

قانون احتمال کل

یادآوری

در پایه‌های قبل با مفهوم احتمال و برخی تعاریف مرتبط با آن آشنا شده‌اید. در زیر خلاصه‌ای از این مطالب آورده شده است.

۱- پدیده تصادفی: پدیده یا آزمایشی است که نتیجه آن را توان قبل از انجام، به طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲- فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳- پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴- پیشامدها و اعمال روی آنها: فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد: پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

۵- رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه حالت‌های ممکن}}$$

۶- رابطه محاسبه احتمال اجتماع دو پیشامد A و B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

۷- پیشامدهای ناسازگار: دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ به بیان دیگر $A \cap B = \emptyset$ در این صورت داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۸- تعمیم پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A_1 و A_2 و \dots و A_n را دو به دو ناسازگار می‌گوییم، هرگاه هیچ دوتایی از آنها نتوانند با هم رخ دهند. در این صورت داریم:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

۹- احتمال شرطی: منظور از «احتمال A به شرط B » که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است و داریم:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$$

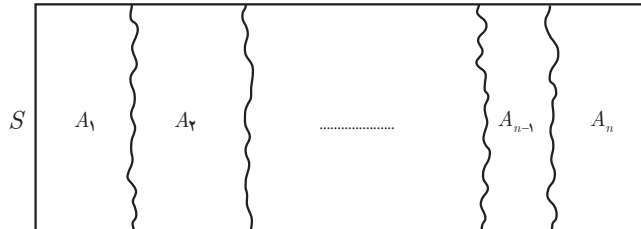
۱۰- پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B از هم مستقل اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد. مستقل بودن دو پیشامد A و B معادل است با اینکه $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

قانون احتمال کل

— افراز^۱ فرض کنیم A_1 و A_2 و \dots و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعه S باشند، به گونه‌ای که اجتماع همه آنها برابر S ، و اشتراک هر دو تای آنها برابر \emptyset باشد، در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم:

$$1) A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S \quad \left(\bigcup_{i=1}^n A_i = S \right)$$

$$2) A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1 \cap A_3 = \emptyset, \dots, A_{n-1} \cap A_n = \emptyset \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j)$$

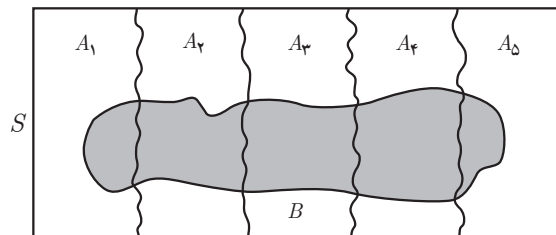


مثال: کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \{1\}$ باشند، در این صورت A, B, C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

مثال: مجموعه اعداد گویا و مجموعه اعداد اصم یک افراز روی مجموعه اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

سؤال: اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی باشد و A_1, A_2, \dots, A_n مانند آنچه گفته شد یک افراز روی S درست کنند. آیا پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n دو به دو ناسازگارند؟ چرا؟ آیا امکان دارد هیچ کدام از پیشامدهای A_1, A_2, \dots, A_n اتفاق نیفتند؟



فرض کنید پیشامدهای A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 مانند شکل مقابل یک افراز روی فضای نمونه‌ای S درست کرده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup (B \cap A_4) \cup (B \cap A_5)$$

که در آن $B \cap A_i$ و $B \cap A_j$ برای هر $i \neq j$ ناسازگارند. چرا؟

بنابراین داریم^۲:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + P(B \cap A_4) + P(B \cap A_5) = \sum_{i=1}^5 P(B \cap A_i)$$

اما از آنچه در احتمال شرطی مشاهده کردیم داریم:

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Rightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$

۱- مفهوم افراز صرفاً جهت استفاده در قانون احتمال کل بیان شده است و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مدنظر نیست.

۲- نماد \sum که سیگما خوانده می‌شود برای نمایش جمع چند عبارت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

و بنابراین رابطهٔ کاربرد زیر حاصل خواهد شد:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

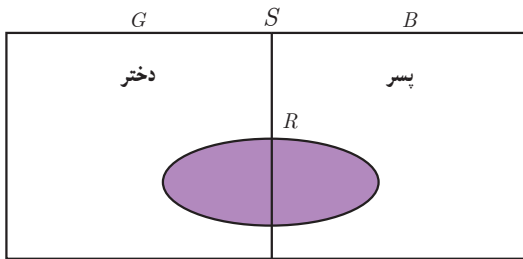
حال اگر فرض کنیم در حالت کلی A_1, A_2, \dots, A_n پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد، رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن **قانون احتمال کل** می‌گوییم:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

مثال: اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر 0.08 و نوزاد دختر 0.03 باشد و خانواده‌ای قصد بچه‌دار شدن داشته باشد، به چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟
قبل از اینکه مسئلهٔ فوق را حل کنیم فرض کنید یکی از اعداد زیر جواب مسئلهٔ فوق است. حدس بزنید کدام عدد می‌تواند جواب باشد؟
برای رد کردن گزینه‌هایی که فکر می‌کنید نادرست‌اند، دلیل بیاورید.

۱ 0.09 0.08 0.055 0.03 0.01 0

حل:



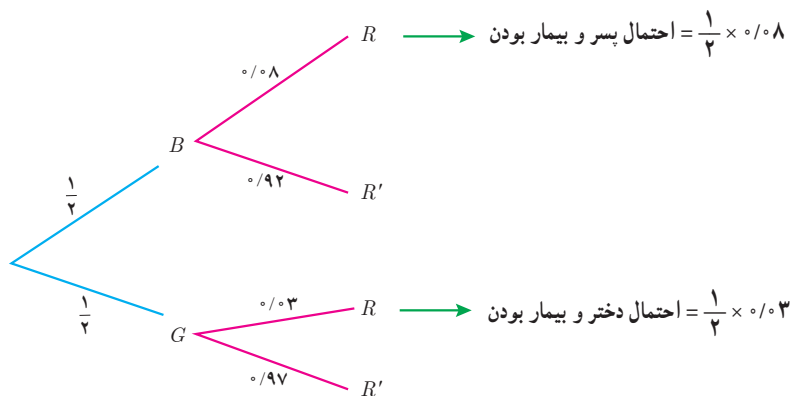
از آنجا که در ابتدا نسبت نوزادان بیمار به کل نوزادان را نداریم، لذا نمی‌توانیم به‌طور مستقیم احتمال مورد نظر را محاسبه نماییم. اما می‌دانیم نسبت نوزادان پسر بیمار به کل نوزادان پسر برابر $\frac{8}{100}$ و همین نسبت برای نوزادان دختر $\frac{3}{100}$ است و احتمال پسر (دختر) بودن نوزاد نیز $\frac{1}{4}$ است. بنابراین با توجه به قانون احتمال کل خواهیم داشت:

$$P(\text{دختر بودن} | \text{بیمار بودن}) = P(\text{دختر بودن}) \cdot P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن}) + P(\text{پسر بودن} | \text{بیمار بودن})$$

و اگر پیشامد پسر بودن را با B و دختر بودن را با G و بیمار بودن را با R نمایش دهیم داریم:

$$P(R) = P(B)P(R|B) + P(G)P(R|G) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{100} = \frac{11}{200}$$

برای حل این مثال می‌توان از نمودار درختی نیز استفاده کرد. به نمودار درختی زیر دقت کنید و علت نوشتن هر عدد و راه‌حل ارائه شده را شرح دهید.



$$\Rightarrow \text{احتمال بیمار بودن} = \frac{1}{4} \times 0.08 + \frac{1}{4} \times 0.03$$

مثال: ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟
 حل: پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به ترتیب با A_1, A_2, A_3, A_4 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم:

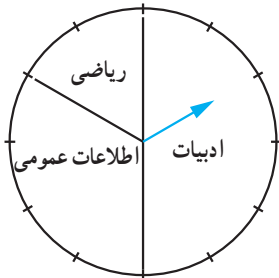
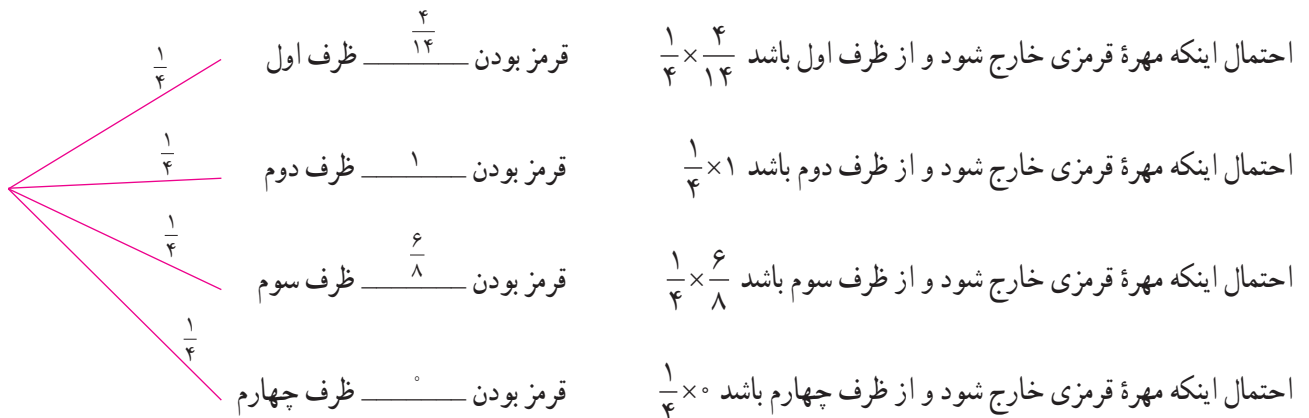
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14} \quad P(B|A_2) = 1 \quad P(B|A_3) = \frac{6}{8} \quad P(B|A_4) = 0$$

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

با نمودار درختی به صورت زیر نیز می‌توان مسئله را حل کرد:



مثال: سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بسته سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بسته سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل مقابل نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

حل: اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به ترتیب با A_1, A_2, A_3 و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت:

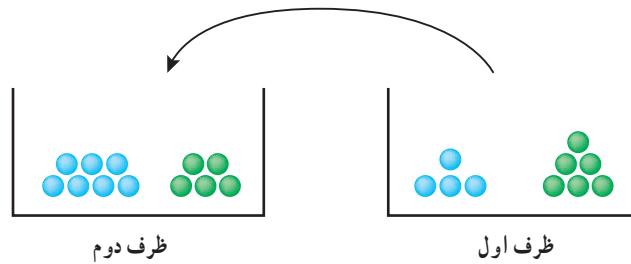
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{90}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} = \frac{5}{6}$$

مثال: دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟

حل: مهره انتخاب شده از ظرف اول یا سبز است و یا آبی. اگر این پیشامدها را به ترتیب با G و B و پیشامد انتخاب مهره سبز از ظرف دوم را با A نمایش دهیم خواهیم داشت: $P(B) = \frac{4}{10}$ و $P(G) = \frac{6}{10}$ و $P(A|G) = \frac{6}{13}$ (چرا؟) و $P(A|B) = \frac{5}{13}$ (چرا؟). در این صورت داریم:

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B) = \frac{6}{10} \times \frac{6}{13} + \frac{4}{10} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{130}$$



تمرین‌ها

۱ دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آنها معیوب است و درون جعبه دیگر ۹۶ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده، یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

۲ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

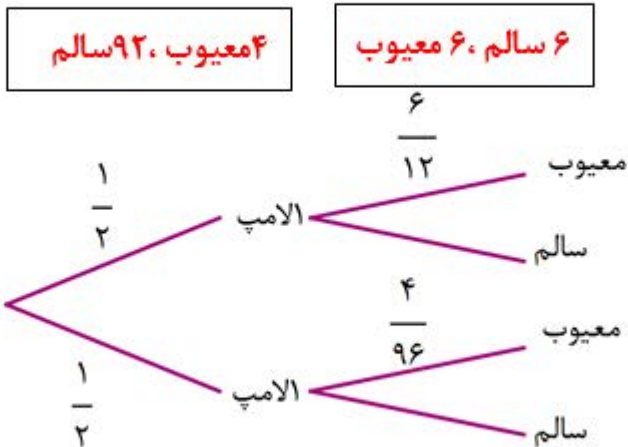
۳ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟

۴ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A ، ۲ تا از نوع B و ۱۵ تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A ، $\frac{4}{5}$ ، برای نوع B ، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C ، $\frac{1}{4}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟

۵ مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

تمرین ۱:

جعبه در باز



$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{12} + \frac{1}{2} \times \frac{6}{96} = \frac{48}{192} + \frac{4}{192} = \frac{52}{192} = \frac{13}{48}$$

تمرین ۲:

$$p(A) = \frac{۲۰}{۱۰۰} \quad , \quad p(B) = \frac{۵۰}{۱۰۰} \quad , \quad p(C) = \frac{۳۰}{۱۰۰}$$

$$p(D|A) = \frac{۳}{۱۰۰} \quad , \quad p(D|B) = \frac{۵}{۱۰۰} \quad , \quad p(D|C) = \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$P(D) = p(A) \times p(D|A) + p(B) \times p(D|B) + p(C) \times p(D|C) = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$\frac{۶ + ۲۵ + ۳}{۱۰۰۰} = ۰ / ۰۳۴ = ۳ / ۴ \%$$

تمرین ۳:

$$S = \{R, PPPP, PPPR, PPRP, PRPP, PRRP, PRPR, PPRR, PRRR\}$$

$$A = \{R, PPPR, PPRP, PRPP\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

تمرین ۴:

A	۵
B	۲
C	۱۵

۲۲

$$P(kh | A) = \frac{۴}{۵} \quad P(kh | B) = \frac{۹}{۱۰} \quad P(kh | C) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(kh) = P(A) \times P(kh | A) + P(B) \times P(kh | B) + P(C) \times P(kh | C)$$

$$P(kh) = \frac{۵}{۲۲} \times \frac{۴}{۵} + \frac{۲}{۲۲} \times \frac{۹}{۱۰} + \frac{۱۵}{۲۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۱۱} + \frac{۹}{۱۱۰} + \frac{۱۵}{۴۴} = \frac{۴۰ + ۹ + ۳۳}{۲۲۰} = \frac{۸۲}{۲۲۰}$$

تمرین ۵:

$$P(Q) = P(\text{ریاضی}) \times P(Q|\text{ریاضی}) + P(\text{تجربی}) \times P(Q|\text{تجربی}) + P(\text{انسانی}) \times P(Q|\text{انسانی})$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{45}{100} + \frac{6}{10} \times \frac{10}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{30}{100} = \frac{45 + 60 + 90}{1000} = \frac{195}{1000} = 19.5\%$$

hamyar.in

همیار