درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{\circ}{\circ}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.[1]

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to ۳}(x-۳)=\circ$، پس نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در واقع از $\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۹)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x-۳)}$ عبارت $\frac{\circ}{\circ}$ حاصل می‌شود. در این‌گونه موارد، سعی می‌کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم :

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)=۶$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۴}\overset{\frac{\circ}{\circ}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)^۲}{(x-۲)(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x+۲}=\circ$$

---

۱. در این کتاب، حد کسرهای مورد بررسی را می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $۲x+b$ خواهند بود.

❖ مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$ را بیابید.

❖ حل : حد صورت و مخرج کسر در $x=1$، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+8}-3$ وجود دارد. در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+8}+3$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-(3)^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{3x-5}-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{\sqrt{3x-5}-2}\times\frac{\sqrt{3x-5}+2}{\sqrt{3x-5}+2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3x-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)(\sqrt{3x-5}+2)}{3\cancel{(x-3)}}=\frac{6\times 4}{3}=8$$

❖ مثال :

تذکر: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=1\times 0=0$$

$$2)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۲x}{۳x} \overset{\frac{۰}{۰}}{=} \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۲x}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

توجه:

$$\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱$$

❖ مثال : مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$ را بیابید.

❖ حل : قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{۱+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^۲-۱$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\lim_{t\to ۱}\frac{t-۱}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{\cancel{(t-۱)}}{\cancel{(t-۱)}(t+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

❖ مثال : مقدار $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۲x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

❖ حل : قرار می‌دهیم : $t=x-\frac{\pi}{۲}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x=t+\frac{\pi}{۲}$.
پس،

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۲x-\pi}{\cos x}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲(t+\frac{\pi}{۲})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{۲})}=\lim_{t\to ۰}\frac{۲t}{-\sin t}=-۲\lim_{t\to ۰}\frac{t}{\sin t}=-۲\times ۱=-۲$$

کار در کلاس

$$x-\frac{\pi}{۴}=t \to ۲x-\frac{\pi}{۲}=۲t \to ۲x=۲t+\frac{\pi}{۲}$$
$$\to ۴x-\pi=۴t$$

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\sin ۲x-۱}{۴x-\pi}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin(۲t+\frac{\pi}{۲})-۱}{۴t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos ۲t-۱}{۴t}=\lim_{t\to ۰}\frac{\cos ۲t-۱}{۴t}\times\frac{\cos ۲t+۱}{\cos ۲t+۱}$$

$$=\lim_{t\to ۰}\frac{\sin ۲t}{۲t}\times\frac{\sin ۲t}{\cos ۲t+۱}\times\frac{-۱}{۲}=۱\times\frac{\sin ۲(۰)}{\cos ۲(۰)+۱}\times\frac{-۱}{۲}=۰$$

ج) $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to1}\frac{x(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}{(\cancel{x-1})(x+\sqrt{x})}=\frac{2}{2}=1$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+3x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to-1}\frac{(\cancel{x+1})(2x-1)}{3x(\cancel{x+1})}=\lim_{x\to-1}\frac{2x-1}{3x}=\frac{-3}{-3}=1$

ب) $\lim_{x\to2^+}\frac{x^2[x]-8}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{2x^2-8}{x-2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2^+}\frac{2(\cancel{x-2})(x+2)}{\cancel{x-2}}=8$

پ) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2})(x+2)}\times\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{16}$

ت) $\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}\times\frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\times\frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$

$=\lim_{x\to4}\frac{(\cancel{4-x})(3+\sqrt{2x+1})}{2(\cancel{4-x})(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

ث) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$

ج) $\lim_{x\to1}\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=$ بالا

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}\times\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(x+1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{2}=1$

۲ اگر $f(x)=\frac{x+1}{2x^2-x-1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x}$، حاصل $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)g(x)$ را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\cancel{2}}x}{\cancel{\cos x}(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=0$

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\cos x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cancel{\cos x-\sin x})}{\cancel{\cos x-\sin x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

پ) $\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{|1-\cos x|}$

ت) $\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos2x}{x\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos2x)}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-2\cos^2x+1)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4(1-\cos^2x)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{\sin x}\times4$

$=1\times1\times4=4$

ث) $\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}$

ج) $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}$

ح) $\lim_{x\to1}\frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1}$

$x<0$ x در ربع چهارم $\to 0<\cos x<1 \to -1<-\cos x<0\to 0<1-\cos x<1\to |1-\cos x|=1-\cos x$

پ) $=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{1-\cos^2x}\times(1+\cos x)$

$=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{\sin^2x}(1+\cos x)=1\times(1+1)=2$

ث) $\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}\times\frac{\cos(t-\pi)-1}{\cos(t-\pi)-1}=\lim_{t\to0}\frac{\cos^2(t-\pi)-1}{t}\times\frac{1}{\cos(t-\pi)-1}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin^2t}{t}\times\frac{1}{\cos(t-\pi)-1}$

$=0$

$\left.\begin{array}{l}t=x+\pi\\ x\to\pi\end{array}\right\}\to t\to0$

حل کاردرکلاس صفحه ی ۱۴۴ (حسابان ۱)

تمرین ۳ :

ث) $$\lim_{x\to-\pi}\frac{\cos x+1}{x+\pi}\ \underset{x+\pi=t}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\cos(t-\pi)+1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t\cos\pi+\sin t\sin\pi+1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\overbrace{\cos t\cos\pi}^{-\cos t}+\overbrace{\sin t\sin\pi}^{0}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t}\times\frac{1}{1+\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{1+\cos t}=1\times\frac{0}{2}=0$$

ج) $$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}\ \underset{x-a=t}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+a)-\sin a}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos a+\cos t\sin a-\sin a}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{1+\cos t}{1+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t}\times\frac{1}{1+\cos t}\times\sin a$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\cos a-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{\sin t}{1+\cos t}\times\sin a$$

$$=1\times\cos a-1\times\frac{0}{1+1}\times\sin a=\cos a$$

چ) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6x-2\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{6(x-\frac{\pi}{3})}\ \underset{x-\frac{\pi}{3}=t}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{6}\times\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{6}\times 1=\frac{1}{6}$$

$$\text{ح)}\ \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+۱-۳\sqrt{x}}{x-۱}\times\frac{۲x+۱+۳\sqrt{x}}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲x+۱)^{۲}-(۳\sqrt{x})^{۲}}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۲}+۴x+۱-۹x}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x^{۲}-۵x+۱}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۴x-۱)}{x-۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{۴x-۱}{۱}\times\frac{۱}{۲x+۱+۳\sqrt{x}}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$