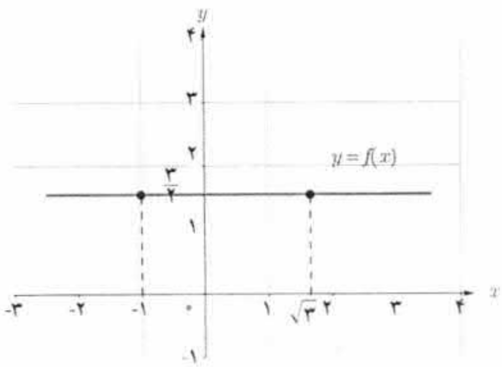
درس ۳

قضایای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

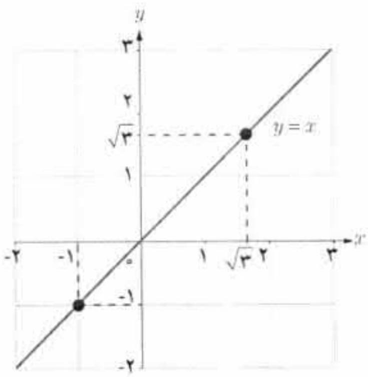
فعالیت

الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{۳}{۲}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$$\lim_{x\to\sqrt{۳}} f(x) = \frac{۳}{۲} \qquad \lim_{x\to -۱} f(x) = \frac{۳}{۲}$$

ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$$\lim_{x\to\sqrt{۳}} g(x) = \sqrt{۳} \qquad \lim_{x\to -۱} g(x) = -۱$$

قضیه:

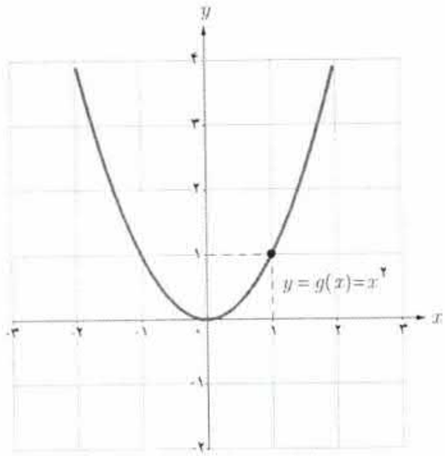
الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی، $\lim_{x\to a} c = c$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی، $\lim_{x\to a} x = a$

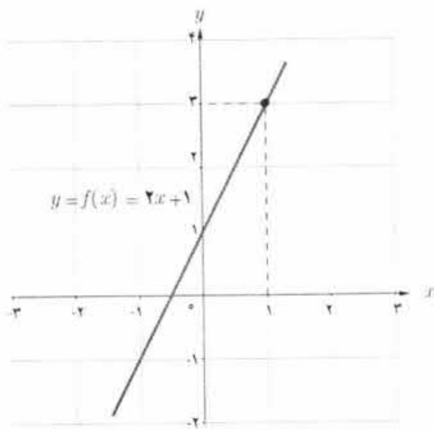
فعالیت

توابع $f(x) = 2x+1$ و $g(x)=x^2$ را در نظر بگیرید.

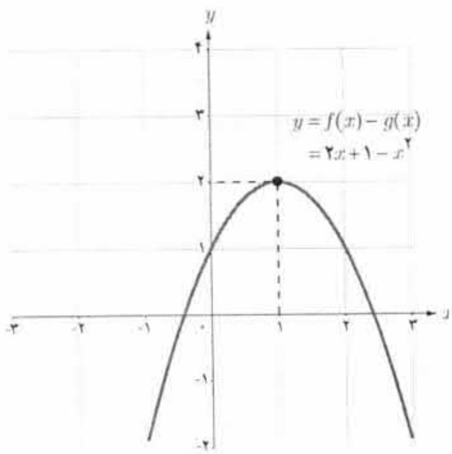
الف) با توجه به نمودار توابع f، g، $f+g$ و $f-g$، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



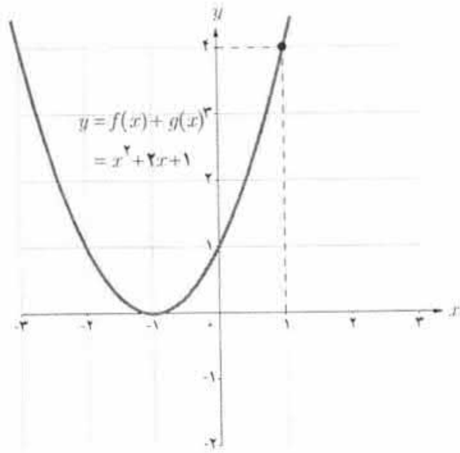
$\lim\limits_{x\to 1} g(x) =$ ..۱



$\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$.۳.



$\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x)-g(x)\big) =$ ..۲



$\lim\limits_{x\to 1} \big(f(x)+g(x)\big) =$.۴.

ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$)

الف) $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x)=\lim\limits_{x\to a} c\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=c\times\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}\left((-1)f(x)\right)=-1\times\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} 1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

❖ تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1، ....، f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a}f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

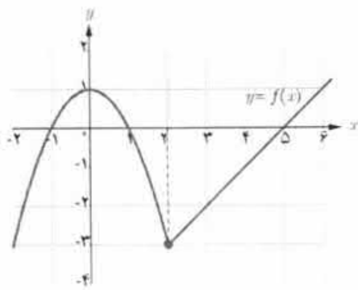
که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

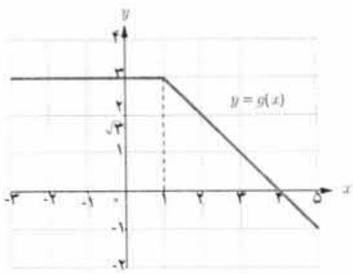
$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

❖ مثال : دو تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^۲ & x<۲\\ x-۵ & x\geq ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۳ & x<۱\\ ۴-x & x\geq ۱\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حد توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را در نقطه $x=۲$ به‌دست آورید.

❖ حل : ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=۲$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.





با توجه به نمودارها داریم : $\lim_{x\to ۲}f(x)=-۳$ و $\lim_{x\to ۲}g(x)=۲$.

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم :

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)+\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳+۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to ۲}f(x)-\lim_{x\to ۲}g(x)=-۳-۲=-۵$$

$$\lim_{x\to ۲}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to ۲}f(x)\right)\left(\lim_{x\to ۲}g(x)\right)=(-۳)(۲)=-۶$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to ۲}f(x)}{\lim_{x\to ۲}g(x)}=\frac{-۳}{۲}$$

مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to\sqrt{۲}}(x^{۴}+۳x-۱)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}x^{۴}+\lim_{x\to\sqrt{۲}}۳x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=(\lim_{x\to\sqrt{۲}}x)^{۴}+۳\lim_{x\to\sqrt{۲}}x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=\left(\sqrt{۲}\right)^{۴}+۳\left(\sqrt{۲}\right)-۱=۴+۳\sqrt{۲}-۱=۳+۳\sqrt{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to۳}x|x|=\left(\lim_{x\to۳}x\right)\times\left(\lim_{x\to۳}|x|\right)=۳\times|۳|=۹$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}+۷}{۱-x}=\frac{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^{۲}+۷)}{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱-x)}=\frac{۴\left(\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}x\right)^{۲}+۷}{۱-\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}x}=\frac{۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۱x+b_۰$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+b_۰)=b_na^n+b_{n-۱}a^{n-۱}+\cdots+b_۰$$

کار در کلاس

الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to-۱}x^{۴}=(-۱)^{٤}=۱$$

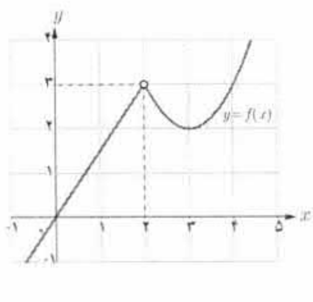
$$۲)\ \lim_{x\to۱۰}(۵x^{۳}-۶|x|+۱)=۵(۱۰)^{۳}-۶|۱۰|+۱=٤۹٤۱$$

$$۳)\ \lim_{x\to۲}\frac{x^{۲}+۴x+۴}{۴x^{۳}-۷x+۱}=\frac{(۲)^{۲}+٤(۲)+٤}{٤(۲)^{۳}-۷(۲)+۱}=\frac{۱۶}{۵}$$

$$۴)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x-[x]}{۱-x}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}-[\frac{۱}{۲}]}{۱-\frac{۱}{۲}}$$

$$=\frac{\frac{۱}{۲}-۰}{\frac{۱}{۲}}=۱$$



ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim_{x\to۲}x\,f(x)$ را بیابید.

$$\lim_{x\to۲}x=۲$$

$$\lim_{x\to۲}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۲}xf(x)=\lim_{x\to۲}x\times\lim_{x\to۲}f(x)=۲\times۳=۶$$

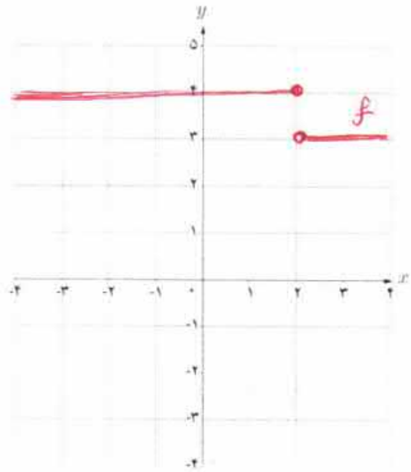
فعالیت

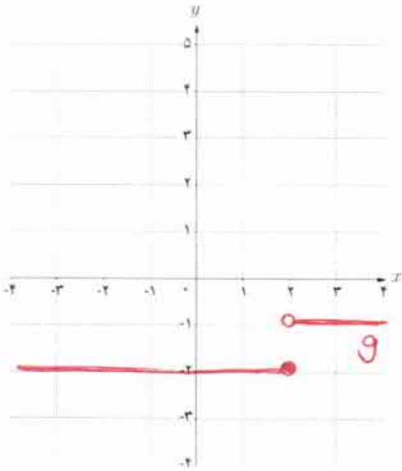
دو تابع $f(x)=\begin{cases} ۴ & x \leq ۲ \\ ۳ & x > ۲ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -۲ & x \leq ۲ \\ -۱ & x > ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

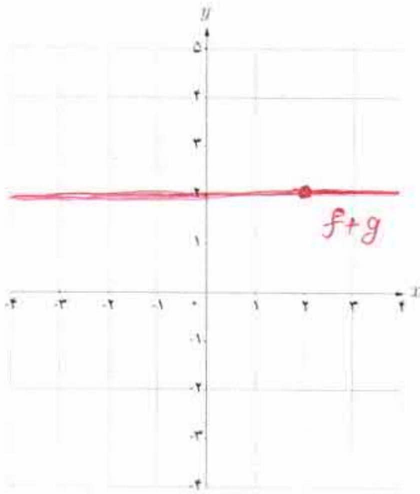
الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} ۲ & x \leq ۲ \\ ۲ & x > ۲ \end{cases}$$

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.







پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=۲$ وجود دارد؟ خیر

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=۲$ وجود دارد؟ بله

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=۲$ استفاده کرد؟ چرا؟

خیر

شرط استفاده از این قضیه این است که توابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند.

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

کار در کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

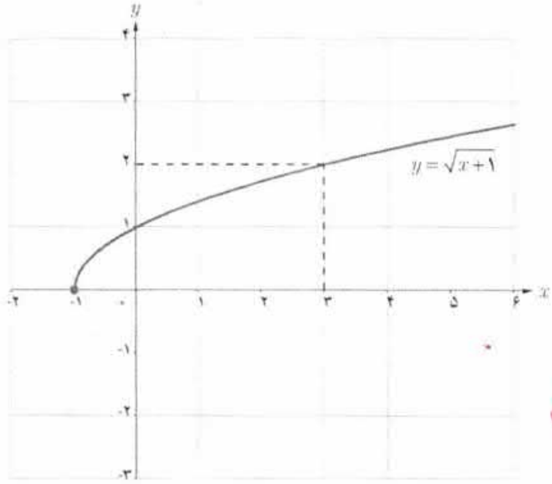
الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

خیر؛ توابع زیر در $x=۳$ حد ندارد ولی $f+g$ در این نقطه حد دارد.
$f(x)=\begin{cases}-1 & x\geq ۳\\ 1 & x<۳\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & x\geq ۳\\ -1 & x<۳\end{cases}$

ب) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

$\underbrace{\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))}_{\text{موجود}}-\underbrace{\lim\limits_{x\to a} f(x)}_{\text{موجود}}=\lim\limits_{x\to a}\big(\cancel{f(x)}+g(x)-\cancel{f(x)}\big)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود

فعالیت



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}$ را بیابید.

$\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+1}=۲$

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+۱}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+۱)}$ برقرار است؟

$\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+1)}=\sqrt{4}=۲$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۳}\sqrt{x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to ۳}(x+1)}$

قضیه:

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم:
$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم:
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال:

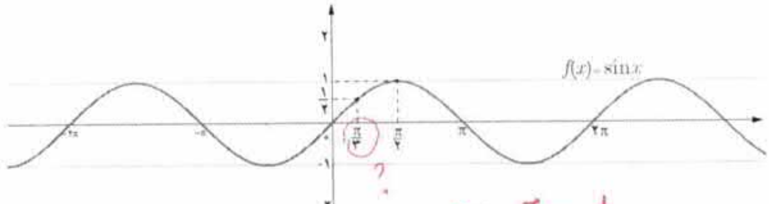
۱) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (برای nهای زوج a باید مثبت باشد)

۲) $$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}}{۳x-۴}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{۲x-۱}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۱)}}{\lim\limits_{x\to ۱}(۳x-۴)}=\frac{\sqrt{۲(۱)-۱}}{۳(۱)-۴}=-۱$$

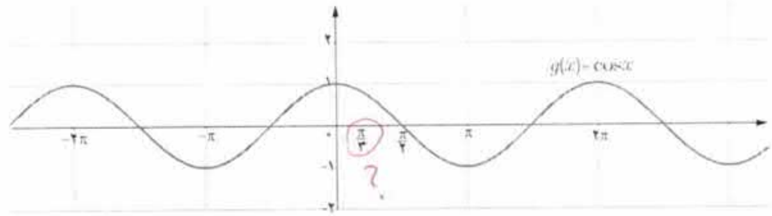
حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.



$\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$



الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \sin x = \frac{۱}{۲}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pi} \sin x = ۰$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۴) $\lim\limits_{x\to\pi} \cos x = -۱$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله — $\sin \frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟ بله — $\cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

قضیه : برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

❖ مثال :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} (۲\cos^۲ x - \sin x) = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}) - \sin(\frac{\pi}{۶}) = ۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} = ۲/۵$$

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید. $\pi\cos\pi = \pi\times(-1)$

$$1)\ \lim_{x\to-\pi}\frac{\pi\cos x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to-\pi}\pi\cos x}{\lim\limits_{x\to-\pi}x} = \frac{\pi\cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

❖ تذکر : همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به‌عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a^-}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a^-}f(x) + \lim_{x\to a^-}g(x)$$

❖ مثال :

$$1)\ \lim_{x\to a^+}x^n = \lim_{x\to a^+}\overbrace{(x\times\cdots\times x)}^{n\ \text{بار}} = (\lim_{x\to a^+}x)\times\cdots\times(\lim_{x\to a^+}x) = a\times\cdots\times a = a^n$$

$$2)\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x-[x]}{x^2+2} = \frac{\lim\limits_{x\to1^-}(x-[x])}{\lim\limits_{x\to1^-}(x^2+2)} = \frac{\lim\limits_{x\to1^-}x - \lim\limits_{x\to1^-}[x]}{\lim\limits_{x\to1^-}x^2 + \lim\limits_{x\to1^-}2} = \frac{1-0}{\underset{1+2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0^+}(\cos x - \sin x) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$

کار در کلاس

مقدار حد $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{x-2}}{[x]+2} = \frac{\lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{x-2}}{\lim\limits_{x\to2^+}[x]+2} = \frac{0}{2+2} = 0$$

پ) $= \dfrac{(-\frac{5}{3}+\pi)(\underbrace{3(-\frac{5}{3})+5}_{0})}{(3(-\frac{5}{3})+6)((-\frac{5}{3})^3+1)} = 0$

ت) $= \dfrac{1-(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-4} = \dfrac{1-2}{2-4} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 9}(\sqrt{x}-9)^3 = (\sqrt{9}-9)^3 = -216$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}(-6x^7-4x^2+5) = -6(-1)^7-4(-1)+5 = 15$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{5}{3}} \dfrac{(x+\pi)(3x+5)}{(3x+6)(x^3+1)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}^+} \dfrac{1-x^2}{x^2-4}$

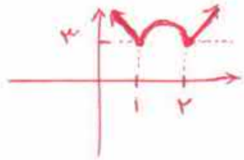
ث) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2+6x} = \sqrt{4(\frac{1}{2})^2+6(\frac{1}{2})} = 2$

ج) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x+\cos x} = \dfrac{\sin 0}{0+\cos 0} = \dfrac{0}{0+1} = 0$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{|\cos x|}{x-\pi} = \dfrac{|\cos\frac{\pi}{2}|}{\frac{\pi}{2}-\pi} = \dfrac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ و $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟ خیر

به تابع زیر توجه کنید که شرایط داده شده را دارد؛
ولی ثابت نیست.

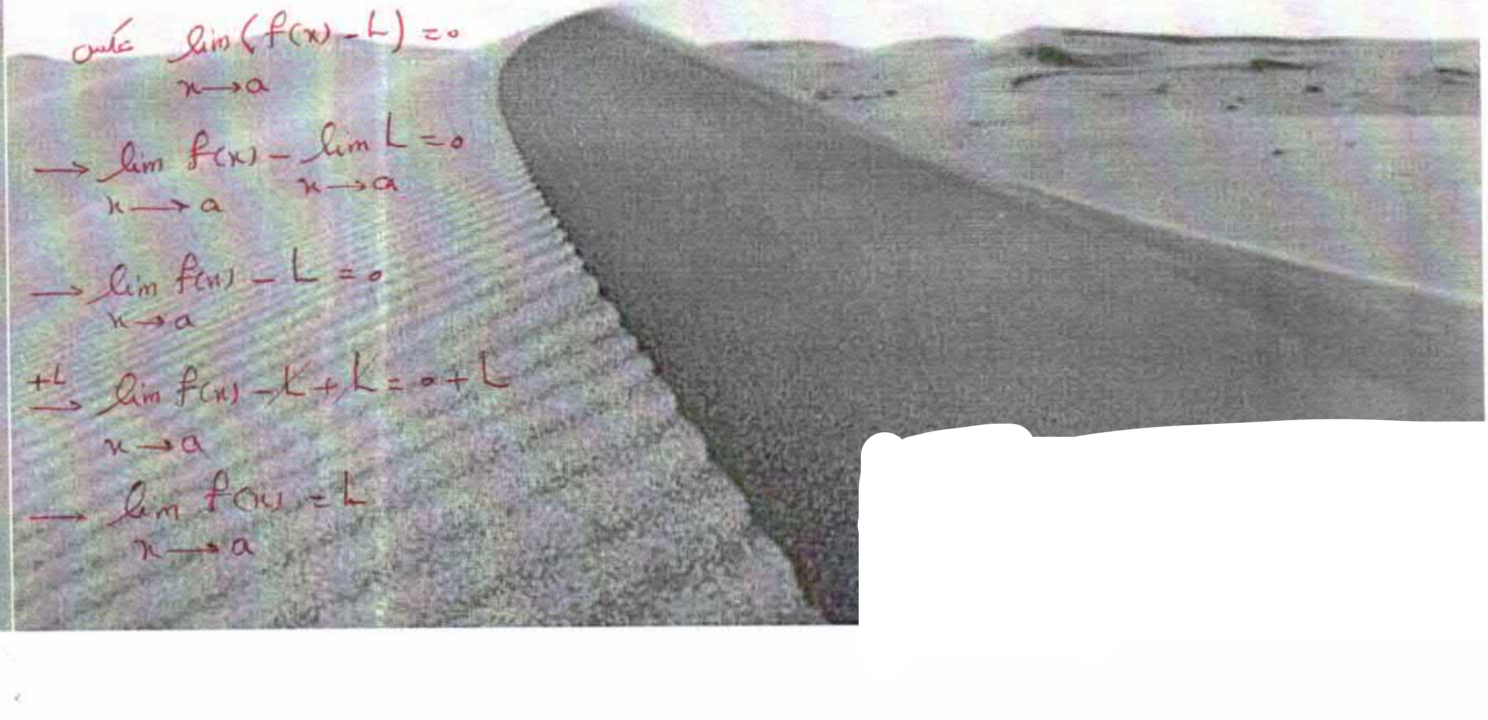


۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{x^2-1} = 4$.

$\dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{\lim\limits_{x\to 2} x^2-1} = 4 \longrightarrow \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}{3} = 4 \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 12$

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = 0$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = L - L = 0$



عکس $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L) = 0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} L = 0$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - L = 0$

$\xrightarrow{+L} \lim\limits_{x\to a} f(x) - L + L = 0 + L$

$\longrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

$\lim_{x\to 1} 3x+2 = 5$ / $\lim_{x\to 1} x^2-1 = 0$ / $\lim_{x\to 1} [x]-1 =$ وجود ندارد / $y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$

حدچپ ≠ حدراست

در $x=1$ حد ندارد، حدچپ ≠ حدراست

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=3x+2 \quad , \quad y=x^2-1 \quad , \quad y=[x]-1 \qquad y=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=1$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)+g(x)=\ldots$ x^2+3x+1	$g(x)=x^2-1$	$f(x)=3x+2$	هر سه تابع f، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.
$f(x)\,g(x)=\cdots$ $(x^2-1)([x]-1)$	$g(x)=x^2-1$	$f(x)=[x]-1$	تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x+2}{[x]-1}$	$g(x)=[x]-1$	$f(x)=3x+2$	توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\dfrac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.
$f^2(x)=4$		$f(x)=\begin{cases}-2 & x<1\\ 2 & x>1\end{cases}$	تابع f^2 در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^2-1}$		$f(x)=x^2-1$	تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.

۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟ حد ندارد.

اثبات: به روش برهان خلف، فرض کنیم که تابع $f+g$ حد دارد، لذا:

$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) - \lim_{x\to a} f(x)$
حد دارد   حد دارد

$=\lim_{x\to a}(\cancel{f(x)}+g(x)-\cancel{f(x)})$

$=\lim_{x\to a} g(x)$ حد دارد. تناقض

پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-1$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+[x]}{|x|} & x<-1\\[2mm] 3x+b & x>-1\end{cases}$$

$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = -3+b$

$\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{x\to(-1)} \dfrac{x^2-2}{-x} = \dfrac{1-2}{1} = -1$

$-3+b=-1$

$\to b=2$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.

$\lim_{x\to -2}\left(2g(x)-f(x)\right) = 2(2)-0=4$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

$\lim_{x\to 0^+}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{1}=0$

$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{0}{-1}=0$

$\lim_{x\to -3} -3\sqrt{g(x)} = -3(1) = -3$

$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8g(x)}$

$=\sqrt[3]{8(3)} = 2\sqrt[3]{3}$