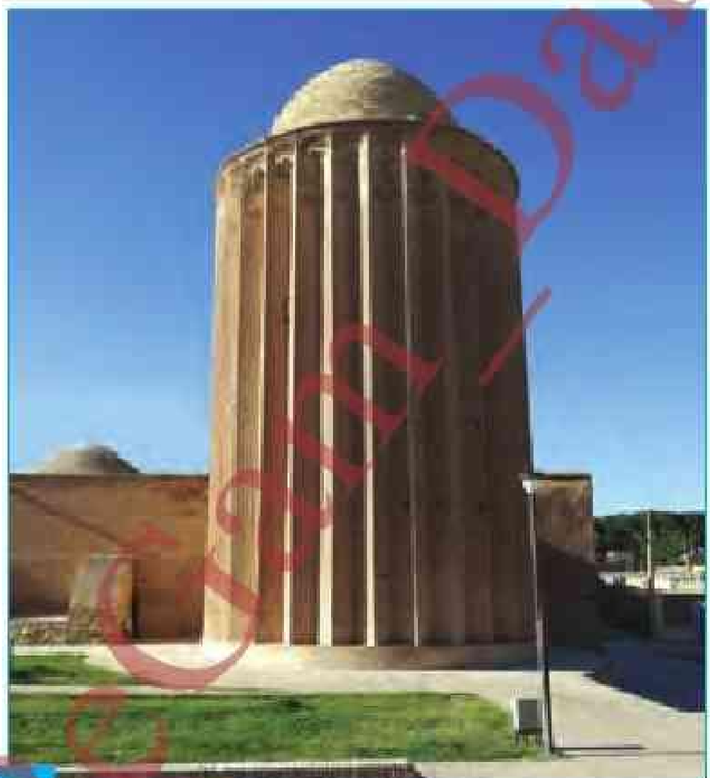
حل فصل ۶ ریاضی (۲) پایه یازدهم

به کوشش گروه ریاضی استان خوزستان

فصل ۶

حد و پیوستگی



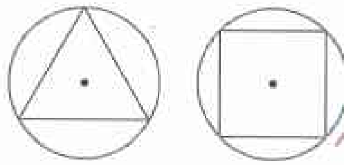
برج کاشانه در نزدیکی مسجد جامع شهر بسطام قرار دارد. بسطام در شمال شاهرود و در استان سمنان واقع است. قدمت این برج حدود ۷۰۰ سال است و ارتفاع برج از داخل ۲۴ و از بیرون ۲۰ متر است. فضای داخلی برج ده‌ضلعی و نمای بیرونی آن سی ضلعی منتظم است.

درس اول

فرایندهای حدی

فعالیت

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

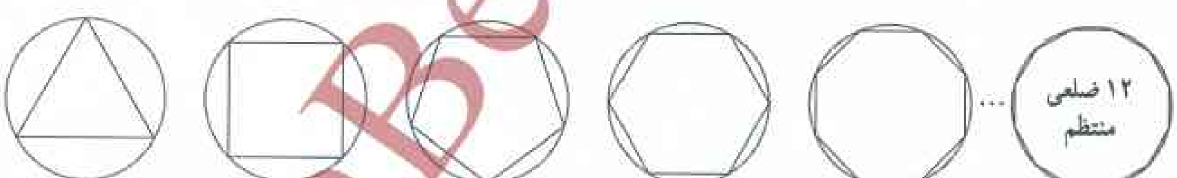


حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ مربع هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟ مساحت آن چند ضلعی به مساحت دایره نزدیک‌تر شود

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ تعداد اضلاع را زیاد کنیم آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟ بله

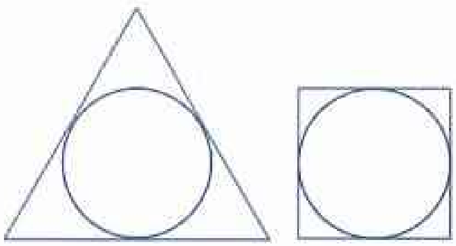
چند ضلعی منتظم محاطی	۳	۴	۵	۶	۷	...	۱۲	→	زیاد شدن تعداد اضلاع
مساحت تقریبی	$۱/۳r^2$	$۲r^2$	$۲/۳۸r^2$	$۲/۶r^2$	$۲/۸r^2$	...	$۳r^2$	→	نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت ....



> مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود).

کار در کلاس

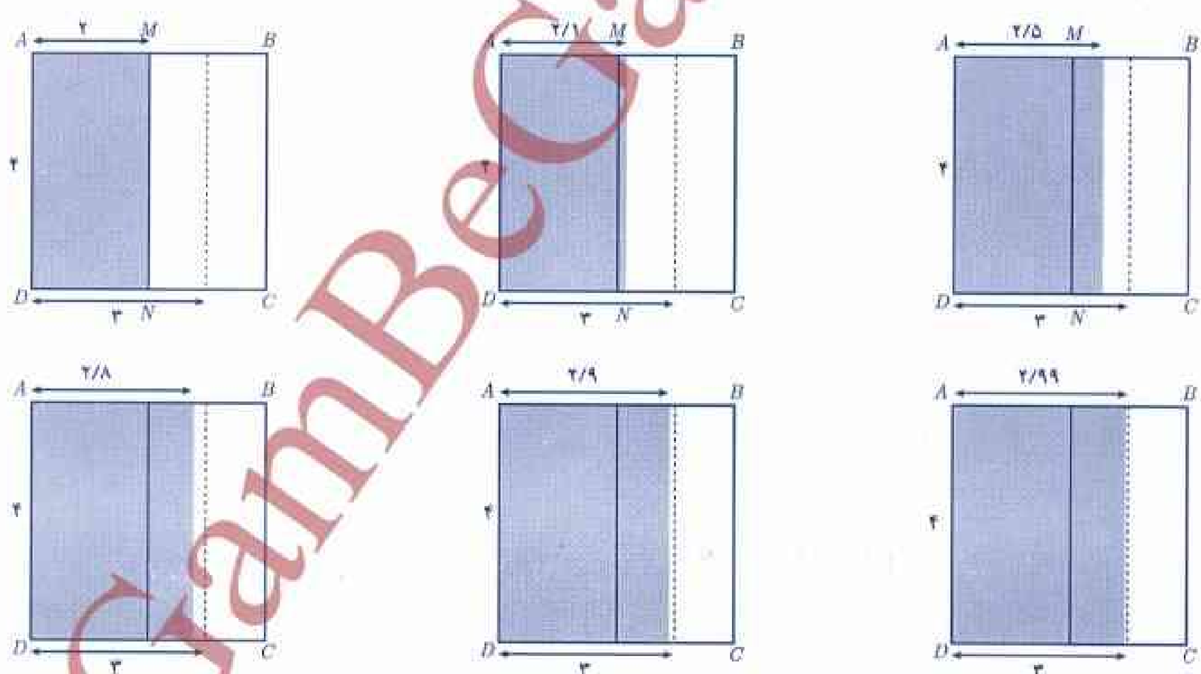
فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).



فعالیت

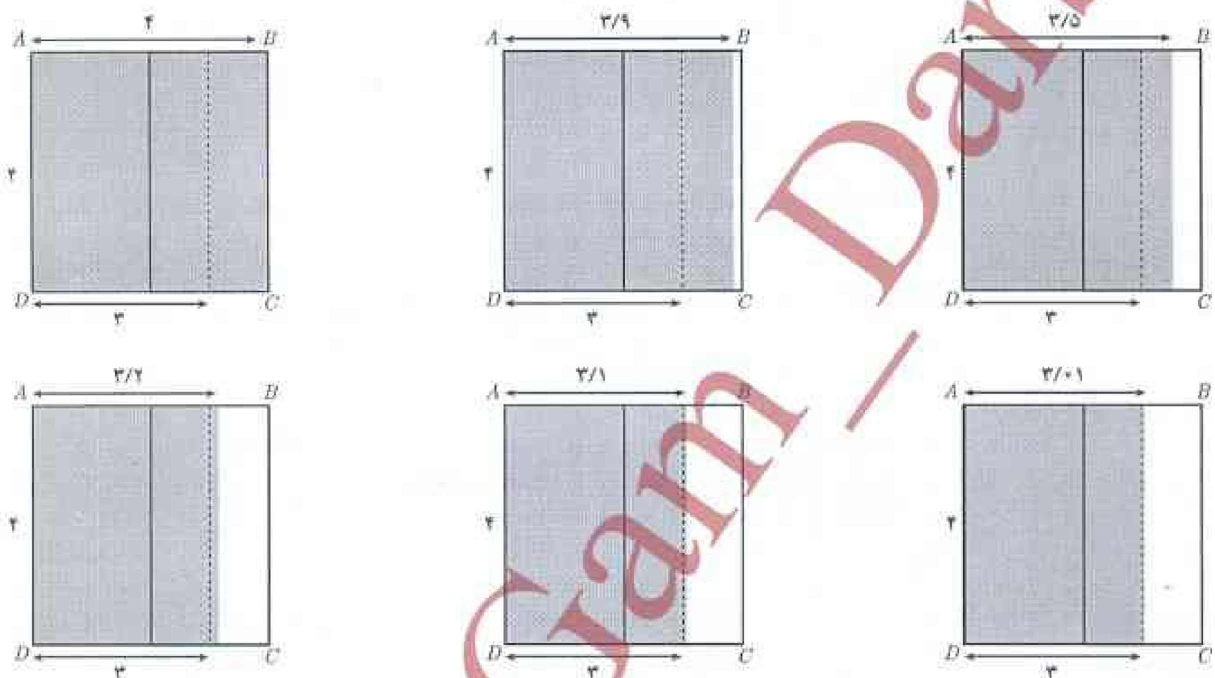
مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ ۸ به موازات MN پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۷	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.
مساحت مستطیل رنگی	۸	۸/۴	۱۰	۱۰/۸	۱۱/۲	۱۱/۶	۱۱/۹۶	مساحت به عدد ۱۲... نزدیک می‌شود.



مشابه همین کار را با شروع از پاره‌خط BC انجام می‌دهیم. پاره‌خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

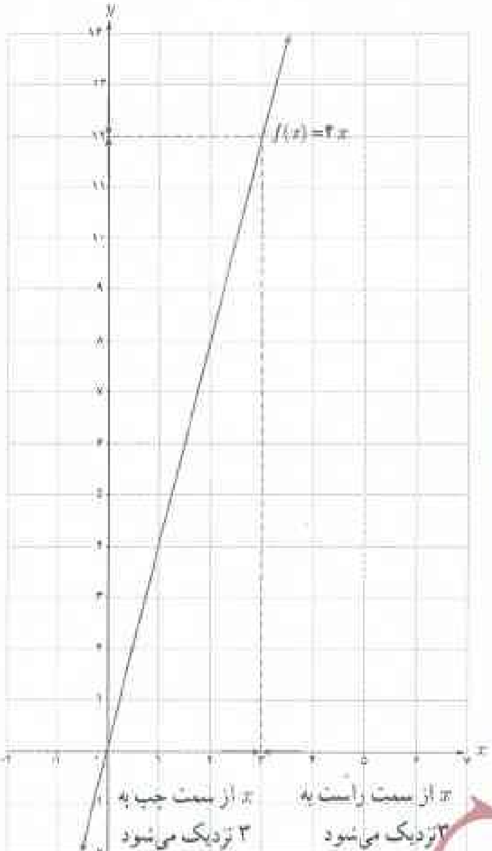
عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ...۱۲... نزدیک می‌شود.	۱۲٫۰۴	۱۲٫۴	۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	مساحت مستطیل رنگی



اگر طول مستطیل‌ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل‌ها را می‌توان به‌صورت تابع $f(x)=4x$ نمایش داد. با این تفاوت که در حالت اول x، با مقادیر کمتر از عدد ۳، به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود و در حالت دوم x، با مقادیر بیشتر از عدد ۳ به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود. این دو وضعیت را به ترتیب با نمادهای $x \to 3^-$ و $x \to 3^+$ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود							x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود						
۴	۳/۹	۳/۵	۳/۲	۳/۱	۳/۰۱	←۳→	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۵	۲/۱	۲	x
۱۶	۱۵/۶	۱۴	۱۲٫۸	۱۲٫۴	۱۲٫۰۴	←۱۲→	۱۱٫۹۶	۱۱٫۶	۱۱٫۲	۱۰	۸/۴	۸	$f(x)$
$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود							$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود						

وقتی $x\to 3^+$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x\to 3^-$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطه ۳ بررسی شده است.

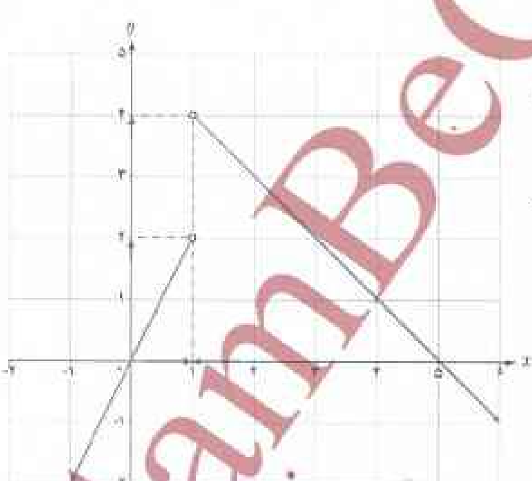


دیدیم که وقتی $x\to 3^-$ مساحت مستطیل‌ها یا همان مقادیر $f(x)$ به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=12$

به طریق مشابه وقتی $x\to 3^+$ باز هم مساحت مستطیل‌ها به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت هم می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=12$

اگر حد راست و حد چپ یک تابع در یک نقطه، موجود و برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. در این فعالیت حد راست و حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود، موجود و برابر ۱۲ است.
به‌طور خلاصه می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=12$$



مثال: نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}2x & x<1\\ -x+5 & x>1\end{cases}$ رسم شده است.
جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود								x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود						
x	۰	۰/۲	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	→۱←		۱/۰۱	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	۱	۱/۶	۱/۸	۱/۹۸	→۲	۴←	۳/۹۹	۳/۹	۳/۸	۳/۵	۳/۲	۳
$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود								$f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود						

به عبارت دیگر حد تابع وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۲ است؛ یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ و حد تابع وقتی x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۴ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. در این مثال حد راست و حد چپ هر دو وجود دارند؛ ولی باهم برابر نیستند. تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد، ولی حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ) وجود دارند.

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,\,x_\circ)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ\,,\,b)$ تعریف شده باشد. حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a$ و $b)$ شامل نقطهٔ $x_\circ$ (به جز احتمالاً در خود $x_\circ$) تعریف شده باشد. حد تابع f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم :

$\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=l$

$\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$.

بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل ارائه در قالب یک تابع‌اند. در بسیاری از مواقع لازم است رفتار یک تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی کنیم. در فعالیت زیر رفتار سه تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی خواهیم کرد تا با مفهوم حد بهتر آشنا شویم.

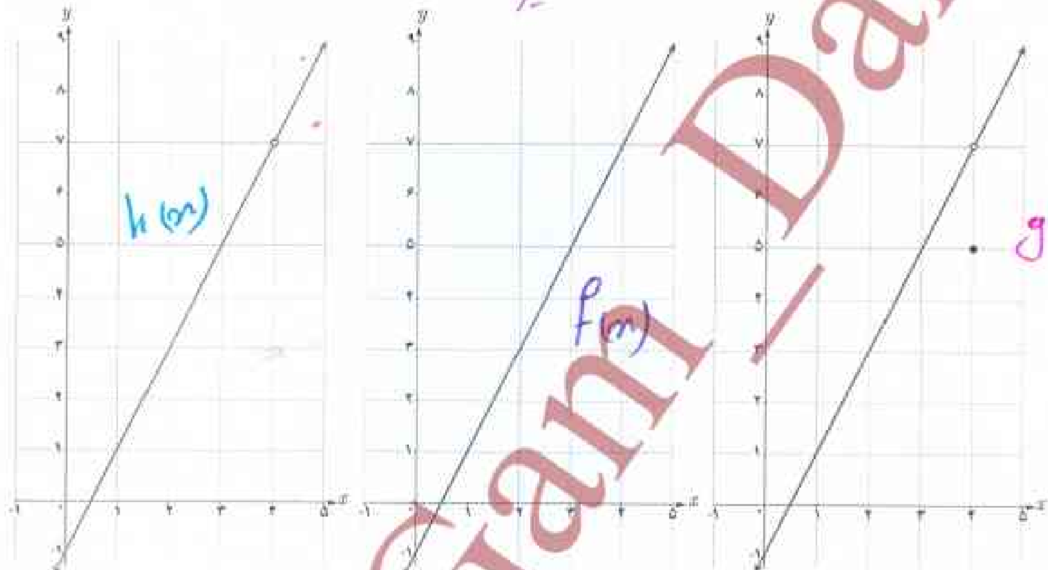
فعالیت

نمودار توابع زیر رسم شده‌اند:

$f(x)=2x-1$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\neq 4 \\ 5 & x=4 \end{cases}$ $\qquad$ $h(x)=2x-1 \quad (x\neq 4)$

$D_f = R_f = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D_g=\mathbb{R}$ $\quad$ $R_g=\mathbb{R}-\{7\}$ $\qquad$ $D_h=\mathbb{R}-\{4\}$ $\quad$ $R_h=\mathbb{R}-\{7\}$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ خیر دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.



می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود $\Rightarrow$ $\qquad$ $\Leftarrow$ x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\to$ ۴ $\leftarrow$	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶	۶٫۸	۶٫۹۸	$\to$ ۷ $\leftarrow$	۷٫۰۲	۷٫۲	۷/۴	۸	۹
$g(x)$	۵	۶	۶٫۶	۶٫۸	۶٫۹۸	$\to$ ۵ $\leftarrow$	۷٫۰۲	۷٫۲	۷٫۴	۸	۹
$h(x)$	۵	۶	۶٫۶	۶٫۸	۶٫۹۸	$\to$ $\leftarrow$ تعریف نمی‌شود	۷٫۰۲	۷٫۲	۷٫۴	۸	۹

مقادیر f ، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۷ نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ۴ نزدیک شود.

حد هر سه تابع وقتی که $x\to 4$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ۷ است. به عبارت دیگر:

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=7$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=7$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 4} h(x)=7$

در فعالیت قبل مشاهده کردید که سه تابع f، g و h در نزدیکی نقطهٔ $x=4$ رفتار یکسانی دارند. به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۷ است. با این حال دربارهٔ مقادیر این سه تابع در نقطه ۴ داریم :

الف) $h(4)$ وجود ندارد (h در ۴ تعریف نشده است).

ب) $g(4)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to 4} g(x) \neq g(4)$.

پ) $f(4)=7$ و $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=7$.

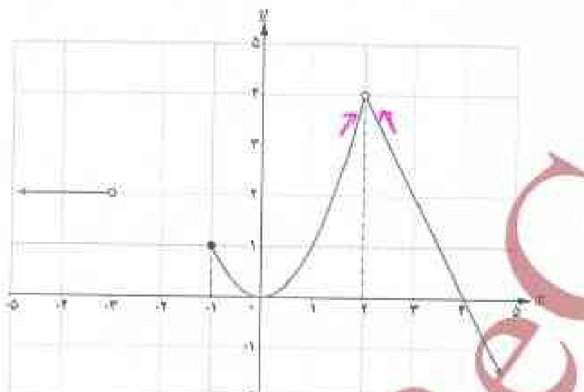
به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، آنگاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم :

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.

پ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

مثال ۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -2x+8 & x>2 \\ x^2 & -1\leq x<2 \\ 2 & x<-3 \end{cases}$ رسم شده‌است.



الف) $f(2)$ تعریف نشده است؛ ولی $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

ب) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1$ ولی $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد.

پ) $f(-1)=1$.

ت) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ و $f(0)=0$.

ث) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=0$ و $f(4)=0$.

ج) $f(-3)$ و $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ وجود ندارند؛ ولی $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=2$.

مثال ۲ : برای تابع $g(x)=\sqrt{x}$ داریم :

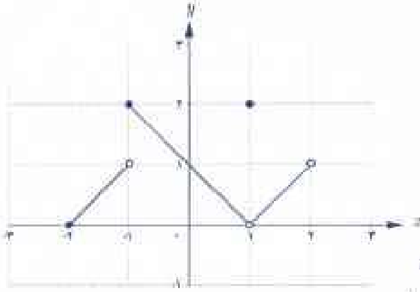
الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}=0$.

ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد؛ زیرا تابع برای $x<0$ تعریف نشده است.

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

تمرین

۱ برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim_{x\to1} f(x)=2$ نادرست

ب) $f(1)=2$ درست

پ) $f(2)=1$ نادرست

ت) $\lim_{x\to-2^+} f(x)=0$ درست

ث) $\lim_{x\to-1^+} f(x)=2$ درست

ج) $\lim_{x\to2^-} f(x)=1$ درست

چ) $\lim_{x\to2} f(x)$ وجود ندارد. درست

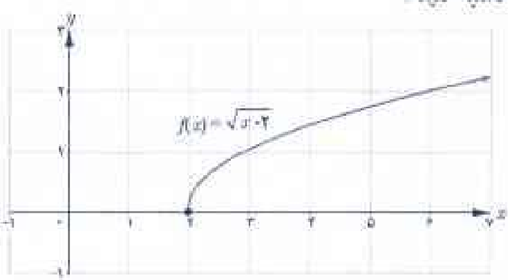
ح) $\lim_{x\to-1} f(x)$ وجود ندارد. درست

۲ مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱- باشد.

۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(3)=1$.

۴ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim_{x\to2} f(x)=4$.

۵ دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-2}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید:



الف) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

ب) $\lim_{x\to2^-} f(x)$

پ) $\lim_{x\to2} f(x)$

ت) $f(2)$

۶ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(0)$ موجود است؟

۷ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

$$f(x)=2x+1 \quad , \quad g(x)=2x+1 \quad (x\neq2) \quad , \quad h(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\neq2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

الف) مقادیر $f(2)$ ، $h(2)$ و $g(2)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to2} h(x) \quad , \quad \lim_{x\to2} g(x) \quad , \quad \lim_{x\to2} f(x)$$

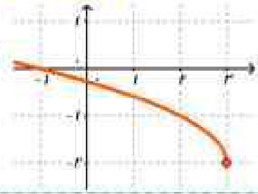
۸ آیا حد تابع زیر در $x=2$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & x>2 \\ -2 & x=2 \\ x-3 & x<2 \end{cases}$$

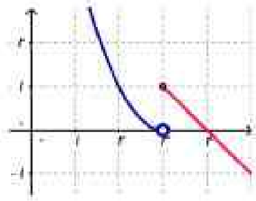
۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x>0 \\ -2x-2 & x\leq0 \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

۱۰ اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim_{x\to0} f(x)$ موجود است؟

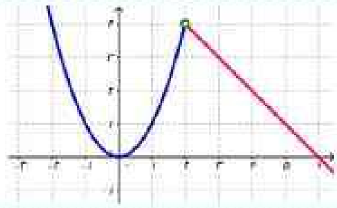
تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{۳-x}-۲$



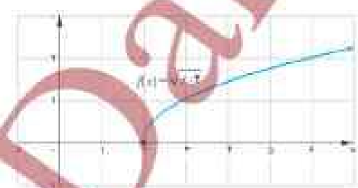
تمرین ۳: $f(x)=\begin{cases}(x-۳)^۲ & x<۳\\ ۴-x & x\geq ۳\end{cases}$



تمرین ۴: $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x<۲\\ ۶-x & x>۲\end{cases}$



تمرین ۵:



$f(x)=\sqrt{x-۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ وجود ندارد

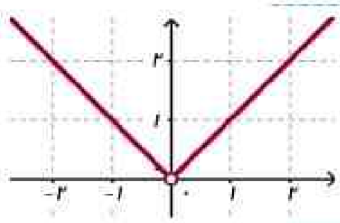
الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۰$

ت) $f(۲)=\sqrt{۲-۲}=۰$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۶: $f(x)=\begin{cases}x & x>۰\\ -x & x<۰\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$



تمرین ۷: $h(x)=\begin{cases}۲x+۱ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$ $\quad g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲)$ $\quad f(x)=۲x+۱$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=۵$ – $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=۵$

الف) $f(۲)=۲(۲)+۱=۴+۱=۵$ – $g(۲)$ وجود ندارد – $h(۲)=۳$

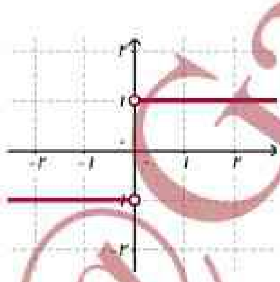
تمرین ۸: $f(x)=\begin{cases}-x+۲ & x>۲\\ -۲ & x=۲\\ x-۳ & x<۲\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-۲+۲=۰ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۲-۳=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۹: $f(x)=\begin{cases}x^۲+۲ & x>۰\\ -۲x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=(۰)^۲+۲=۲ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۲(۰)-۲=-۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

تمرین ۱۰: $f(x)=\dfrac{|x|}{x} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & x>۰\\ \dfrac{-x}{x} & x<۰\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$



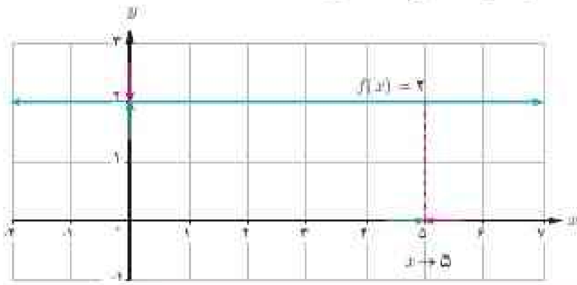
$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۱ \quad , \quad \lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=-۱ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد

درس دوم

محاسبه حد توابع

یکی از عواملی که به مطالعهٔ دقیق‌تر یک تابع می‌تواند کمک کند، محاسبهٔ حد آن تابع است. برای محاسبهٔ حد یک تابع قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این درس برخی از این قواعد به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده می‌شوند.

۱ـ حد تابع ثابت



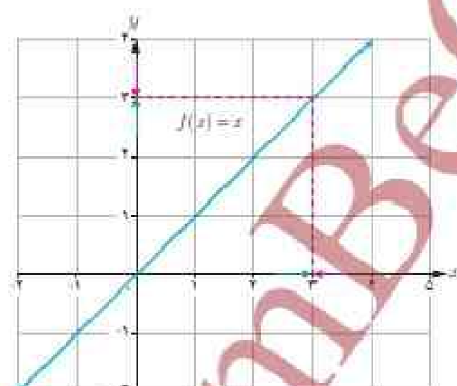
حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = ۲$

به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

۲ـ حد تابع همانی

اگر [illegible]



به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۳} x = ۳$

کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x =$ ۰ $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} ۵ =$ ۵ $\qquad \lim\limits_{x\to ۷} x =$ ۷

$\lim\limits_{x\to -۷} x =$ −۷ $\qquad \lim\limits_{x\to ۴} (-۲) =$ −۲ $\qquad \lim\limits_{x\to ۵} ۰ =$ ۰

تاکنون برای محاسبهٔ حدّ یک تابع بیشتر از جدول‌ها و نمودارها بهره بردیم. در اینجا به کمک چند قانون، حد توابع را محاسبه می‌کنیم.

۳ــ حد مجموع

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ ۲ $\qquad \lim\limits_{x\to ۲} g(x)=$ ۳ $\qquad \lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))=$ ۲ + ۳ = ۵

۴ــ حد تفاضل

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

به‌طور مثال در «کار در کلاس» قبل داریم :

$$\lim_{x\to۲}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to۲}f(x)-\lim_{x\to۲}g(x)=۲-۳=-۱$$

۵ــ حد حاصل ضرب

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim_{x\to a}f(x).\lim_{x\to a}g(x)=lm$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر حاصل ضرب حد آنها در همان نقطه است.

اگر c یک عدد ثابت و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a}f(x)=cl \qquad (a\in\mathbb{R})$$

کار در کلاس

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x))^۲=\lim\limits_{x\to a}(f(x).f(x))=$ $l\times l=l^۲$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x))^۳=$ $l^۳$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim\limits_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنند؟ توضیح دهید.

$\lim\limits_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)=\lim\limits_{x\to ۲۰}\frac{۲}{۵}x-\lim\limits_{x\to ۲۰}۳=\frac{۲}{۵}\lim\limits_{x\to ۲۰}x-\lim ۳=\frac{۲}{۵}(۲۰)-۳=۸-۳=۵$

حد تفاضل

قانون ۲

در حالت کلی اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n=l^n$$

۶ــ حد تقسیم

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=m$ که $m\neq۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\frac{l}{m} \qquad (m\neq۰)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آنکه حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

ب) $f(1)=3(1)^2+2(1)-7=3+2-7=-2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

فعالیت

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=3x^2+2x-7$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim_{x\to 1} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(3x^2+2x-7)$$

$$=\lim_{x\to 1}(3x^2)+\lim_{x\to 1}(2x)-\lim_{x\to 1}7$$

$$=3\lim_{x\to 1}x^2+2\lim_{x\to 1}x-7=3(1)^2+2(1)-7=3+2-7=-2$$

اشتباه چاپی ۲ به منفی باشد

ب) $f(1)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+5x-\frac{1}{2}$ ، درستی تساوی $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$ را بررسی کنید.

> به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوب است : $\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x-1}{x^2-4x+1}=\frac{\lim_{x\to 3}(2x-1)}{\lim_{x\to 3}(x^2-4x+1)}=\frac{2(3)-1}{(3)^2-4(3)+1}=\frac{5}{-2}=-2.5$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^3+1}{5x^2+\frac{2}{3}}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^4+2x^3+1)}{\lim_{x\to 1}(5x^2+\frac{2}{3})}=\frac{(1)^4+2(1)^3+1}{5(1)^2+\frac{2}{3}}=\frac{4}{\frac{17}{3}}=\frac{12}{17}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\frac{3}{5}x^2-2x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(\frac{3}{5}x^2-2x+1)}=\frac{(1)^2-1}{\frac{3}{5}(1)^2-2(1)+1}=\frac{0}{\frac{-2}{5}}=0$$

> به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim_{x\to a}Q(x)\neq 0$

> اگر در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=0$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم :
>
> چون $P(a)=Q(a)=0$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

پ) $g(2)=\frac{1}{8}(2)^4-(2)^3+5(2)-\frac{1}{2}=2-8+10-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(\frac{1}{8}x^4-x^3+5x-\frac{1}{2})=\lim_{x\to 2}\frac{1}{8}x^4-\lim_{x\to 2}x^3+\lim_{x\to 2}5x-\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}(\lim_{x\to 2}x)^4-(\lim_{x\to 2}x)^3+5\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}(2)^4-(2)^3+5(2)-\frac{1}{2}$

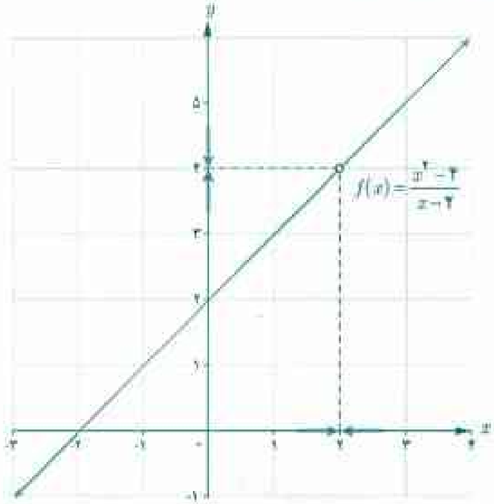
$=\frac{7}{2}$

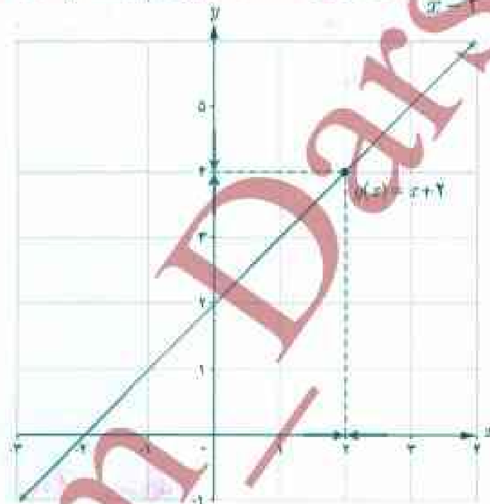
مثال : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ را محاسبه کنید.

داریم : $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)=0$ ،

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

توجه داریم که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $x\neq 2$ پس $x-2\neq 0$ و صورت و مخرج کسر را می‌توانیم بر $x-2$ تقسیم کنیم. در نمودارهای زیر توابع $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ و $g(x)=x+2$ رسم و حد آنها در $x=2$ نمایش داده شده است.





دو تابع g و f برابر نیستند (چرا؟)؛ ولی حد آنها در $x=2$ برابر است.

$D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

$D_g=\mathbb{R}$

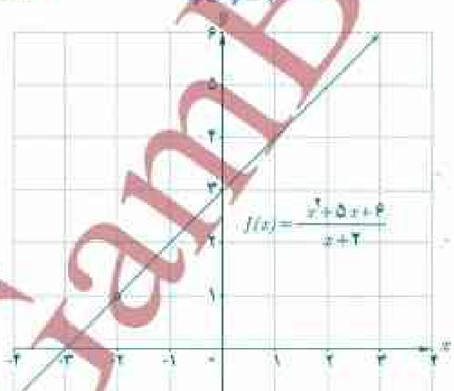
چون دامنه ی آنها برابر نیست

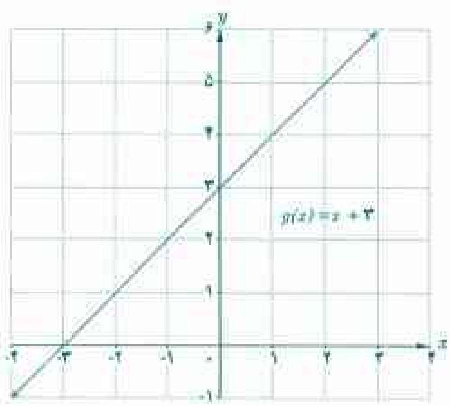
کار در کلاس

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

الف) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$

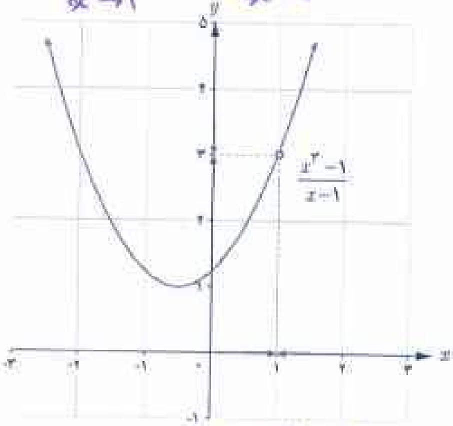
$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}(x+3)=-2+3=1$

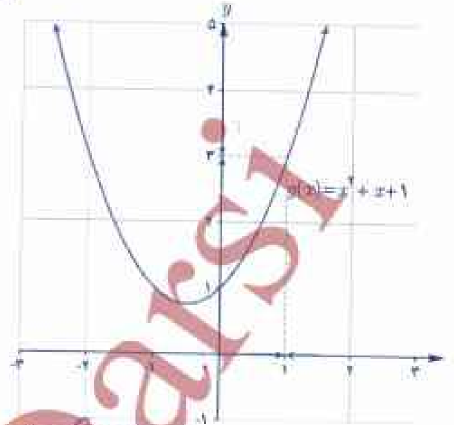




دو تابع f و g برابر نیستند. ولی حد آنها در $x=-2$ برابر عدد ۱ است.

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x^2+x+1 = (1)^2+1+1 = 3$





دو تابع f و g برابر نیستند، ولی حد آنها در x=1 برابر عدد ۳ است.

۷ــ حد ریشه

اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=l>0$ آنگاه:

$$\lim_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim_{x\to c}ax+b}=\sqrt{l}$$

تذکر: تمام قوانینی که در این درس دربارهٔ حد مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

مثال: مطلوب است: $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{2x-6}$

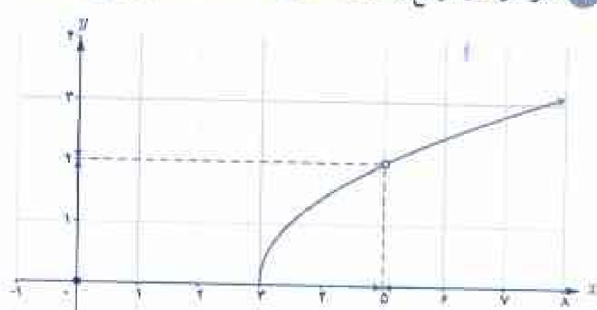
حل: به کمک دستور فوق داریم:

$$\lim_{x\to 5}(2x-6)=4>0 \Rightarrow \lim_{x\to 5}\sqrt{2x-6}=\sqrt{\lim_{x\to 5}(2x-6)}=\sqrt{4}=2$$

کار در کلاس

۱) نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{2x-6}$ و $g(x)=\sqrt{2x-6}\quad (x\neq 5)$ رسم شده‌اند.

f(x)



g(x)

الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim_{x\to 5} f(x)$ و $\lim_{x\to 5} g(x)$ موجودند؟ بله

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

$\lim_{x\to 3^+}\sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim_{x\to 3^+}(2x-6)} = \sqrt{0} = 0$ ، $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(2x-6)} = \sqrt{0} = 0$ ، $\lim_{x\to 3}\sqrt{2x-6} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(2x-6)} = \sqrt{0} = 0$

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\frac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(1)=1$ درست

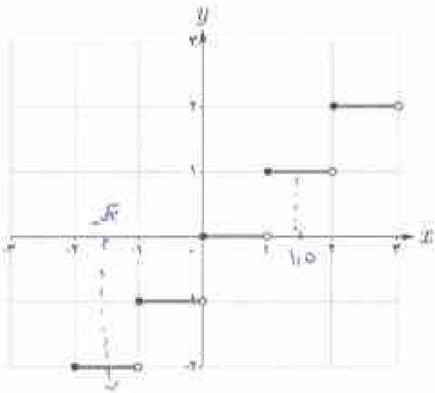
ب) $D_h=\mathbb{R}-\{0\}$ درست

پ) $\lim_{x\to 0^+} h(x)=1$ درست

ت) $h(0)=0$ نادرست

ث) $\lim_{x\to 0} h(x)$ وجود ندارد. درست

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim_{x\to 2^+}[x] = 2$

ب) $\lim_{x\to 2^-}[x] = 1$

پ) $\lim_{x\to 2}[x]$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to 1}[x]$ وجود ندارد

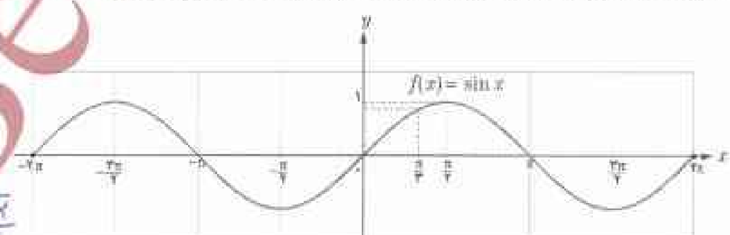
ث) $\lim_{x\to 1/5}[x] = 1$

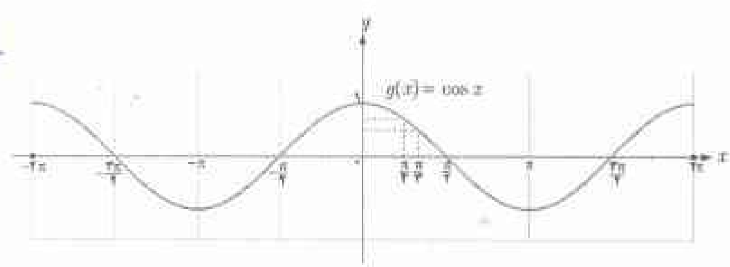
ج) $\lim_{x\to -\sqrt{2}}[x] = -2$

حدهای مثلثاتی

فعالیت

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

ب) $\lim_{x\to -\pi} \sin x = 0$

پ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^-} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ت) $\lim_{x\to \pi^+} \sin x = 0$

ث) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

ج) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}^-} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

چ) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \cos x = 0$

ح) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}^+} \cos x = \frac{1}{2}$

به‌طور کلی داریم : $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$

مثال : به کمک دستورهایی که در این درس آموخته‌اید، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x]-3}{x}$ ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}$

حل : الف) چون $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ موجود نیست؛ پس $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$ موجود نیست.

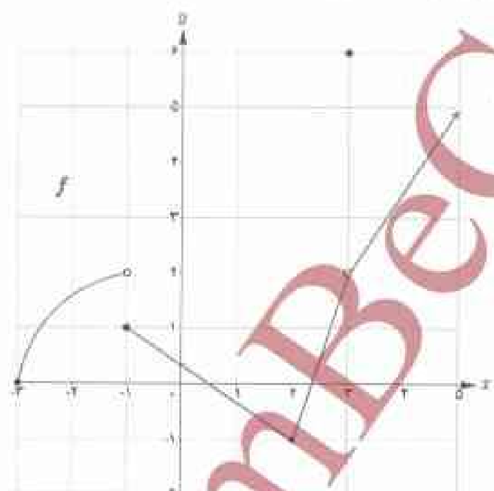
ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}(2+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$

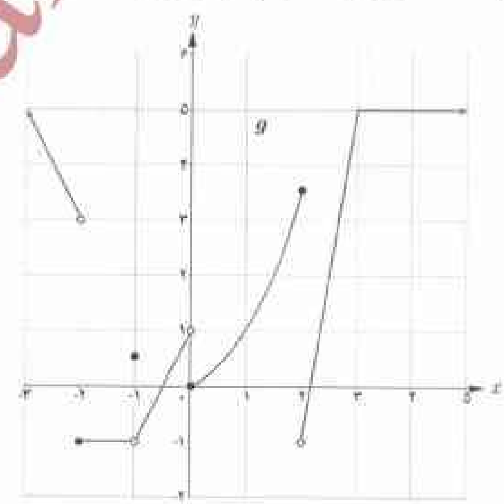
پ) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[x]-3}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1^+}(\overset{1}{[x]}-3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}x}=\dfrac{-2}{1}=-2$

ت) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to \pi}(\sin x\cos x)}{\lim\limits_{x\to \pi}(1+\cos^2 x)}=\dfrac{0(-1)}{2}=0$

تمرین

۱) با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ = ۲ ب) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ وجود ندارد پ) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$ = ۵

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)+g(x)\big)$ = ۲+۵=۷ ث) $\lim\limits_{x\to -1}\big(f(x)+g(x)\big)$ وجود ندارد ج) $\lim\limits_{x\to 2}\big(2f(x)+5g(x)\big)$ وجود ندارد

چ) $\lim\big(f(x)\big)^2$ = $(\ )^2$ ح) $\lim\limits_{x\to 0}\big(g(x)\big)^2$ = وجود ندارد خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد د) $\lim\limits_{x\to 5}\big(f(x).g(x)\big)$ = ۵×۵=۲۵

حل تمرینات در صفحات بعدی

اشتباه تایپی
قبل

حداقل سه پرسش دیگر مانند موارد صفحهٔ ~~بعد~~ مطرح کنید و به آنها پاسخ دهید. دربارهٔ مسائل مطرح شده در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۷}(-۳)$
ب) $\lim_{x\to ۰}(-۲x-۷)$
پ) $\lim_{x\to -۱}(۳x^۲-۴x+۵)$

ت) $\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$
ث) $\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۲x^۲-x}$
ج) $\lim_{x\to -۲}\frac{x^۳+۸}{x+۲}$

چ) $\lim_{x\to -۲}[x]$
ح) $\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x}$
خ) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x+۷}$

د) $\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$
ذ) $\lim_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}$
ر) $\lim_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$

ز) $\lim_{x\to ۳^+}\frac{x-۲}{[x]+۱}$
ژ) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x$
س) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim_{x\to -۲^-}\frac{x}{[x]}$
ص) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۲ x}{۱-\sin x}$
ض) $\lim_{x\to ۰}(x+[x])$

۴ اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=۳$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=۰$ و $\lim_{x\to ۲} h(x)=-۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x\to ۲}(f(x)+h(x))$
ب) $\lim_{x\to ۲}(h(x))^۵$

پ) $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{g(x)}$
ت) $\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim_{x\to ۲}\frac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}$
ج) $\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{h(x)}$

۵ نمودار دو تابع $f(x)=\frac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim_{x\to ۳} f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim_{x\to ۳} g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۶ در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۷ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to m^+}[x]$
ب) $\lim_{x\to m^-}[x]$
پ) $\lim_{x\to m}[x]$

به‌طور کلی تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

تمرین فصل ۶ – صفحه ۱۳۶

تمرین ۲: $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ در نقطه $x=1$ حد برابر دارند. $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1} g(x)=1$

تمرین ۳:

پ) $\lim_{x\to -1}(3x^2-4x+5)=3(-1)^2-4(-1)+5=3+4+5=12$

ب) $\lim_{x\to 0}(-2x-7)=-2(0)-7=-7$

الف) $\lim_{x\to 7}(-3)=-3$

ت) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{x+3}=\frac{3}{3+3}=\frac{1}{2}$

ث) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^2-x}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(2x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{2(0)-1}=-1$

ج) $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x^2-2x+4)=(-2)^2-2(-2)+4=4+4+4=12$

چ) $\lim_{x\to -2}[x]$ وجود ندارد

ح) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0$

خ) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+7}=\sqrt{2+7}=3$

د) $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ وجود ندارد

ذ) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x+5}=\sqrt{2+5}=\sqrt{7}$

ر) $\lim_{x\to 1}\sqrt{x-2}$ وجود ندارد

ز) $\lim_{x\to 3^+}\frac{x-2}{[x]+1}=\frac{3-2}{3+1}=\frac{1}{4}$

ژ) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{3}}\cos(x)=\cos(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$

س) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\big(\sin(x)+\cos(x)\big)=\sin(\frac{\pi}{4})+\cos(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

ش) $\lim_{x\to -2^+}\frac{x}{[x]}=\frac{-2}{-2}=1$

ص) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(x)}{1-\sin(x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\big(1-\sin(x)\big)\big(1+\sin(x)\big)}{1-\sin(x)}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\big(1+\sin(x)\big)=1+\sin(\frac{\pi}{2})=1+1=2$

ض) $\lim_{x\to 0}(x+[x])$ وجود ندارد

تمرین ۴: $\lim_{x\to 2} f(x)=3$ ، $\lim_{x\to 2} g(x)=0$ ، $\lim_{x\to 2} h(x)=-1$

الف) $\lim_{x\to 2}\big(f(x)+h(x)\big)=\lim_{x\to 2} f(x)+\lim_{x\to 2} h(x)=3+0=3$

ب) $\lim_{x\to 2}\big(h(x)\big)^5=\left(\lim_{x\to 2} h(x)\right)^5=(-1)^5=-1$

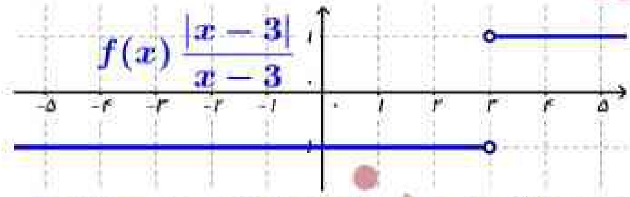
پ) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$ وجود ندارد

ت) $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)}=\frac{0}{3}=0$

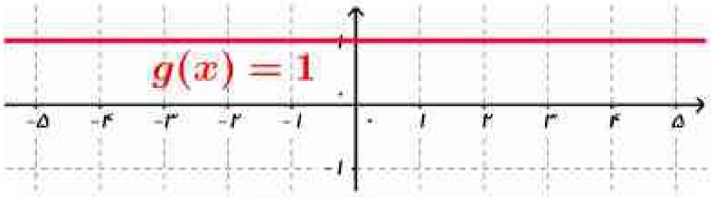
پ) $\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)}{g(x)-5h(x)}=\frac{\lim_{x\to 2}\big(3f(x)\big)}{\lim_{x\to 2}\big(g(x)-5h(x)\big)}=\frac{3\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)-5\lim_{x\to 2} h(x)}=\frac{3\times 3}{0-5(-1)}=\frac{9}{5}$

ت) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to 2} h(x)}=\frac{1}{-1}=-1$

تمرین ۵:



$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ وجود ندارد



$\lim\limits_{x\to 3} g(x) = 1$

در تمام نقاط بازه $(3,+\infty)$ دو تابع با هم برابرند.

تمرین ۶: الف) حد $f+g$ تابع وجود ندارد   ب) حد $f+g$ تابع وجود ندارد

تمرین ۷:

الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x] = m$ ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x] = m-1$ پ) $\lim\limits_{x\to m}[x]$ وجود ندارد

در تمام نقاط $x \notin \mathbb{Z}$ تابع $f(x)=[x]$ حد دارد

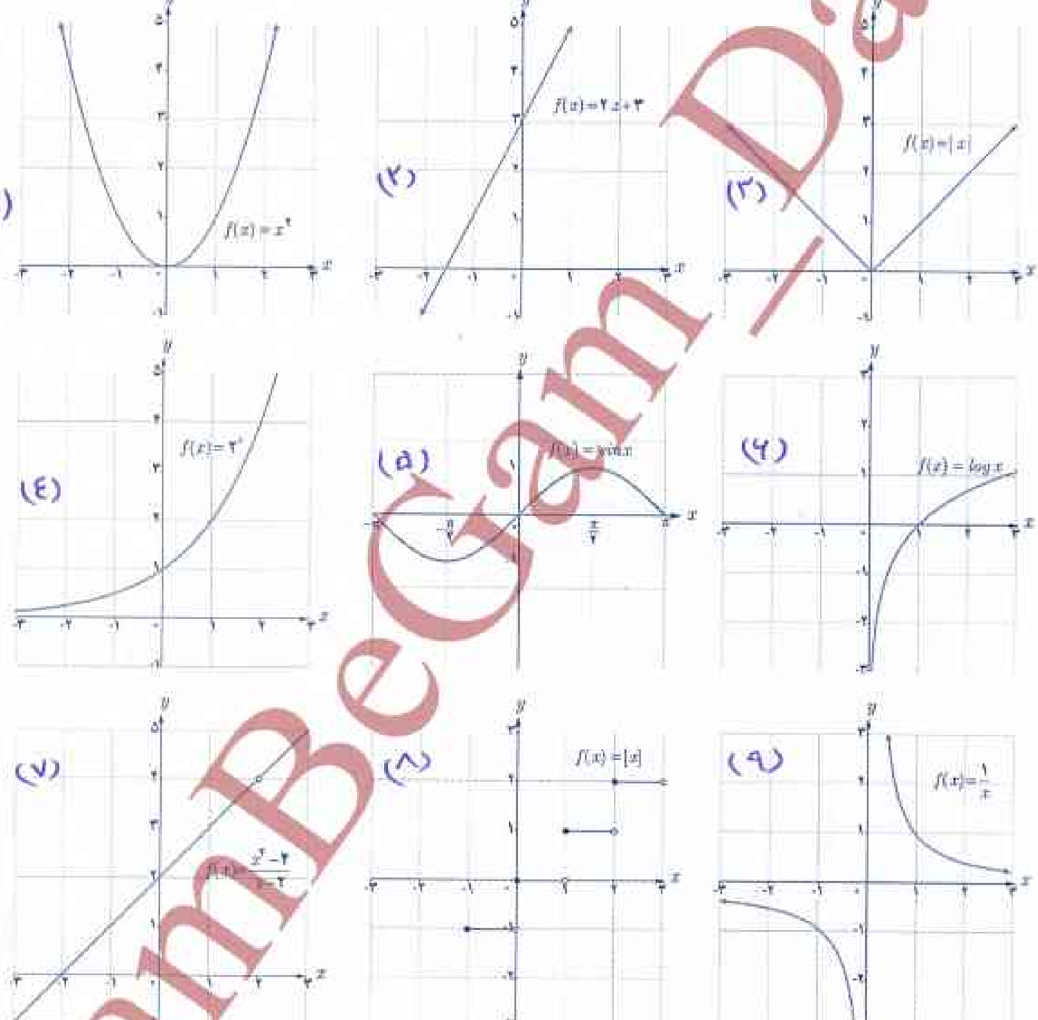
درس سوم

پیوستگی

یکی از مفاهیم مهم در مبحث حد توابع، مفهوم پیوستگی است که در این درس با آن آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودارهای شش تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند. شایسته است نمودارها شماره گذاری یا نام گذاری شود

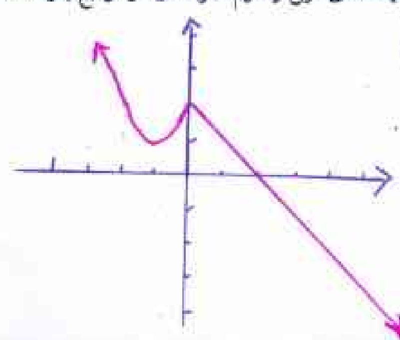


الف) کدام‌یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

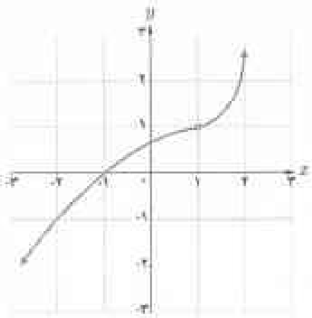
ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید.

ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.

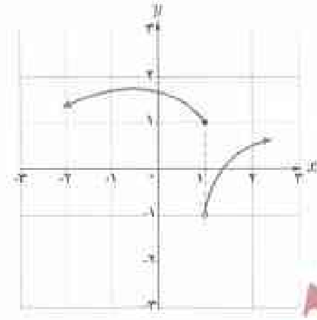
ب)



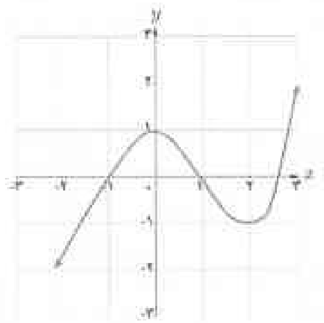
مثال : تابع‌های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته‌اند.



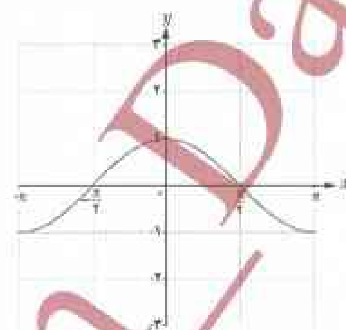
(الف)



(ب)



(پ)

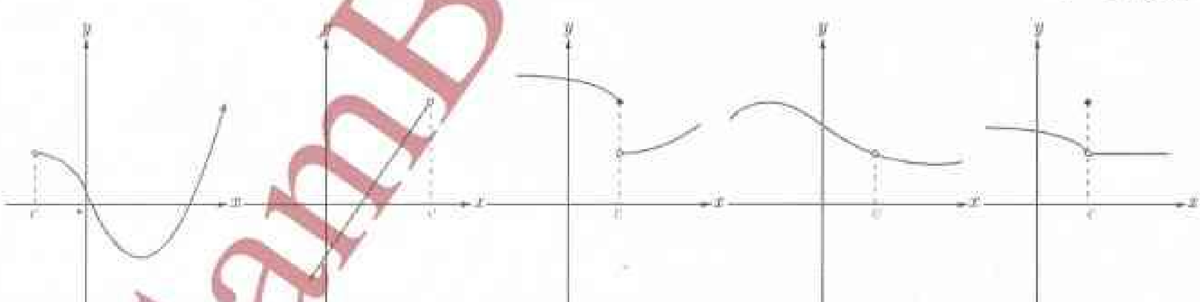


(ت)

اکنون به بررسی دقیق‌تر مفهوم پیوستگی می‌پردازیم. به این منظور پیوستگی تابع در یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

تابع f در نقطه $x=c$ را پیوسته نامیم، هرگاه $(c\in\mathbb{R})$ $\quad \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این‌صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطهٔ c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.



$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد.

$f(c)$ وجود ندارد.

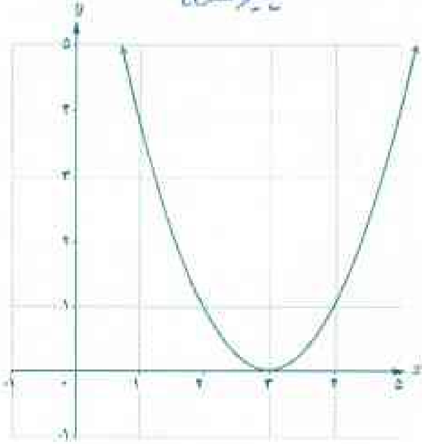
$\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq f(c)$

کار در کلاس

کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=1$ ناپیوسته‌اند؟

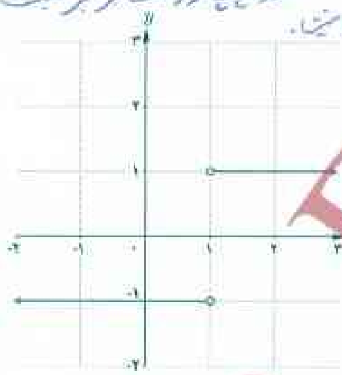
الف) $f(x)=(x-3)^2$

پیوسته



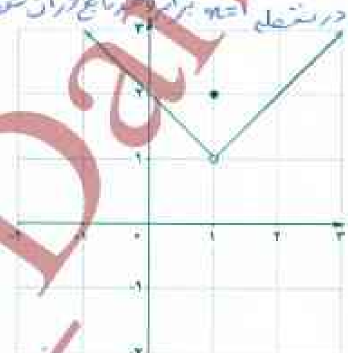
ب) $g(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$

ناپیوسته
حد چپ و راست برابر نیست



پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>1 \\ 2 & x=1 \\ -x+2 & x<1 \end{cases}$

ناپیوسته
مقدار تابع در نقطه $x=1$ برابر حد تابع در آن نقطه نیست.



فعالیت

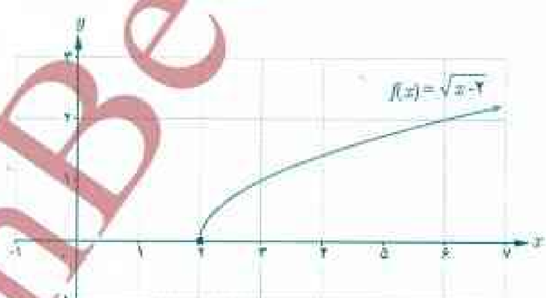
تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ موجودند؟ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وجود ندارد

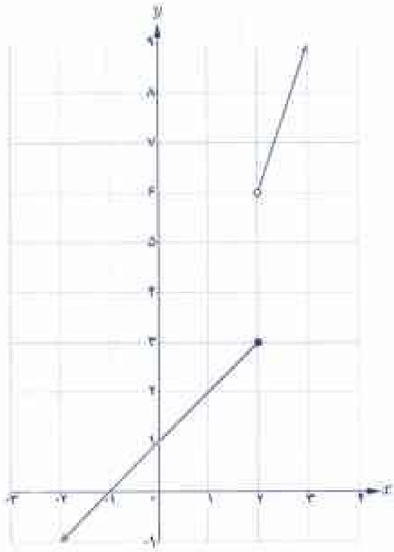
ب) آیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود است؟ خیر

پ) آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟ خیر

در این فعالیت $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ گوییم f از طرف راست در نقطهٔ ۲ پیوسته است.



> تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. در این صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.



کار در کلاس

تابع با ضابطه $g(x)=\begin{cases}۳x & x>۲\\ x+۱ & x\leq ۲\end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)$ موجودند؟ هر دو موجودند

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود است؟ خیر

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟ خیر

برای تابع $g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=g(۲)$ ، گوییم g از طرف چپ در نقطه ۲ پیوسته است.

> تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

با توجه به تعریف معلوم است که f در $x=c$ پیوسته است، هرگاه f در c هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال: الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوستگی راست دارد، تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوسته نیست.

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۰\\ ۲x+۳ & x>۰\end{cases}$ در نقطهٔ ۰ پیوستگی چپ دارد. تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست.

پ) تابع $g(x)=\begin{cases}-x+۳ & x<۱\\ ۲x & x\geq ۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است.

پیوستگی روی یک بازه

> تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است؛ هرگاه، در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.
> تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته است؛ هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $(a,b]$ و $[a,b)$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوستگی راست داشته باشد.

تابع f روی بازه $(a,b]$ پیوسته است هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه b پیوستگی چپ داشته باشد.

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

کار در کلاس

$h(x)=\sqrt{-x}$ $g(x)=\sqrt{x+2}$ $f(x)=x$

سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشند. ب) روی بازه $[-2,+\infty)$ پیوسته باشند. پ) روی بازه $(-\infty,0]$ پیوسته باشند.

مثال : الف) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، آنگاه f روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است؛ زیرا $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ $(c\in\mathbb{R})$

ب) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $(-\infty,\infty)$ پیوسته‌اند.

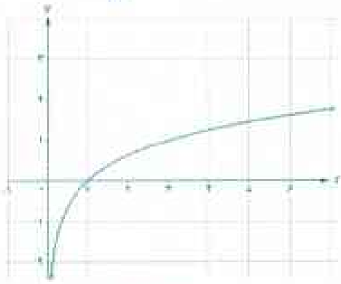
پ) تابع $f(x)=\log_2 x$ روی بازه $(0,\infty)$ پیوسته است.

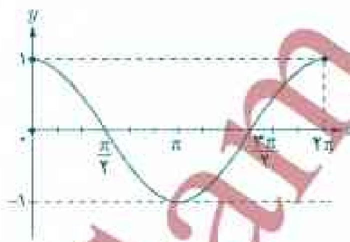
ت) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

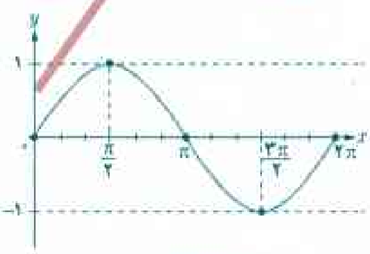
ث) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $[0,2\pi]$ پیوسته‌اند.

ج) تابع $f(x)=\log_2 x$ روی بازه $[1,2]$ پیوسته است.

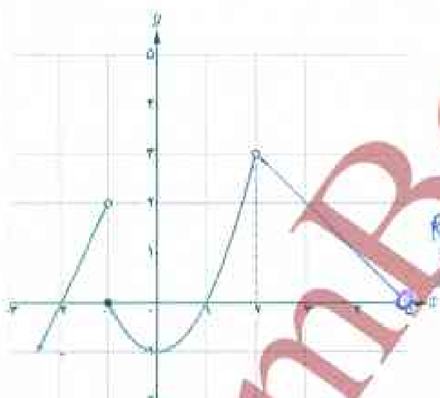
بهتر بود به جای مثال می‌نوشت نکته


$f(x)=\log_2 x$


$f(x)=\cos x$


$f(x)=\sin x$

کار در کلاس



۱) تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :
$$f(x)=\begin{cases}2x+4 & x<-1\\ x^2-1 & -1\le x<2\\ -x+5 & 2<x<5\end{cases}$$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

$R_f=(-\infty,3)$ $D_f=(-\infty,2)\cup(2,5)$

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-1,1]$ و $(2,5)$ و $[-2,0]$ بررسی کنید.

پیوسته پیوسته ناپیوسته

۲) دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $(-\infty,-1]$ پیوسته است. نادرست

ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-1)$ پیوسته است. درست

پ) f روی بازهٔ $[2,5]$ پیوسته است. نادرست

ت) $\lim_{x\to 5} f(x)=0$ نادرست

ث) $\lim_{x\to 5^-} f(x)=0$ درست

ج) f روی بازهٔ $(-2,0)$ پیوسته است. نادرست

۳ با توجه به تابع f :

الف) دو بازهٔ بستهٔ مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

[۲,۴] [۱,۲] ناپیوسته   [۳,۴] [۶۵,۷۵] پیوسته

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی (a,b) پیوسته باشد؛ اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد.

[۲,۳] [۲,۴]   (۲,۳] (۲,۴]

تمرین

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x)=2x+1 \quad , \quad g(x)=2x+1 \quad x\neq 2 \quad , \quad h(x)=\begin{cases} 2+x & x\neq 2 \\ 3 & x=2 \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید : $f(2)=\qquad , \quad g(2)=\qquad , \quad h(2)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به‌دست آورید : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)= \qquad \lim\limits_{x\to 2} g(x)= \qquad \lim\limits_{x\to 2} h(x)=$

پ) کدام تابع در $x=2$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-3 & x<2 \\ -1 & x=2 \\ -x+2 & x>2 \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

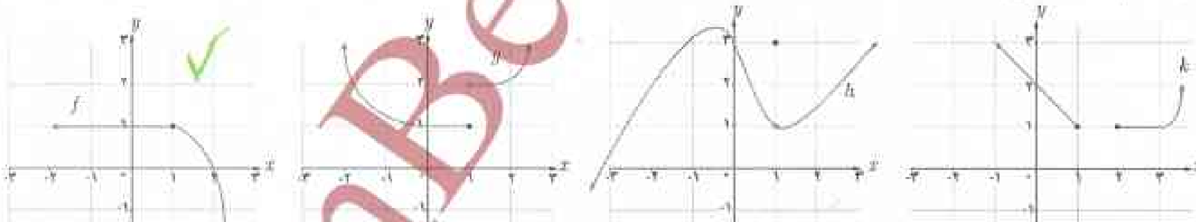
۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3 \\ 6 & x=3 \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=3$ بررسی کنید.

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -2x+2 & x\leq 0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=1$ مساوی -1 باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۷ کدام‌یک از توابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases} 6t+4 & 0\leq t<1 \\ 2t+10 & 1\leq t\leq 10 \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود :

$$f(\tfrac{1}{2})=6\times(\tfrac{1}{2})+4=7$$

۶ ماه $\rightarrow \frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ سال

الف) $f(2)$ و $f(5)$ را بیابید.   ب) آیا f در بازهٔ $[0,10]$ پیوسته است؟

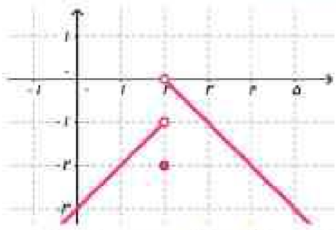
تمرین ۱: $f(x)=2x+1 \qquad g(x)=2x+1 \quad (x\neq 2) \qquad h(x)=\begin{cases}2x+1 & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$

الف) $f(2)=2(2)+1=4+1=5$ – $g(2)$ وجود ندارد – $h(2)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ – $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=5$ – $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=5$

پ) فقط تابع $f(x)$ در $x=2$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

تمرین ۲: $f(x)=\begin{cases}x-3 & x<2\\ -2 & x=2\\ -x+2 & x>2\end{cases}$



این تابع در تمام نقاط دامنه اش به غیر از نقطه $x=2$ پیوسته است زیرا:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد $\Leftarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2-3=-1 \;,\; \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-2+2=0$

تمرین ۳: $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & x\neq 3\\ 6 & x=3\end{cases}$

تابع $g(x)$ در نقطه $x=3$ ناپیوسته است زیرا $g(3)$ تعریف نشده است.

تابع $f(x)$ در $x=3$ پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6 \;,\; f(3)=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$$

تمرین ۴: تابع $f(x)=[x]$ در تمام نقاط $x_0\notin\mathbb{Z}$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

و در تمام نقاط $x_0\in\mathbb{Z}$ ناپیوسته است. زیرا: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

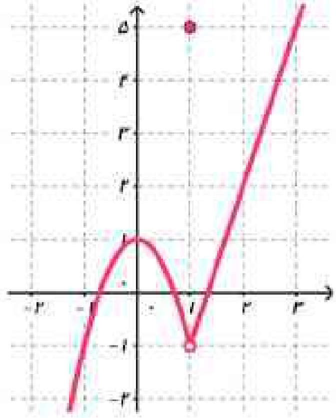
تمرین ۵: $f(x)=\begin{cases}-2x+2 & x\leq 0\\ x^2+2 & x>0\end{cases}$

تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته است زیرا:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2)=(0)^2+2=2\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-2x+2)=-2(0)+2=2\\ f(0)=-2(0)+2=2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$$

تابع $f(x)$ در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

تمرین ۶:

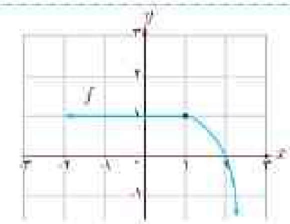


تابع $f(x)=\begin{cases}3x-4 & x>1\\ 5 & x=1\\ -2x^2+1 & x<1\end{cases}$ در $x=1$ حد دارد زیرا:

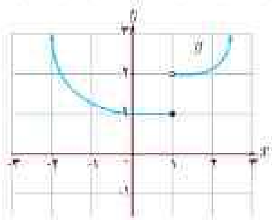
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+}(3x-4)=3(1)-4=3-4=-1\\ \lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-}(-2x^2+1)=-2(1)^2+1=-2+1=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to1} f(x)=-1$$

اما این تابع در نقطه $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $f(1)=5$ پس $\lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$

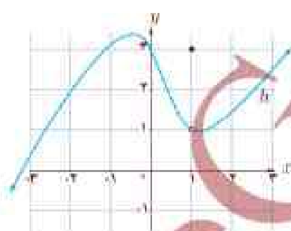
تمرین ۷:



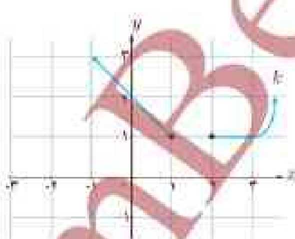
تابع $f(x)$ در $x=1$ پیوسته است زیرا: $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$



تابع $g(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x\to1^+} g(x)\neq \lim_{x\to1^-} g(x)$



تابع $h(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x\to1} h(x)\neq h(1)$



تابع $k(x)$ در $x=1$ ناپیوسته است زیرا: $\lim_{x\to1^-} k(x)=1$ و $\lim_{x\to1^+} k(x)$ وجود ندارد

تمرین ۸: $f(t)=\begin{cases}6t+4 & 0\le t<1\\ 2t+10 & 1\le t<10\end{cases}$

الف) $f(5)=2(5)+10=10+10=20$, $f(2)=2(2)+10=4+10=14$

ب) تابع f در بازهٔ $[0,10]$ پیوسته است زیرا: به ازای هر $x\in(0,10)$ تابع f پیوسته است و در نقطه $x=0$ پیوستگی راست دارد و در نقطه $x=10$ پیوستگی چپ دارد.