درس اوّل

تفکر تجسمی و آشنایی با مقاطع مخروطی

برای دوستتان توصیف کنید که خانه‌تان چه شکلی است؟ تصور کنید یک اتاق کمتر یا آشپزخانهٔ بزرگ‌تری داشتید، در این صورت خانهٔ جدید، چه شکلی بود؟

به مسیری که هر روز از خانه تا مدرسه طی می‌کنید، فکر کنید. آیا می‌توانید این مسیر را با رسم یک تصویر مناسب توضیح دهید؟

در حالت‌های بالا شما به موضوعی فکر کردید، اما از عبارات، جملات و شیوه‌های زبانی برای تفکر استفاده نکردید. در واقع به جای کلمات، تصاویری در ذهن شما نقش بستند و این تصویرسازی ذهنی، به شما کمک کرد که به آن موضوع یا موقعیت فکر کنید. این شیوه از تفکر را **تفکر تجسمی** می‌نامیم.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست‌ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی، کشف و درک مفاهیم منجر می‌شود. این نوع از تفکر، نقش مهمی در حل مسئله‌های ریاضی و همین‌طور حل مسائل در زندگی روزمره دارد.

موقعیت‌هایی که می‌تواند به تقویت تفکر تجسمی کمک کنند عبارت‌اند از : تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گستردهٔ اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح، ترسیم نماهای مختلف اجسام، دوران شکل حول یک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضا و تجسم اجسام هندسی بعد از برش. از آنجا که هدف کلی این درس آشنایی با مقاطع مخروطی است، از بین این موقعیت‌ها، **دوران** اشکال هندسی حول یک محور و **برش** اجسام را بررسی می‌کنیم.

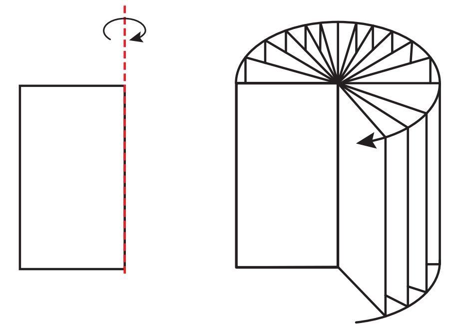
دوران حول محور

سفالگری کلپورگان (سیستان و بلوچستان)

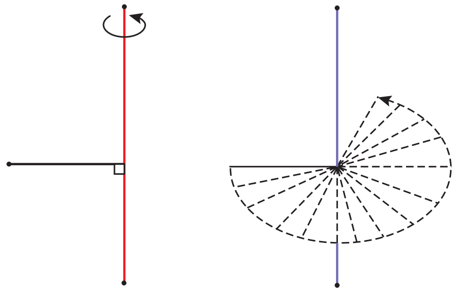
وقتی شکل‌های هندسی متفاوت حول یک محور دوران داده شود، جسم‌های مختلف هندسی ساخته می‌شود. در فعالیت زیر نمونه‌هایی از این مفهوم ارائه شده است. در هر مورد، شکل حاصل از دوران حول محور را مشخص کنید.

فعالیت

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل، حول طول یا عرض آن : استوانه تشکیل می شود

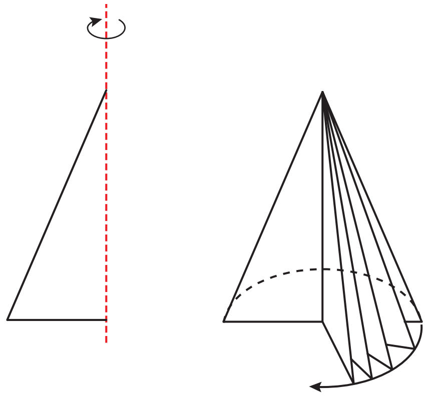


ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره‌خط دیگری که بر آن عمود است : دایره توپر تشکیل می شود

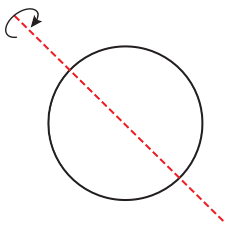


پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه، حول یکی از اضلاع قائمه : ....

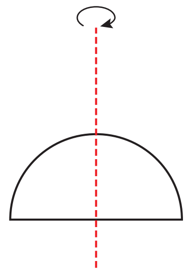
مخروط قائم توخالی تشکیل می شود زیرا مثلث را رنگی نکرده است



ت) شکل حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن : کره تو خالی



ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن : نیمکره تو خالی



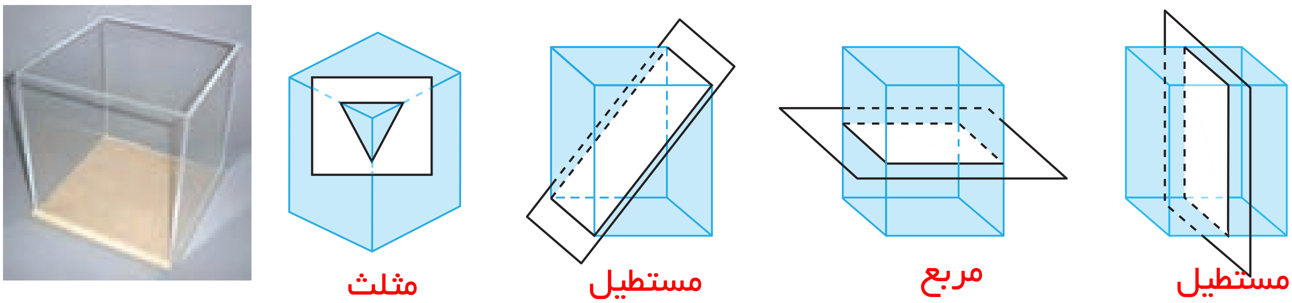
برش

در فعالیت قبل، از دوران شکل حول یک محور، یک جسم دو بعدی یا سه بعدی تشکیل شد. حال فرض کنید می‌خواهیم اجسام سه‌بعدی را برش بزنیم و تغییرات آن را بعد از برش تجسم کنیم. در زندگی روزمره بارها با برش اجسام مختلف هندسی مواجه بوده‌اید. این اجسام می‌توانند توپر یا توخالی باشند.

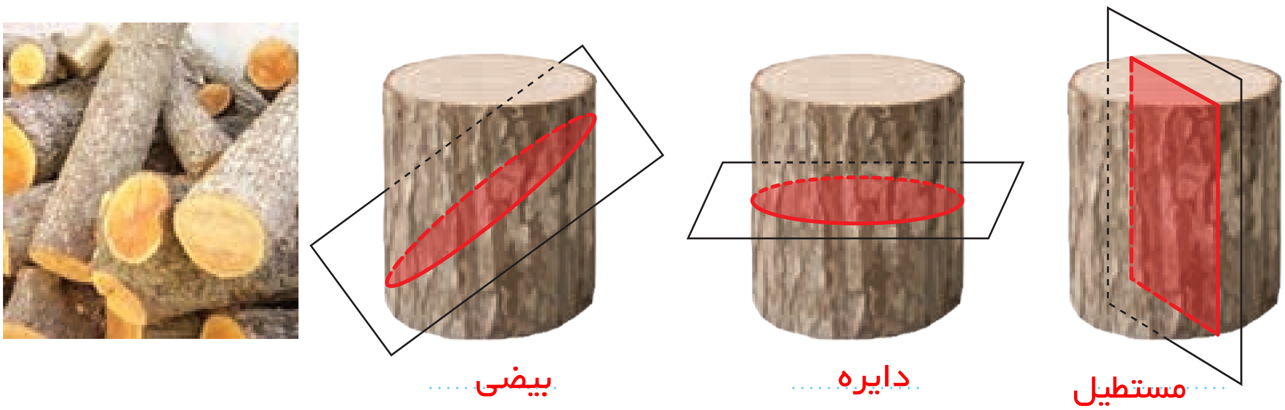
شکلی که از برخورد یک صفحه[1] با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، **سطح مقطع** آن نامیده می‌شود.

فعالیت

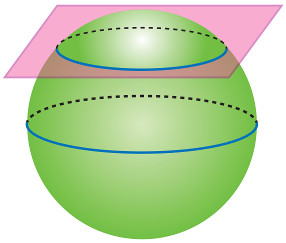
الف) بعضی از حالت‌های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعدهٔ مربع شکل، در زیر نمایش داده شده است. در هر یک از حالت‌ها سطح مقطع را مشخص کنید.



ب) سطح مقطع استوانه با صفحه‌های عمودی، افقی و صفحهٔ مایلی که با قاعده‌های استوانه متقاطع نباشد، به چه شکل است؟



۱ــ خط و صفحه از مفاهیم اساسی هندسه هستند. همان‌طور که خط از هر دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از هر طرف ادامه دارد و ضخامت ندارد.



پ) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ دایره

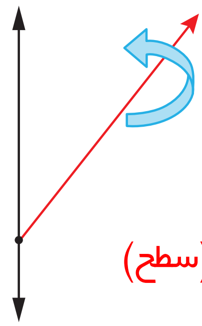
در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت ممکن را دارد؟

وقتی که شامل مرکز دایره باشد

کار در کلاس

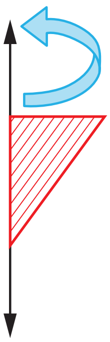
۱ شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت‌های زیر مشخص کنید و آنها را با هم مقایسه کنید :

الف) شکل حاصل از دوران نیم‌خط حول محور

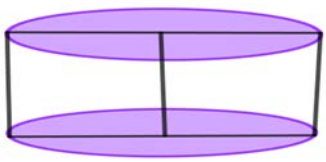


مخروط نامتناهی (سطح)

ب) شکل حاصل از دوران مثلث قائم‌الزاویه حول محور



مخروط تو پر



۲ مستطیلی را حول عرض آن دوران داده‌ایم.

الف)شکل حاصل را رسم کنید .

ب)سطح مقطع حاصل از برخورد یک استوانه ویک صفحه در چه حالتی یک مربع است؟

پ)اگر ابعاد مستطیل ،۳و۴باشدمساحت سطح مقطعحاصل از برخورد یکصفحه موازی با قاعده این استوانه چقدر است

$r=4 \rightarrow S=\pi r^2=\pi(4)^2=16\pi$

ت)در حالت ،پاگر صفحه ای عمودبرقاعده استوانه آن را قطع کند بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

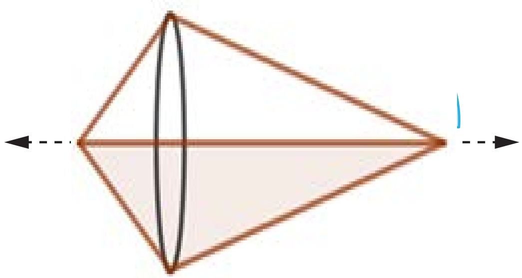
مخازن نفتی در زنجان

وقتی صفحه از محور بگذرد برقاعده عمود باشد همان مساحت مستطیلی است که طول آن دوبرابر طول مستطیل وعرض آن ،عرض مستطیل یعنی ۳ است

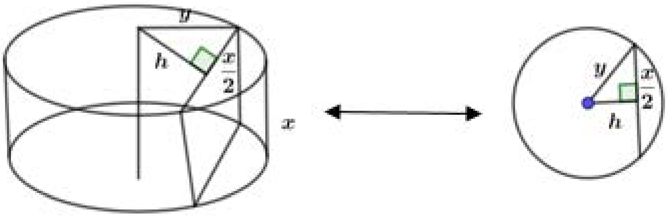
مستطیلی به ابعاد ۸و۳ $S=3\times 8=24$

۳ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟

دو مخروط با قاعده مشترک



حل سوال ۲ قسمت(ب)کاردرکلاس صفحه۱۲۵:

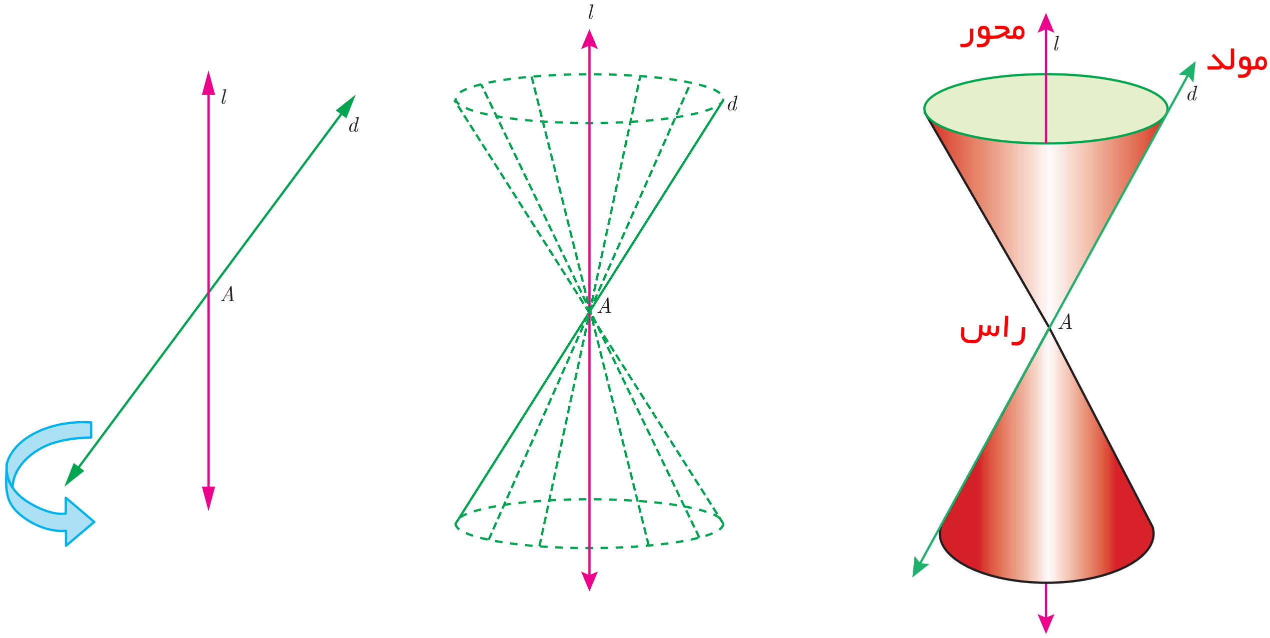


$$\text{قاصله صفحه قاطع تا محور دوران} = \sqrt{\left(\text{طول مستطیل}\right)^{۲} - \frac{۱}{۴}\left(\text{عرض مستطیل}\right)^{۲}}$$

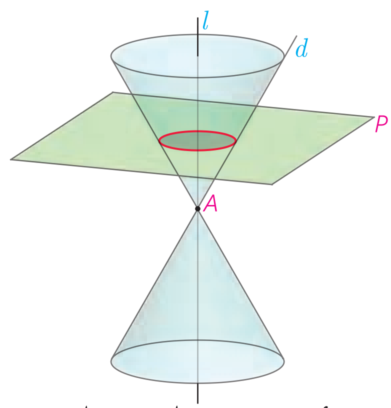
$$\rightarrow h = \sqrt{y^{۲} - \frac{۱}{۴}x^{۲}}$$

آشنایی با مقاطع مخروطی

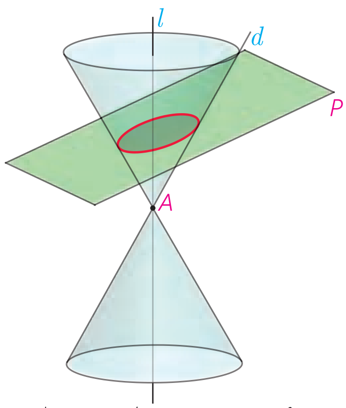
دو خط d و l در نقطه‌ای مثل A متقاطع‌اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم، شکل حاصل یک **سطح مخروطی** نامیده می‌شود. در این حالت خط l **محور**، نقطهٔ A، **رأس** و خط d، **مولد** این سطح مخروطی است.



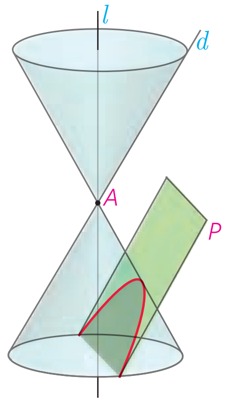
وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع، یک منحنی است. از آنجا که این منحنی‌ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، **مقاطع مخروطی** نامیده می‌شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.



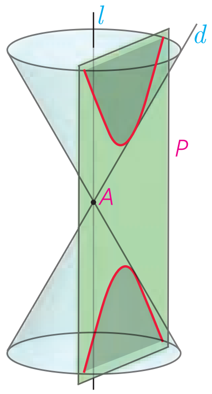
الف) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل **دایره** است.



ب) اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل **بیضی** خواهد بود.

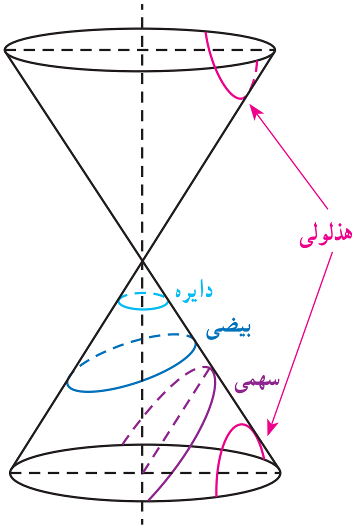


پ) اگر صفحهٔ P در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک **سهمی** است.



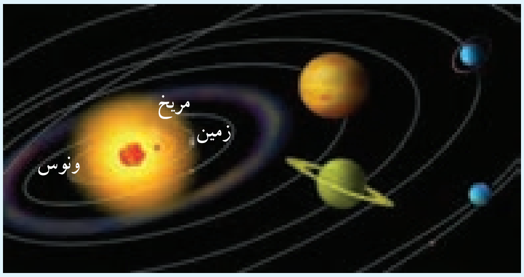
ت) اگر صفحهٔ P سطح مخروطی را، هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل را **هذلولی**[1] می‌نامیم.

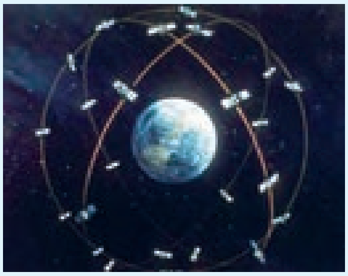
بدین ترتیب مقاطع مخروطی عبارت‌اند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی.
در ادامهٔ این درس قصد داریم بیضی و ویژگی‌های آن را بدون معرفی معادلهٔ آن، مورد بررسی قرار دهیم.



خواندنی

مقاطع مخروطی ابتدا توسط یونانیان باستان مورد مطالعه قرار گرفتند و به مرور زمان در مطالعهٔ مدار سیاره‌ها، ستاره‌های دنباله‌دار و قمرهای مصنوعی کاربردهای زیادی پیدا کردند. این منحنی‌ها همچنین در مطالعهٔ ساختار اتم‌ها، سیستم‌های راهنمای هواپیماها، ساخت عدسی‌ها، نقشه‌برداری، وسایل نوری، وسایل پیش‌بینی هوا، ارتباطات قمرهای مصنوعی، ساختن پل و علاوه بر آن در علوم نظامی، پزشکی و اقتصاد به‌کار می‌روند.



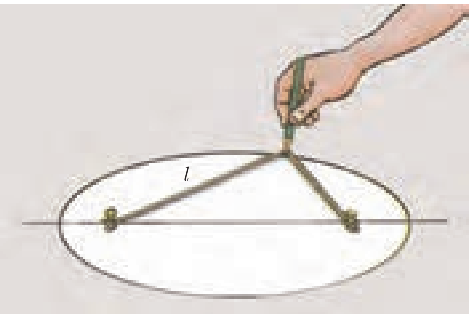


۱ــ معادلهٔ هذلولی و بررسی ویژگی‌های آن، جزء اهداف این کتاب نیست.

بیضی

حتماً می‌دانید که به کمک یک تکه نخ چگونه می‌توان یک دایره رسم کرد. در این فعالیت می‌خواهیم ببینیم طریقهٔ رسم بیضی به کمک یک تکه نخ چگونه است و حین انجام این فعالیت، ویژگی‌های بیضی را بهتر بشناسیم.

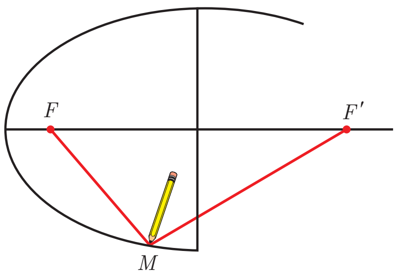
فعالیت



مانند شکل دو سر نخی به طول l را روی یک صفحه ثابت کنید. دقت داشته باشید که برای رسم بیضی لازم است که طول نخ از فاصلهٔ بین دو میخ، بیشتر باشد. حالا مطابق شکل، مدادتان را در حالتی که تکه نخ از دو طرف کاملاً کشیده شده است، روی صفحه حرکت دهید.

شکل حاصل منحنی بسته‌ای است که به آن **بیضی** می‌گوییم.

همان‌طور که دیدید دو میخ در واقع نشان‌دهندهٔ دو نقطهٔ ثابت در بیضی هستند. این دو نقطه را **کانون‌های[1] بیضی** می‌نامند.



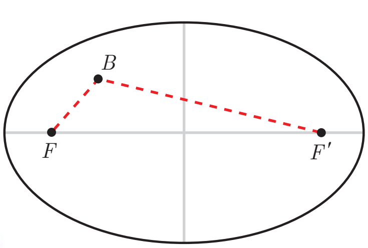
اگر کانون‌های بیضی را با F و F' نمایش دهیم و نقطه‌ای مثل M یک نقطهٔ دلخواه از بیضی باشد، مجموع فواصل این نقطه از نقاط F و F' یعنی $MF + MF'$ برابر با چیست؟

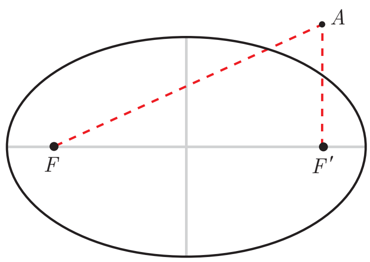
طول نخ (L) ....

بدین ترتیب :

> بیضی، مجموعه نقاطی از صفحه است که مجموع فواصل آنها از دو نقطهٔ ثابت واقع در صفحه، برابر با مقداری ثابت است.[2]

می‌توان نشان داد که اگر نقطهٔ دلخواه A بیرون بیضی باشد، مجموع فواصل آن از نقاط F و F' بیشتر از l و اگر نقطهٔ دلخواه B، داخل بیضی باشد، مجموع فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ F و F' کمتر از l خواهد بود.

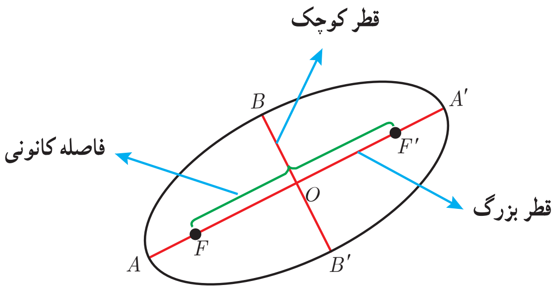




$BF + BF' < L$ $\qquad$ $AF + AF' > L$

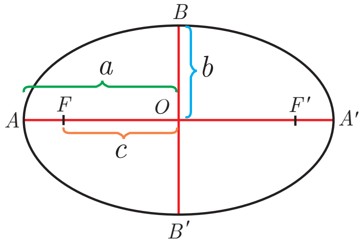
۱ــ Foci

۲ــ اثبات اینکه سطح مقطع مخروطی معرفی شده به عنوان بیضی، با این تعریف همخوانی دارد، خارج از اهداف این کتاب است.



بیضی مقابل را در نظر بگیرید.
در این بیضی کانون‌ها را F و F' نامیده‌ایم.
در هر بیضی اندازهٔ FF'، **فاصلهٔ کانونی** بیضی نامیده می‌شود.
نقطهٔ میانی پاره‌خط FF'، **مرکز بیضی** است که آن را نقطهٔ O نامیده‌ایم.
پاره‌خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد یعنی AA'، **قطر بزرگ** یا **قطر کانونی** بیضی است. پاره‌خطی که در مرکز بیضی بر قطر بزرگ بیضی عمود است، یعنی قطر BB'، **قطر کوچک** بیضی نامیده می‌شود.
اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد، آن بیضی را **بیضی افقی** و اگر قطر بزرگ عمودی باشد، بیضی را **بیضی قائم** می‌نامیم.

فعالیت



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اندازهٔ پاره‌خط‌های OA، OB و OF را به‌ترتیب با a، b و c نمایش داده‌ایم. می‌دانیم که مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون بیضی مقداری ثابت است.

۱ می‌خواهیم نشان دهیم قطر بزرگ بیضی طولی برابر با همین مقدار ثابت دارد.
در رسم بیضی، حالتی را در نظر بگیرید که نوک مداد روی نقطهٔ A قرار دارد. در این‌صورت :

مقدار ثابت $= AF + AF' = AF + (AF + FF') = ۲AF + FF'$ (۱)

به همین ترتیب فرض کنید نوک مداد روی نقطهٔ A' قرار دارد. در این صورت داریم :

مقدار ثابت $= A'F' + A'F = A'F' + (A'F' + FF') = 2A'F' + FF'$ (۲)

از مقایسهٔ رابطهٔ (۱) و (۲) و برابری سمت چپ دو رابطه داریم : $AF = $ ….. $A'F'$

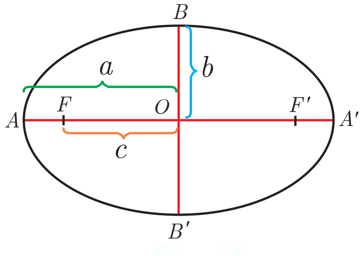
پس :

مقدار ثابت $= AF + AF' = A'F' + AF' = 2a$

بنابراین :

> مجموع فواصل هر نقطه از بیضی، از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با طول قطر بزرگ بیضی.

سؤال : با توجه به تساوی $AF = A'F'$ نشان دهید که مرکز بیضی قطر بزرگ آن را نصف می‌کند و از آن نتیجه بگیرید طول قطر بزرگ بیضی برابر $۲a$ است.



۲ حال قصد داریم رابطهٔ بین a، b و c را پیدا کنیم.
الف) نقطهٔ B را مطابق شکل روی بیضی در نظر بگیرید. می‌دانیم این نقطه روی عمود منصف پاره‌خط FF' است. (چرا؟)

O وسط FF′ است از طرفی BB′ بر AA′ عمود است پس نتیجه میگیریم OB عمود منصف FF′ است

حل سوال صفحه ۱۲۹:

$$\left.\begin{array}{l} AF = OA - OF \Rightarrow OF = OA - AF \\ A'F' = OA' - OF' \Rightarrow OF' = OA' - A'F' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{FF}\quad \text{نقطه میانی پاره خط} \quad \text{O}} OA - AF = OA' - A'F'$$

$$\xrightarrow[AF=A'F']{\text{بنا بر فرض}} OA = OA' = a \Rightarrow AA' = OA + OA' = a + a = ۲a$$

ب) به کمک قسمت قبلی فعالیت، اندازهٔ BF را پیدا کنید.

هر نقطه روی عمود منصف ازذوسر پاره خط بیک فاصله است

$$\left.\begin{array}{l} BF = BF' \\ BF + BF' = ۲a \end{array}\right\} \rightarrow BF = BF' = a$$

پ) چه رابطه‌ای بین a، b و c وجود دارد؟

$$\hat{BOF} : BF^۲ = OB^۲ + OF^۲ \rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

ت) آیا مرکز بیضی قطر کوچک را هم نصف می‌کند؟ چرا؟ بله می توان قسمتهای الف وب را برای قطر کوچک تحقیق کرد

بنابراین :

اگر در یک بیضی، اندازهٔ نیم قطر بزرگ را a، اندازهٔ نیم قطر کوچک را b و نصف فاصلهٔ کانونی بیضی را c بنامیم، آنگاه ....

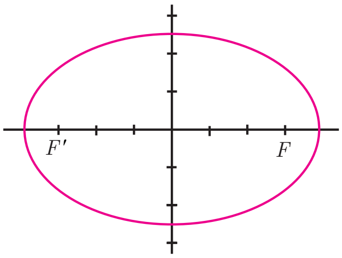
مثال :

اگر در یک بیضی c=۳ و a=۴ باشد، اندازه قطر کوچک بیضی چقدر است؟

حل :

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow b = \sqrt{۷}$$

و بنابراین اندازهٔ قطر کوچک برابر است با $۲\sqrt{۷}$.



کار در کلاس

۱ اگر در یک بیضی داشته باشیم a=۵ و b=۳، در این‌صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

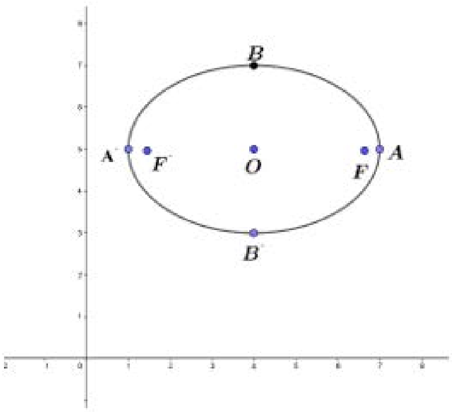
$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۶ \rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \rightarrow b = ۲ \end{array}\right\} \rightarrow c^۲ = ۳^۲ - ۲^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \rightarrow c = \sqrt{۵} \rightarrow FF' = ۲\sqrt{۵}$$

۲ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات (۴،۵) باشد :

الف) فاصلهٔ کانونی بیضی را پیدا کنید.

$$\left.\begin{array}{l} ۲a = ۶ \rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \rightarrow b = ۲ \end{array}\right\} \rightarrow c^۲ = ۳^۲ - ۲^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \rightarrow c = \sqrt{۵}$$



ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین کانون‌های بیضی را بنویسید.

$$O\left|\begin{array}{l}\alpha = ۴ \\ \beta = ۵\end{array}\right. \quad A\left|\begin{array}{l}\alpha + a = ۴ + ۳ = ۷ \\ \beta = ۵\end{array}\right. \quad A'\left|\begin{array}{l}\alpha - a = ۴ - ۳ = ۱ \\ \beta = ۵\end{array}\right.$$

$$B\left|\begin{array}{l}\alpha = ۴ \\ \beta + b = ۵ + ۲ = ۷\end{array}\right. \quad B'\left|\begin{array}{l}\alpha = ۴ \\ \beta - b = ۵ - ۲ = ۳\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}\alpha + c = ۴ + \sqrt{۵} \\ \beta = ۵\end{array}\right. \quad F\left|\begin{array}{l}\alpha - c = ۴ - \sqrt{۵} \\ \beta = ۵\end{array}\right.$$

خروج از مرکز

همان‌طور که دیدید اندازهٔ قطر بزرگ، قطر کوچک و فاصلهٔ کانونی یک بیضی مقادیری به هم وابسته‌اند. بدیهی است که همیشه مقدار a از مقدار b و c بیشتر است (چرا؟). چون فاصله مرکز تا کانون کمتراز فاصله مرکز تا راس است

اندازه‌های a، b و c بر شکل بیضی تأثیرگذار است و همواره $\frac{c}{a}$ مقداری بین ۰ و ۱ است. (چرا؟). $c<a$ هر چه نسبت $\frac{c}{a}$، بزرگ‌تر و به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی کشیده‌تر می‌شود و هر چه مقدار $\frac{c}{a}$ کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر خواهد شد.

> مقدار $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می‌نامند و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهند.

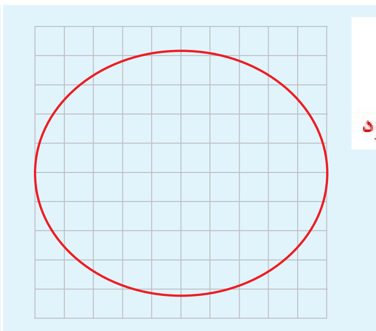
در ادامه چند بیضی با مقادیر مختلف e رسم شده است. تأثیر اندازهٔ خروج از مرکز را بر شکل بیضی بررسی کنید.

$\frac{c}{a} \to 1 \Rightarrow c \approx a \Rightarrow b \to 0$

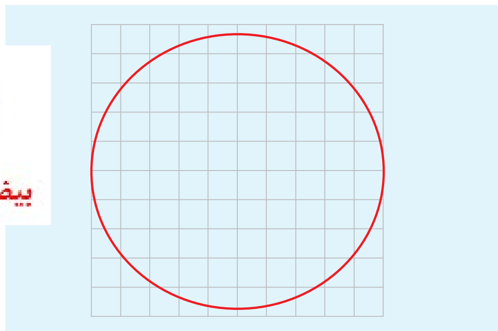
بیضی به پاره خط شبیه می شود

$\frac{c}{a} \to 0 \Rightarrow c \to 0 \Rightarrow a \approx b$

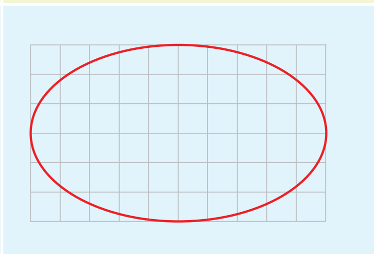
بیضی به دایره شبیه می شود



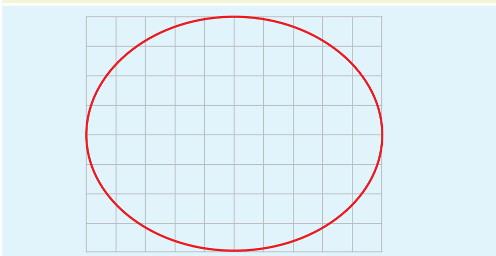
$\frac{c}{a} = 0/4$



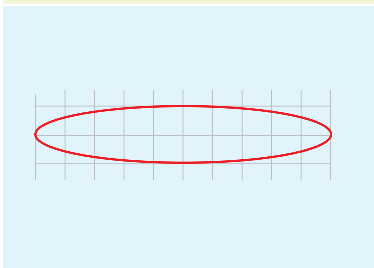
$\frac{c}{a} = 0/2$



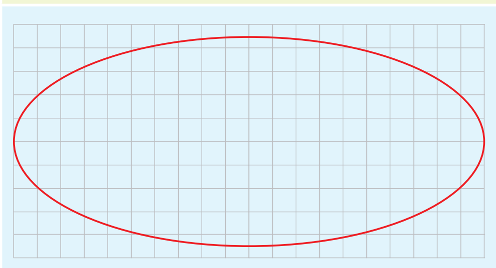
$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$



$\frac{c}{a} = 0/6$

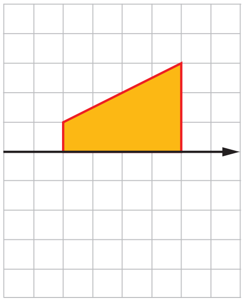


$\frac{c}{a} = 0/98$



$\frac{c}{a} = 0/9$

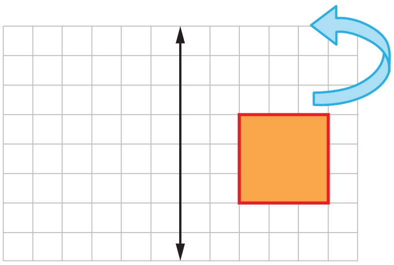
تمرین



۱ در شکل روبه‌رو می‌خواهیم ذوزنقه قائمه را حول محور دوران دهیم.

الف) حجم شکل حاصل را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌ای که شامل محور دوران باشد، چیست و مساحت آن چقدر است؟



۲ مربعی با ضلع ۳ واحد مطابق شکل روبه‌رو در فاصلهٔ ۲ واحد از یک خط راست قرار دارد.

الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

۳ اگر یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۴ حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم شکل حاصل چقدر است؟

۴ کانون‌های یک بیضی نقاط (۳, ۱) و (۵−, ۱) است.

الف) فاصلهٔ کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادلهٔ قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

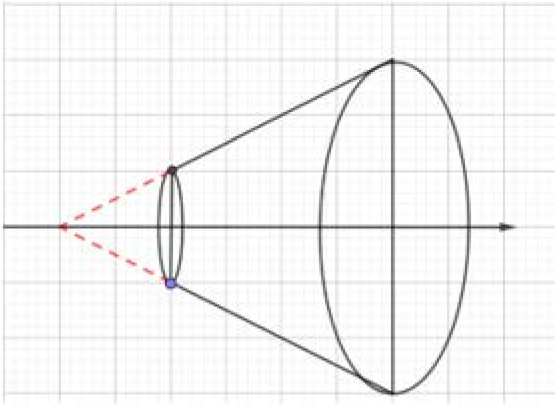
ب) اگر $a=6$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۵ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$، مرکز آن (۱− ، ۴−) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

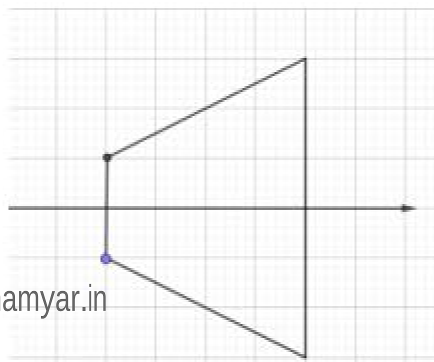
ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.

تمرین ۱



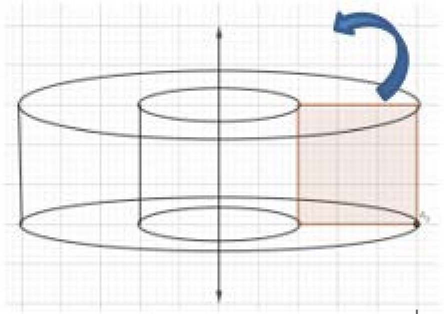
$$V - V_۱ = \frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲ \times ۶ - \frac{۱}{۳}\pi(۱)^۲ \times ۲ = \frac{۵۲}{۳}\pi$$

ب) ذوزنقه



$$S = \frac{۱}{۲}(۲+۶)\times ۴ = ۱۶$$

تمرین ۲

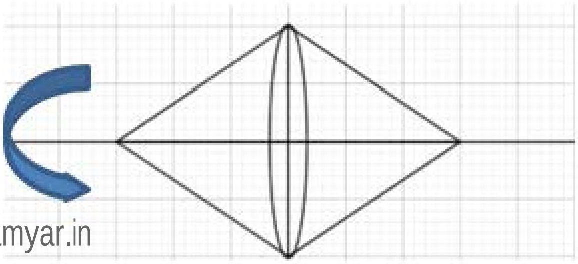


الف)حجم شکل =حجم استوانه بزرگ –حجم استوانه کوچک

$$\pi \times ۵^۲ \times ۳ - \pi \times ۲^۲ \times ۳ = ۷۵\pi - ۱۲\pi = ۶۳\pi$$

ب)سطح مقطع موای با قاعده یک دایره تو خالی شعاع خارجی ۵ وشعاع داخلی ۲ است

تمرین ۳



$$V = ۲\left(\frac{\pi}{۳} \times ۲^{۲} \times ۳\right) = ۸\pi$$

تمرین ۴:الف)

معادله قطر بزرگ $x=1$

معادله قطرکوچک $y=-1$

$$F\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix} 1 \\ -5 \end{vmatrix} \quad \text{مرکز} \quad O\begin{vmatrix} \frac{1+1}{2}=1 \\ \frac{3+(-5)}{2}=-1 \end{vmatrix}$$

$$FF'=|3-(-5)|=8=2c \to c=4$$

ب)

$$c^2=a^2-b^2 \to b^2=a^2-c^2=36-16=20 \to b=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \to BB'=4\sqrt{5}$$

خروج از مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

تمرین۵:الف)

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5} \to c=\frac{4}{5}a \qquad BB'=2b=6 \to b=3$$

$$c^2=a^2-b^2 \to \frac{16}{25}a^2=a^2-9 \to \frac{9}{25}a^2=9 \to a^2=25 \to a=5 \to c=4$$

$$AA'=2a=10$$

ب)

$$F\begin{vmatrix} -4+4=0 \\ -1 \end{vmatrix} \quad F'\begin{vmatrix} -4-4=-8 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A\begin{vmatrix} -4+5=1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad A'\begin{vmatrix} -4-5=-9 \\ -1 \end{vmatrix} \quad B\begin{vmatrix} -4 \\ -1+3=2 \end{vmatrix} \quad B'\begin{vmatrix} -4 \\ -1-3=-4 \end{vmatrix}$$