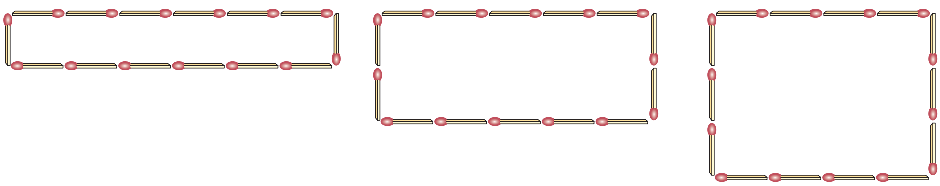
درس دوم

بهینه‌سازی

افراد در طول روز کارهای بسیاری انجام می‌دهند؛ به جاهای مختلفی می‌روند، از وسایل متنوعی استفاده می‌کنند، خرید می‌کنند، درس می‌خوانند و … . در تمام این فعالیت‌ها، هدف آن است که بهترین تصمیم‌ها اتخاذ گردند. به‌عنوان مثال، مدیر یک شرکت تولیدی همواره به دنبال آن است که بیشترین سود را با صرف کمترین هزینه کسب نماید. یا اینکه یک باغدار را درنظر بگیرید که با استفاده از روش های نوین کشاورزی، درصدد آن است که با صرف کمترین هزینه، بیشترین مقدار محصول را از واحد سطح برداشت کند. چنین مسئله‌هایی در زمرهٔ مسائل بهینه‌سازی هستند که برخی از آنها به کمک مشتق قابل حل‌اند. در اینجا مسائلی را با هدف ماکزیمم کردن مساحت، حجم، سود یا مینیمم کردن فاصله، زمان و هزینه بررسی خواهیم کرد.

فعالیت

۱ فرض کنید ۱۴ چوب کبریت در اختیار داشته باشیم و طول هرکدام از آنها را یک واحد درنظر بگیریم. با استفاده از همهٔ این چوب‌کبریت‌ها، مستطیل می‌سازیم. نتیجهٔ کار در سه حالت مختلف در شکل زیر آمده است:



الف) در هر سه حالت، محیط مستطیل‌ها ثابت و برابر ..۱۴... واحد است.

ب) در این مستطیل‌های هم‌محیط، دیده می‌شود که مساحت‌ها برابر **نیستند** و به ترتیب برابر ۶، ۱۰ و .۱۲.. واحد مربع هستند.

پ) مشاهده می‌شود که هرچقدر اندازهٔ طول و عرض یک مستطیل به هم نزدیک‌تر می‌شود، مساحت آن افزایش می‌یابد.

۲ جدول زیر را مورد توجه قرار دهید که در آن ابعاد و مساحت چند مستطیل با محیط ۱۴ واحد آمده است.

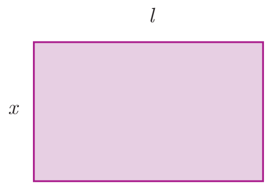
ابعاد مستطیل	۰/۵×۶/۵	۱×۶	۲×۵	۲/۵×۴/۵	۳×۴	۳/۲×۳/۸	…
محیط مستطیل	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
مساحت	۳/۲۵	۶	۱۰	۱۱/۲۵	۱۲	۱۲/۱۶	…

الف) در این جدول، بزرگ‌ترین عددی که برای مساحت مستطیل دیده می‌شود، ۱۲/۱۶ است. اگر برای طول و عرض مستطیل تنها به اعداد طبیعی محدود نباشیم، آیا می‌توانید مستطیل دیگری با محیط ۱۴ واحد ارائه کنید که مساحت آن از عدد ۱۲/۱۶ واحد مربع هم بزرگ‌تر باشد؟ بله

ب) برای حالتی که مساحت مستطیل بزرگ‌ترین مقدار ممکن می‌شود، چه حدسی می‌زنید؟ ۱۲/۲۵

درستی نتیجه‌ای را که در این فعالیت حدس زدیم، در مثال بعد با استفاده از مشتق بررسی می‌کنیم.

مثال ۱ : نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.



حل : فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است :

$$S = x.l \qquad (۱)$$

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به‌دست آوریم :

$P = ۱۴$: محیط مستطیل

$$۲(x + l) = ۱۴ \Rightarrow x + l = ۷ \Rightarrow l = ۷ - x \quad (۲)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$S(x) = x(۷ - x)$$

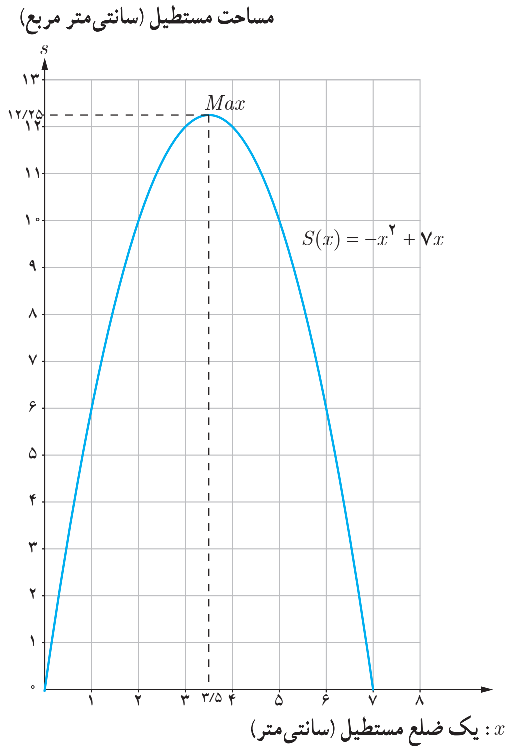
$$S(x) = -x^۲ + ۷x \quad , \quad x \in [۰, ۷]$$

از آنجا که S همواره مشتق‌پذیر است، برای یافتن نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را بیابیم.

$S'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵$ (طول نقطهٔ بحرانی تابع)

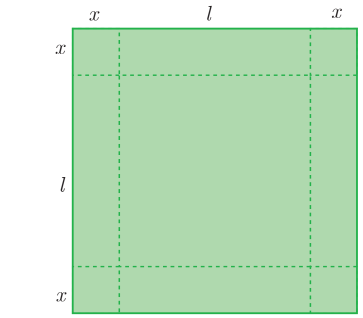
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به شکل زیر است :

x	۰		۳/۵		۷
$S'(x) = -۲x + ۷$		+	۰	−	
$S(x) = -x^۲ + ۷x$	۰	↗	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰



از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی‌متر داشته باشیم. نمودار تابع S نیز رسم شده است. به نقطهٔ ماکزیمم S در نمودار آن توجه کنید.

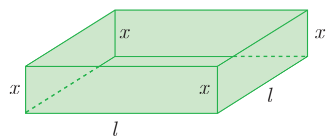
تذکر : در مثال قبل، تابعی که به دنبال مقدار اکسترمم مطلق آن بودیم، یک تابع درجه ۲ بود. از پایه‌های قبل هم می‌دانستیم که نقطهٔ $(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a})$، نقطهٔ اکسترمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را به‌دست می‌دهد. امّا همیشه تابع‌های موردنظر، درجه ۲ نیستند. با این حال، مراحل کار مشابه مثال قبل خواهد بود. مثال‌های بعد را مورد توجه قرار دهید.



مثال ۲ : ورق فلزی مربع شکلی به طول ضلع ۳۰ cm را درنظر بگیرید. مطابق شکل می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس با تا کردن ورق در امتداد خط‌چین‌های مشخص شده در شکل، یک جعبهٔ درباز بسازیم. مقدار x چقدر باشد تا حجم قوطی، حداکثر مقدار ممکن گردد؟

حل : ارتفاع مکعب حاصل مساوی x است. طول و عرض قاعدهٔ آن را با l نمایش می‌دهیم. آنچه قرار است ماکزیمم شود، مقدار حجم مکعب مستطیل است : $V = x.l^2$

باید l را برحسب x در این رابطه قرار دهیم تا V تابعی یک متغیره از x شود.



$$2x + l = 30 \Rightarrow l = 30 - 2x \Rightarrow V = x(30 - 2x)^2$$

$$V(x) = x(900 - 120x + 4x^2) \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x \ , \ x \in [0,15]$$

نقاط بحرانی تابع $V(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

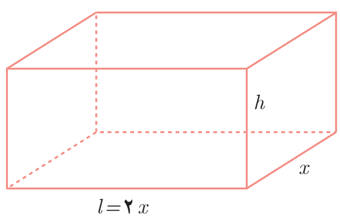
$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 & (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } V) \\ x = 15 \notin (0, 15) \end{cases}$$

جدول تغییرات تابع V در بازهٔ موردنظر به‌صورت زیر است :

x	۰		۵		۱۵
$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$		+	۰	−	۰
$V(x)$	۰	$\nearrow$	۲۰۰۰ ماکزیمم مطلق	$\searrow$	۰

با توجه به جدول، بیشترین حجم ممکن برای مکعب مستطیل موردنظر، ۲۰۰۰ (cm^3) است که به ازای $x = 5$ (cm) حاصل می‌شود.

مثال ۳ : می‌خواهیم مخزنی به شکل مکعب مستطیل درباز بسازیم که حجم آن ۱۰ m^3 بوده و طول کف مخزن دو برابر عرض آن باشد. قیمت مصالح مورد نیاز جهت کف این مخزن برای هر متر مربع ۱۰۰ هزار تومان و این قیمت برای دیواره‌ها در هر متر مربع ۶۰ هزار تومان است. عرض کف مخزن چقدر باشد تا هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن گردد؟



حل : لازم است هزینهٔ مصالح مصرف شده کمترین مقدار ممکن شود. تابع هزینه را به شکل زیر می‌توان نوشت :

$$C = 100(x.l) + 60[2xh + 2lh]$$

$$= 100xl + 120h(x+l)$$

$$= 100x(2x) + 120h(x+2x)$$

$$C = 200x^2 + 360xh \qquad (1)$$

لازم است که C را به شکل تابعی یک متغیره از x بنویسیم.

$$\text{حجم مخزن}: V = 10(m^3) \Rightarrow x.l.h = 10 \Rightarrow x(2x)h = 10 \Rightarrow h = \frac{5}{x^2} \qquad (2)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت :

$$C(x)=۲۰۰x^{۲}+۳۶۰x(\frac{۵}{x^{۲}}) \qquad \Rightarrow \qquad C(x)=۲۰۰x^{۲}+\frac{۱۸۰۰}{x} \quad x\in(۰,+\infty)$$

نقطهٔ بحرانی تابع $C(x)$ را به‌دست می‌آوریم :

$$C'(x)=۰\Rightarrow ۴۰۰x+\frac{-۱۸۰۰}{x^{۲}}=۰\Rightarrow \frac{۴۰۰x^{۳}-۱۸۰۰}{x^{۲}}=۰\Rightarrow ۴۰۰x^{۳}-۱۸۰۰=۰\Rightarrow x^{۳}=\frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۳]{۴/۵}\simeq ۱/۶۵(m) \quad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

برای رسم جدول تغییرات تابع C، لازم است مشتق آن یعنی $C'(x)=\frac{۴۰۰x^{۳}-۱۸۰۰}{x^{۲}}$ را تعیین علامت کنیم. علامت C' در هر بازه، همان علامت صورت مشتق یعنی $(۴۰۰\,x^{۳}-۱۸۰۰)$ است. چرا؟

x	۰		$\sqrt[۳]{۴/۵}$		$+\infty$
$C'(x)$		$-$	۰	$+$	
$C(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\simeq ۱۶۳۵$ مینیمم مطلق C	$\nearrow$	$+\infty$

از جدول دیده می‌شود که اگر عرض قاعدهٔ مخزن برابر $\sqrt[۳]{۴/۵}\simeq ۱/۶۵(m)$ انتخاب شود، هزینه مصالح کمترین مقدار ممکن و حدود ۱۶۳۵ (برحسب هزار تومان)، یعنی ۱،۶۳۵،۰۰۰ تومان خواهد شد.

مثال ۴ : غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{۳t}{t^{۳}+۲۷}$ به‌دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

حل : ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به‌دست می‌آوریم.

$$C'(t)=\frac{۳(t^{۳}+۲۷)-۳t^{۲}(۳t)}{(t^{۳}+۲۷)^{۲}}$$

$$C'(t)=۰\Rightarrow ۳(t^{۳}+۲۷)-۹t^{۳}=۰\Rightarrow (t^{۳}+۲۷)-۳t^{۳}=۰\Rightarrow t^{۳}=\frac{۲۷}{۲}$$

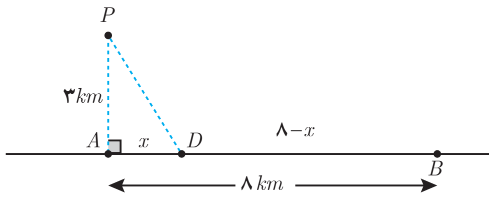
$$\Rightarrow t=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}\simeq ۲/۳۸ \ (\text{ساعت}) \qquad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است :

t	۰		$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	۰	$-$	
$C(t)$	۰	$\nearrow$	$\simeq ۰/۱۸$ ماکزیمم مطلق C	$\searrow$	۰

با توجه به جدول، دیده می‌شود که $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}\simeq ۲/۳۸$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

مثال ۵ : آرمان درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B درساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق ۲ km/h و سرعت پیاده‌روی آرمان در ساحل ۴ km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟



حل : نقطه‌ای از ساحل را که آرمان پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت زمان t باشد، رابطهٔ $x=vt$ یا معادل آن $t=\frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین :

$$\text{زمان پارو زدن مسیر } P \text{ تا } D:\ t_۱=\frac{PD}{۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}$$

$$\text{زمان پیاده‌روی مسیر } D \text{ تا } B:\ t_۲=\frac{DB}{۴}=\frac{۸-x}{۴}=۲-\frac{۱}{۴}x$$

$$\text{زمان کل رسیدن از } P \text{ به } B: t=t_۱+t_۲$$

$$t(x)=\frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲+۹}+(۲-\frac{۱}{۴}x) \qquad x\in[۰,۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به‌دست می‌آوریم.

$$t'(x)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۹}}-\frac{۱}{۴}=\frac{۲x-\sqrt{x^۲+۹}}{۴\sqrt{x^۲+۹}}$$

$$t'(x)=۰\Rightarrow ۲x-\sqrt{x^۲+۹}=۰\Rightarrow ۴x^۲=x^۲+۹\Rightarrow x=\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳(\text{km})$$

جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است :

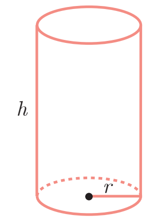
x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		−	۰	+	
$t(x)$ برحسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸+۳\sqrt{۳}}{۴}\simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲}\simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرمان از P به B کمترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

کار در کلاس

۱ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً یک لیتر باشد. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کار رفته در تولید آن مینیمم شود.

حل : باید مساحت کل استوانه کمترین مقدار ممکن گردد.



حجم استوانه $1\,(\text{lit}) = 1000\,\text{cm}^3$

$$\Rightarrow \pi r^2 h = 1000(\text{cm}^3) \Rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

سطح جانبی + مساحت قاعده $= S$: مساحت کل استوانه

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right) \Rightarrow S(r) = \pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

با یافتن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ مینیمم می‌گردد.

$$S_{(r)} = 2\pi rh + \pi r^2 = 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2000}{r} + \pi r^2$$

$$S'_{(r)} = \frac{-2000}{r^2} + 2\pi r \xrightarrow{S'_{(r)}=0} 2\pi r^3 = 2000 \to r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$$

$$S_{\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)} = \frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$$

r	0		$\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$		$+\infty$
$S'_{(r)}$		$-$	0	$+$	
$S_{(r)}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2000}{\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}} + \pi\left(\frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2$	$\nearrow$	$+\infty$

۲ هزینه سوخت یک قطار در هر ساعت برای حرکت با سرعت v کیلومتر بر ساعت، برابر $320v^2$ تومان است. همچنین سایر هزینه‌ها برای هر ساعت، صرف‌نظر از سرعت قطار، برابر ۸۰۰۰۰۰ تومان می‌باشد. قطار با چه سرعتی حرکت کند تا هزینه آن در یک کیلومتر، کمترین مقدار ممکن باشد.

حل : اگر قطار با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت حرکت کند، داریم :

هزینه t ساعت حرکت: $C = 800000t + (320v^2)\,t$

هزینه x کیلومتر حرکت: $C = 800000\left(\frac{x}{v}\right) + (320v^2)\left(\frac{x}{v}\right)$

هزینه ۱ کیلومتر حرکت: $C(v) = \frac{800000}{v} + 320v$

نقطهٔ بحرانی تابع C را بیابید و با تشکیل جدول تغییرات آن، سرعت بهینه را پیدا کنید.

$$c'(v) = 0 \to -\frac{800000}{v^2} + 320 = 0 \to 320v^2 = 800000 \to v^2 = \frac{800000}{320} = 2500 \to v = \pm\sqrt{2500}$$

v	$-\infty$		$-\sqrt{2500}$		0		$\sqrt{2500}$		$+\infty$
C'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
C		$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	

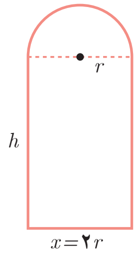
۳ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

$x-y=10 \rightarrow x=10+y$

$p_{(y)}=xy=y(10+x)=y^2+10y \qquad p'_{(y)}=2y+10 \qquad p'_{(y)}=0 \rightarrow y=-5 \rightarrow x=10+(-5)=5$

۴ دربرخی بناهای تاریخی کشورمان پنجره‌هایی وجود دارد که به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای برروی آن می‌باشد به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط یک چنین پنجره‌ای ۴/۵ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

حل : باید مساحت پنجره بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$\text{محیط} = 4/5 \Rightarrow 2h + x + \frac{1}{2}(2\pi r) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 2h + 2r + \pi r = \frac{9}{2} \rightarrow h = \frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}$$

مساحت پنجره : $S =$ مساحت مستطیل + مساحت نیم‌دایره

$$S = xh + \frac{1}{2}(\pi r^2) \Rightarrow S(r) = 2r\left(\frac{9}{4} - r - \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{1}{2}\pi r^2 \Rightarrow S(r) = -\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r^2 + \frac{9}{2}r$$

با پیدا کردن نقطهٔ بحرانی S و تشکیل جدول تغییرات آن، مشخص کنید که به ازای چه مقداری از r، مقدار $S(r)$ بیشترین مقدار ممکن می‌شود.

$$S'_{(r)} = -2\left(\frac{\pi+4}{2}\right)r + 4/5 \xrightarrow{S'_{(r)}=0} r = \frac{-4/5}{-(\pi+4)} = \frac{4/5}{\pi+4}$$

r		$\frac{4/5}{\pi+4}$	
$S'_{(r)}$	+	0	−
	↗	max	↘

دبیرستان ماندگار حکیم نظامی، اولین دبیرستان قم و ثبت شده در فهرست آثار ملی ایران (تأسیس : ۱۳۱۷، مساحت : ۲/۵ هکتار)

تمرین

۱ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰۰ متر مربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

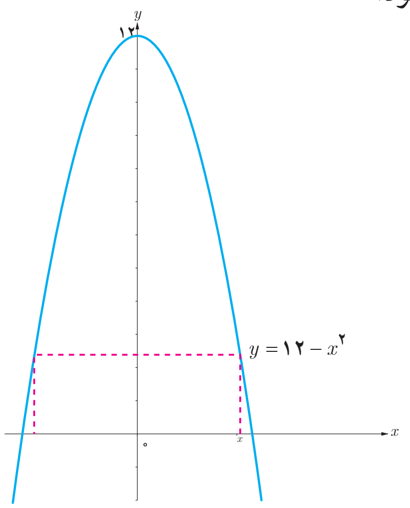
الف) هزینه مورد نیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۲ الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث چقدر خواهد بود؟

ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

۳ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y=۱۲-x^۲$ باشند.



$S_{(x)} = ۲xy = ۲x(۱۲-x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳$

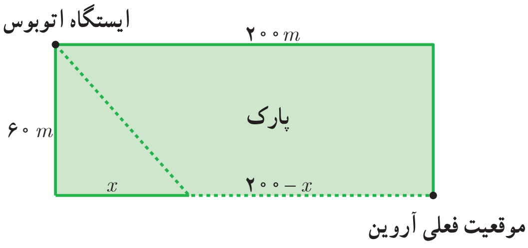
$S'_{(x)} = ۲۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'_{(x)}=0} ۲۴ - ۶x^۲ = 0 \to x^۲ = ۴ \to x = ۲$

$\xrightarrow{y=۱۲-x^۲} y = ۱۲ - ۴ = ۸$

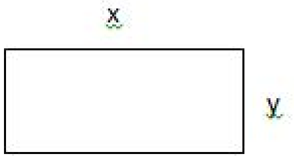
طول مستطیل برابر با ۸ وعرض آن برابر با ۴ است

۴ هر صفحهٔ مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طرّاحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه ۲cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.

۵ آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲m/s$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کمترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



تمرین ۱: الف



$$xy = 10000 \rightarrow y = \frac{10000}{x}$$

$$P_{(x)} = 2(2000000x) + 2\left(8000000 \times \frac{10000}{x}\right) = \frac{4\times 10^6\left(x^2 + 40000\right)}{x}$$

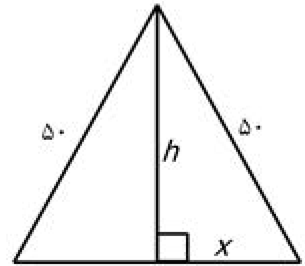
ب:

$$P'_{(x)} = 4\times 10^6\left(\frac{2x^2 - x^2 - 40000}{x^2}\right) = 4\times 10^6\left(\frac{x^2 - 40000}{x^2}\right)$$

$$\xrightarrow{P'_{(x)}=0} 4\times 10^6\left(\frac{x^2 - 40000}{x^2}\right) = 0 \rightarrow x^2 - 40000 = 0 \rightarrow x^2 = 40000 \rightarrow x = 200$$

$$x = 200 \xrightarrow{y=\frac{10000}{x}} y = 50$$

تمرین ۲ : الف:



$$h^۲ + x^۲ = ۵۰^۲ \rightarrow h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}$$

$$S_{(x)} = \frac{۱}{۲} \times ۲x \times h = x\left(\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}\right) \qquad D = [۰,۵۰]$$

$$S'_{(x)} = \sqrt{۲۵۰۰ - x^۲} + x \times \frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}} = \frac{۲۵۰۰ - x^۲ - x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}} = \frac{۲۵۰۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^۲}}$$

$$\xrightarrow{S'_{(x)}=۰} ۲۵۰۰ - ۲x^۲ = ۰ \rightarrow x^۲ = \frac{۲۵۰۰}{۲} = ۱۲۵۰ \rightarrow \boxed{x = \sqrt{۱۲۵۰} = ۲۵\sqrt{۲}}$$

$$\xrightarrow{h=\sqrt{۲۵۰۰-x^۲}} h = \sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰} = \sqrt{۱۲۵۰} \rightarrow \boxed{h = ۲۵\sqrt{۲}}$$

$$S_{(x)} = \left(۲۵\sqrt{۲}\right)\left(\sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰}\right) = ۶۲۵ \times ۲ = ۱۲۵۰$$

ب)با توجه به $S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta$ بیشترین مساحت وقتی است که $\sin\theta = ۱$ باشد پس

 $\theta = ۹۰^\circ$ می شود پس خواهیم داشت: $S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۱ = ۱۲۵۰$

تمرین ۴:

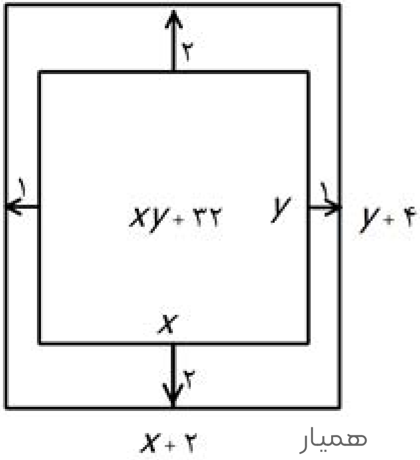
$$S_{(x)} = (x+2)(y+4) = xy + 4x + 2y + 8$$

$$\xrightarrow{xy=32} S_{(x)} = 4x + 2y + 40 \xrightarrow{y=\frac{32}{x}} S_{(x)} = 4x + \frac{64}{x} + 40$$

$$S'_{(x)} = 4 - \frac{64}{x^2} = \frac{4x^2 - 64}{x^2} \xrightarrow{S'_{(x)}=0}$$

$$4x^2 - 64 = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{y=\frac{32}{x}} y = \frac{32}{4} = 8$$



ابعاد جعبه برابر است با (۶=۲+۴)و(۱۲=۴+۸)

تمرین ۵:

$$t_1=\frac{200-x}{3}\qquad t_2=\frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}$$

$$t=t_1+t_2=\frac{200-x}{3}+\frac{\sqrt{3600+x^2}}{2}=\frac{1}{6}\left(400-2x+3\sqrt{3600+x^2}\right)$$

$$t'=\frac{1}{6}\left(-2+3\times\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{3600+x^2}}\right)\xrightarrow{t'=0}2=\frac{3x}{\sqrt{3600+x^2}}\rightarrow 2\sqrt{3600+x^2}=3x$$

$$\xrightarrow{(\ )^2}4\left(3600+x^2\right)=9x^2\rightarrow 5x^2=4\times 3600\rightarrow x^2=2880\rightarrow x=\sqrt{2880}=24\sqrt{5}$$

$$t=\frac{1}{6}\left(400-2\times 24\sqrt{5}+3\sqrt{3600+2880}\right)=100$$