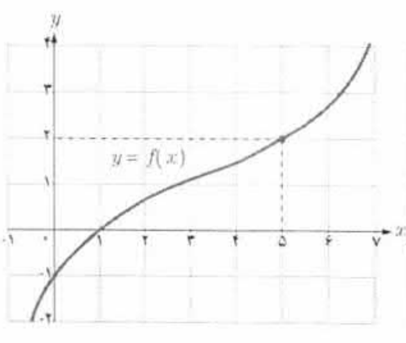


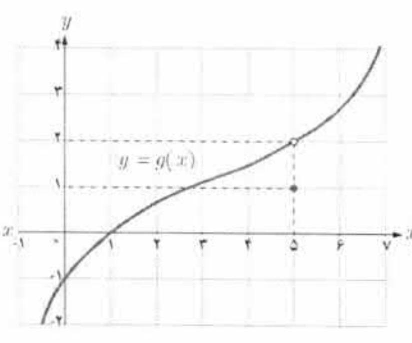
مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

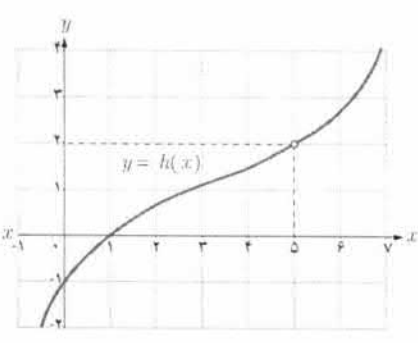
حل : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد. چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=۲$ حد ندارد.

تمرین

۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید.

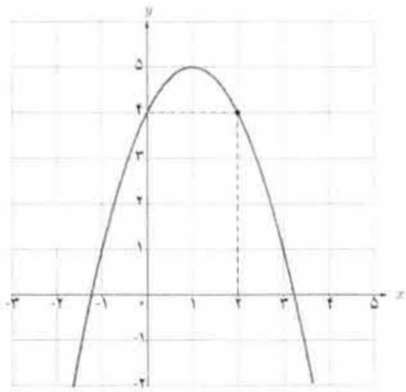




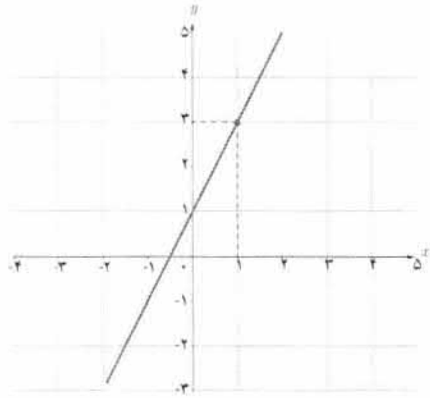


$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=..۲..$ $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=..۲..$ $\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=..۲..$

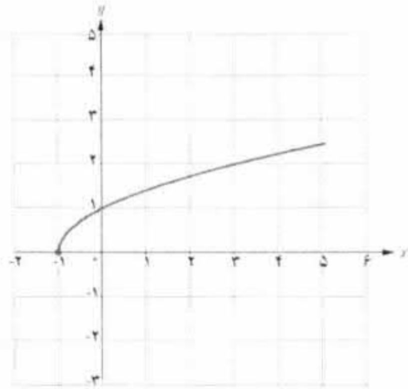
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



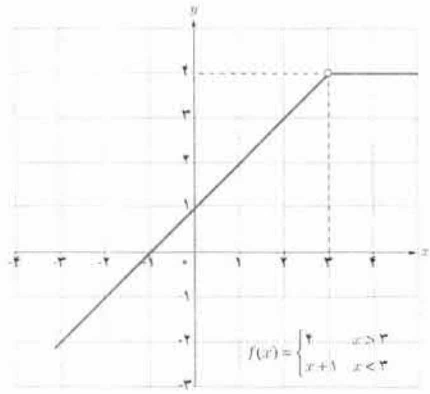
$\lim_{x \to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴) =$ ٤



$\lim_{x \to ۱} (۲x + ۱) =$ ۳



$\lim_{x \to -۱} \sqrt{x + ۱} =$ حد ندارد



$\lim_{x \to ۳} f(x) =$ ۴

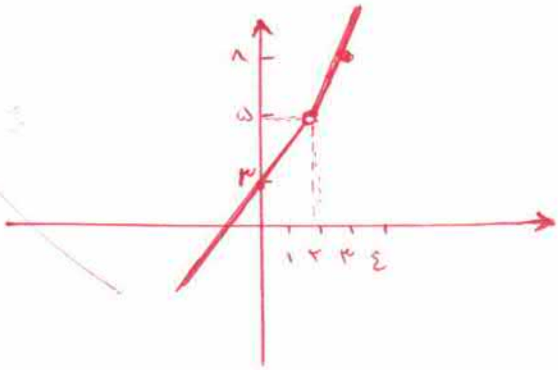
۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim_{x \to ۰} (-۳x+۴) =$ ۴

x	۱-	۰/۹-	۰/۱-	۰/۰۱-	→	۰	←	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	۷	۶٫۷	۴٫۳	۴٫۰۳	→	?	←	۳٫۹۹۷	۳٫۹۷	۳٫۷	۲٫۵	۱

ب) $\lim_{x \to -۱} f(x) =$ ۵- ، $f(x) = \begin{cases} x - ۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x = -۱ \end{cases}$

x	۲-	۱/۵-	۱/۱-	۱/۰۱-	۱/۰۰۱-	→	۱-	←	۰/۹۹۹-	۰/۹۹-	۰/۹-	۰/۸-
$f(x)$	۶-	۵٫۵-	۵٫۱-	۵٫۰۱-	۵٫۰۰۱-	→	?	←	۴٫۹۹۹-	۴٫۹۹-	۴٫۹-	۴٫۸-

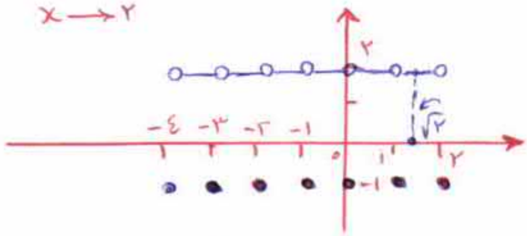


۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟ خیر

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$



۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Z}\\ 2 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} g(x) = ..2.$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = ..2.$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

(الف) $1-x^2\geq 0 \rightarrow x^2\leq 1 \rightarrow -1\leq x\leq 1$

$D_f=[-1,1]-\{0\}$

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟ صفر

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟ بله

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟
بله خیر

۷ اگر بازهٔ $(x-1,2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

$x-1<2 \rightarrow x<3$

$2x+3>2 \rightarrow 2x>-1 \rightarrow x>\frac{-1}{2}$

$-\frac{1}{2}<x<3$