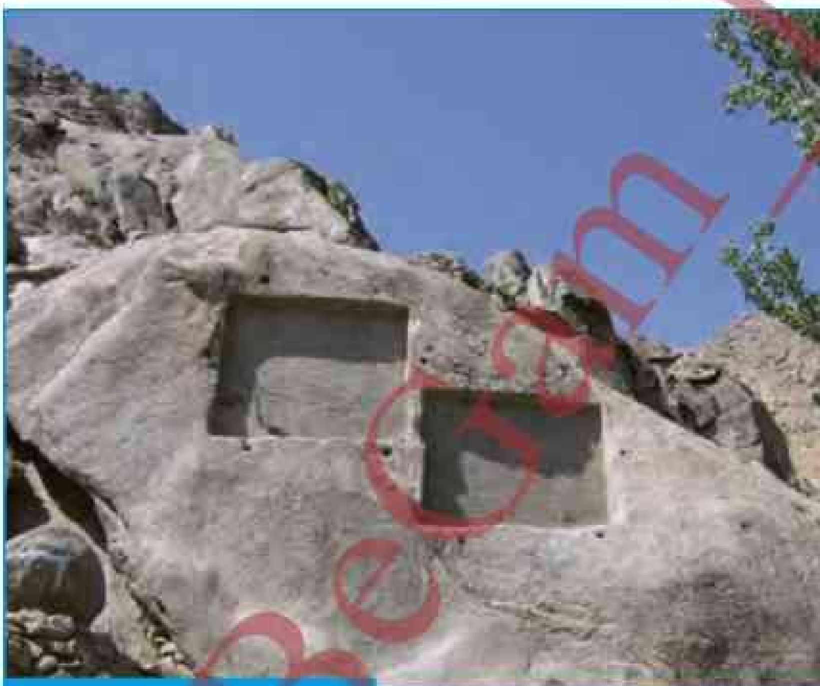
فصل

توابع نمایی و لگاریتمی



ریتون طلایی، مکشوفه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)

سنگ نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)

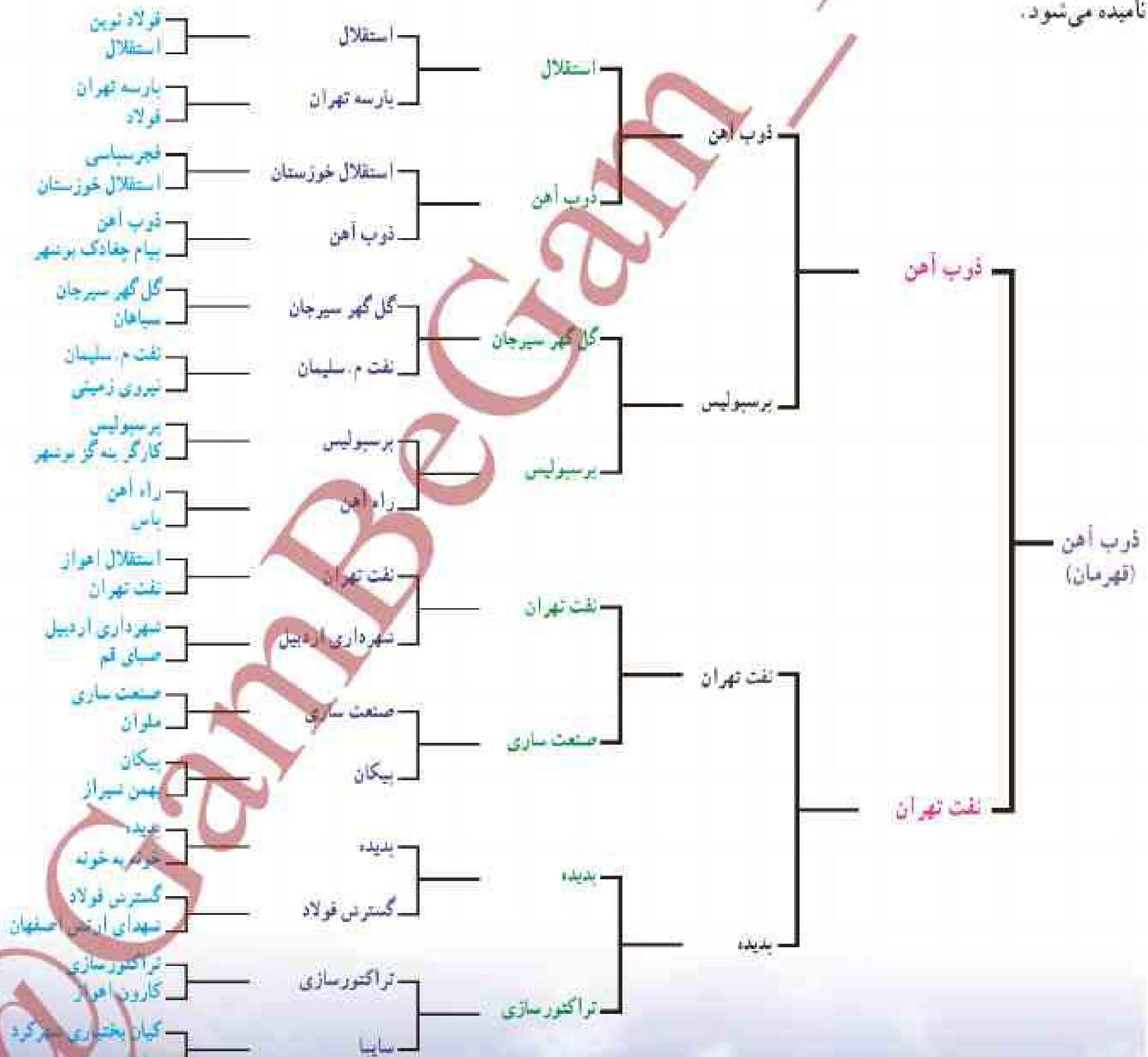
آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟
با استفاده از روش سال‌یابی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

درس اول

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم و در پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود و تیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.



۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۲ تیم

۲ در مرحله قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ۴ تیم

۳ تعداد تیم‌ها در هر مرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟

اگر تعداد تیم های هر مرحله را در ۲ ضرب کنیم، تعداد تیم ها ی مرحله قبل به دست می آید.

به عبارتی : تعداد تیم ها در مرحله قبل = تعداد تیم ها در هر مرحله×۲

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟

$۲^{(\text{تعداد مراحل})}$ = تعداد کل تیم های شرکت کننده

۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟

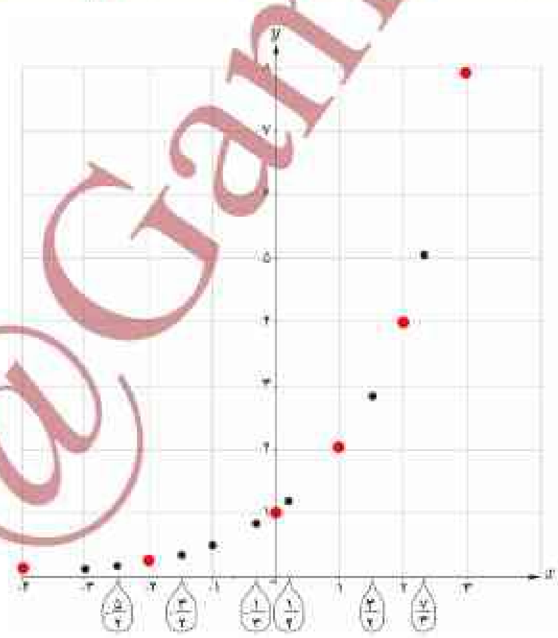
۶۴ = $۲^۶$ = تعداد تیم های اولیه

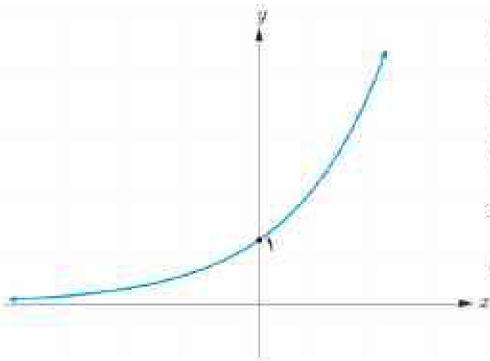
۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ $y = 2^x$

فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{3}$	3
2^x	$\frac{1}{16}$	۰/۱۲	۰/۱۸	$\frac{1}{4}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹	۱	۱/۱۹	۲	۲/۸۳	۴	۵/۰۴	۸





دیدیم که برای هر عدد گویای a، مقداری برای ۲^a به‌دست می‌آید و نقطهٔ $(a, ۲^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای ۲^b خواهیم داشت و مختصات $(b, ۲^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r، مقادیر ۲^r را به‌دست آوریم و نقاط $(r, ۲^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به‌دست خواهد آمد.

توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a $(a \neq ۱)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به‌دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم:

الف) $a^{\circ} = ۱$ ب) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$ پ) $a^x . a^y = a^{x+y}$ ت) $(a^x)^y = a^{xy}$

ث) $(ab)^x = a^x . b^x$ ج) $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$ چ) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

کار در کلاس

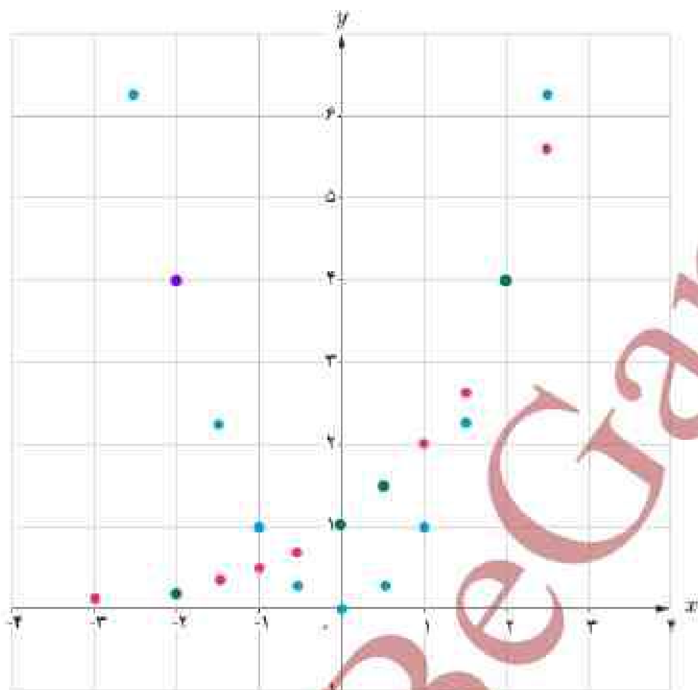
۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = x^۲$ و $y = ۲^x$ را با تکمیل جدول‌های زیر رسم کنید. مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.

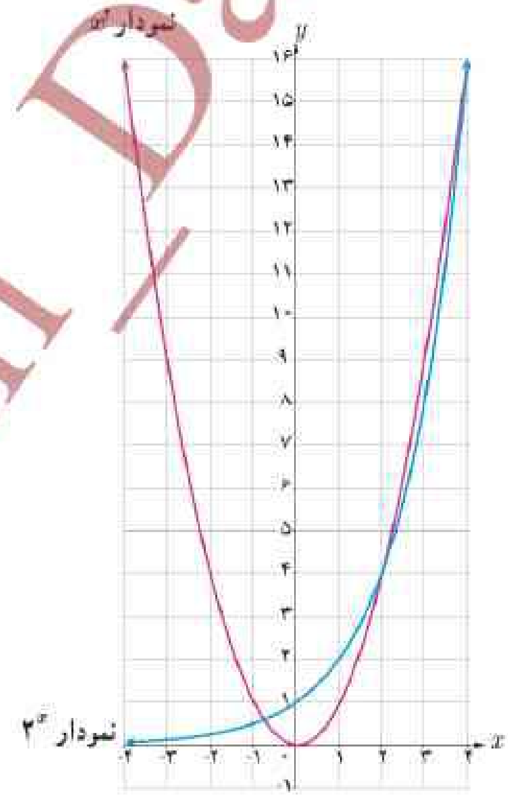
x	$-\frac{۵}{۲}$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y = x^۲$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	۴	۶/۲۵

x	-۳	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\frac{۵}{۲}$
$y = ۲^x$	۰/۱۲	$\frac{۱}{۴}$	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	۱	۱/۴۱	۲	۲/۸۳	۴	۵/۶۶

۲ حال این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^x و x^2 باهم مساوی‌اند؟

۳ در x^2، متغیر در پایه و عدد ثابت در توان است؛ ولی در 2^x، متغیر در توان و عدد ثابت در پایه است.

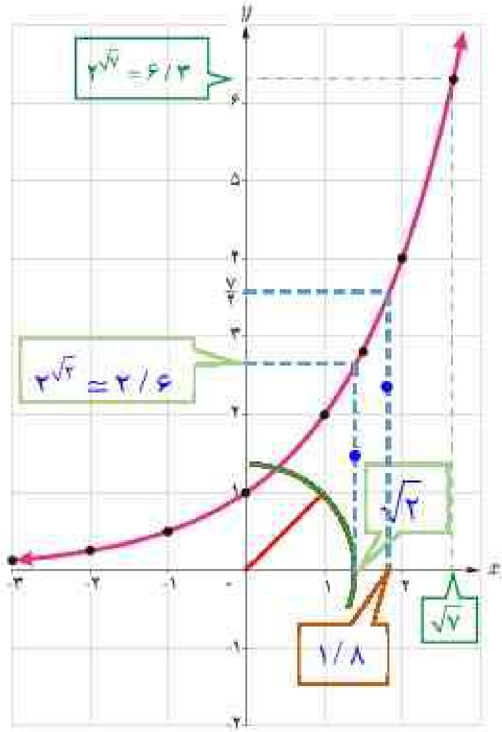




هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>0$, $a\neq 1$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=3^x$ و $y=(\frac{1}{2})^x$ و $y=(\frac{1}{3})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت



درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y = ۲^x$ رسم شده است.

۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(۰,۱)$

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

$R = (۰, +\infty)$ و $D = (-\infty, +\infty)$

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کنند.

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. $۲^{\sqrt{۲}} = ۲/۶$

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری‌که $۲^a = \frac{۷}{۲}$.

همانطور که در شکل انجام شده ابتدا از نقطهٔ $y = \frac{۷}{۲}$ عمودی خارج می کنیم تا نمودار را قطع کند سپس از این نقطه بر محور x ها عمود می کنیم در نتیجه : $x = ۱/۸$ که در واقع داریم : $۲^{(۱/۸)} = \frac{۷}{۲}$

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$۲^{\sqrt{۵}}$, $۲^{\frac{۳}{۲}}$, $۲^{\frac{۵}{۲}}$, $۲^{۰/۳}$, $۲^{۵}$, $۲^{-۰/۴}$, $۲^{-۱}$

$۲^{-۱} < ۲^{-۰/۴} < ۲^{۰/۳} < ۲^{\frac{۳}{۲}} < ۲^{\sqrt{۵}} < ۲^{\frac{۵}{۲}} < ۲^{۵}$

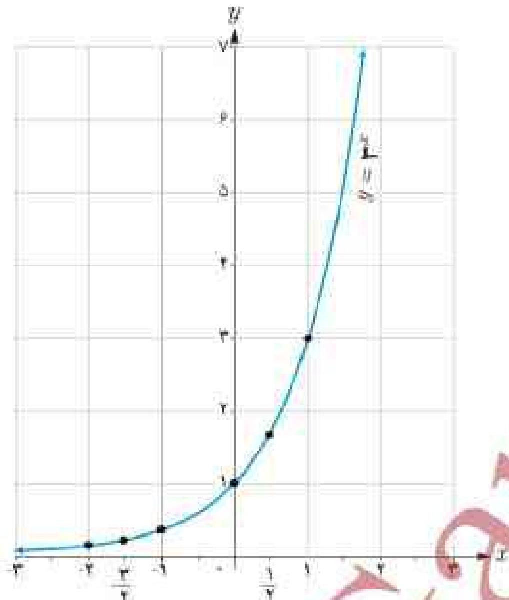
۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟

در حالت کلی رابطهٔ مقابل برقرار است . $x < y \Rightarrow ۲^x < ۲^y$

کار در کلاس

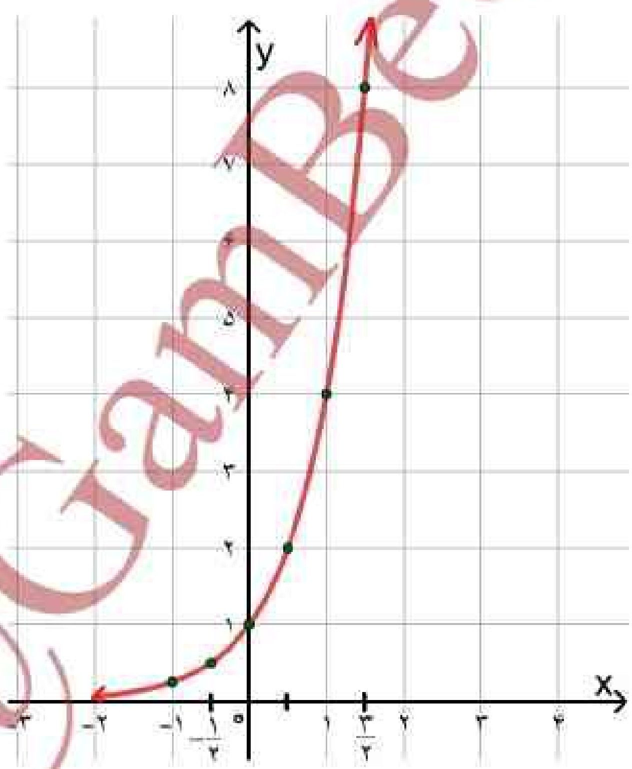
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

x	$y=3^x$
-2	۰/۱۱
$-\frac{3}{2}$	۰/۱۹
-1	۰/۳۳
۰	۱
$\frac{1}{2}$	۱/۷۳
۱	۳



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=4^x$ را رسم کنید.

x	$y=4^x$
..۱-..	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
۰	..۱..
$\frac{1}{2}$	..۲..
۱	..۴..
$\frac{3}{2}$	۸



۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید.

دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است ،یعنی $D=(-\infty,+\infty)$

برد هر دو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگ تر از صفر است . یعنی $R=(0,+\infty)$

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $3^{2/5}$ $>$ $3^{\frac{7}{3}}$

ب) $4^{\sqrt{7}}$ $>$ $4^{\sqrt{5}}$

با توجه به نمودار این دو تابع ، هر چقدر که مقدار x یعنی توان عدد های ۳ و ۴ افزایش پیدا کند مقدار y یعنی 3^x و 4^x هم افزایش پیدا می کنند .

۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

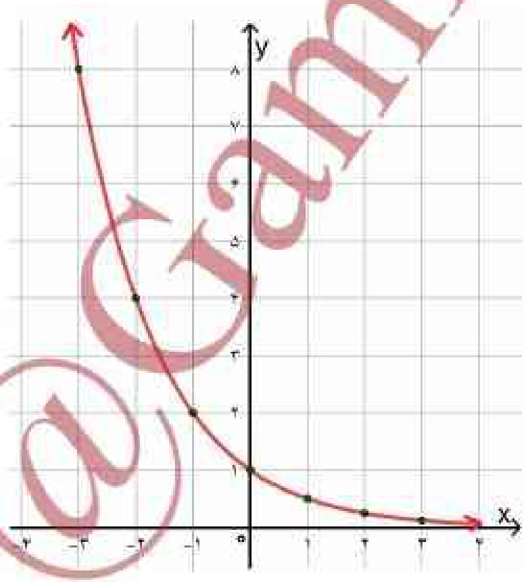
الف) 3^x $<$ 3^y

ب) 4^x $<$ 4^y

فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	۸	۴	$\sqrt{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور yها چه نقطه‌ای است؟

نقطهٔ $(0,1)$

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

$R=(0,+\infty)$ و $D=(-\infty,+\infty)$

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

بله ، زیرا خطوط موازی محور x ها ، نمودار تابع را حد اکثر در یک نقطه قطع می کند.

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $(\frac{1}{2})^{0/5} > (\frac{1}{2})^{1/5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} > (\frac{1}{2})^{4}$ پ) $(\frac{1}{2})^{4} < (\frac{1}{2})^{3}$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^{y}$ و $(\frac{1}{2})^{x}$ وجود دارد؟

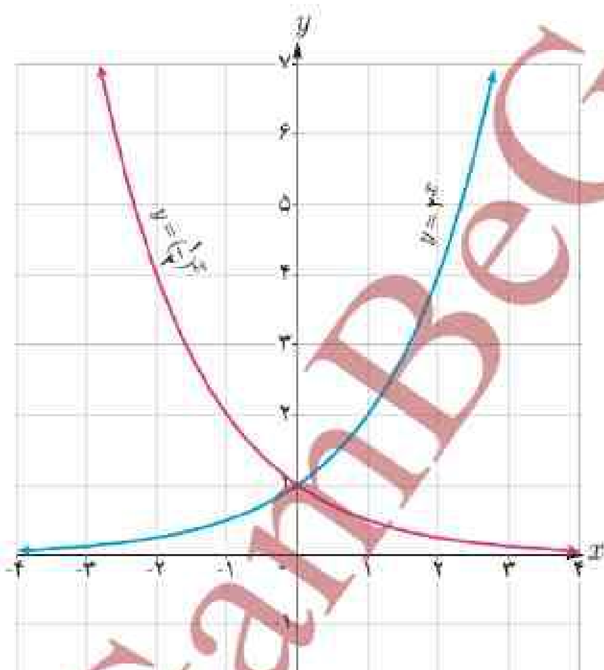
درحالت کلی داریم : $x<y \Rightarrow (\frac{1}{2})^{x} > (\frac{1}{2})^{y}$

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=2^{x}$ و $y=(\frac{1}{2})^{x}$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟

نمودار های این دو تابع نسبت به محور y ها قرینه اند.



۲ با جایگذاری $-x$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=2^{x}$

به تابع با ضابطهٔ $y=2^{-x}$ یا همان $y=(\frac{1}{2})^{x}$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟

دامنه و برد این دو تابع باهم برابرند. یعنی :

$D=(-\infty,+\infty)$ و $R=(0,+\infty)$

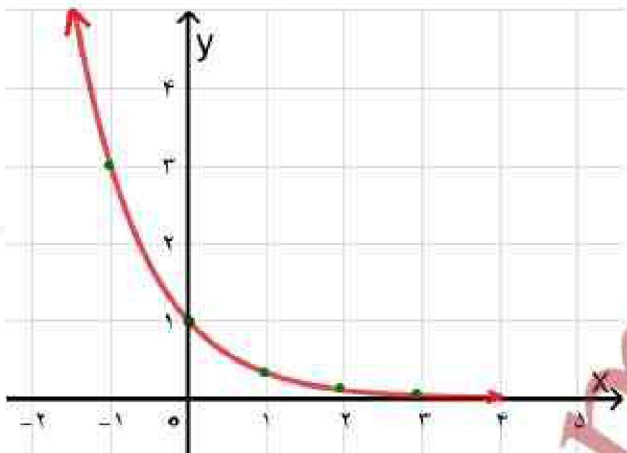
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید

$y=3^{x}$, $y=(\frac{1}{3})^{x}$ و $y=(\frac{2}{5})^{x}$, $y=(\frac{5}{2})^{x}$

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^{x}$ و $y=a^{-x}$ ($a>0$ و $a\neq1$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{3})^x$ را رسم کنید.



x	$y=(\frac{1}{3})^x$
۱-	۳
۰	۱
۱	$\frac{1}{3}$
۲	$\frac{1}{9}$

فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

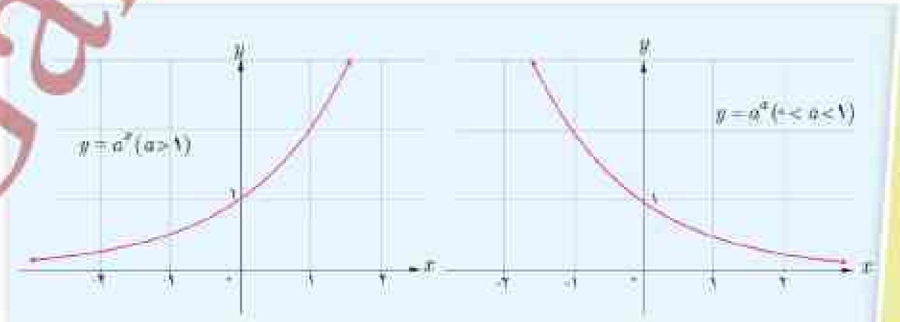
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>1$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(0,+\infty)$ است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($0<a<1$) ....$\mathbb{R}$.... و برد آن بازهٔ $(0\ ,+\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ ....$(0,1)$.... قطع می کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی کند.

۴ این دو تابع، یک به یک ....هستند.... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در ....یک.... نقطه قطع می کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله‌های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $3^{2x-3}=81 \rightarrow 3^{2x-3}=3^4 \rightarrow 2x-3=4 \rightarrow x=\frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1}=8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1}=(2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2=3x+3 \rightarrow x=5$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1} \rightarrow 5^{3n-1}=5^{6n+3} \rightarrow 3n-1=6n+3 \rightarrow n=-\frac{4}{3}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=2x^2-3x+1$ ب) $y=x^2$ پ) $\boxed{y=(0/1)^x}$

ت) $\boxed{y=(\frac{3}{2})^x}$ ث) $y-2x=2$ ج) $y=\sqrt{x-1}$

قسمت های (پ) و (ت) تابع نمایی هستند.

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1,0)$ بنا بر این نقطهٔ $(1,0)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow 0 \neq 3^1 \Rightarrow$

ب) $(3,1)$ بنا بر این نقطهٔ $(3,1)$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow 1 \neq 3^3 \Rightarrow$

پ) $(0,1)$ بنا بر این نقطهٔ $(0,1)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow 1 = 3^0 \Rightarrow$

ت) $(\sqrt{3},\frac{1}{3})$ بنا بر این نقطهٔ $(\sqrt{3},\frac{1}{3})$ روی نمودار این تابع قرار ندارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow \frac{1}{3} \neq 3^{\sqrt{3}} \Rightarrow$

ث) $(1,3)$ بنا بر این نقطهٔ $(1,3)$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow 3 = 3^1 \Rightarrow$

ج) $(-1,\frac{1}{3})$ بنا بر این نقطهٔ $(-1,\frac{1}{3})$ روی نمودار این تابع قرار دارد. $\Leftarrow$ $y=3^x \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-1} \Rightarrow$

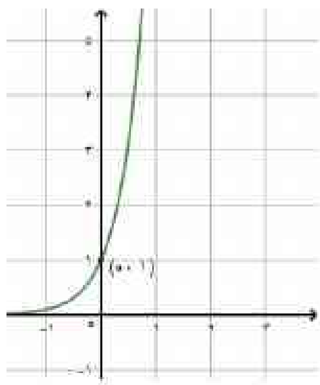
تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 5^x$ قرار دارد.

الف) صحیح است $(\frac{1}{2}, \sqrt{5}) \Rightarrow \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 10^x$ با محور yها، نقطهٔ $(0,10)$ است.



راه اول: نمودار $y = 10^x$ را رسم می کنیم با توجه به نمودار گزاره غلط است زیرا از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می کند.

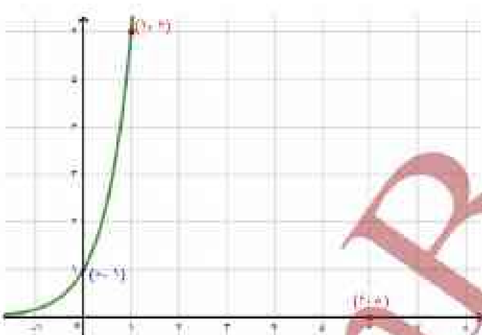
راه دوم : محل برخورد با تابع با ضابطهٔ $y = 10^x$ نقطهٔ $(0,1)$ است .

$$x = 0 \Rightarrow y = (10)^0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow (0,1)$$

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y = 2^x$ و $y = x^2$ مساوی‌اند.

دامنهٔ هردو تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است . بنا براین گزاره صحیح است.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 6^x$ با محور xها، نقطهٔ $(6,0)$ است.

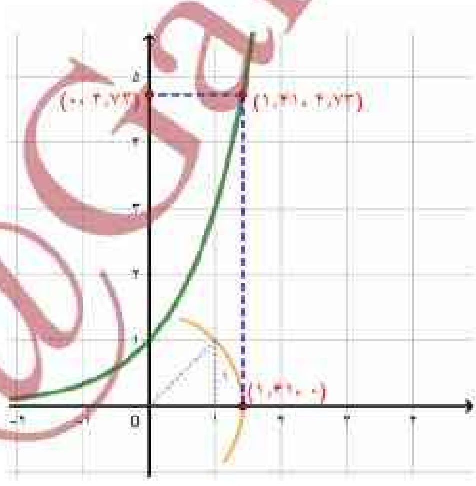


نمودار تابع $y = 6^x$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل نقطهٔ $(6,0)$ روی نمودار نیست . بنا براین گزاره صحیح نیست.

نکته : این نمودار محور x ها را قطع نمی کند.

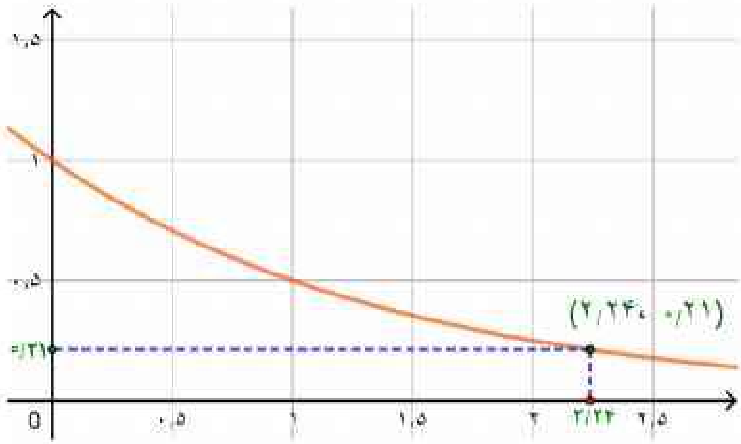
۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

x	۰	۱	$\sqrt{2} = 1/41$	۲
y	۱	۳	$3^{\sqrt{2}} = 4/73$	۹



ابتدا $\sqrt{2}$ را به کمک رسم روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار رسم شده مقدار تقریبی $3^{\sqrt{2}}$ برابر است با $4/73$.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.



مقدار تقریبی $\sqrt{5}=2/24$ را روی محور x ها مشخص می کنیم با توجه به نمودار مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ برابر است با ۰/۲۱ .

۵ فرض کنیم $f(x)=3^x$ ، $g(x)=(\frac{1}{16})^x$ و $h(x)=10^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=3^x \Rightarrow f(3)=3^3=27$

ب) $g(x)=(\frac{1}{16})^x \Rightarrow g(-1)=(\frac{1}{16})^{-1}=16$

پ) $h(x)=10^x \Rightarrow h(-2)=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0/01$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

برای حل معادلات نمایی ابتدا هر دو طرف تساوی را هم پایه می کنیم

الف) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2} \Rightarrow 2^{3n-2}=(2^5)^{-2} \Rightarrow 2^{3n-2}=2^{-10} \Rightarrow 3n-2=-10 \Rightarrow n=-\frac{8}{3}$

ب) $9^{3y-3}=27^{y+1} \Rightarrow (3^2)^{3y-3}=(3^3)^{y+1} \Rightarrow 3^{6y-6}=3^{3y+3} \Rightarrow 6y-6=3y+3 \Rightarrow 3y=9 \Rightarrow y=3$

پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3} \Rightarrow 4^{3x+2}=(4^3)^{-3} \Rightarrow 4^{3x+2}=4^{-9} \Rightarrow 3x+2=-9 \Rightarrow 3x=-11 \Rightarrow x=\frac{-11}{3}$

ت) $9^x=3^{x^2-4x} \Rightarrow (3^2)^x=3^{x^2-4x} \Rightarrow 3^{2x}=3^{x^2-4x} \Rightarrow 2x=x^2-4x \Rightarrow x^2-6x=0$

$\Rightarrow x(x-6)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=6$

ث) $(\frac{3}{5})^{x+1}=\frac{25}{9} \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1}=(\frac{5}{3})^2 \Rightarrow (\frac{3}{5})^{x+1}=(\frac{3}{5})^{-2} \Rightarrow x+1=-2 \Rightarrow x=-3$

درس دوم

تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان‌نپر (۱۶۱۷ــ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیکدان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. (I_0 شدت صوت مبناست که برابر آستانه شنوایی گوش سالم است).

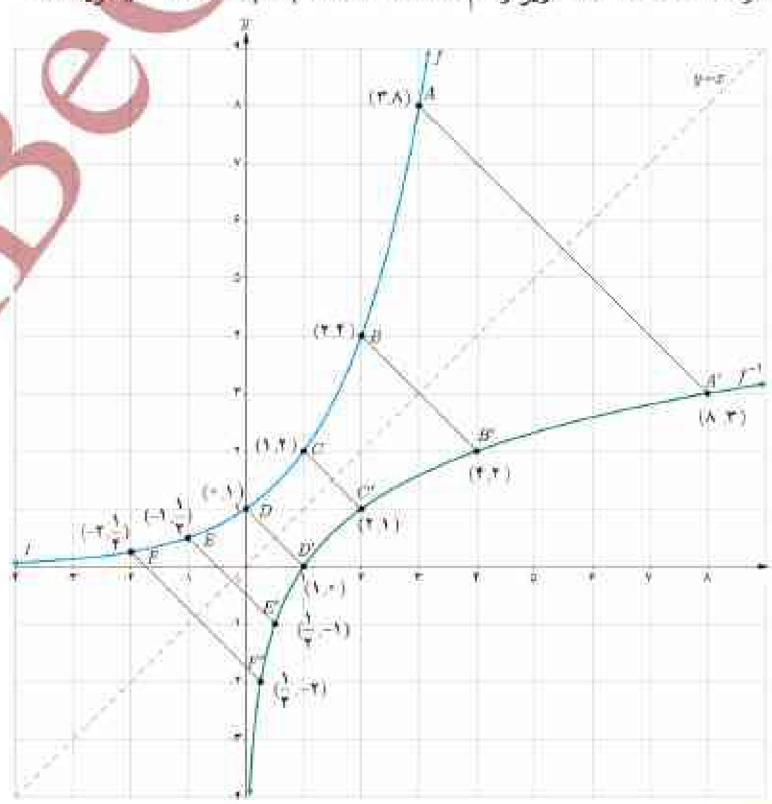
$\beta = \log_{I_0} I$

تراز شدت صوت dB	صدا
۰	شدت صوت مبنا
۱۰	نفس کشیدن
۲۰	برگ درختان در نسیم
۴۰	صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری
۶۰	همهمه در فروشگاه
۷۰	سروصدای خودروها در خیابان شلوغ
۱۲۰	آستانهٔ دردناکی (برای بسامد 1000 Hz)
۱۳۰	مسلسل
۱۴۰	غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن
۱۷۰	راکت فضایی، در موقع بلند شدن

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = 2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y = x$ قرینه‌اند.



۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f=\mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f=(0,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع f^{-1} مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی ($D_{f^{-1}}=(0,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$) است.

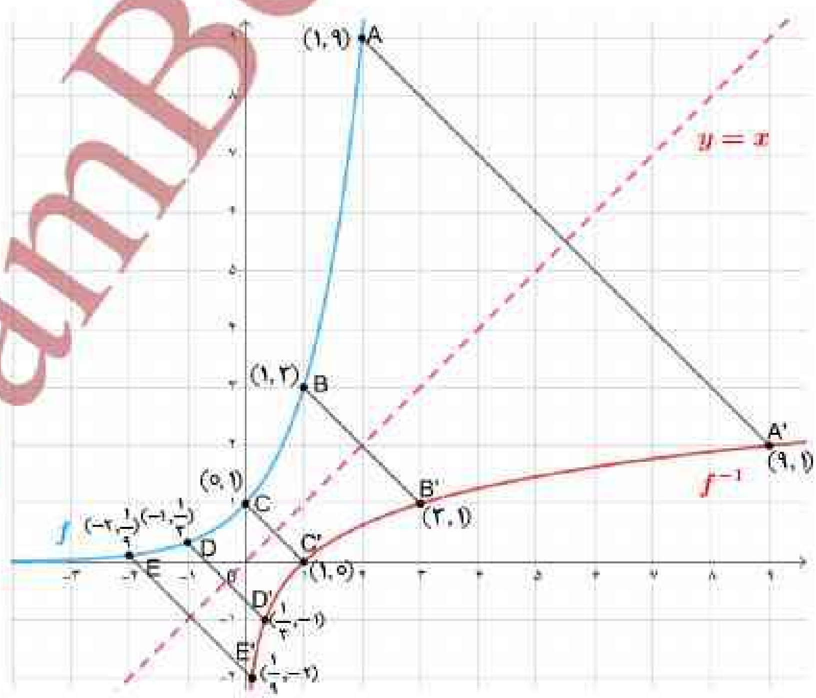
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(-2)=\frac{1}{4}$	$f(-1)=\frac{1}{2}$	$f(0)=1$	$f(2)=4$
$f^{-1}(\frac{1}{4})=-2$	$f^{-1}(\frac{1}{2})=-1$	$f^{-1}(1)=0$	$f^{-1}(4)=2$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=3^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار f^{-1} را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(۲)=۹$	$f(۱)=۳$	$f(۰)=۱$	$f(-۲)=\frac{۱}{۹}$
$f^{-1}(۹)=۲$	$f^{-1}(۳)=۱$	$f^{-1}(۱)=۰$	$f^{-1}(\frac{۱}{۹})=-۲$

۳ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} را به‌دست آورید.

دامنهٔ تابع **f** مجموعهٔ اعداد حقیقی ($D_f=\mathbb{R}$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی نامنفی($R_f=(۰,+\infty)$) است.

دامنهٔ تابع f^{-1} مجموعهٔ اعداد حقیقی نامنفی($D_{f^{-1}}=(۰,+\infty)$) است . و برد آن مجموعهٔ اعدادحقیقی ($R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$) است.

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x)=۳^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای ۳ می‌نامیم به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید.

اگر $(a\in\mathbb{R},\ a>۰,\ a\neq ۱)$ $f(x)=a^x$ آنگاه $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=(۰,+\infty)$

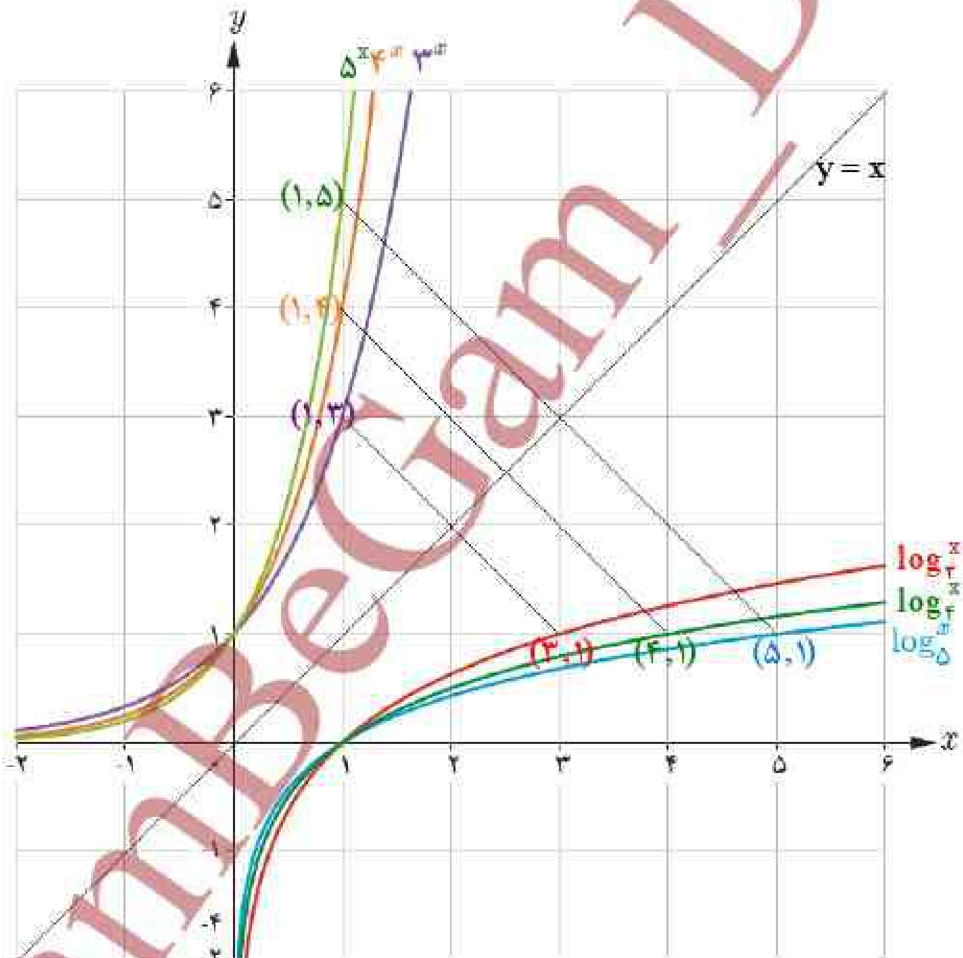
اگر $(a\in\mathbb{R},\ a>۰,\ a\neq ۱)$ $f^{-1}(x)=\log_a x$ آنگاه $D_{f^{-1}}=(۰,+\infty)$ و $R_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x)=\log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq ۱)$ داریم:

$$f(x)=a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\log_a x$$

کار در کلاس

در شکل زیر ، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

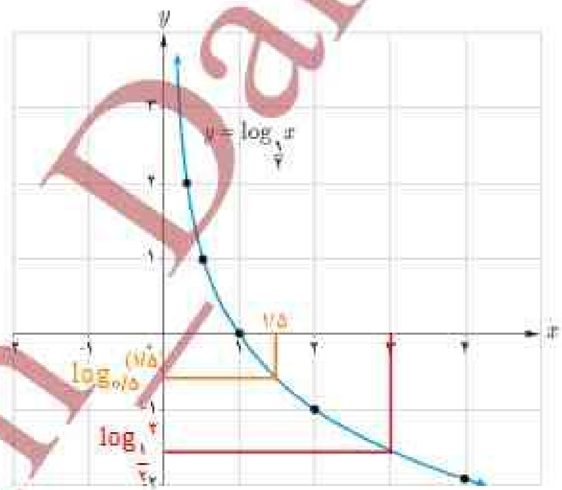


کار در کلاس

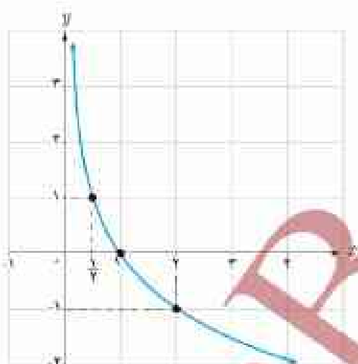
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{۱}{۲}}x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{۱}{۲}}۳$ ...... $-۲<\log_{\frac{۱}{۲}}^{۳}<-۱$ ......

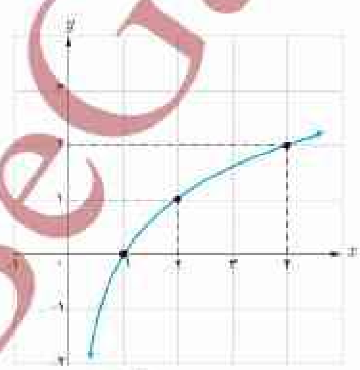
ب) $\log_{۰/۵}(۱/۵)$ ...... $-۱<\log_{۰/۵}^{(۱/۵)}<۰$ ......



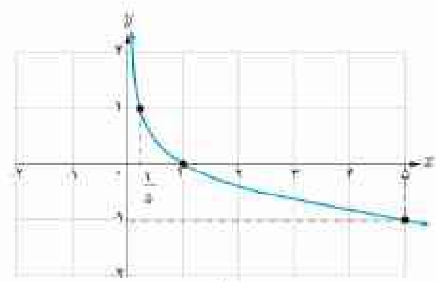
نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



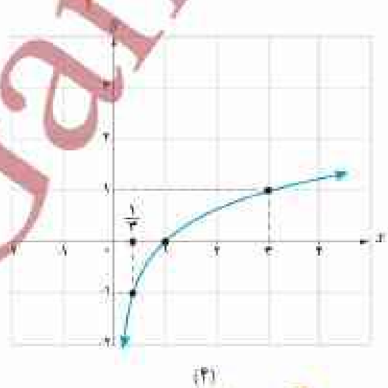
(۱) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$



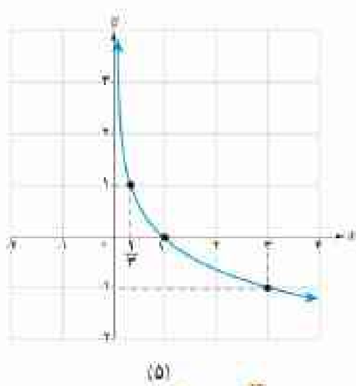
(۲) $y=\log_{۲}^{x}$



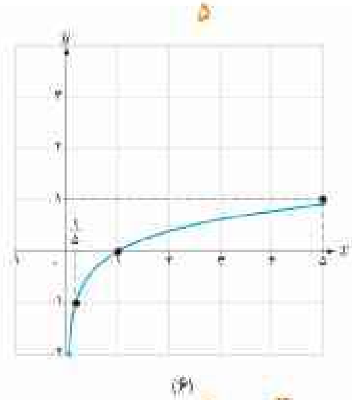
(۳) $y=\log_{\frac{۱}{۵}}^{x}$



(۴) $y=\log_{۳}^{x}$



(۵) $y=\log_{\frac{۱}{۳}}^{x}$



(۶) $y=\log_{۵}^{x}$

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \log_a x$ $(0<a<1)$، بازه **$(0,+\infty)$** و برد آن **اعداد حقیقی** است.

۳ نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ **$x = 1$** قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

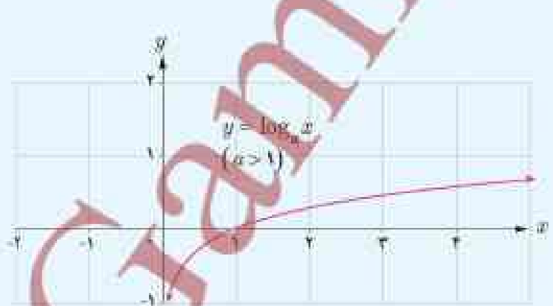
۴ این دو تابع، یک‌به‌یک **هستند**؛ زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در **یک** نقطه قطع می‌کند.

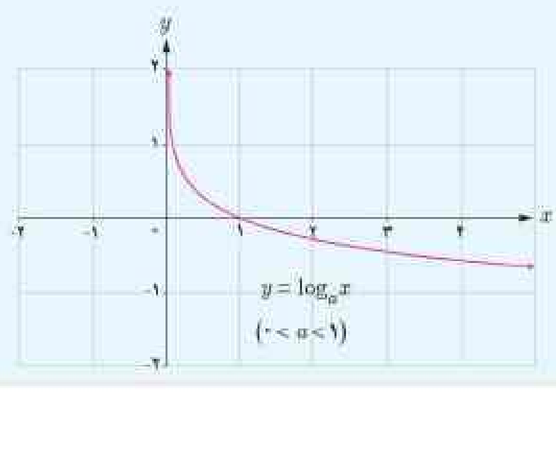
۵ وارون تابع نمایی، تابع **لگاریتمی** است و وارون تابع لگاریتمی، تابع **نمایی** است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq 1)$ باشد، داریم: $a^0 = 1$، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

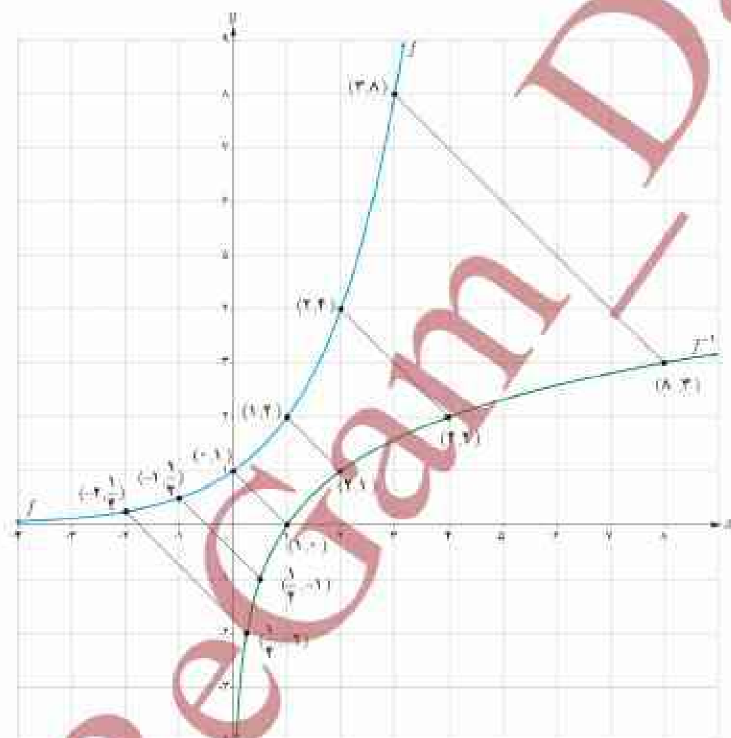




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و $f^{-1}(x)=\log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$2^3=8$	$2^2=4$	$2^1=2$	$2^0=1$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^{-2}=\frac{1}{4}$
لگاریتمی	$\log_2 8=3$	$\log_2 4=2$	$\log_2 2=1$	$\log_2 1=0$	$\log_2 \frac{1}{2}=-1$	$\log_2 \frac{1}{4}=-2$

به‌طور کلی اگر $x=a^y$ آن‌گاه $\log_a x=y$ و به عکس. $(x>0\ ,\ a\neq 1\ ,\ a>0)$

$$b^a=c \Leftrightarrow \log_b c=a \qquad (c>0\ ,\ b>0\ ,\ b\neq 1)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$۱۰^۳=۱۰۰۰ \to \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$	$\log_۸ ۱= \quad \to ۸ = ۱$
$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \to \log_۹ ۳= \frac{۱}{۲}$	$\log_۲ (\frac{۱}{۱۶})=-۴ \to ۲^{-۴}= \frac{۱}{۱۶}$
$۴^۳=۶۴ \to \log_۴ ۶۴= ۳$	$\log_۵ ۱۲۵=۳ \to ۵^۳= ۱۲۵$
$۲^۵=۳۲ \to \log_۲ ۳۲= ۵$	$\log_{\frac{۱}{۳}} ۲۷=-۳ \to (\frac{۱}{۳})^{-۳}= ۲۷$
$۲^{-۳}= \frac{۱}{۸} \to \log_۲ \frac{۱}{۸} = -۳$	$\log_{\frac{۱}{۵}} ۱۲۵= -۳ \to (\frac{۱}{۵})^{-۳} =۱۲۵$
$۳^{-۴}= \frac{۱}{۸۱} \to \log_۳ \frac{۱}{۸۱} = -۴$	$\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۶= -۴ \to (\frac{۱}{۲})^{-۴}= ۱۶$

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت ($a\neq ۱$) باشد، همواره داریم :

$$\log_a ۱ = ۰ \quad و \quad \log_a a = ۱ \quad و \quad \log_a (\frac{۱}{a}) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq ۱$) داریم :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات : فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = c^m$ و $b = c^n$، از این‌رو $ab = c^m . c^n = c^{m+n}$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم : $\log_c ab = m + n$ و در نتیجه :

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال : فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳ \times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم :

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات :

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n \text{ بار}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{n \text{ بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c ($c \neq ۱$) داریم :

$$\log_c (\frac{a}{b}) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات : فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین :

$$a = bd \rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c d \rightarrow \log_c d = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

مثال : اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ ، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :

«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a = ۱۵۵۰۰(۵ - \log P)$ است ، که در آن a ارتفاع برحسب متر و P نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

$$۱)\ \log ۱۲ = \log(۳ \times ۴) = \log ۳ + \log ۲^۲ = \log ۳ + ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۶ = ۱/۰۸$$

$$۲)\ \log ۰/۷۵ = \log \frac{۳}{۴} = \log ۳ - \log ۴ = \log ۳ - \log ۲^۲ = \log ۳ - ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ - ۰/۶ = ۰/۴۲$$

$$۳)\ \log \sqrt{۵} = \log \left(\frac{۱۰}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}\log\left(\frac{۱۰}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(\log ۱۰ - \log ۲) \simeq \frac{۱}{۲}(۱ - ۰/۳) = ۰/۳۵$$

$$۴)\ \log \frac{۲۵}{۱۸} = \log \frac{۱۰۰}{۷۲} = \log ۱۰۰ - \log ۷۲ = \log ۱۰ - \log(۲^۳ \times ۳^۲) = \log ۱۰۰ - (\log ۲^۳ + \log ۳^۲)$$

$$= \log ۱۰۰ - (۳\log ۲ + ۲\log ۳) \simeq ۲ - (۰/۹ + ۰/۹۶) = ۰/۱۴$$

$$۵)\ \log \sqrt[۳]{۶} = \log(۲ \times ۳)^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۳}(\log ۲ + \log ۳) \simeq \frac{۱}{۳}(۰/۳ + ۰/۴۸) = ۰/۲۶$$

$$۶)\ \log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} = \log \sqrt{۲۷} - \log \sqrt[۴]{۵} = \log ۳^{\frac{۳}{۲}} + \log ۵^{\frac{۱}{۴}}) = \frac{۳}{۲}\log ۳ + \frac{۱}{۴}\log ۵ \simeq \frac{۳}{۲}(۰/۴۸) + \frac{۱}{۴}(۰/۷) = ۰/۸۹۵$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم‌ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا استانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند:

$$\log_{۴}x+۱ = ۳ \quad , \quad \log_{۲}x = \log_{۲}۷ \quad , \quad \log_{۵}x+\log_{۵}(x-۱) = \log_{۵}۱۲$$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

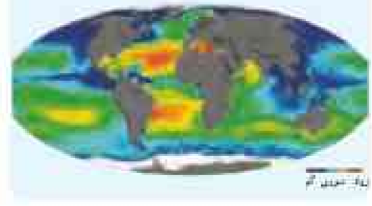
به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq۱)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ (x, y>۰)$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و به عکس، اگر $x=y$ $(x , y>۰)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از:

$$S(x) = ۳۱/۵+۱/۱\log(x+۱)$$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.



فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱) $\log_{۳} x = ۲ \rightarrow x = ۳^{۲} = ۹$

۲) $\log_{۵}(x+۶) = \log_{۵}(۲x-۳) \rightarrow x+۶ = ۲x-۳ \rightarrow x = ۹$

که $x = ۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳) $\log_{۵}(x+۶)+\log_{۵}(x+۲) = ۱ \rightarrow \log_{۵}\left[(x+۶)(x+۲)\right] = ۱$

$$\rightarrow (x+۶)(x+۲) = ۵ \rightarrow x^{۲}+۸x+۱۲ = ۵$$

$$\rightarrow x^{۲}+۸x+۷ = ۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱) = ۰ \rightarrow x=-۷ \quad \text{یا} \quad x=-۱$$

توجه کنید که $x=-۷$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x=-۱$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

۴ $\log_4(x+2)=\log_4 8 \rightarrow x+2=8 \rightarrow x=6$

۵ $3\log_2 x=-\log_2 27 \rightarrow \log_2 x^3=\log_2 \frac{1}{27} \rightarrow x^3=\frac{1}{27} \rightarrow x=\frac{1}{3}$

۶ $\log(x+1)-\log(x-3)=3 \rightarrow \log\frac{x+1}{x-3}=3 \rightarrow \log\frac{x+1}{x-3}=\log 1000$

$\rightarrow \frac{x+1}{x-3}=1000 \rightarrow x+1=1000x-3000$

$\rightarrow 3001=999x \rightarrow x=3/004$

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_5 x=3 \rightarrow x=5^3 \rightarrow x=125$

۲ $\log_2(2x+1)=3 \rightarrow 2x+1=2^3 \rightarrow 2x+1=8 \rightarrow 2x=7 \rightarrow x=3/5$

۳ $\log_2(x+1)+\log_2(x+4)=2 \rightarrow \log_2(x+1)(x+4)=\log_2 4 \rightarrow (x+1)(x+4)=4$

$\rightarrow x^2+5x+4=4 \rightarrow x^2+5x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$

توجه کنید که $x=-5$ قابل قبول نیست؛از این رو تنها جواب قابل قبول $x=0$ است.

۴ $\log_3 243=2x+1 \rightarrow 243=3^{2x+1} \rightarrow 3^5=3^{2x+1} \rightarrow 2x+1=5 \rightarrow x=2$

۵ $\log_3(x-1)=4 \rightarrow x-1=3^4 \rightarrow x=81+1 \rightarrow x=82$

۶ $\log(2x)-\log(x-3)=1 \rightarrow \log(\frac{2x}{x-3})=\log 10 \rightarrow \frac{2x}{x-3}=10$

$\rightarrow 2x=10x-30 \rightarrow 8x=30 \rightarrow x=\frac{30}{8}=3/75$

۷ $2\log_4(x-1)=3 \rightarrow \log_4(x-1)^2=\log_4 64 \rightarrow (x-1)^2=64$

$\rightarrow \begin{cases} x-1=8 \rightarrow x=9 \\ x-1=-8 \rightarrow x=-7 \end{cases}$

توجه کنید که $x=-7$ قابل قبول نیست.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_c abd = \log_c a + \log_c b + \log_c d$ (a و b و c و d اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$)

$\log_c abd = \log_c (ab)d = \log_c (ab) + \log_c d = \log_c a + \log_c b + \log_c d$

ب) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ (a و b و c اعداد حقیقی مثبت‌اند و $c \neq 1$ و b)

اگر $x = \log_b a$ آنگاه داریم: $b^x = a$ حالا از دو طرف این تساوی لگاریتم در مبنای c می گیرم:

$$b^x = a \rightarrow \log_c b^x = \log_c a \rightarrow x \log_c b = \log_c a$$

$$\rightarrow x = \frac{\log_c a}{\log_c b} \xrightarrow{x=\log_b a} \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

پ) $a^{\log_a b} = b$ (a و b اعداد حقیقی مثبت‌اند و $a \neq 1$)

اگر $\log_a b = x$ آنگاه داریم:

$$b = a^x \xrightarrow{x=\log_a b} b = a^{\log_a b}$$

ت) $\log_b a \times \log_a b = 1$

با توجه به رابطهٔ قسمت (ب) داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} \\ \log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \end{array}\right\} \rightarrow \log_b a \times \log_a b = \frac{\cancel{\log_c a}}{\cancel{\log_c b}} \times \frac{\cancel{\log_c b}}{\cancel{\log_c a}} = 1 \rightarrow \log_b a \times \log_a b = 1$$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_7 \sqrt[5]{49} = \log_7 (49)^{\frac{1}{5}} = \log_7 (7^2)^{\frac{1}{5}} = \log_7 (7)^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\log_7 7 = \frac{2}{5}$

ب) $\log_3 27^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 (3)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$

پ) $-\log_5 125 = -\log_5 (5)^3 = -3\log_5 5 = -3$

ت) $3\log_{10}\sqrt{1000} = 3\log_{10}\sqrt{10^3} = 3\log_{10}(10)^{\frac{3}{2}} = 3\times\frac{3}{2}\log_{10}10 = \frac{9}{2}$

۳ اگر $f(x)=3-2\log_4(\frac{x}{2}-5)$ ، مقدار $f(42)$ را به‌دست آورید.

$f(42)=3-2\log_4(\frac{42}{2}-5)=3-2\log_4 16=3-2\log_4(4)^2=3-2\times 2\log_4 4=3-4=-1$

$\to f(42)=-1$

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(2,2)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

$f(2)=2\to \log_a 2=2\to a^2=2\to a=\sqrt{2}\ ,\ a=-\sqrt{2}$

جون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a=-\sqrt{2}$ غیر قابل قبول است.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{1}{2},-4)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

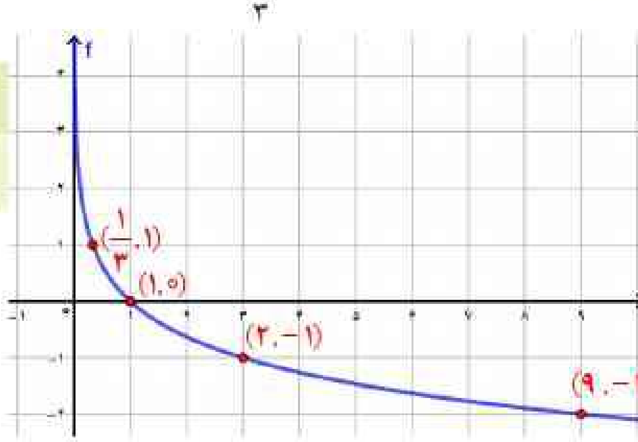
$f(\frac{1}{2})=-4\to \log_a(\frac{1}{2})=-4\to a^{-4}=\frac{1}{2}\to \frac{1}{a^4}=\frac{1}{2}\to a^4=2\to a=\sqrt[4]{2}\ ,\ a=-\sqrt[4]{2}$

جون a باید مثبت و مخالف ۱ باشد پس $a=-\sqrt[4]{2}$ غیر قابل قبول است.

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ را رسم کنید.

x	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	1	0	-1	-2

به کمک جدول نقاط را در صفحه پیدا می کنیم و به هم وصل می کنیم



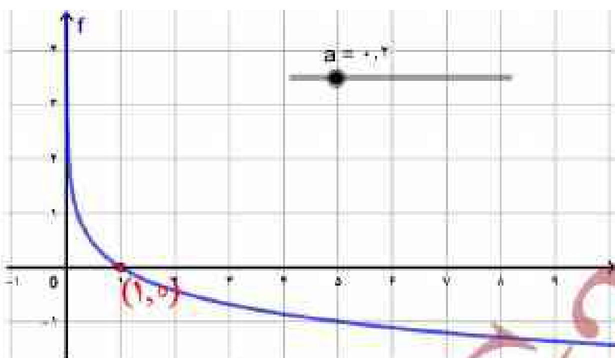
۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

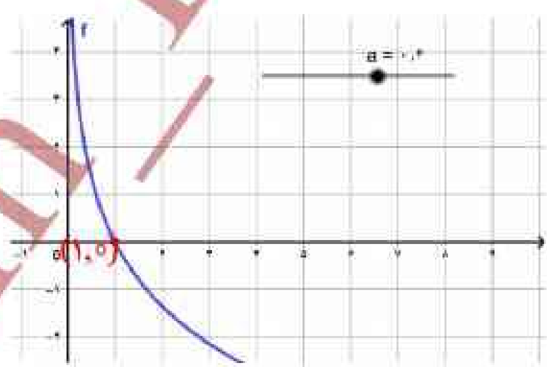
الف) اگر $y=\log_a x$، آنگاه $a^x=y$.

نادرست است زیرا به طور کلی اگر $a^y = x$ آن گاه $\log_a x = y$ و به عکس ($x > 0 , a \neq 1 , a > 0$)

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x$ ($0< a<1$) از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می‌کند.

راه اول : نمودار تابع را رسم می کنیم و بررسی می کنیم که نقطهٔ $(1,0)$ روی نمودار هست یا نه .





راه دوم : می توانیم به جای x عدد ۱ را قرار دهیم و سپس مقدار y را به دست آوریم .

$$x = 0 \rightarrow \log_a 1 = 0 \rightarrow y = 0$$

بنا براین نمودار تابع با ضابطهٔ $\log_a x = y$ ($0 < a < 1$) از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

درست است . با توجه به تعریف ص ۱۱۰ کتاب .

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_3(p^2-2) = \log_3 p \rightarrow p^2 - 2 = p \rightarrow p^2 - p - 2 = 0 \rightarrow (p-2)(p+1) = 0 \rightarrow p = 2 , p = -1$

توجه کنید که $p = -1$ قابل قبول نیست .

ب) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1) = 1$

$$\log_5 (x+1)(x-1) = 1 \rightarrow (x+1)(x-1) = 5^1 \rightarrow x^2 - 1 = 5 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = -\sqrt{6} \ , \ x = \sqrt{6}$$

توجه کنید که $x = -\sqrt{6}$ قابل قبول نیست .

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

پ) $3\log_4 a - \log_4 5 = \log_4 25 \to \log_4(\frac{a^3}{5}) = \log_4 25 \to \frac{a^3}{5} = 25 \to a^3 = 125 \to a^3 = 5^3 \to a = 5$

ت) $\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2$

$x^2 - 21 = (\frac{1}{10})^{-2} \to x^2 - 21 = 10^2 \to x^2 - 21 = 100 \to x^2 = 121 \to x = -11 , x = 11$

توجه کنید که $x = -11$ قابل قبول نیست

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

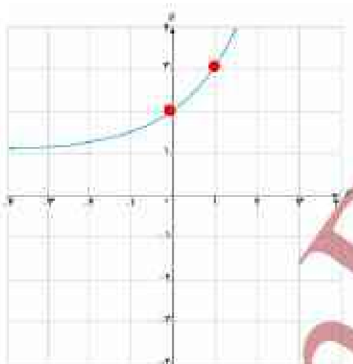
با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

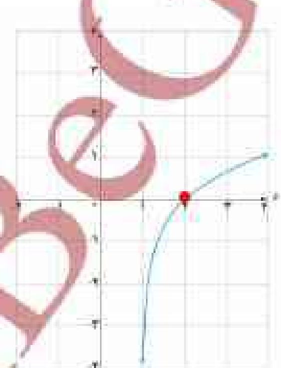
فعالیت

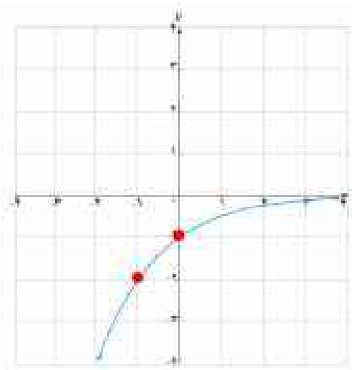
نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

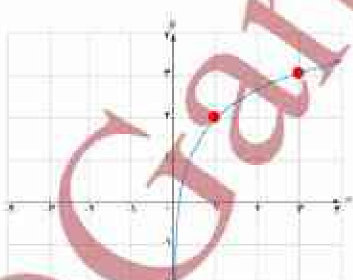
پ) $h(x) = -(\frac{۱}{۲})^x \rightarrow (۳)$ ب) $l(x) = ۲ + \log x \rightarrow (۴)$ الف) $k(x) = -\log_۲ x \rightarrow (۶)$

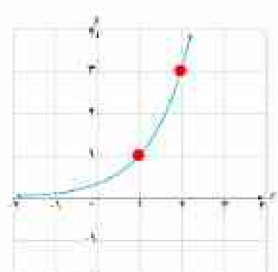
ج) $f(x) = ۲^x + ۱ \rightarrow (۱)$ ث) $j(x) = ۳^{(x-۱)} \rightarrow (۵)$ ت) $g(x) = \log(x-۱) \rightarrow (۲)$

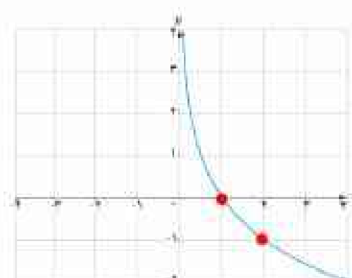

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


(۵)

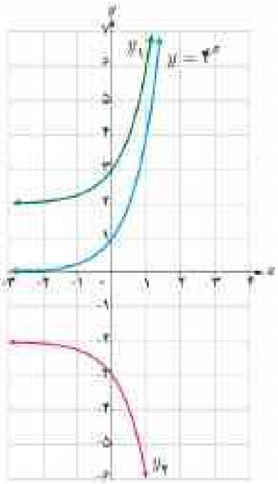

(۶)

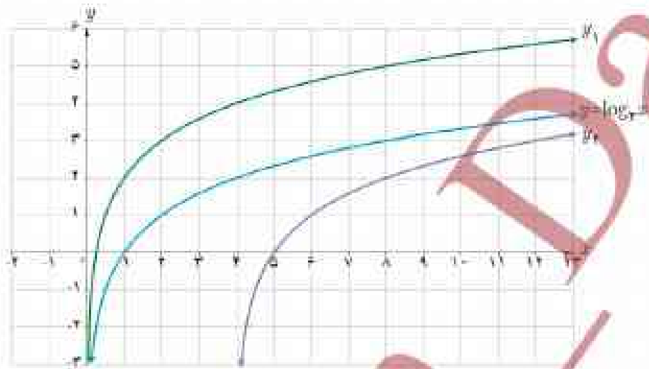
در هر قسمت می توان نقاط کلیدی (•) را در معادله ها امتحان کرد.

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

کار در کلاس

در شکل‌های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.





$$y = ۴^x \rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۲ + ۴^x \\ y_۲ = -(۲ + ۴^x) \end{cases}$$

$$y = \log_۲ x \rightarrow \begin{cases} y_۱ = ۲ + \log_۲ x \\ y_۲ = \log(x - ۴) \end{cases}$$

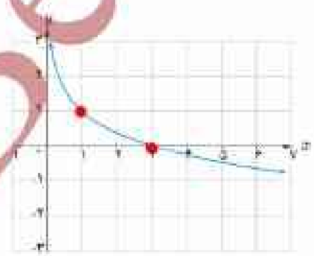
کار در کلاس

کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

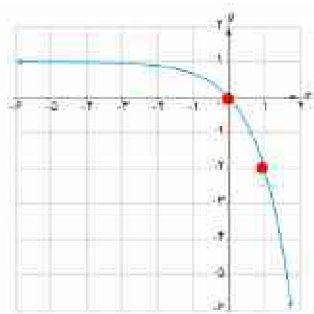
۱) $y = \log_۲ (x - ۱)$ → (ت)　　۲) $y = ۳^x + ۱$ → (ج)　　۳) $y = ۱ - ۳^x$ → (پ)

۴) $y = \log_۲ x - ۱$ → (الف)　　۵) $y = ۱ - \log_۲ x$ → (ب)　　۶) $y = ۳^{(x-۲)}$ → (ث)

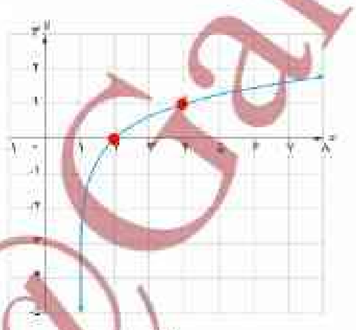
(الف)



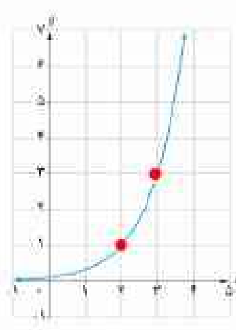
(ب)



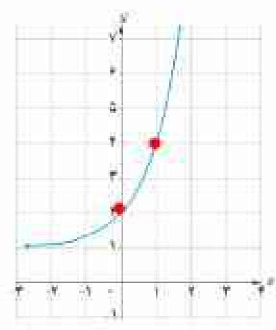
(پ)



(ت)



(ث)

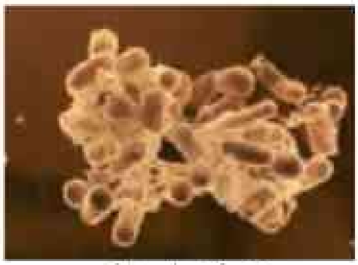


(ج)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ $(a\neq ۱ , a>۰)$ مانند یک تابع نمایی رفتار می‌کند که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.



توده باکتری اشریشیاکلی

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۶}=۶۴۰۰$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\rightarrow$$
$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\,(۶/۶)$$
$$\rightarrow \log E=۲۱/۷ \rightarrow E=۱۰^{۲۱/۷}\ Erg$$

کار در کلاس

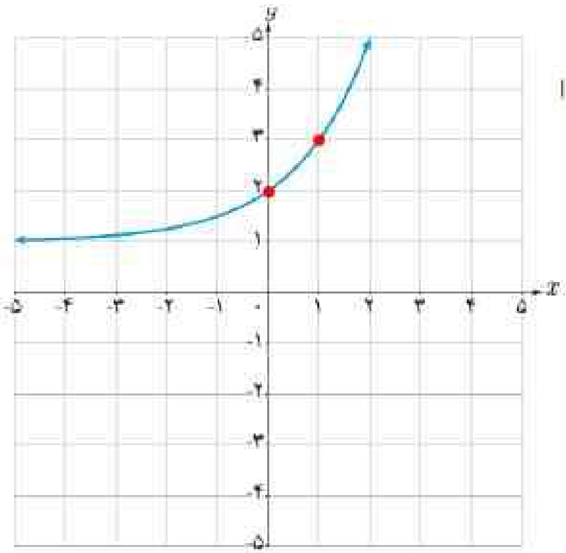
زلزله ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$
$$\rightarrow \log E=۱۱/۸+۱/۵(۷/۴)$$
$$\rightarrow \log E=۲۲/۹ \rightarrow E=۱۰^{۲۲/۹}\ Erg$$

تهیه و تنظیم : عطیه تبریزی

تمرین

۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+۲^{(x-b)}$ رسم شده است.
a و b را به‌دست آورید.



راه اول : نقاط کلید در این نمودار را مشخص می کنیم که عبارتند از

$(۰,۲)$ و $(۱,۳)$ در نتیجه با جایگذاری در ضابطهٔ تابع داریم :

$$\begin{cases} ۲ = a + ۲^{(۰-b)} \rightarrow ۲ = a + ۲^{-b} \\ ۳ = a + ۲^{(۱-b)} \rightarrow ۳ = a + ۲^{(۱-b)} \end{cases}$$

$$\rightarrow ۱ = ۲^{(۱-b)} - ۲^{-b} \rightarrow ۱ = ۲ \times ۲^{-b} - ۲^{-b} \rightarrow ۱ = ۲^{-b}(۲-۱)$$

$$\rightarrow ۲^{-b} = ۱ \rightarrow \frac{۱}{۲^{b}} = ۱ \rightarrow ۲^{b} = ۱ \rightarrow b = ۰$$

$$\rightarrow ۲ = a + ۲^{۰} \rightarrow a = ۱$$

راه دوم : نمودار $y = ۲^{x}$ را در نظر می گیریم اگر این نمودار با توجه به انتقال به اندازهٔ ۱ واحد به سمت بالا روی محور عرض ها انتقال دهیم نمودار داده شده به دست می آید. بنا براین با مقایسه معلوم می شود که :

$$\left.\begin{array}{l} y = ۱ + ۲^{x} \\ y = a + ۲^{(x-b)} \end{array}\right\} \rightarrow a = ۱ \ , \ b = ۰$$

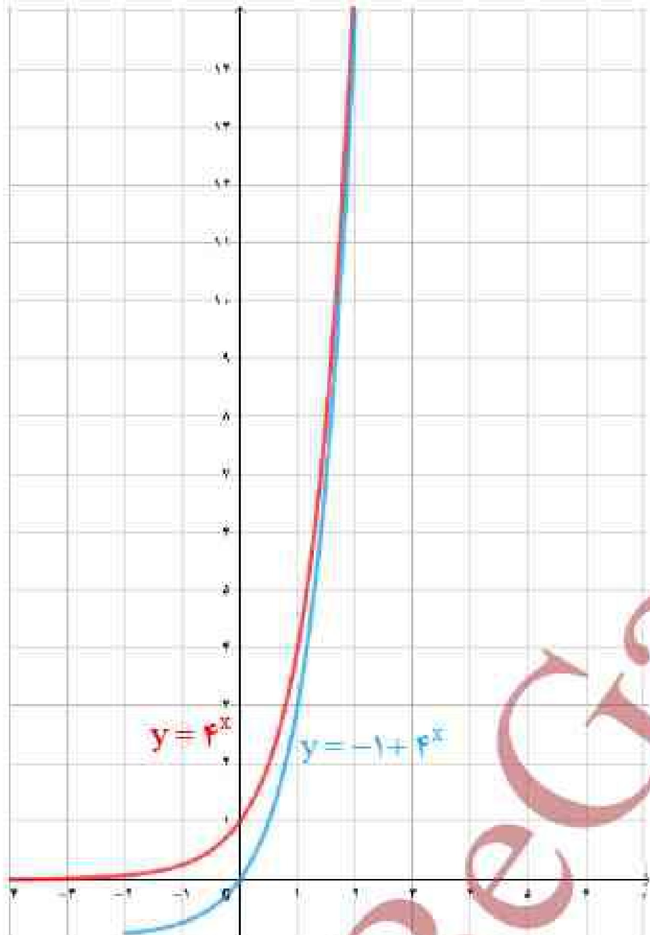
۲ فرض می‌کنیم $g(x) = ۴^{x} + ۲$. الف) $g(-۱)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x) = ۶۶$، مقدار x چقدر است؟

$$g(-۱) = ۴^{(-۱)} + ۲ \rightarrow g(-۱) = \frac{۱}{۴} + ۲ = \frac{۹}{۴}$$

$$۶۶ = ۴^{x} + ۲ \rightarrow ۶۴ = ۴^{x} \rightarrow ۴^{۳} = ۴^{x} \rightarrow x = ۳$$

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 4^x - 1$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ رسم کنید.

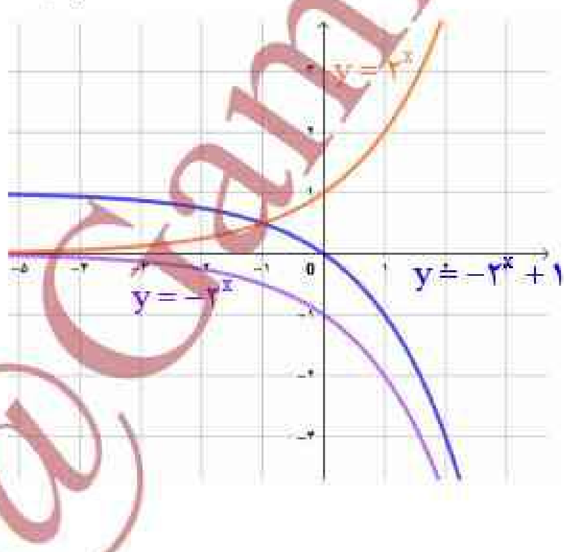
برای رسم از انتقال استفاده می کنیم کافی است نمودار $y = 4^x$ را یک واحد روی محور عرض ها به سمت پایین انتقال دهیم. و بعد در بازه $[-2,2]$ آن را رسم کنیم به این ترتیب داریم :



۴ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

به کمک انتقال و تقارن نسبت به محور طولها رسم می شود.

الف) $y = -2^x + 1$



ب) $y = -\log_2 (x - 1)$