درس دوم

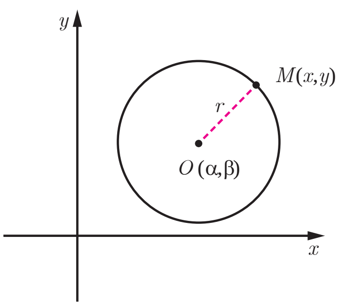
دایره

زیربنای دایره‌ای شکل مجموعه تئاتر شهر، تهران

زیربنای برج میلاد با نقشهٔ دایره‌ای شکل به قطر ۶۶ متر

دایره یکی از شکل‌های مهم هندسی است که با تعریف و برخی ویژگی‌های آن در سال‌های قبل آشنا شده‌اید. می‌دانیم دایره، مجموعهٔ نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی در همان صفحه، مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطهٔ ثابت را **مرکز دایره** و مقدار ثابت را **اندازهٔ شعاع دایره** می‌نامیم. دایرهٔ C را به مرکز O و شعاع r معمولاً با نماد $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

در این درس به تحلیل برخی از ویژگی‌های دایره در دستگاه مختصات خواهیم پرداخت.



دایرهٔ $C(O,r)$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که مرکز آن نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی آن باشد. می‌دانیم که فاصلهٔ مرکز دایره از تمام نقاط روی آن برابر با مقدار ثابت r است.

بنابراین به کمک رابطهٔ فاصلهٔ دو نقطه که در سال‌های گذشته با آن آشنا شدیم، داریم :

$$OM=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

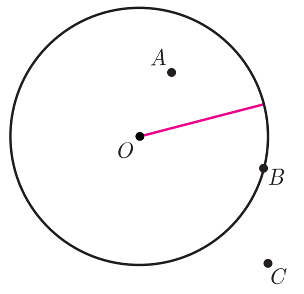
از طرفی $OM=r$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

رابطهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن **معادلهٔ استاندارد دایره** می‌گوییم.

فعالیت

می‌توان دید که :



الف) اگر نقطه‌ای مثل B **روی دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است، یعنی $OB=r$

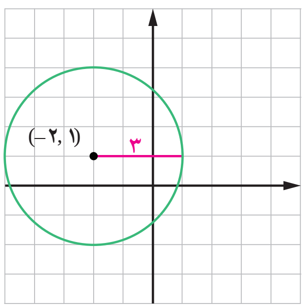
ب) اگر نقطه‌ای مثل A **درون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ....کمتر از.... شعاع دایره است، یعنی $OA < r$

پ) اگر نقطه‌ای مثل C **بیرون دایره** باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره ....بیشتر از.... شعاع دایره است، یعنی $OC > r$

بدین‌ترتیب اگر معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت نقاط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد :

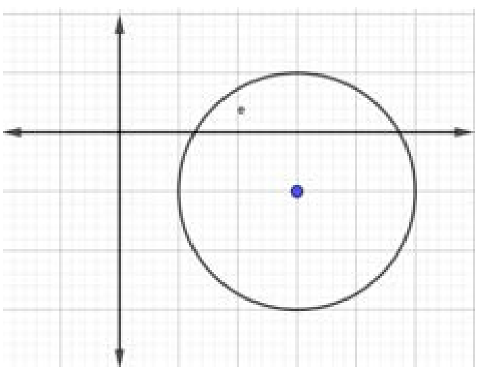
> نقاطی که در معادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ صدق کنند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ....درون دایره قرار دارند
>
> مجموعه جواب نامعادلهٔ $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>r^2$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که ..خارج دایره قرار دارد

مثال :



الف) اگر مرکز دایره‌ای نقطهٔ $(-۲\,,۱)$ و شعاع آن ۳ باشد، معادلهٔ استاندارد دایره به شکل زیر خواهد بود :

$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$

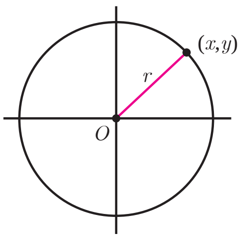


ب) اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-۳)^۲+(y+۱)^۲=۴$ باشد، مختصات مرکز آن $(۳,-۱)$ و اندازهٔ شعاع برابر با ۲ است.

رسم شکل برعهدهٔ دانش‌آموزان است.

کار در کلاس

۱ در حالت‌های زیر، معادلهٔ دایره را بنویسید :



الف) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲. $x^2+y^2=4$

ب) دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع r. $x^2+y^2=r^2$

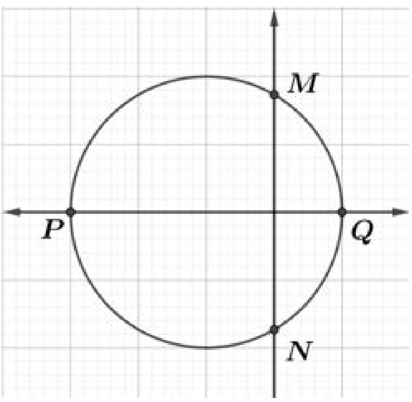
پ) دایره‌ای که از نقطهٔ (۳-،۱) بگذرد و مرکز آن (۱-،۲) باشد.

$r=\sqrt{(2-1)^2+(-1+3)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5} \quad \rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=5$

۲ با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید :

معادلهٔ دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط $A(1,1)$	$B(0,3)$	$C(-2,4)$
$(x+2)^2+(y-3)^2=4$	$O(-2,3), r=2$	بیرون دایره $(1+2)^2+(1-3)^2>4$	روی دایره $(0+2)^2+(3-3)^2=4$	درون دایره $(-2+2)^2+(4-3)^2<4$
$(x-1)^2+(y+2)^2=9$	دایره به مرکز (۲-،۱) و شعاع ۳	$(1-1)^2+(1+2)^2=9$ روی دایره	بیرون دایره $(0-1)^2+(3+2)^2>9$	بیرون دایره $(-2-1)^2+(4+2)^2>9$

۳ اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x+1)^2+y^2=4$ باشد :



الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید. $O(-1,0), r=2$

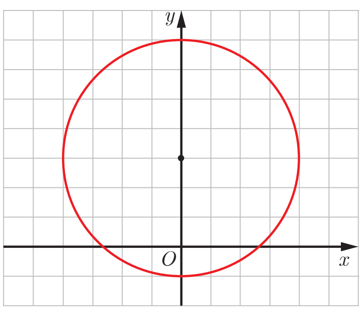
ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

$x=0 \rightarrow 1^2+y^2=4 \rightarrow y^2=3 \rightarrow y=\pm\sqrt{3} \quad N(0,-\sqrt{3}), M(0,\sqrt{3})$

$y=0 \rightarrow (x+1)^2=4 \rightarrow \begin{cases} x+1=2 \rightarrow x=1 \\ x+1=-2 \rightarrow x+1=-3 \end{cases} \quad Q(1,0), P(-3,0)$

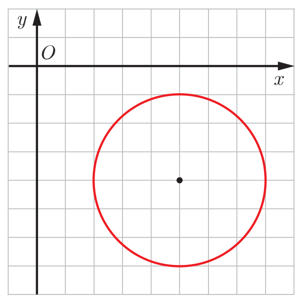
پ) شکل این دایره را رسم کنید و صحت پاسخ‌های خود را به کمک شکل بررسی کنید.

۴ معادلهٔ دایره‌های زیر را بنویسید :



$r=4, O(0,3)$

$x^2+(y-3)^2=16$



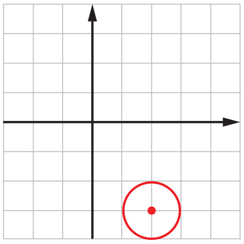
$r=3, O(5,-4)$

$(x-5)^2+(y+4)^2=9$

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره

معادلهٔ دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ را در نظر بگیرید.

این معادله را به کمک اتحادها می‌توان به شکل زیر ساده کرد :

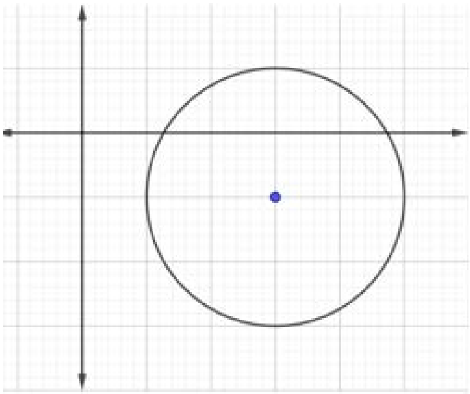


$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=1$$
$$\rightarrow x^2+y^2-4x+6y+12=0$$

این رابطه را **معادلهٔ گستردهٔ دایره** یا معادلهٔ ضمنی دایره می‌نامیم.

بدیهی است که معادلهٔ استاندارد دایره و معادلهٔ گستردهٔ آن به یکدیگر قابل تبدیل‌اند.

مثال : فرض کنید معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ باشد. با استفاده از مربع کامل کردن، سعی می‌کنیم معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنیم. داریم :



$$x^2+y^2-6x+2y+6=0$$
$$\rightarrow (x^2-6x)+(y^2+2y)+6=0$$
$$\rightarrow (x-3)^2-9+(y+1)^2-1+6=0$$
$$\rightarrow (x-3)^2+(y+1)^2=4$$

مختصات مرکز و شعاع این دایره را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$r=2, O(3,-1)$

معادلهٔ گستردهٔ یک دایره را به شکل $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر می‌گیریم. با تبدیل x^2+ax و y^2+by به دو مربع کامل داریم :

$$(x^2+ax)+(y^2+by)+c=0$$

$$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}+(y+\frac{b}{2})^2-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

بدین ترتیب :

> اگر $x^2+y^2+ax+by+c=0$ **معادلهٔ گستردهٔ** یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ است. شعاع این دایره برابر است با : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

بدیهی است که با توجه به مثبت بودن r، معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^2+b^2>4c$ برقرار باشد. (چرا؟)

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}\xrightarrow{r>0}a^2+b^2-4c>0\rightarrow a^2+b^2>4c$$

کار در کلاس

معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به شکل $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ است. مختصات مرکز این دایره و شعاع آن‌را پیدا کنید و معادلهٔ دایره را به شکل استاندارد بنویسید.

کاردرکلاس :

$$O\left|\begin{array}{l}\dfrac{-a}{2}=-\dfrac{-2}{2}=1\\[2ex]\dfrac{-b}{2}=-\dfrac{-6}{2}=3\end{array}\right.\qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+36-24}=\frac{1}{2}\sqrt{16}=2$$

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0\rightarrow \underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}+\underbrace{y^2-6y+9}_{(y-3)^2}=\underbrace{10-6}_{4=2^2}$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=4$$

اوضاع نسبی خط و دایره

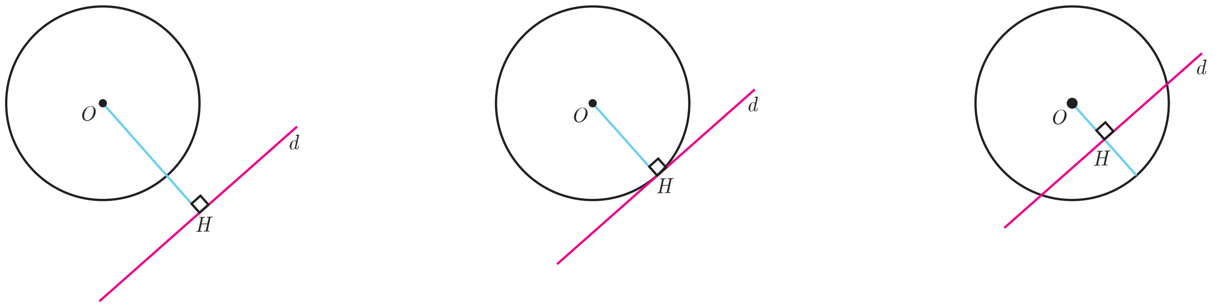
در سال‌های گذشته به طور شهودی با اوضاع نسبی خط و دایره آشنا شده‌اید. در این فعالیت قصد داریم به کمک معادلهٔ دایره و خط، این مفاهیم را مرور کنیم.

دایره $C(O,r)$ را در صفحه در نظر بگیرید. با توجه به شکل، به سادگی می‌توان دید که خط و دایره می‌توانند **یک**، یا **دو** نقطهٔ اشتراک داشته، یا **هیچ** نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.

اگر خط d با دایره متقاطع باشد، $OH < r$ است.

اگر خط d بر دایره مماس باشد، $OH = r$ است.

اگر خط d، دایره را قطع نکند، $OH > r$ است.



یادآوری

۱ــ خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

۲ــ فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=0$ برابر است با :

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

در حالتی که معادلهٔ دایرهٔ $C(O,r)$ به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در دستگاه مختصات داده شده باشد، می‌توان وضعیت خطوط مختلف صفحه را نسبت به دایره بررسی کرد.

مثال :

وضعیت خط $x+y=3$ را نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x-3=0$ مشخص کنید.

حل :

کافی است فاصلهٔ مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و اندازهٔ آن را با اندازهٔ شعاع دایره مقایسه کنیم.

مرکز دایره از رابطهٔ $O(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ ، نقطهٔ $(1,0)$ و شعاع دایره از رابطهٔ $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ برابر است با ۲.

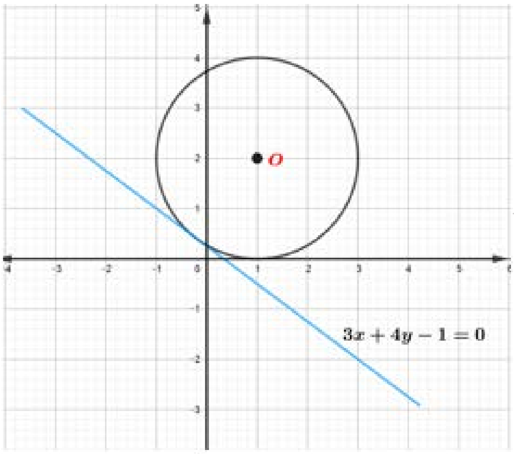
از طرفی فاصلهٔ مرکز دایره از خط داده شده برابر است با $d=\frac{|1(1)+1(0)-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و از آنجا که این مقدار از شعاع دایره کمتر است، پس می‌توان چنین نتیجه گرفت که خط داده شده با دایره متقاطع است.

کار در کلاس

۱ در موارد زیر وضعیت خط و دایره را نسبت به هم مشخص کنید.

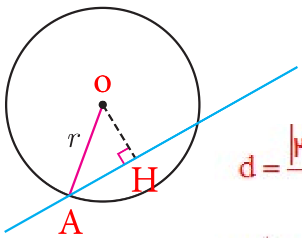
الف) دایرهٔ $x^2+y^2+2x+2y-1=0$ و خط $x+y=1$

ب) دایرهٔ $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=-1$



۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $3x+4y-1=0$ مماس بوده و مرکز آن $C(1,2)$ باشد.

$$d=\frac{|3+8-1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{5}=2 \qquad (x-1)^2+(y-2)^2=4$$



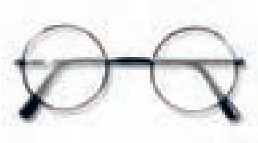
۳ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(2,-3)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید.

$$d=\frac{|3(2)-4(-3)+2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4$$

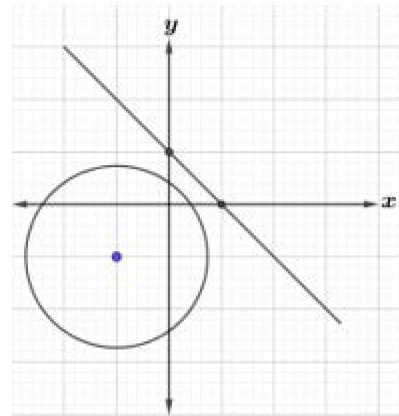
$$O\hat{A}H:\ r^2=4^2+3^2=25\to r=5 \qquad (x-2)^2+(y+3)^2=25$$

اوضاع نسبی دو دایره

نظیر آنچه برای اوضاع نسبی نقطه و دایره و همین‌طور خط و دایره دیدید، قصد داریم ابتدا به طور شهودی وضعیت‌های مختلفی را که دو دایرهٔ دلخواه می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، مشخص کنیم و سپس وضعیت دو دایره را نسبت به یکدیگر، در صفحه مختصات و با داشتن معادلهٔ دو دایره بررسی کنیم.

کاردرکلاس ۱   الف

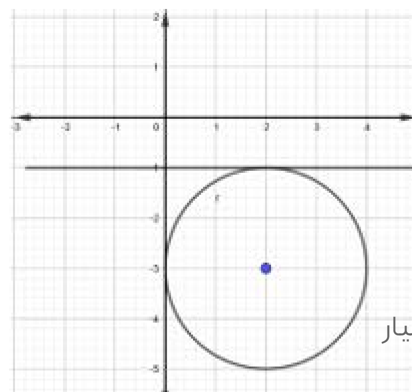


$$x^2+y^2+2x+2y-1=0 \rightarrow \underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}=\underbrace{3}_{(\sqrt{3})^2}$$

$$O\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right. \qquad r=\sqrt{3} \qquad d=\frac{|-1-1-1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Rightarrow d>r$$

خط ودایره نقطه مشترک ندارند

ب)

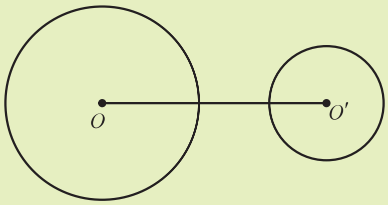
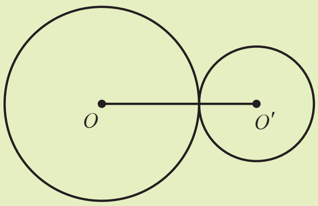
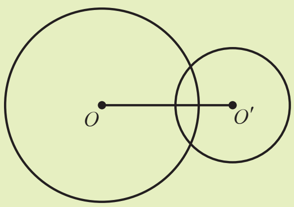
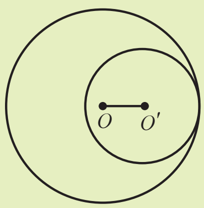
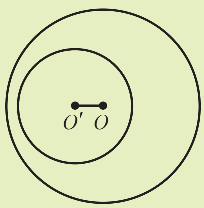
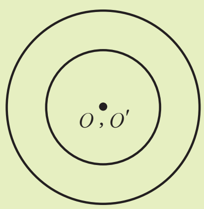


$$O\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right. \qquad r=2 \qquad d=\frac{|-3+1|}{\sqrt{0+1}}=\frac{2}{1}=2\Rightarrow d=r$$

خط بردایره مماس است.

دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

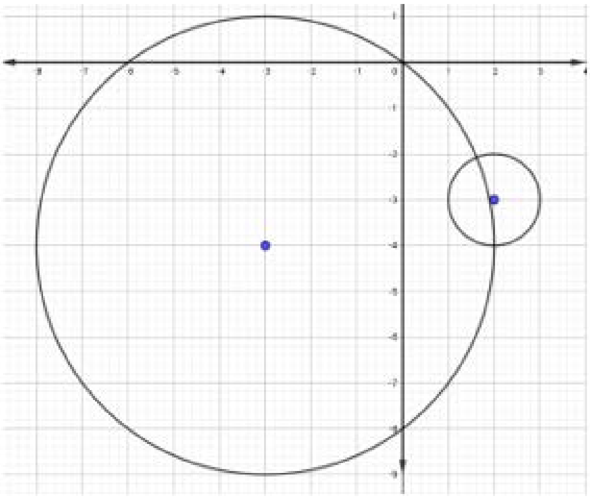
پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به‌هم وصل می‌کند، **خط‌المرکزین** نامیده می‌شود. در اینجا اندازهٔ خط‌المرکزین را با d نمایش داده‌ایم.

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d=r+r'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d=r-r'$	
دو دایرهٔ متداخل	$d<r-r'$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d=0$	

در حالتی که معادلهٔ دو دایره را داشته باشیم، بدون رسم دو دایره می‌توانیم وضعیت آنها را نسبت به هم مشخص کنیم.

مثال : وضعیت دو دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$ و $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید و سپس نمودار دو دایره را رسم کنید.

حل : به کمک آنچه دیدیم، ابتدا مختصات مرکز و طول شعاع هر دایره را پیدا می‌کنیم و سپس با مقایسه مقادیر مجموع و تفاضل دو شعاع با طول خط‌المرکزین، وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص می‌کنیم.



در دایرهٔ $x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰$ با پیدا کردن مرکز دایره و اندازهٔ شعاع داریم : مرکز دایره نقطهٔ $O(-۳,-۴)$ و اندازهٔ شعاع برابر ۵ است.

به روش مشابه در دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x+۶y+۱۲=۰$، مرکز دایره نقطهٔ $O'(۲,-۳)$ و اندازهٔ شعاع $r'=۱$ است.

ازطرفی طول خط‌المرکزین برابراست با : $OO'=\sqrt{(-۳-۲)^۲+(-۴+۳)^۲}=\sqrt{۲۶}$

بنابراین از آنجا که داریم : $۵-۱<\sqrt{۲۶}<۵+۱$ یعنی $r-r'<d<r+r'$ پس دایره‌های فوق، متقاطع هستند.

رسم دو دایره و بررسی صحت پاسخ به کمک شکل، به دانش‌آموزان واگذار شده است.

کار در کلاس

۱ با انجام مراحل زیر، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر دایرهٔ $x^۲+y^۲+۲x-۴y-۴=۰$ مماس بیرون و مرکز آن نقطهٔ $O(۲,-۲)$ باشد :

ـ مختصات نقطهٔ O' ، مرکز دایرهٔ داده شده عبارت است از : $O'\begin{vmatrix}-۱\\ ۲\end{vmatrix}$

ـ اندازهٔ r' یعنی شعاع دایره داده شده برابر است با : $r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}=۳$

ـ طول OO' برابر است با : $OO'=\sqrt{(۲+۱)^۲+(-۲-۲)^۲}=۵$

ـ شرط اینکه دو دایره مماس بیرونی باشند این است که : $۵=r+۳$ پس شعاع r باید برابر ۲ باشد.

ـ معادلهٔ دایرهٔ مطلوب را با معلوم بودن اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز آن بنویسید : $(x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۴$

۲ برای حالت‌های زیر معادلهٔ دو دایره را بنویسید و پاسخ خود را با دوستانتان مقایسه کنید.

الف) دو دایره هم‌مرکز باشند. $OO'=۰$

$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$

$(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R'^۲$

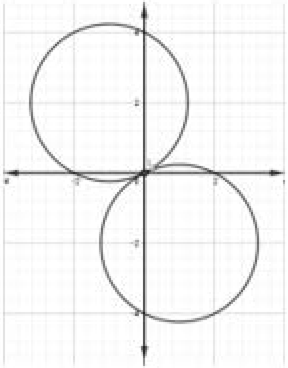
ب) دو دایره بیرون هم باشند. $(x-۳)^۲+(y-۴)^۲=۴, x^۲+y^۲=۱$

۳ برای موارد زیر وضعیت دو دایره را نسبت به هم مشخص کنید :

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۰$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۰$

ب) $(x+۱)^۲+(y-۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$

کار در کلاس ۳:

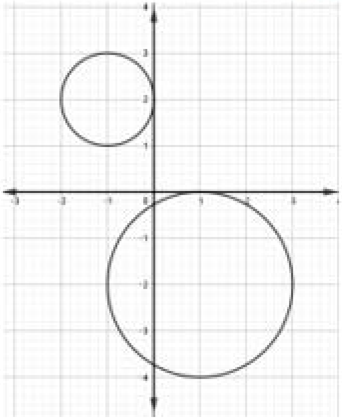


$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\quad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$O'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.\quad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16}=\sqrt{5}$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}\quad\Rightarrow OO'=r+r'\rightarrow$ دو دایره مماس خارجند

ب)



$O\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.\quad r=1$

$O'\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.\quad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$

$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}\quad\Rightarrow OO'>r+r'\rightarrow$ دو دایره متخارجند

تمرین

۱ در هر دایره مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید، محل تقاطع هر دایره را با محورهای مختصات، در صورت وجود مشخص کنید و درستی پاسخ خود را به کمک رسم دایره بررسی کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۱=۰$

ب) $x^۲+(y+۳)^۲-۴=۰$

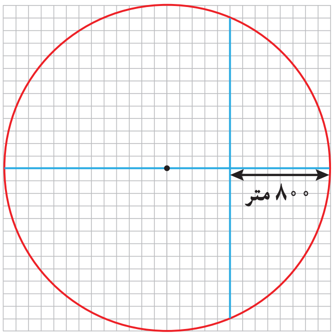
۲ در حالت‌های زیر معادلهٔ دایره را بنویسید :

الف) دایره‌ای که از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $C(۲,-۱)$ باشد.

ب) دایره‌ای که مرکز آن $(۲,۳)$ و نقطهٔ $(-۳,-۹)$ نقطه‌ای روی آن باشد.

پ) دایره‌ای که نقاط $(۰,۳)$ و $(-۴,-۱)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشند.

۳ وضعیت نقاط $(۱,۰)$، $(۰,-۱)$، $(-۱,-۲)$ و $(۰,۰)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$ مشخص کنید.



۴ شهرداری قصد دارد در یک فضای سبز دایره‌ای شکل به شعاع ۱۳۰۰ متر، دو مسیر پیاده‌روی مطابق شکل بسازد. اگر مختصات مرکز دایره $(۱۳,۱۳)$ و هر واحد برابر ۱۰۰ متر باشد :

الف) معادلهٔ این دایره چیست؟

ب) مختصات نقاط برخورد دو مسیر را با دایره پیدا کنید.

پ) دو مسیر در چه نقطه‌ای با یکدیگر متقاطع‌اند؟

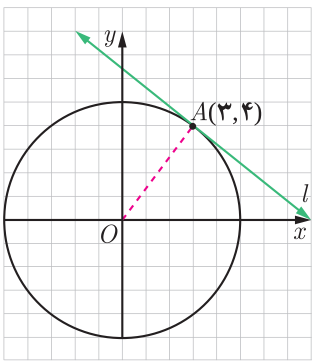
ت) طول مسیر عمودی چقدر است؟

۵ معادلهٔ گستردهٔ یک دایره به شکل $x^۲+y^۲+۲x+۲y-۸=۰$ است. مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن را پیدا کنید و معادلهٔ آن را به شکل استاندارد بنویسید.

۶ وضع خط‌های زیر را نسبت به دایره مشخص کنید.

الف) $x^۲+y^۲-۴x-۴y+۷=۰$ و $۶x+۴y=۰$

ب) $x^۲+y^۲=۲$ و $y=-x-۲$



۷ اگر بدانیم خط l در نقطه $(۳,۴)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است، معادلهٔ خط مماس چیست؟

۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن، نقطهٔ $(۰,۳)$ و بر خط $۳x-۴y=۳$ مماس باشد.

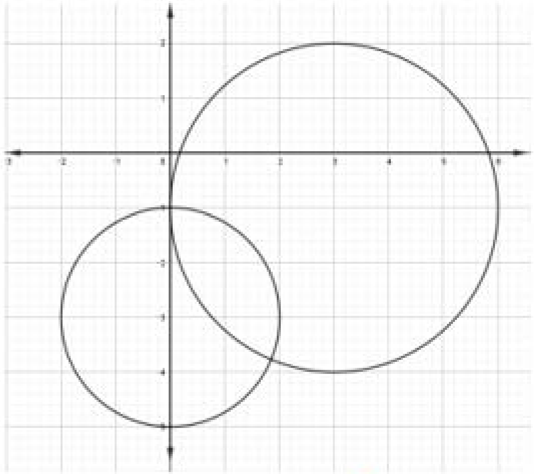
۹ مشخص کنید در حالت‌های زیر دو دایره نسبت به هم چه وضعی دارند؟

الف) $x^۲+y^۲-۲x+۴y=۴$ و $x^۲+y^۲+۲x-۴y=۹$

ب) $(x-۲)^۲+(y+۳)^۲=۷$ و $x^۲+(y-۵)^۲=۵$

۱۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۱)$ و با دایرهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳$ مماس درون باشد.

حل تمرین۱:



الف

$$O\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right. \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-4}=3$$

ب

$$O'\left|\begin{matrix}0\\-3\end{matrix}\right. \qquad r'=2$$

الف

$x=0 \qquad y^2+2y+1=0 \rightarrow y=-1 \rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ برمحور y مماس است

$y=0 \qquad x^2-6x+1=0 \rightarrow x_1,x_2=3\pm2\sqrt{2}>0$ دایره در سمت راست مبدا محور x ها را قطع می کند

ب

$x=0 \qquad (y+3)^2=4 \rightarrow y=-1, y=-5$

$y=0 \qquad x^2+9-4=0 \rightarrow x^2=-5$ پس محور x ها را قطع نمی کند

تمرین ۲:

الف)

$$OC=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}=r \quad (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۵$$

ب)

$$CA=\sqrt{(۲+۳)^۲+(۳+۹)^۲}=۱۳=r \quad (x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶۹$$

پ)

$$۲r=\sqrt{(-۴-۰)^۲+(-۱-۳)^۲}=۴\sqrt{۲}\rightarrow r=۲\sqrt{۲} \quad C\left(\frac{۰+(-۴)}{۲}=-۲,\frac{-۱+۳}{۲}=۱\right)$$ وسط دو نقطه

$$(x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۸$$

تمرین ۳:

$$x^۲+y^۲-۲x+۴y+۱=۰$$

$$p(۲,۳)=۴+۹-۶+۲+۱=۱۰>۰ \quad p(-۱,-۲)=۱+۴+۲-۴+۱=۰ \quad p(۰,۰)=۱>۰ \quad p(۱,۰)=۱+۰-۲+۰+۱=۰$$

خارج دایره   روی دایره   خارج دایره   روی دایره

تمرین۴:

الف) $(x-۱۳)^۲+(y-۱۳)^۲=۱۶۹$

ب)
$$x=۱۸\to ۲۵+(y-۱۳)^۲=۱۶۹\to (y-۱۳)^۲=۱۴۴\to \begin{cases} y-۱۳=۱۲\to y=۲۵ \\ y-۱۳=-۱۲\to y=۱ \end{cases}$$

$$A\left|\begin{matrix}۱۸\\۱\end{matrix}\right. \quad B\left|\begin{matrix}۱۸\\۲۵\end{matrix}\right.$$

ت) $AB=۲۵-۱=۲۴\to ۲۴۰$ متر

تمرین۵:

$$O\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \quad r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۳۲}=\sqrt{۱۰} \qquad (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۱۰$$

تمرین ۶:الف

$$O\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right. \quad r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}=۱$$

$$d=\frac{|۶(۲)+۴(۲)|}{\sqrt{۳۶+۱۶}}=\frac{۲۰}{\sqrt{۵۲}}=\frac{۱۰\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

$$d=\frac{۱۰\sqrt{۱۳}}{۱۳}>r=۱$$

خط ودایره نقطه مشترک ندارند

غیرمتقاطع اند

ب

$$O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \quad r=\sqrt{۲}$$

$$x+y+۲=۰ \qquad d=\frac{|۰+۰+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}$$

$$d=r=\sqrt{۲}$$

خط بردایره مماس است.

تمرین ۷:

$$OA=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵=r$$

$$x^۲+y^۲=۲۵$$

$$m_{OA}=\frac{۴-۰}{۳-۰}=\frac{۴}{۳}\rightarrow m'=-\frac{۳}{۴} \qquad A\left|\begin{matrix}۳\\۴\end{matrix}\right.$$

$$y-۴=\frac{-۳}{۴}(x-۳)\rightarrow ۳x+۴y-۲۵=۰$$

تمرین ۸:

$$(x-0)^2+(y-3)^2=9 \to x^2+(y-3)^2=9$$

$$d=\frac{|3(0)-4(3)-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{15}{5}=3=r$$

تمرین ۹: الف)

$$O\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right. \qquad r=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3$$

$$O'\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. \qquad r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+36}=\sqrt{14}$$

$$OO'=\sqrt{(1+1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5} \quad \Rightarrow r-r'<OO'<r+r' \to$$ متقاطعند

ب)

$$O\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right. \qquad r=\sqrt{7}$$

$$O'\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right. \qquad r'=\sqrt{5}$$

$$OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=2\sqrt{17} \quad \Rightarrow OO'>r+r' \to$$ متخارجند

تمرین ۱۰:

$$\left(x^{۲}-۴x+۴\right)+\left(y^{۲}-۶y+۹\right)=۳+۴+۹\Rightarrow\left(x-۲\right)^{۲}+\left(y-۳\right)^{۲}=۴^{۲}$$

$$o\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.\quad r=۴\quad o'\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right.\qquad d=\sqrt{\left(۲+۱\right)^{۲}+\left(۳+۱\right)^{۲}}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$$d=\left|r-r'\right|\rightarrow ۵=\left|r-۴\right|\Rightarrow\begin{matrix}r-۴=۵\rightarrow r=۹\\ r-۴=-۵\rightarrow \cancel{r=-۱}\end{matrix}\qquad\left(x+۱\right)^{۲}+\left(y+۱\right)^{۲}=۸۱$$