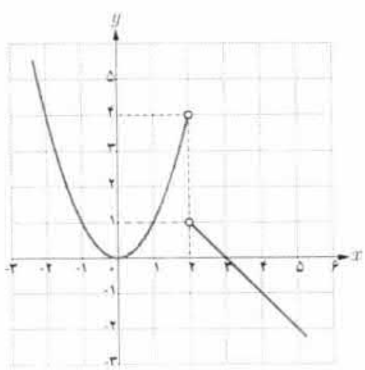
درس ۲

حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x) = \sqrt{۲ - x}$ در نقطهٔ ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع بازهٔ $(-\infty, ۲]$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x + ۳ & x > ۲ \\ x^۲ & x < ۲ \end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :



الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۱ نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x = ۲$ حد دارد؟ خیر حد ندارد. زیرا رفتار تابع در همسایگی راست و همسایگی چپ ۲ متفاوت است.

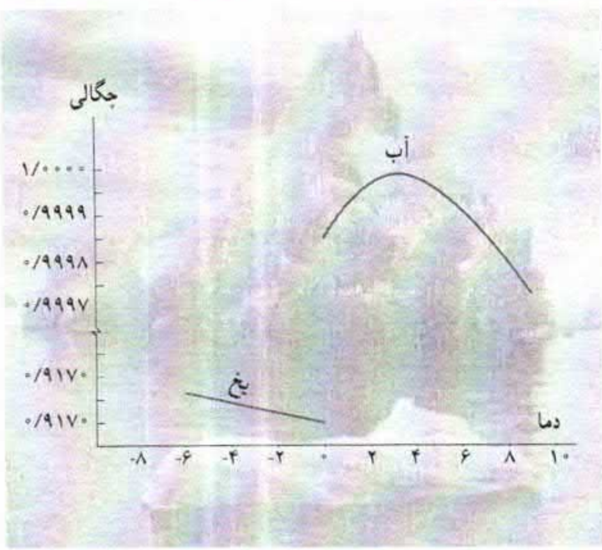
خواندنی

حتماً متوجه شده‌اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوه‌های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید چرا یخ در آب غرق نمی‌شود؟

به‌طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.

ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به‌دست می‌آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می‌گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می‌رود و ۰/۱ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.

نمودار چگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه‌رو است :



در فعالیت صفحهٔ قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیرکمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :
اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_1 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_1 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a، نزدیک شود.
در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_1$

تعریف حد چپ :
اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد L_2 است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L_2 نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a، نزدیک شود.
در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_2$

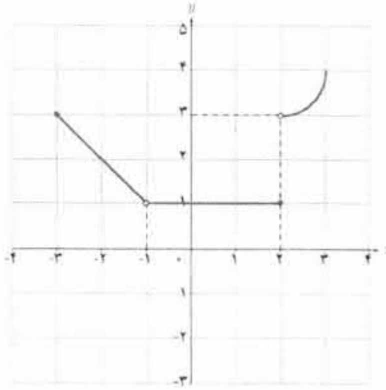
اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه
اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim_{x\to 2} f(x) = \ldots$ وجود ندارد

$\lim_{x\to -1} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to -3} f(x) = \ldots$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 1} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to -3^-} f(x) =$ وجود ندارد

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = .3$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \ldots 1$

$\lim_{x\to -3^+} f(x) = ..3$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ldots 1$

$x \to (-1)^+$

$x \to (-1)^-$

$x \to (-3)^+$

$x \to (-3)^-$

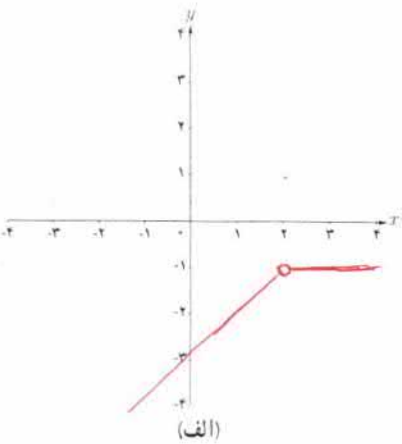
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که :

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

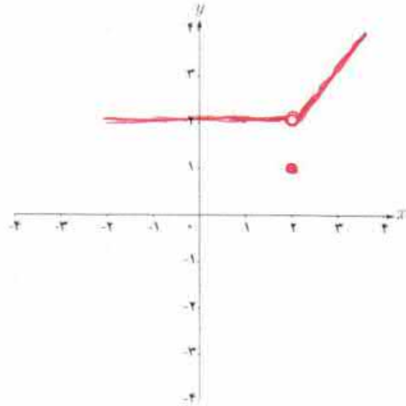
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

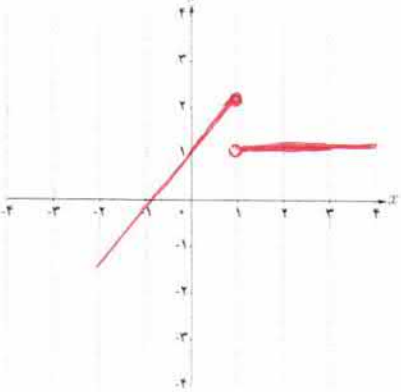
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



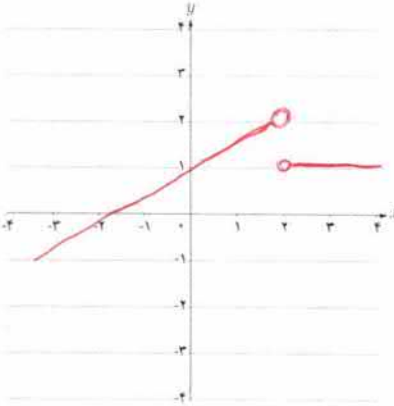
(الف)



(ب)

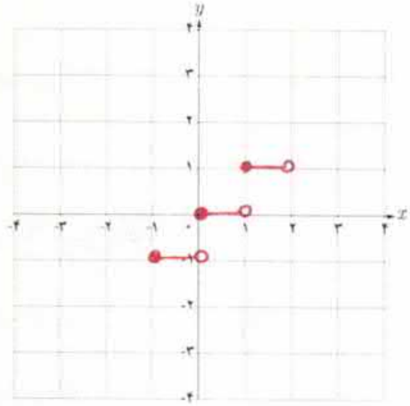


(پ)



(ت)

فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$ رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ..۰.. نزدیک می‌شوند، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ..۰..$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟ خیر، زیرا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^-} h(x)=۰$.

اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی:

اگر $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

مثال: مقدار حد راست تابع $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

حل: می‌دانیم روی بازهٔ $(۰,۱)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(۰,۱)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=۰$ برابر است بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰$$

کار در کلاس

۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید:

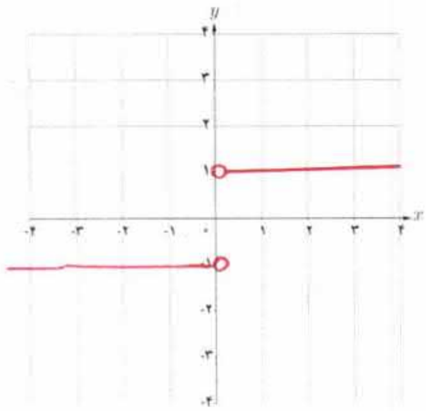
الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟



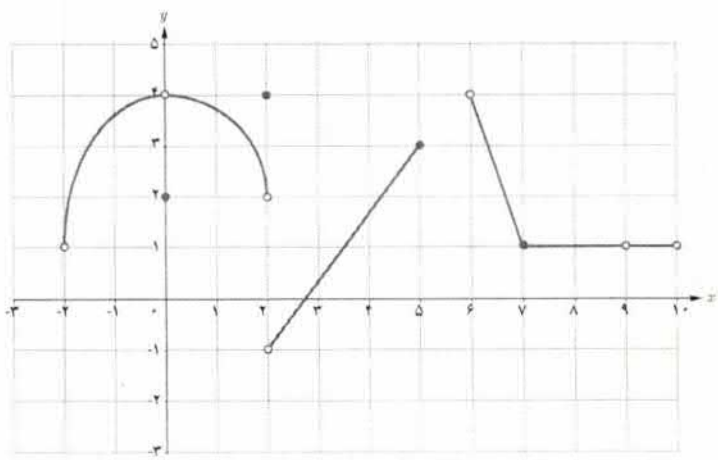
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\end{array}\right\}\to \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\text{وجود ندارد}$$

زیرا

$$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$$

تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$ وجود ندارد.

پ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=$ وجود ندارد.

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=4$

ث) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=1$

$x\to(-2)^+$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=1$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=1$

۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x>0 \\ x^2+2x & x<0 \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

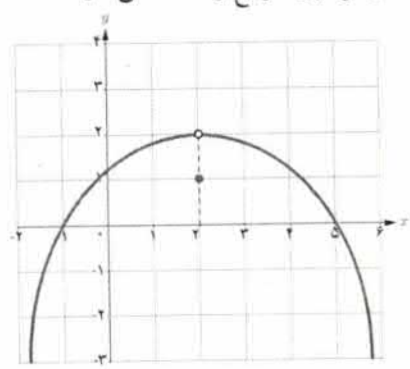
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد ۰ نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = (0)^2+2(0) = 0$

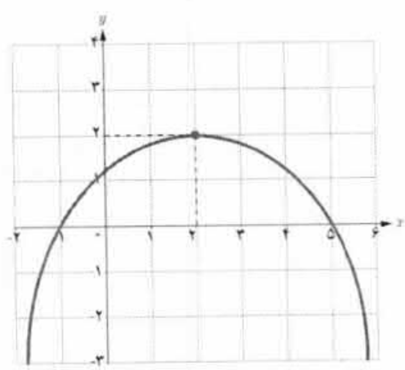
ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=0$ را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2(0)+1 = 1$

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=0$ حد دارد؟ چرا؟ خیر؛ زیرا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

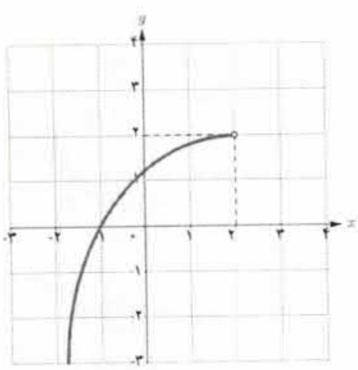
۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



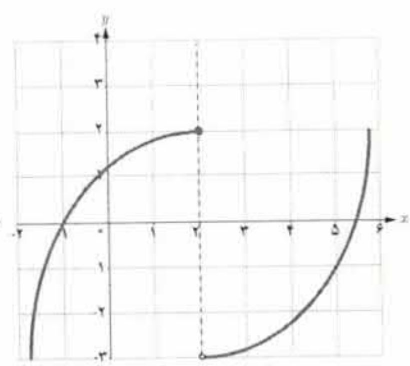
(الف)



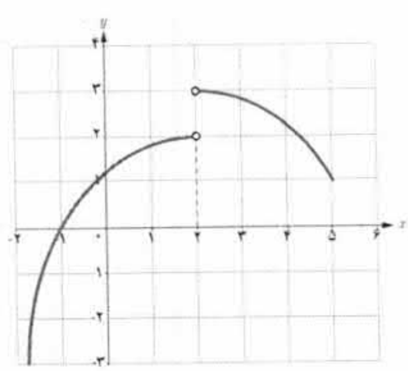
(ب)



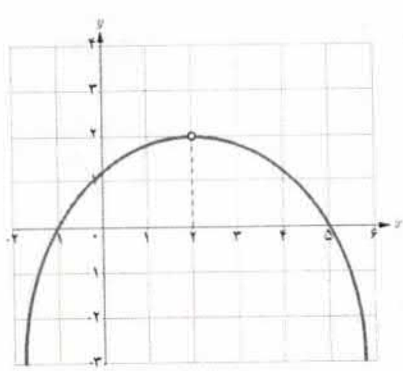
(پ)



(ت)



(ث)



(ج)

ــ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد. (ج)

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست. (الف)

ــ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد. (پ)

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است. (ب)

ــ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد. (ج)

ــ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد. (ت) و (ث)

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{2}-x}$ در نقطهٔ $x=1$ چه می‌توان گفت؟

$x^2-x\geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0\leq x\leq 1 \Rightarrow$ تابع در همسایگی چپ یک تعریف نشده است $\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\sqrt{(1)^2-(1)}=0$

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه $x=2$ چه می‌توان گفت؟

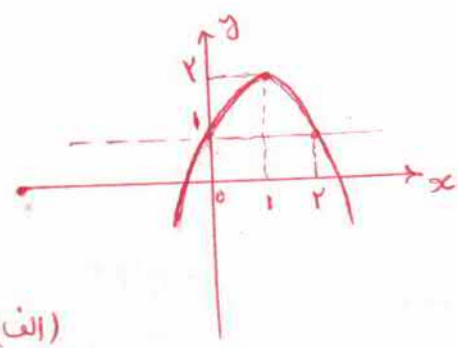
$x\to 2^+ \Rightarrow [x]=2$

$\Rightarrow [x]-2=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\dfrac{x}{[x]-2}=$ وجود ندارد.

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-1)^2+2$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim_{x\to 1}[f(x)]$ ب) $\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)



(الف)

$\lim_{x\to 1}[f(x)]=1$

در همسایگی ۱ و نه در خود یک

$1<f(x)<2$

$\rightarrow [f(x)]=1$

(ب)

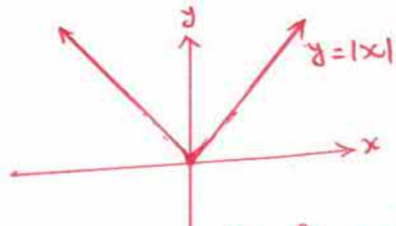
$\left[\lim_{x\to 1} f(x)\right]=[2^-]=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ عدد نزدیک به ۲ است.

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim_{x\to 0}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟



(الف)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

$\rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

(ب) $f(x)=|x|$

$\begin{cases} a\geq 0 \rightarrow |a|=a \\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=a=|a| \end{cases}$

$\begin{cases} a<0 \rightarrow |a|=-a \\ \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}|x|=-a=|a| \end{cases}$