حسابان (۱)

مؤلف:
شاپور مددپور

پایه‌ی یازدهم

کم‌رنگ‌ترین قلمها از قوی‌ترین حافظه‌ها پایدارترند • خردادماه ۱۳۹۶

madad_sh@yahoo.com

فهرست مطالب

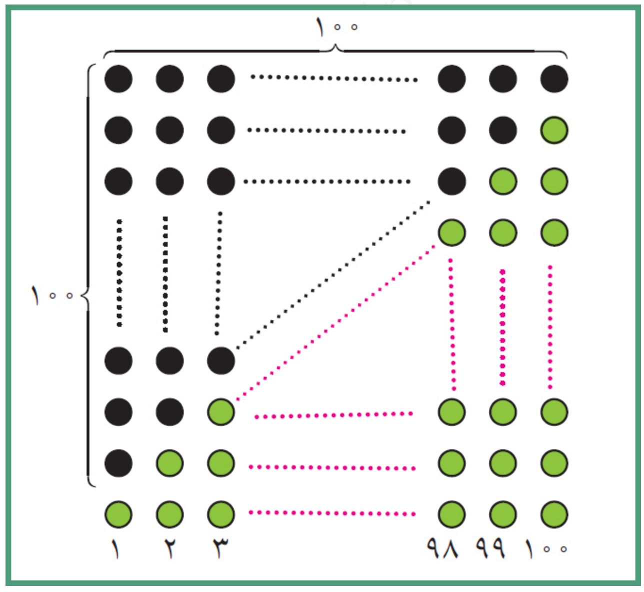
فصل ۱

جبر و معادله

۱.۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۱.۱.۱ مجموع جملات دنباله‌ی حسابی یا عددی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آن ها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به دست آورند.



شکل ۱.۱: مجموع اعداد طبیعی از یک تا صد

در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به سرعت به‌دست می‌آورد و به معلم ارائه می‌کند. آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به سرعت انجام دهید؟ شکل صفحه‌ی قبل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.

فعالیت ۱.۱.۱. از شکل (۱.۱) چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد؟

حل: با توجه به چیدمان بالا دو بار مجموع اعداد طبیعی یک تا صد را نوشته‌ایم. اگر مجموع اعداد یک تا صد را S فرض کنیم داریم:

$$۲S = ۱۰۰ \times ۱۰۱ \hookrightarrow S = ۵۰۵۰$$

■

از الگوی فعالیت فوق می‌توان برای محاسبه‌ی مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n به صورت زیر استفاده کرد.

می‌دانیم جملات دنباله عددی به صورت $a = t_1, t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n-1}, t_n = L$ بودند. برای پیدا کردن مجموع جملات آن به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم جمله‌ی آخر آن $L = t_n$ باشد پس داریم:

$$\begin{cases} S_n = (a) + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (L-d) + (L) \\ S_n = (L) + (L-d) + (L-2d) + (L-3d) + \cdots + (a+d) + (a) \end{cases}$$

$$2S_n = \overbrace{(a+L) + (a+L) + (a+L) + \cdots + (a+L)}^{n \text{ مرتبه}}$$
$$2S_n = n(a+L) \to \quad S_n = \frac{n}{2}(a+L) \quad but \quad L = a + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a + a + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

دستور ۱

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \qquad S_n = \frac{n}{2}(a+L)$$

مثال ۱.۱.۱

مجموع ۱۱ جمله از دنباله‌ی عددی $-5, -1, 3, \dots$ را بیابید.

حل:

$$-5, -1, 3, \dots$$
$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \hookrightarrow S_{11} = \frac{11}{2}(2(-5) + (11-1)4) = 165$$

■

مثال ۱.۲.۱

مجموع چندجمله از دنباله‌ی عددی $-5, -1, 3, \dots$ مساوی ۱۶۵ می‌شود؟

حل:

$$-5, -1, 3, \dots$$
$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \hookrightarrow 165 = \frac{n}{2}(2(-5) + (n-1)4)$$
$$\hookrightarrow 165 = \frac{n}{2}(4n - 14) \hookrightarrow 2n^2 - 7n - 165 = 0$$
$$\xrightarrow{\text{بعد از حل معادله داریم}} \boxed{n = 11}, n = -7/5 \text{ غ.ق.}$$

■

تمرین ۱.۱.۱. نشان دهید $1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2(1) + (n-1) \times 2] = \frac{n}{2}[2n] = n^2$$

■

مثال ۱.۳.۱

دنباله‌ی اعداد طبیعی را به‌گونه‌ای دسته‌بندی می‌کنیم که هر گروه به عدد مجذور کامل به صورت زیر ختم شود.

$$(۱), (۲, ۳, ۴), (۵, ۶, ۷, ۸, ۹), (۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶), \cdots$$

مجموع ارقام جملات گروه mاُم را به‌دست آورید.

حل: ابتدا به این نکته توجه می‌کنیم که هر دسته با چه عددی شروع می‌شود. با کمی دقت متوجه می‌شویم که دسته‌ی اول با $۱ + ۰^۲$ و دسته‌ی دوم با $۱ + ۱^۲$ و به همین ترتیب دسته‌ی mاُم با $۱ + ۲(m-۱)$ شروع و به $m^۲$ ختم می‌شود. حال تعداد جملات دسته‌ی mاُم را به دست می‌آوریم.

$$t_n = a + (n-۱)d \hookrightarrow m^۲ = (m-۱)^۲ + ۱ + (n-۱) \hookrightarrow \boxed{n = ۲m - ۱}$$

پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(a+L) = \frac{۲m-۱}{۲}\Big((m-۱)^۲ + ۱ + m^۲\Big) = (۲m-۱)(m^۲ - m + ۱)$$

■

تمرین ۲.۱.۱. اعداد فرد را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(۱), (۳, ۵), (۷, ۹, ۱۱), (۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹), \cdots$$

در این دسته‌بندی تعداد جملات گروه nاُم برابر n است. مجموع اعداد گروه صدم را حساب کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

مثال ۱.۴.۱

در دنباله‌های عددی زیر چند جمله‌ی مشترک سه‌رقمی داریم؟

$$۴, ۷, ۱۰, \cdots \qquad ۱, ۵, ۹, \cdots$$

حل: ابتدا جملات دنباله‌ها را ادامه می‌دهیم تا اولین جمله‌ي مشترك به وجود آيد: ■

$$۴, ۷, ۱۰, \boxed{۱۳}, \cdots \qquad ۱, ۵, ۹, \boxed{۱۳}, \cdots$$

قدر نسبت دو دنباله به ترتیب ۴, ۳ می‌باشد و ك.م.م آنها برابر ۱۲ است .پس فرم جملات مشترك دو دنباله به فرم $۱۳ + ۱۲n$

$$۱۰۰ \le ۱۳ + ۱۲n \le ۹۹۹ \xrightarrow{-۱۳} ۸۷ \le ۱۲n \le ۹۸۷ \xrightarrow{:۱۲} ۷٫۲۵ \le n \le ۸۲٫۲۵$$

پس n می‌تواند یکی از اعضاء مجموعه‌ی زیر باشد. $\{8, 9, 10, \cdots, 82\}$ که در نتیجه ۷۵ جمله‌ی مشترک داریم.

تمرین ۳.۱.۱. مجموع صد جمله‌ی مشترک اولیه‌ی دنباله‌های زیر را به دست آورید.

$$16, \boxed{21}, 26, 31, \cdots \qquad\qquad 17, \boxed{21}, 25, 29, \cdots$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

۲.۱.۱ مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

جملات دنباله‌ی هندسی به صورت $a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, t_n = aq^{n-1}, \ldots$ بودند. برای یافتن مجموع جملات آن به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنیم جمله آخر آن $L = t_n$ باشد پس داریم:

$$q \times \{S_n = (a) + (aq) + (aq^2) + (aq^3) + \cdots + aq^{n-1} \quad , \quad q \neq 1$$

$$qS_n = (aq) + (aq^2) + (aq^3) + \cdots + aq^n$$

$$qS_n - S_n = aq^n - a \to S_n\,(q-1) = a\,(q^n - 1) \to S_n = \frac{a\,(q^n-1)}{(q-1)}$$

$$S_n = \frac{(aq^n - a)}{(q-1)} = \frac{(aqq^{n-1} - a)}{(q-1)} = \frac{(Lq - a)}{(q-1)} \to S_n = \frac{(Lq-a)}{(q-1)}$$

دستور ۲

$$S_n = \frac{(Lq-a)}{(q-1)} \qquad\qquad S_n = \frac{a\,(q^n-1)}{(q-1)}$$

توجه

توجه کنید که در حالت $a = 1, \; q = 1$ مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی دنباله‌ی هندسی $S_n = na$ می‌باشد و نیازی به فرمول فوق نیست.

مثال ۱.۵.۱

دردنباله‌ی هندسی $\ldots, -۱۲, ۶, -۳$ مجموع ۵ جمله‌ی اولیه‌ی این دنباله را بیابید.

حل:

$$-۳, ۶, -۱۲, \ldots$$
$$S_n = \frac{a\left(q^n - ۱\right)}{(q-۱)} \to S_۵ = \frac{(-۳)\left((-۲)^۵ - ۱\right)}{(-۲-۱)} = (-۲)^۵ - ۱ = -۳۳$$

■

نکته‌ی ۱.۱.۱

اگر در دنباله‌ی هندسی $|q| < ۱$ آنگاه داریم:

$$\lim_{n\to\infty} (q^n) = ۰$$

و با جای‌گذاری در فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی داریم:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(q^n-۱\right)}{(q-۱)} = \frac{-a}{q-۱} = \frac{a}{۱-q}$$

که در واقع حد مجموع جملات در بی نهایت به دست می‌آید.

دستور ۳

فرمول حدمجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی	$S = \frac{a}{۱-q}$

مثال ۱.۶.۱

حد مجموع جملات دنباله‌ی هندسی $۱, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۹}, \ldots$ را بیابید.

حل: چون $|q| < ۱$, $q = \frac{۱}{۳}$ است پس داریم:

$$S = \frac{a}{۱-q} \hookrightarrow S = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۳}{۲}$$

و این بدان معنی است که:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{۳^n} = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۳^n} + \cdots = \frac{۳}{۲}$$

■

مثال ۱.۷.۱

حد مجموع $A = ۱ + \sqrt{۲} + ۴ + ۲ + ۷ + ۲\sqrt{۲} + \cdots + ۱۹ + ۸\sqrt{۲}$ را بیابید.

حل: ابتدا به جملات یکی در میان توجه کنید:

$$A_1 = 1 + 4 + 7 + \cdots + 19$$
$$A_2 = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2}$$

که اولی دنباله‌ی عددی با قدر نسبت ۳ و ۷ جمله دارد و دومی دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\sqrt{2}$ و با ۷ جمله می‌باشد و داریم:

$$A_1 = 1 + 4 + 7 + \cdots + 19 \rightarrow S_7 = \frac{7}{2}\left[2\left(1\right) + \left(7-1\right)3\right] = 70$$
$$A_2 = \sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} + \cdots + 8\sqrt{2} \rightarrow S_7 = \frac{\sqrt{2}\left(1-\left(\sqrt{2}\right)^7\right)}{1-\sqrt{2}} = 15\sqrt{2} + 14$$
$$A = A_1 + A_2 = 70 + 15\sqrt{2} + 14 = 84 + 15\sqrt{2}$$

■

فعالیت ۲.۱.۱. می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه‌ی اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه‌ی دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه‌ی سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟[1]

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۱.۱.۱. موجی بر روي نيم دايره‌ي بالاي یک محور با قطر اوليه‌ي یک واحد ،حرکت می‌کند .هربار که به محور برخورد می‌کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود.اندازه‌ي محيط اين نيم دايره‌هاي متوالی ،دنباله‌اي از اعداد حقيقی است.مجموع اين دنباله‌ها کدام است؟

۱) 2π ۲) 3π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

[1] این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

تمرین‌هایی برای فصل ۱.۱

تمرین ۴.۱.۱. جمله‌ي اول و هشتم يك دنباله‌ی عددي به ترتيب ۲− و ۱۹ مي‌باشد نسبت مجموع ۵۰ جمله‌ي اوليه‌ي دنباله به مجموع ۵۰ جمله‌ي بعدي از دنباله كدام است؟

حل:

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = a = -2 \\ \\ t_8 = 19 \end{array}\right\} t_n = a + (n-1)\,d \to 19 = (-2) + (8-1)\,d \to d = 3$$

$$\frac{S_{50}}{S_{100} - S_{50}} = ?$$

$$s_{50} = \tfrac{50}{2}\left[2\,(-2) + (50-1)\,3\right] = 25\,(143) = 3575$$

$$S_{100} = \tfrac{100}{2}\left[2\,(-2) + (100-1)\,3\right] = 50\,(293) = 14650$$

$$\frac{S_{50}}{S_{100} - S_{50}} = \frac{3575}{11075}$$

■

تمرین ۵.۱.۱. اگر مجموع n جمله‌ي نخست يك دنباله حسابي $s_n = \frac{n^2}{2} - 3n$ باشد جمله‌ي سوم آن كدام است؟

دستور ۴

فرمول به‌دست آوردن جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی عددی بر حسب مجموع جملات آن	$t_n = S_n - S_{n-1}$

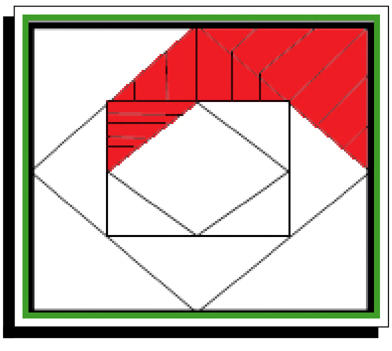
حل: می‌دانیم: $t_n = S_n - S_{n-1}$ پس داریم:

$$t_n = S_n - S_{n-1} = \left(\frac{n^2}{2} - 3n\right) - \left(\frac{(n-1)^2}{2} - 3\,(n-1)\right) = \frac{2n-7}{2}$$

$$t_3 = \frac{6-7}{2} = -\frac{1}{2}$$

■

تمرین ۶.۱.۱. مربعی به ضلع ۴ سانتیمتردر اختیار داریم وسط اضلاع این مربع را به طور متوالی به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید به دست آید یکی از بخشهای مثلث شکل کناری را رنگ می‌زنیم اگر این عمل را تا بینهایت ادامه دهیم در نهایت مجموع مساحتهای ناحیه‌ی رنگی را به دست آورید مساحت این ناحیه چه کسری ازمساحت مربع است؟ به نمودار توجه کنید.



حل: دنباله‌ی مساحتهای مثلث‌های به وجود آمده را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}&S=4\times 4=16\\&\frac{S}{8},\frac{S}{16},\dots\rightarrow 2,1,\frac{1}{2},\dots\Rightarrow a=2\quad q=\frac{1}{2}\quad |q|<1\\&S=\frac{a}{1-q}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}=4\end{aligned}$$

■

تمرین ۷.۱.۱. احمد می‌خواهد پول‌های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوقِ او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

حل: الف) دنباله‌ی پولهای اضافه شده او در روزهای متوالی به صورت روبرو است.

$$1000, 1000\times\frac{99}{100},\dots$$

$$1000, 990, 980.1,\dots$$

این دنباله یک دنباله‌ی هندسی است با قدر نسبت $q=0.99$ که جمله‌ی بیستم آن مورد نظر است.

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}\\S_{20}&=\frac{1000\left(1-(0.99)^{20}\right)}{1-0.99}=18209.30624\end{aligned}$$

ب)

$$q=\frac{99}{100}\ ,\ |q|<1\hookrightarrow S=\frac{1000}{1-0.99}=100000$$

و این یعنی این‌که در بینهایت مجموع پول او به ۱۰۰۰۰۰ نزدیک می‌شود. ■

تمرین ۸.۱.۱. برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

حل: راه اول: پس از گذر از هر لایه شدت تابش نصف می‌شود پس دنباله کاهش شدت به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots,\frac{1}{2^n},\dots$$

اما اگر شدت ۹۹ درصد کاهش یابد به این معنی است که جمله‌ی nام آن از $\frac{1}{100}$ کمتر شود پس

$$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}\hookrightarrow 2^n>100\hookrightarrow n>6\quad \min(n)=7$$

راه دوم: با توجه به فرمول مجموع جملات دنباله‌ی هندسی داریم:

$$\begin{aligned}&S_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\geq\frac{99}{100}\hookrightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{99}{100}\\&\hookrightarrow\frac{1}{2^n}<\frac{1}{100}\hookrightarrow 2^n>100\rightarrow n>6\quad\min(n)=7\end{aligned}$$

■

تمرین ۹.۱.۱. با استفاده از دستور محاسبه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

۱. $x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1\right)$

۲. $x^n + 1 = (x+1)\left(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots - x + 1\right)$، n فرد است

حل: اثبات ۱) برای اثبات این اتحاد دنباله‌ی

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, x^{n-1}$$

را در نظر می‌گیریم و مجموع جملات این دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول یک و قدر نسبت x را محاسبه می‌کنیم:

$$1, x, x^2, \ldots, x^{n-3}, x^{n-2}, x^{n-1}$$

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1}$$

$$S_n = \frac{1\left(x^n - 1\right)}{x-1} \hookrightarrow S_n(x-1) = x^n - 1 \hookrightarrow$$
$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x + 1\right)$$

قسمت دوم مشابه قسمت قبل و به عهده‌ی شما که در آن دنباله‌ی

$$1, -x, x^2, \ldots, x^{n-3}, -x^{n-2}, x^{n-1}$$

را در نظر می‌گیریم و مجموع جملات این دنباله هندسی با جمله اول یک و قدر نسبت $-x$ را محاسبه کنید. ■

قسمت دوم. حل: به عهده‌ی شما

■

✓

تمرین ۱۰.۱.۱. با استفاده ازتمرین قبل در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

حل:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^n - b^n = a^n\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right) = a^n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right) =$$
$$a^n\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right) =$$
$$a^{n-1} \times a \times \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \cdots + \frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right) =$$
$$(a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

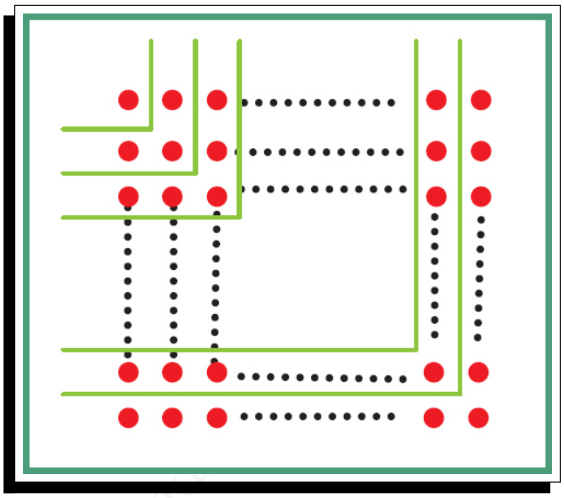
■

تمرین ۱.۱.۱۱. در دنباله‌ی حسابی $۵, ۸, ۱۱, \ldots$ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۲. به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$



حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۳. در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

حل: می‌دانیم $۱۰^۶$ گرم معادل یک تن است. پس داریم:

$$S_{۶۴} = ۲^{۶۴} - ۱ > ۲^{۶۳} > (۲^۷)^۹ = (۱۲۸)^۹ > (۱۰^۲)^۹ = ۱۰^{۱۲} \times ۱۰^۶$$

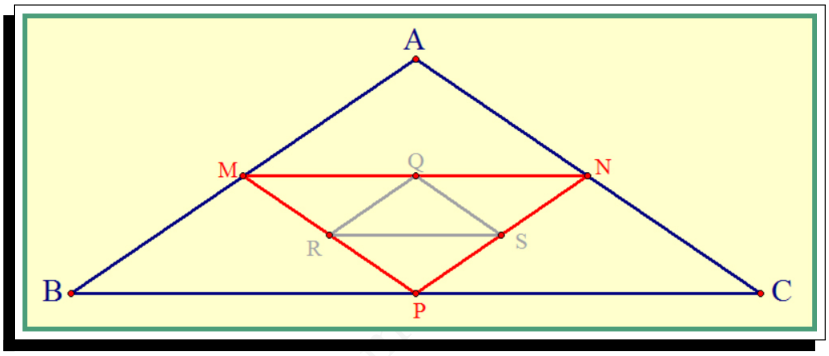
■

تمرین ۱.۱.۱۴. در ۲۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۵.۱.۱. یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۶.۱.۱. برای عددی حقیقی a و عدد طبیعی n فرض کنید؛

$$S = ۱ + a + a^{۲} + a^{۳} + \cdots + a^{n-۱}$$

آ. عبارت $aS - S$ را تشکیل دهید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید:

$$(a^n - ۱) = (a - ۱)(a^{n-۱} + a^{n-۲} + a^{n-۳} + \cdots + a + ۱)$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. اگر n عددی فرد باشد با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید:

$$(a^n + ۱) = (a + ۱)(a^{n-۱} - a^{n-۲} + a^{n-۳} - \cdots - a + ۱)$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۷. مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ي زیر را تعیین کنید.

$$۱, ۱۱, ۱۱۱, ۱۱۱۱, \ldots, \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱}_{n \text{ مرتبه}}$$

حل:

$$S_n = ۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + ۱۱۱۱ + \cdots + \underbrace{۱۱۱\ldots۱۱۱}_{n \text{ مرتبه}}$$
$$۹S_n = ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ۹۹۹۹ + \cdots + \underbrace{۹۹۹\ldots۹۹۹}_{n \text{ مرتبه}}$$
$$۹S_n = (۱۰ - ۱) + (۱۰^۲ - ۱) + (۱۰^۳ - ۱) + (۱۰^۴ - ۱) + \cdots + (۱۰^n - ۱)$$
$$۹S_n = (۱۰ + ۱۰^۲ + ۱۰^۳ + \cdots + ۱۰^n) - n(۱)$$
$$۹S_n = \frac{۱۰(۱۰^n - ۱)}{۱۰ - ۱} - n = \frac{۱۰(۱۰^n - ۱) - ۹n}{۹}$$
$$\xrightarrow{\text{بعد از ساده شدن داریم}} S_n = \frac{۱۰^{n+۱} - ۹n - ۱۰}{۸۱}$$

■

تمرین ۱.۱.۱۸. به کمک تمرین قبل مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ي زیر را تعیین کنید.

$$۵, ۵۵, ۵۵۵, ۵۵۵۵, \dots, \underbrace{۵۵۵\dots۵۵۵}_{n \text{ مرتبه}}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۱۹. ضریب $x^۲$ را در عبارت زیر به‌دست آورید.

$$(۱+x)+(۱+x)^۲+(۱+x)^۳+\cdots+(۱+x)^{۲۰}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۱.۲۰. در یک دنباله‌ي عددي اگر داشته باشیم $\frac{S_n}{S_m}=\frac{n^۲}{m^۲}$ ثابت کنید:

$$\frac{t_n}{t_m}=\frac{۲n-۱}{۲m-۱} \quad (n\neq m)$$

حل:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d) \quad , \quad S_m=\frac{m}{۲}(۲a+(m-۱)d)$$

$$\frac{S_n}{S_m}=\frac{\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)}{\frac{m}{۲}(۲a+(m-۱)d)}=\frac{n^۲}{m^۲}\hookrightarrow (m-n)(۲a-d)=۰ \xrightarrow{m\neq n} \boxed{a=\frac{d}{۲}}$$

$$\frac{t_n}{t_m}=\frac{a+(n-۱)d}{a+(n-۱)d}=\frac{\frac{d}{۲}+(n-۱)d}{\frac{d}{۲}+(m-۱)d}=\frac{۲n-۱}{۲m-۱} \quad (n\neq m)$$

■

۲.۱ معادلات درجه‌ی دوم

در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادله‌های درجه‌ی اول و درجه دوم آشنا شدید. هر معادله‌ی درجه‌ی دوم به صورت $y = ax^۲ + bx + c \quad a \neq ۰$ که جواب‌های آن در صورت وجود از رابطه‌ی $x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}$ به دست می‌آیند. در این بخش با برخی از انواع معادلات، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم و نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

تمرین ۱.۲.۱. معادله‌ی $۳x^۲ = ۵x + ۲$ را به دو روش دلتا و تجزیه حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما

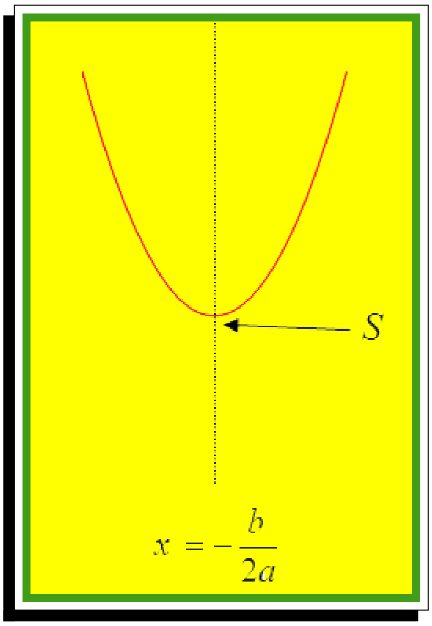
✓ ■

تمرین ۲.۲.۱. اگر $x = -۱$ یک ریشه از معادله‌ی $۴x^۲ - ax - ۷ = ۰$ باشد، ریشه‌ی دیگر کدام است؟

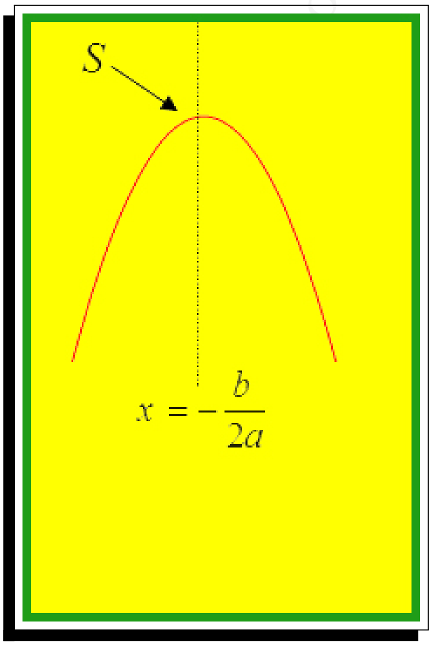
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

اگر $a > ۰$ باشد نمودار تابع $a \neq ۰ \quad y = ax^۲ + bx + c$ به فرم زیر است.



که در این حالت $x = -\frac{b}{۲a}$ معادله‌ی محورتقارن سهمی و $\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس و نیز نقطه‌ی مینیمم سهمی است.
اگر $a < ۰$ باشد نمودار تابع فوق به فرم زیر است.



که در این حالت $x = -\frac{b}{۲a}$ معادله‌ی محورتقارن سهمی و $\left(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}\right)$ مختصات رأس و نیز نقطه‌ی ماکزیمم سهمی است.

نکته‌ی ۲.۱.۱

در تابع فوق اگر $x = ۰$ باشد تقاطع نمودار با محور yها و اگر $y = ۰$ باشد تقاطع نمودار با محور xها یا همان ریشه‌ها یا صفرهای تابع درجه‌ی دوم به دست می‌آید.

مثال ۲.۱.۱

معادله‌ی محور تقارن تابع

$$S=\left\{(x,y)\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R},\text{۲}y-\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۲}x+\text{۴}=\text{۰}\right\}$$

را به دست آورید و تابع را رسم کنید.

حل: با مرتب کردن تابع داریم:

$$\text{۲}y-\text{۲}x^{\text{۲}}-\text{۲}x+\text{۴}=\text{۰}\hookrightarrow \text{۲}y=\text{۲}x^{\text{۲}}+\text{۲}x-\text{۴}\hookrightarrow y=x^{\text{۲}}+x-\text{۲}$$

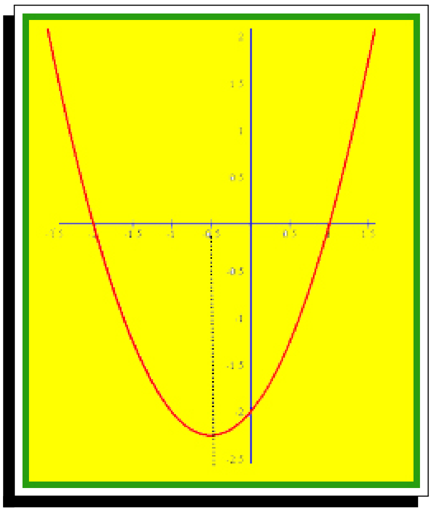
$$x=\text{۰}\hookrightarrow y=-\text{۲}\quad ,y=\text{۰}\hookrightarrow (x=\text{۱},x=-\text{۲})$$

$$x=-\frac{b}{\text{۲}a}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}\,(\text{۱})}=-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\hookrightarrow y=\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)^{\text{۲}}+\left(-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)-\text{۲}=\frac{-\text{۹}}{\text{۴}}=-\text{۲/۲۵}$$

$$S\left|\begin{matrix}-\text{۰/۵}\\ -\text{۲/۲۵}\end{matrix}\right.$$

■

x	-1	$-0/5$	0
y	-2	$-2/25$	-2



مثال ۲.۲.۱

اگر $x=\text{۲}$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^{\text{۳}}-x^{\text{۲}}-\text{۴}x+\text{۴}$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل: از آن‌جا که $\boxed{x=۲}$ یکی از صفرهای تابع است چند جمله‌ای نظیر آن عاملی به صورت $x-۲$ دارد. با تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ داریم؛

$$\begin{array}{rl}
x^{۳}-x^{۲}-۴x+۴ & = \big(x-۲\big)\big(x^{۲}+x-۲\big) \\
\underline{-x^{۳}+۲x^{۲}\qquad\qquad} & \\
x^{۲}-۴x\quad & \\
\underline{-x^{۲}+۲x\quad} & \\
-۲x+۴ & \\
\underline{۲x-۴} & \\
۰ &
\end{array}$$

پس داریم؛

$$x^{۲}+x-۲=(x+۲)(x-۱)=۰\hookrightarrow \boxed{x=۱},\boxed{x=-۲}$$

■

نکته‌ی ۲.۲.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a\neq ۰$, $ax^{۲}+bx+c=۰$ اگر مجموع ضرایب صفر شود یعنی $a+b+c=۰$ یکی از ریشه‌ها یک و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

مثال ۲.۳.۱

ریشه‌های معادله‌ی $۹۹x^{۲}-۹۳x-۶=۰$ را بیابید.

حل:

$$a+b+c=۰\rightarrow x_{۱}=۱, x_{۲}=\frac{c}{a}=-\frac{۶}{۹۹}=-\frac{۲}{۳۳}$$

■

نکته‌ی ۲.۳.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a\neq ۰$, $ax^{۲}+bx+c=۰$ اگر $b=a+c$ یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

مثال ۲.۴.۱

ریشه‌های معادله‌ی $۹۹x^{۲}+۹۳x-۶=۰$ را بیابید.

حل:

$$b=a+c\rightarrow x_{۱}=-۱, x_{۲}=-\frac{c}{a}=\frac{۶}{۹۹}=\frac{۲}{۳۳}$$

■

نکته‌ی ۲.۴.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $a \neq ۰$ ، $ax^۲ + bx + c = ۰$ مجموع و ضرایب ریشه‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$S = -\frac{b}{a} \quad , \quad P = \frac{c}{a}$$

اثبات:

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \; , a \neq ۰$$

$$x_۱ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x_۲ = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$S = x_۱ + x_۲ = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}\right) + \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_۱ . x_۲ = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a}\right) . \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a}\right) = \frac{c}{a}$$

■

دستور ۵

فرمول به‌دست آوردن جمع و ضرب ریشه‌ها در معادله‌ی درجه‌ی دوم

$$S = x_۱ + x_۲ = -\frac{b}{a}$$
$$P = x_۱ . x_۲ = \frac{c}{a}$$

توجه

به جای ریشه‌های $x_۱, x_۲$ معمولاً α, β یا x', x'' نیز به کار می‌رود.

دستور ۶

در معادله‌ی درجه‌ی دوم اگر مجموع ریشه‌ها S و حاصلضرب ریشه‌ها P باشد؛ $(\Delta \geq ۰)$

$$\alpha^۲ + \beta^۲ = S^۲ - ۲P$$
$$\alpha^۳ + \beta^۳ = S^۳ - ۳PS$$
$$(\alpha - \beta)^۲ = S^۲ - ۴P$$
$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال ۲.۵.۱

اگر β, α ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲ - ۵x + ۱ = ۰$ باشند بدون حل آن حاصل مقادیر زیر را بیابید.

$$\alpha^۲ + \beta^۲, \alpha^۳ + \beta^۳, (\alpha - \beta)^۲, |\alpha - \beta|, \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}, \alpha\beta^۲ + \alpha^۲\beta, \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$$

حل: با محاسبه‌ی

$$S = x_۱ + x_۲ = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = ۵$$

و

$$P = x_۱ . x_۲ = \alpha\beta = \frac{c}{a} = ۱$$

داریم:

$$\begin{cases} \alpha^۲ + \beta^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۲\alpha\beta = S^۲ - ۲P = ۲۵ - ۲ = ۲۳ \\ \alpha^۳ + \beta^۳ = (\alpha+\beta)^۳ - ۳\alpha\beta(\alpha+\beta) = S^۳ - ۳PS = \\ \qquad ۱۲۵ - ۳ \times ۱ \times ۵ = ۱۱۰ \\ (\alpha-\beta)^۲ = (\alpha+\beta)^۲ - ۴\alpha\beta = S^۲ - ۴P = ۲۵ - ۴ = ۲۱ \\ |\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{۲۵ - ۴(۱)(۱)}}{|۱|} = \sqrt{۲۱} \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^۲+\beta^۲}{\alpha\beta} = \frac{S^۲ - ۲P}{P} = \frac{۲۳}{۱} = ۲۳$$

$$\alpha\beta^۲ + \alpha^۲\beta = \alpha\beta(\alpha+\beta) = SP = ۵$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = t \hookrightarrow t^۲ = \alpha + \beta - ۲\sqrt{\alpha\beta} = S - ۲\sqrt{P} = ۵ - ۲ = ۳ \hookrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = t = \pm\sqrt{۳}$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t \hookrightarrow t^۲ = \alpha + \beta + ۲\sqrt{\alpha\beta} = S + ۲\sqrt{P} = ۵ + ۲ = ۷ \hookrightarrow$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t = +\sqrt{۷}$$

■

نکته‌ی ۲.۵.۱

در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲ + bx + c = ۰ , a \neq ۰$ اگر مجموع ریشه‌ها S و حاصلضرب ریشه‌ها P باشد داریم؛ $x^۲ - Sx + P = ۰$

اثبات:

$$ax^۲ + bx + c = ۰ , a \neq ۰ \hookrightarrow \div a$$

$$x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \to x^۲ - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = ۰ \hookrightarrow x^۲ - Sx + P = ۰$$

■

دستور ۷

پس به یاد داشته باشیم؛ $x^۲ - Sx + P = ۰$

مثال ۲.۶.۱

معادله‌ی درجه‌ي دومي بسازيد که ريشه‌هاي آن $۲ - ۳\sqrt{۵}, ۲ + ۳\sqrt{۵}$ باشند.

حل:

$$S = \left(۲ - ۳\sqrt{۵}\right) + \left(۲ + ۳\sqrt{۵}\right) = ۴ \hookrightarrow P = \left(۲ - ۳\sqrt{۵}\right) . \left(۲ + ۳\sqrt{۵}\right)$$
$$= ۴ - ۴۵ = -۴۱$$
$$x^۲ - Sx + P = ۰ \hookrightarrow x^۲ - ۴x - ۴۱ = ۰$$

■

مثال ۲.۷.۱

دو عدد چنان بيابيد که مجموع آنها ۱ و حاصلضرب آنها $\frac{۴}{۲۵}$ باشد.

حل:

$$S = ۱ \qquad , \qquad P = \frac{۴}{۲۵}$$
$$x^۲ - Sx + P = ۰ \hookrightarrow x^۲ - x - \frac{۴}{۲۵} = ۰ \hookrightarrow$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} \hookrightarrow x_۱ = \frac{۴}{۵} \ , x_۲ = \frac{۱}{۵}$$

■

مثال ۲.۸.۱

در معادله‌ي $۴x^۲ - ۱۶x + m = ۰$ يکي از ريشه‌ها سه واحد بيش از ريشه‌ي ديگر است m و هر دو ريشه را بيابيد.

حل: با تشکيل S, P داريم؛

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta = \alpha + ۳ \end{array} \right.$$
$$S = \alpha + \alpha + ۳ = ۲\alpha + ۳ = -\frac{b}{a} = \frac{۱۶}{۴} = ۴ \rightarrow ۲\alpha = ۱ \rightarrow \alpha = \frac{۱}{۲}, \beta = \frac{۷}{۲}$$
$$x = \alpha = \frac{۱}{۲} \rightarrow ۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ - ۱۶\left(\frac{۱}{۲}\right) + m = ۰ \rightarrow ۱ - ۸ + m = ۰ \rightarrow m = ۷$$

■

مثال ۲.۹.۱

معادله‌ي درجه‌ي دومي با ضرايب گويا بسازيد که ريشه‌ی آن $۲ - \sqrt{۳}$ باشد.

راه اول. حل:

$$x = ۲ - \sqrt{۳} \rightarrow ۲ - x = \sqrt{۳} \rightarrow (۲ - x)^۲ = \left(\sqrt{۳}\right)^۲ \rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

راه دوم. با توجه به مثال (۲.۱) ریشه‌ی دیگر باید $\sqrt{۳}+۲$ باشد و با تشکیل S, P داریم؛ حل:

$$S=\left(۲-\sqrt{۳}\right)+\left(۲+\sqrt{۳}\right)=۴\,,\ P=\left(۲-\sqrt{۳}\right).\left(۲+\sqrt{۳}\right)=۴-۳=۱$$

$$x^{۲}-Sx+P=۰\to x^{۲}-۴x+۱=۰$$

■

نکته‌ی ۲.۶.۱

بحث در وجود و تعداد و علامت ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم

می‌دانیم در حالتی که $\Delta>۰$ باشد دو ریشه‌ی حقیقی داریم.در این حالت داریم:

$$\frac{c}{a}<۰\quad \text{یا}\quad \frac{c}{a}=۰\quad \text{یا}\quad \frac{c}{a}>۰$$

که در حالت $\frac{c}{a}>۰$ دو ریشه هم علامت (متحدالعلامه) هستند و در حالت $\frac{c}{a}<۰$ دو ریشه مختلف‌العلامه علامت هستند و در

$$\frac{c}{a}=۰\to c=۰\to ax^{۲}+bx=۰\to x=۰, x=-\frac{b}{a}\qquad a\neq۰$$

یک ریشه صفر و دیگری $x=-\frac{b}{a}$ است. پس در حالت $\Delta>۰$ داریم؛

$$\begin{cases}\frac{c}{a}>۰\to\begin{cases}-\frac{b}{a}>۰ & \text{هر دو ریشه‌ی معادله مثبت‌اند}\\ -\frac{b}{a}=۰\to b=۰, ax^{۲}+c=۰\to x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{غ.ق.ق}\\ -\frac{b}{a}<۰ & \text{هر دو ریشه‌ی معادله منفی‌اند}\end{cases}\\ \frac{c}{a}=۰\to c=۰\to ax^{۲}+bx=۰\to x=۰, x=-\frac{b}{a}\qquad a\neq۰\\ \qquad \text{یکی از ریشه‌ها صفر و دیگری } -\frac{b}{a} \text{ است}\\ \frac{c}{a}<۰\begin{cases}-\frac{b}{a}>۰ & \text{ریشه‌ی بزرگتر(از نظر قدر مطلق) مثبت است}\\ -\frac{b}{a}=۰\to b=۰, ax^{۲}+c=۰\to x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{ق.ق}\\ -\frac{b}{a}<۰ & \text{ریشه‌ی بزرگتر(از نظر قدر مطلق) منفی است}\end{cases}\end{cases}$$

مثال ۲.۱۰.۱

درمعادله‌ي $(k+۱)\,x^{۲}-۳x+۱=۰$ مقدار k را چنان بیابید تا معادله دو ریشه‌ي مختلف‌العلامه داشته باشد.

حل:

$$(k+۱)\,x^{۲}-۳x+۱=۰$$

$$\left.\begin{cases}\Delta>۰\hookrightarrow ۹-۴\,(k+۱)\,(۱)=-۴k+۵>۰\hookrightarrow k<\frac{۵}{۴}\\ \dfrac{c}{a}<۰\hookrightarrow \dfrac{۱}{(k+۱)}<۰\hookrightarrow k+۱<۰\hookrightarrow k<-۱\end{cases}\right\}\to k<-۱$$

■

تست ۱.۲.۱. به ازاء کدام مقادیر m در معادله‌ی $mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰$ فقط یک جواب برای x حاصل می‌شود؟

۱) $-\frac{۳}{۲}<m<۲$ ۲) $۰<m<۲$ ۳) $\frac{۳}{۲}<m<\frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}<m<۲$

حل: با توجه به تغییر متغیر $\sqrt{x}=t\geq۰$ و جایگذاری در معادله داریم:

$$mx-۳\sqrt{x}+m-۲=۰\to mt^{۲}-۳t+(m-۲)=۰ \quad ,t\geq۰$$

با توجه به صورت سوال باید دو ریشه داشته باشیم که یکی مثبت باشد و دیگری منفی باشد که در حالت ریشه‌ی منفی، با توجه به $\sqrt{x}=t\geq۰$ جوابی برای x نداریم و در حالت ریشه‌ی مثبت $\sqrt{x}=t\geq۰$ می‌باشد و تنها ریشه‌ی معادله حاصل می‌شود. پس داریم:

$$mt^{۲}-۳t+(m-۲)=۰$$

$$\begin{cases}\Delta>۰\hookrightarrow ۹-۴(m)(m-۲)>۰\hookrightarrow -۴m^{۲}+۸m+۹>۰\\ \hookrightarrow ۱-\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}<m<۱+\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\\ \frac{c}{a}<۰\hookrightarrow\frac{m-۲}{m}<۰\hookrightarrow ۰<m<۲\end{cases}$$

که اشتراک آنها $۰<m<۲$ است. ■

نکته‌ی ۲.۷.۱

با توجه به تعیین علامت معادله‌ی درجه‌ی دوم $A=ax^{۲}+bx+c=۰\,,a\neq۰$ نتیجه می‌گیریم شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم A همواره مثبت باشد $\begin{cases}\Delta<۰\\a>۰\end{cases}$ و شرط اینکه عبارت درجه‌ی دوم A همواره منفی باشد $\begin{cases}\Delta<۰\\a<۰\end{cases}$ و به همین صورت شرط نامنفی بودن $\begin{cases}\Delta\leq۰\\a>۰\end{cases}$ و همین صورت شرط نامثبت بودن $\begin{cases}\Delta\leq۰\\a<۰\end{cases}$ می‌باشد.

مثال ۲.۱۱.۱

حدود k را چنان بیابید تا عبارت $(k-۱)x^{۲}+۲kx+k+۲=۰$ همواره مثبت باشد.

حل:

$$(k-۱)x^{۲}+۲kx+k+۲=۰$$

$$\left.\begin{cases}\Delta<۰\to ۴k^{۲}-۴(k-۱)(k+۲)=-۴k+۸<۰\to k>۲\\ a>۰\to k-۱>۰\to k>۱\end{cases}\right\}\boxed{k>۲}$$

■

تست ۲.۲.۱. اگر نمودار تابع $y=x^{۲}+bx+c$ از نواحي سوم و چهارم نگذرد آنگاه:

۱) $c\leq۴b^{۲}$ ۲) $۴c\leq b^{۲}$ ۳) $۴c\geq b^{۲}$ ۴) $c\geq۴b^{۲}$

حل: چون تابع باید از نواحي سوم و چهارم نگذرد پس باید y مثبت یا صفر باشد یعنی عبارت نامنفی باشد پس:

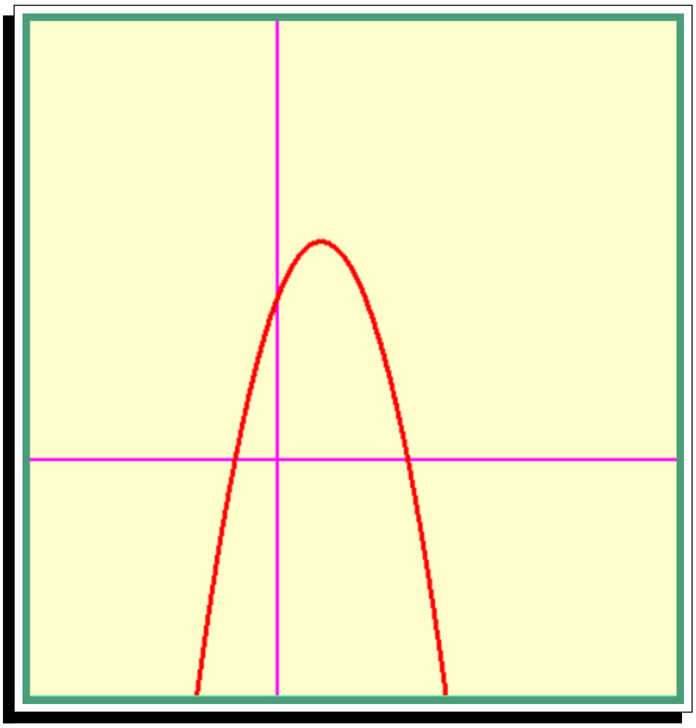
$$y = x^{۲} + bx + c$$

$$\begin{cases} ۱ > ۰ \\ \Delta \leq ۰ \Rightarrow b^{۲} - ۴c \leq ۰ \Rightarrow b^{۲} \leq ۴c \end{cases}$$

■

مثال ۲.۱۲.۱

با توجه به نمودار سهمی زیر روی علامت a, b, c بحث کنید.



حل: باتوجه به نمودار $f(۰) = c > ۰$ اما با توجه به نمودار $|x_۱| < |x_۲|$ پس مجموع ریشه‌ها مثبت است و داریم:

$$\frac{c}{a} < ۰ \xhookrightarrow{\text{but } c>۰} a < ۰ \qquad \text{so that} : -\frac{b}{a} > ۰ \xhookrightarrow{\text{but } a<۰} b > ۰$$

■

مثال ۲.۱۳.۱

محیط مستطیلی ۲۰ متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

راه اول. حل:

$$L = ۲(x + y) = ۲۰ \hookrightarrow x + y = ۱۰ \hookrightarrow y = ۱۰ - x$$

$$S = x.y = x(۱۰ - x) = -x^{۲} + ۱۰x \hookrightarrow x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۱۰}{-۲} = ۵\,,\, y = ۵$$

■

نکته‌ی ۲.۸.۱

۱. اگر جمع دو کمیت مقدار ثابتی باشند، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن دو کمیت با هم برابر باشند.

۲. اگر ضرب دو کمیت مقدار ثابتی باشند، حاصل‌جمع آنها وقتی مینیمم است که آن دو کمیت با هم برابر باشند.

راه دوم. حل: در مثال قبل دیدیم: $x + y = ۱۰$ بنابراین اگر $x = y = ۵$ باشد داریم؛

$$\max S = \max(x.y) = ۵ \times ۵ = ۲۵$$

■

تست ۳.۲.۱. برد تابع $y = \sqrt{۴x - x^۲}$ کدام است؟

۱) $[۰, +\infty)$ ۲) $[۱, +\infty)$ ۳) $[۰, ۲)$ ۴) $[۰, \frac{۱}{۲})$

حل: واضح است $y = \sqrt{۴x - x^۲} \geq ۰$ است و مینیمم تابع صفر است. کافی است ماکزیمم تابع را بیابیم. از طرفی $۴x - x^۲ = x(۴ - x)$ همچنین $x + (۴ - x) = ۴$ و مقداری ثابت می‌باشد و در نتیجه اگر $x = ۲ \hookrightarrow x = (۴ - x)$ باشد داریم؛

$$\max x(۴ - x) = ۲ \times ۲ = ۴$$

و در نهایت

$$\max y = \sqrt{۴} = ۲$$

و گزینه‌ی ۳ صحیح است.

■

تست ۴.۲.۱. مساحت مستطیلی ۲۵ است. کمترین مقدار محیط آن کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۱۰۰

حل: به عهده‌ی شما

✓

■

مثال ۲.۱۴.۱

کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۴}{x}$ را به ازای مقادیر مثبتِ x تعیین کنید.

راه اول. حل: عبارت را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$y = x + \frac{۴}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{۲}{\sqrt{x}}\right)^۲ + ۴$$

با توجه به این‌که عبارت $\left(\sqrt{x}-\frac{۲}{\sqrt{x}}\right)^{۲}\geq ۰$ پس داریم؛ $y\geq ۴$ و مینیمم تابع ۴ است. ■

دستور ۸

اگر $a,b,x>۰$ باشند.

$$\min\left(ax+\frac{b}{x}\right)=۲\sqrt{ab}$$

دلیل اینکه:

$$(a,b,x>۰)\hookrightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\hookrightarrow ax+\frac{b}{x}\geq ۲\sqrt{ab}$$

راه دوم. حل: با توجه به نکته‌ی فوق $a=۱, b=۴$ و

$$\min\left(x+\frac{۴}{x}\right)=۲\sqrt{ab}=۲\sqrt{۱\times ۴}=۴$$

■

تست ۵.۲.۱. مینیمم تابع $y=\sqrt{x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل:

$$x^{۲}+\frac{۴}{x^{۲}}\geq ۲\sqrt{۴}=۴\hookrightarrow y\geq\sqrt{۴}=۲\hookrightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

■

تمرین ۳.۲.۱. معادله‌ي $۲x^{۲}-۴x-۱=۰$ را در نظر بگیرید معادله‌ي درجه‌ی دومي بسازید که ریشه‌های آن؛

آ. سه واحد بیش از ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x+۳\hookrightarrow x=y-۳$$

$$۲x^{۲}-۴x-۱=۲(y-۳)^{۲}-۴\,(y-۳)-۱=۰\to ۲y^{۲}-۱۶y+۲۹=۰$$

■

ب. سه برابر ریشه‌هاي معادله‌ی فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=۳x\hookrightarrow x=\frac{y}{۳}$$

$$۲x^{۲}-۴x-۱=۲\left(\frac{y}{۳}\right)^{۲}-۴\left(\frac{y}{۳}\right)-۱=۰\hookrightarrow ۲y^{۲}-۱۲y-۹=۰$$

■

ج. معکوس ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=\frac{1}{x}\hookrightarrow x=\frac{1}{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(\frac{1}{y}\right)^2-4\left(\frac{1}{y}\right)-1=0\hookrightarrow -y^2-4y+2=0$$

■

نکته‌ی ۲.۹.۱

کافی است در این‌گونه مثالها جای a,c را عوض کنید.

بنا به نکته‌ی بالا داریم: $2x^2-4x-1=0\hookrightarrow -x^2-4x+2=0$

د. قرینه و معکوس ریشه‌هاي معادله‌ي فوق باشند
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=-\frac{1}{x}\hookrightarrow x=-\frac{1}{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(-\frac{1}{y}\right)^2-4\left(-\frac{1}{y}\right)-1=0\hookrightarrow -y^2+4y+2=0$$

■

نکته‌ی ۲.۱۰.۱

کافی است در این‌گونه مثالها جای a,c را عوض کنید و b را قرینه کنیم

بنا به نکته‌ی بالا داریم: $2x^2-4x-1=0\hookrightarrow -x^2+4x+2=0$

ه. مربع ریشه‌هاي معادله‌ی فوق باشند.
حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x^2\hookrightarrow x=\pm\sqrt{y}$$
$$2x^2-4x-1=2\left(\pm\sqrt{y}\right)^2-4\left(\pm\sqrt{y}\right)-1=0\hookrightarrow 2y\pm 4\sqrt{y}-1=0$$
$$2y-1=\pm4\sqrt{y}\hookrightarrow 4y^2-4y+1=16y\hookrightarrow 4y^2-20y+1=0$$

■

نکته‌ی ۲.۱۱.۱

می‌دانیم در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ اگر $\Delta>0$ باشد معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر $\Delta=0$ باشد یک ریشه‌ی مضاعف دارد و $\Delta<0$ باشد ریشه‌ی حقیقی ندارد.

تمرین ۴.۲.۱. مقدار k را چنان بیابید تا معادله‌ي $k^۲x^۲+۲(k+۱)x+۴=۰$ ریشه‌ي مضاعف داشته باشد.

حل:

$$k^۲x^۲+۲(k+۱)x+۴=۰$$

$$\Delta=۰\to ۴(k+۱)^۲-۱۶k^۲=-۳k^۲+۲k+۱=۰\to k=۱, k=-\tfrac{۱}{۳}$$

■

مثال ۲.۱۵.۱

صفرهای تابع زیر را به‌دست آورید.

$$f(x)=(x^۲-۲)^۲+(x^۲-۱)-۲ \qquad (۱.۱)$$

حل: معادله‌ی فوق از درجه‌ی چهار است اما می‌توان با روش **تغییر متغیر** آن را به درجه‌ی دو تبدیل کرد. فرض کنیم $x^۲-۱=t$ باشد، با جای‌گذاری در ریشه‌های تابع (۱.۱) داریم:

$$t^۲+t-۲=۰$$

حال از حل معادله‌ی فوق مقدارهای $\boxed{t=۱}$ و $\boxed{t=-۲}$ به دست می‌آیند. این مقادیر را در تغییر متغیر $x^۲-۱=t$ قرار می‌دهیم.

$$x^۲-۱=t\hookrightarrow x^۲-۱=۱\hookrightarrow x^۲=۲\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{۲}}$$
$$x^۲-۱=t\hookrightarrow x^۲-۱=-۲\hookrightarrow x^۲=-۱ \quad \text{غ.ق.ق}$$

■

توجه

در حل برخی از معادلات می توان با **تغییر متغیر** مناسبی آن را به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر صورت گرفته، مقادیر متغیر معادله‌ی اولیه را یافت.

مثال ۲.۱۶.۱

معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

آ. $\sqrt{۱-x}-\sqrt[۴]{۱-x}-۲=۰$

حل:

$$\sqrt{۱-x}-\sqrt[۴]{۱-x}-۲=۰\hookrightarrow \sqrt[۴]{۱-x}=t\xhookrightarrow{x\leq۱}۱-x=t^۴$$

$$\xrightarrow{\text{با جایگذاری در صورت سؤال داریم}}\boxed{t^۲-t-۲=۰}$$

$$(t-۲)(t+۱)=۰\hookrightarrow\begin{cases}\text{if } t=۲ \text{ then } ۱-x=۱۶\to \boxed{x=-۱۵}\ \text{ق.ق}\\ \text{if } t=-۱ \text{ then } ۱-x=۱\to x=۰\ \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

■

ب. $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$

حل:

$$(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7} \hookrightarrow x^2-3x-13=\sqrt{x^2-3x+7}$$

$$\sqrt{x^2-3x+7}=t \xrightarrow{\text{با جایگذاری در صورت سؤال داریم}} \boxed{t^2-t-20=0}$$

$$\begin{cases} \text{if } t=5 \text{ then } \ x^2-3x+7=25 \rightarrow \boxed{x=-3, x=6} \text{ ق.ق} \\ \text{if } t=-4 \text{ then } \ \sqrt{x^2-3x+7}=-4 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

■

تمرین ۵.۲.۱. به ازاء چه مقدار m بین جوابهاي معادلهي $x^2-3x+\frac{1}{m-1}=0$ رابطهی $x'+3x''=7$ برقرار است. (x' و x'' ریشه‌های معادله می‌باشند.)

حل: می‌دانیم؛ $x'+x''=-\frac{b}{a}=3$ می‌باشد.

$$\begin{cases} x'+x''=3 \\ x'+3x''=7 \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} -x'-x''=-3 \\ x'+3x''=7 \end{cases} \hookrightarrow x'=1, x''=2$$

بنابراین داریم:

$$x^2-3x+\frac{1}{m-1}=0 \xrightarrow{x=1} \boxed{m=\frac{3}{2}}$$

■

تست ۶.۲.۱. در معادلهي $ax^2+bx+c=0$ رابطهي $x_1+x_2=x_1^2x_2^2$ برقرار است كدام گزينه درست است؟(آزاد ۸۷)

۱) $c+ab=0$ ۲) $c^2+ab=0$ ۳) $c^2-ab=0$ ۴) $b^2+ac=0$

حل: با توجه به این‌که $S=x_1+x_2$, $P=x_1.x_2$ و نیز $x_1.x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ می‌باشند داریم؛

$$x_1+x_2=x_1^2x_2^2 \rightarrow -\frac{b}{a}=\left(\frac{c}{a}\right)^2 \xrightarrow{a\neq 0} c^2+ab=0$$

■

تست ۷.۲.۱. ریشه‌هاي معادلهي درجهي دوم $x^2+ax+b=0$ يك واحد از ريشه‌هاي معادلهي $3x^2+7x+1=0$ بيشتر است b كدام است؟(سراسری۸۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

حل: فرض کنید معادله جدید بر حسب y باشد . پس داریم؛

$$y=x+1 \rightarrow x=y-1$$

$$3x^2+7x+1=0=3(y-1)^2+7(y-1)+1=0 \rightarrow 3y^2-y-3=0$$

$$y^2-\frac{1}{3}y-1=0 \rightarrow b=-1$$

■

چند تست و تمرین برای بخش ۲.۱

تمرین ۶.۲.۱. نشان دهید معادله‌ي $x^۲-۵x-۴\sqrt{x}+۱۳=۰$ جواب ندارد.

حل: با تبدیل آن به صورت زیر جواب واضح است.

$$x^۲-۶x+۹+x-۴\sqrt{x}+۴=۰\hookrightarrow(x-۳)^۲+(\sqrt{x}-۲)^۲=۰$$

■

تمرین ۷.۲.۱. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^-۴x+۱=۰$ باشند، بدون حل معادله، حاصل $\frac{\alpha^۲}{\beta+۲}+\frac{\beta^۲}{\alpha+۲}$ را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۸.۲.۱. اگر یکی از جوابهای معادله‌ی $۲x^۲-۱۲x+m-۱=۰$ دو برابر جواب دیگر آن باشد، m و هر دو جواب را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۹.۲.۱. عدد مثبتی را بیابید که مربع آن یک واحد از خودش بزرگتر باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۰.۲.۱. مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع زیر برابر (-۲) باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

$$f(x) = x^۳ - kx^۲ - x - ۲$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۱.۲.۱. صفرهای تابع $f(x) = x^۴ - ۱۰x^۲ + ۱$ را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۲.۱. تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم دارند و کدام یک مینیمم. سپس ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

الف) $g(x) = -(x+1)^2 + 3$ ب) $h(x) = x^2 - 4x + 9$

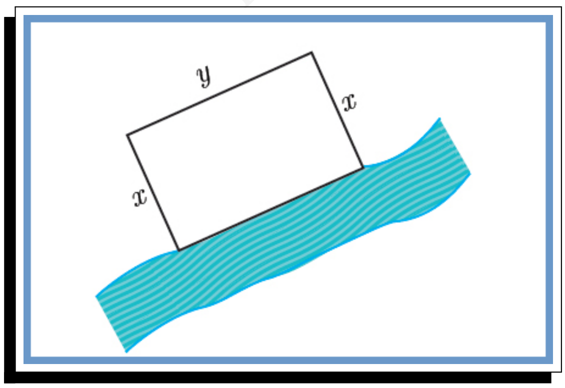
حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۱۳.۲.۱. یک ماهیگیر می‌خواهد در کنار رودخانه محوطه‌ای مستطیل شکل را فنس‌کشی کند. او تنها هزینه‌ی ۱۰۰ متر فنس‌کشی را در اختیار دارد. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد. (راهنمایی:

$$y + 2x = 100 \hookrightarrow \boxed{y = 100 - 2x}$$

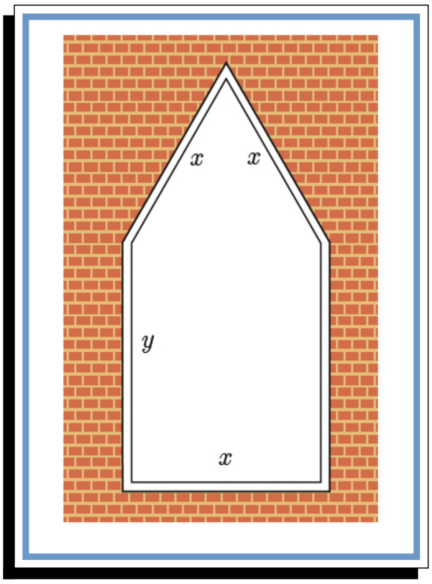
مساحت مستطیل را به صورت تابعی بر حسب x بنویسید و ماکزیمم آن را بیابید.)



حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

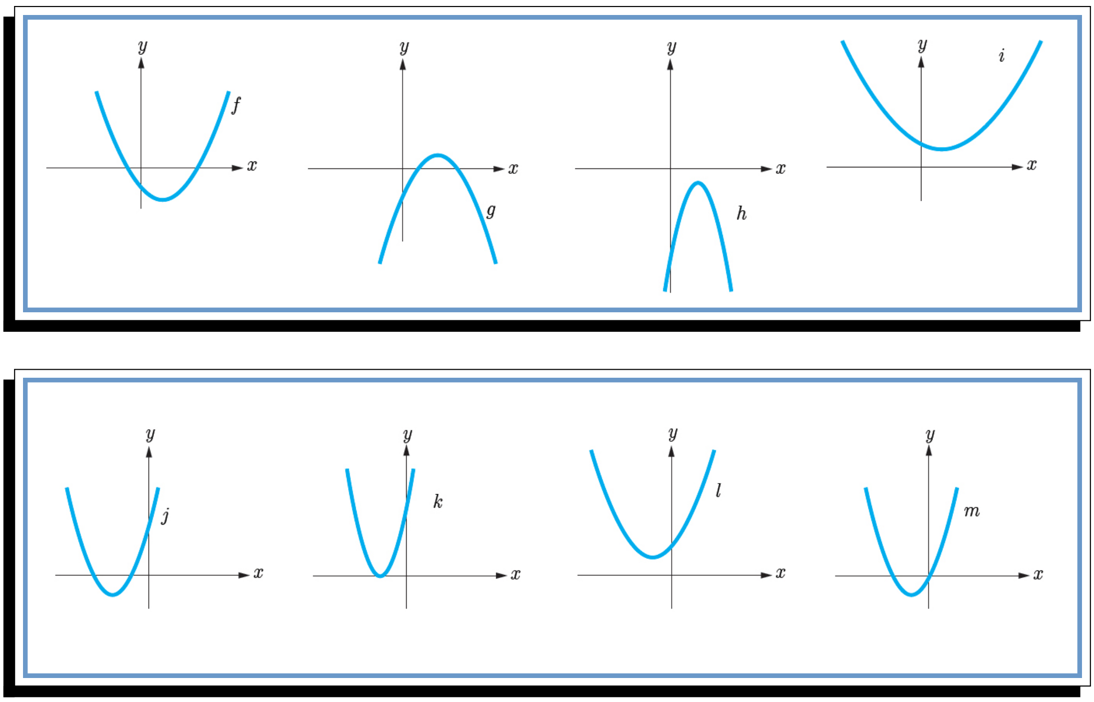
تمرین ۱۴.۲.۱. پنجره‌ای به شکل مستطیل با یک مثلث متساوی‌الاضلاع دربالای آن می‌باشد. اگر محیط پنجره $40m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

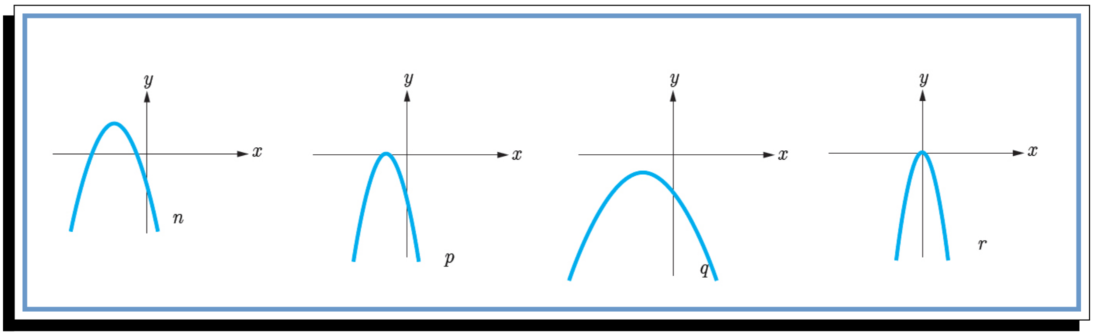


حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۵.۲.۱. با توجه به نمودار توابع زیر جدول را کامل کنید.





تابع / ویژگی	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
b	−							+			−	
c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌ها	دو							دو			فاقد ریشه	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تمرین ۱۶.۲.۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^{۴} - ۸x^{۲} + ۸ = ۰$

ب) $۴x^{۶} + ۱ = ۵x^{۳}$

پ) $((۲x^{۲} - ۱)^{۲} = ۷ + ۶(۲x^{۲} - ۱))$

ت) $۲x^{\frac{۲}{۳}} + ۷x^{\frac{۱}{۳}} - ۴ = ۰$

ث) $x^{\frac{۱}{۳}} + x^{\frac{۱}{۶}} - ۲ = ۰$

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۷. در معادله‌ی $۴x^۲ - ۸x + c = ۰$ مقدار c را به گونه‌ای بیابید که یکی از ریشه‌های آن ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه‌ی دیگر باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۸. معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{2}-1$ باشند.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۱۹. ماکزیمم یا مینیمم تابع‌های با ضابطه‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۲.۲۰. راکتی که به طور عمودی شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن $h(t) = 100t - 5t^2 \quad \geq 0$

آ. چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین باز می‌گردد؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۱.۲.۱. استادیومی به شکل مستطیل با دو نیم‌دایره در دو انتهای آن در حال ساخت است. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که

آ. مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

حل: به عهده‌ی شما

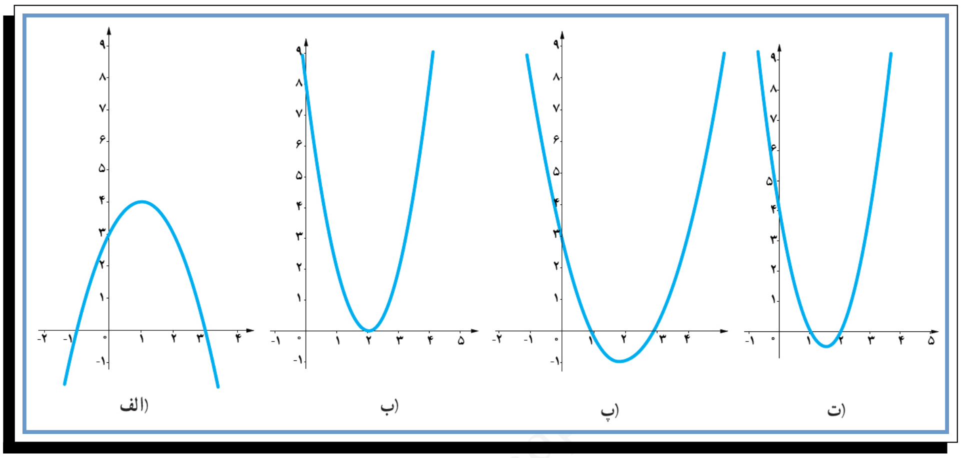
✓ ■

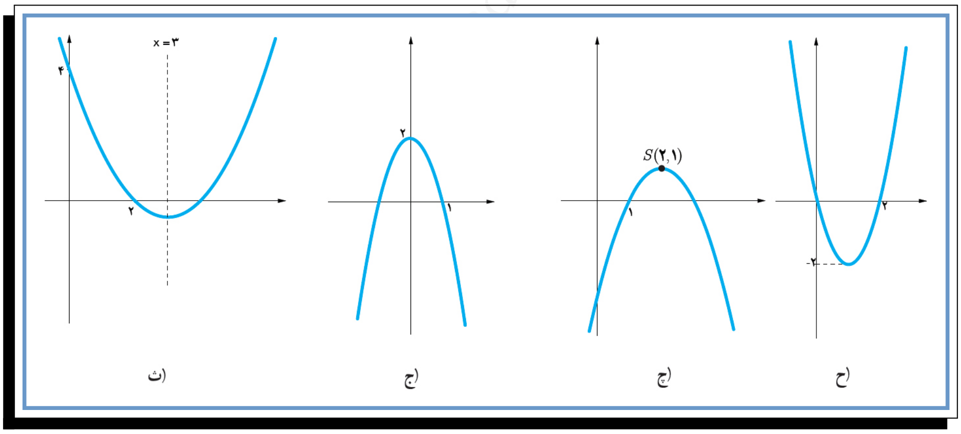
ب. مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۲.۲.۱. معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید.





حل: به عهده‌ی شما

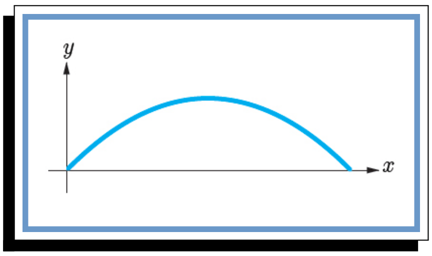
✓ ■

تمرین ۲۳.۲.۱. تابع $c \neq 0$ $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$ ریشه ندارد و حاصل $a+b+c$ عددی منفی است. ثابت کنید $c < 0$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۴.۲.۱. فوتبالیستی توپی را با زاویه‌ی °۴۵ نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه‌ی $20\, m/s$ شوت می‌کند. مسیر حرکت توپ، مانند شکل مقابل است که تابع مسیر آن به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ می باشد. نقطه‌ی برخورد توپ با زمین را به دست آورید.



حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۵.۲.۱. معادلات زیر را به روش تغییر متغیر حل کنید.

آ. $\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)^{۲}-۷\left(\frac{x^{۲}}{۳}-۲\right)+۶=۰$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. $(۴-x^{۲})^{۲}-۲(۴-x^{۲})-۱۵=۰$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. $\sqrt{x+۳}+\sqrt{x-۱}+۲\sqrt{(x-۱)(x+۳)}=۴-۲x$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. $\sqrt{x-۲+\sqrt{۲x-۵}}+\sqrt{x+۲+۳\sqrt{۲x-۵}}=۷\sqrt{۲}$

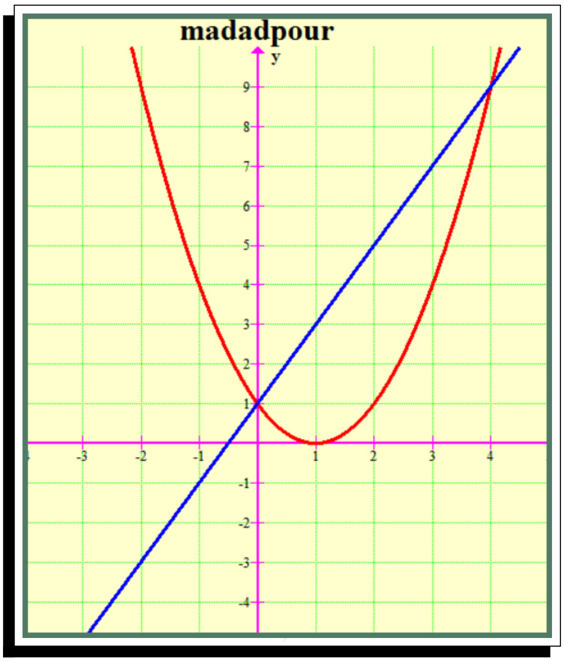
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

توجه

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله طول یکی از نقاط محل تلاقی این دو نمودار است. این روش حل معادله که از طریق آن **تعداد جواب‌ها** و **مقدار تقریبی** (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است را **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامند.

فعالیت ۱.۲.۱. آ. نمودار دو تابع $y=(x-۱)^۲$ و $y=۲x+۱$ را روی یک نمودار رسم کنید. حل:



■

ب. طول محل تلاقی این دو نمودار چقدر است؟ نشان دهید این مقدار جواب‌های معادله‌ی $۲x+۱=(x-۱)^۲$ می‌باشد.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

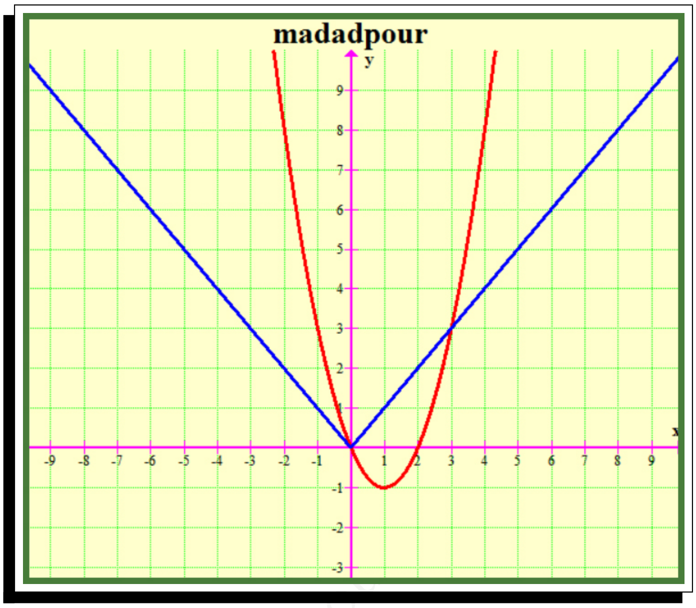
ج. اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله‌ی $۲x+۱=(x-۱)^۲$ است، آیا a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟ حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

مثال ۲.۱۷.۱

به **روش هندسی** معادله‌ی $|x| = x^2 - 2x$ را حل کنید.

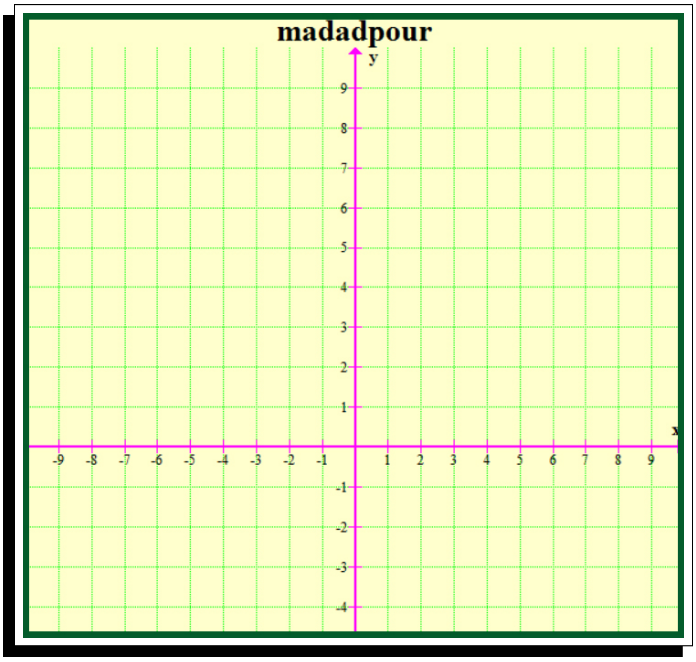
حل: فرض کنیم $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = |x|$ نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم.



در مورد تابع f می‌توان نوشت: $f(x) = (x-1)^2 - 1$ با توجه به رسم نمودار دو تابع $\boxed{x = 0}$ و $\boxed{x = 3}$ طول‌های نقاط تلاقی دو نمودار و در نتیجه جواب‌های معادله‌ی $|x| = x^2 - 2x$ می‌باشند. ■

تمرین ۲.۲۶.۱ به **روش هندسی** معادله‌ی $|x-1| + 2 = x^2 + 1$ را حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما



✓ ■

۳.۱ معادلات گویا و گنگ

۱.۳.۱ معادلات شامل عبارات گویا

با یک مثال به موضوع وارد می‌شویم.

مثال ۳.۱.۱

در یک مغازه ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. چگونه می‌توان این محلول را به غلظت مورد نظر رساند؟

برای حل مثال فوق حالت‌های مختلفی وجود دارد. ممکن است نمک به اندازه‌ی کافی وجود داشته باشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.
راه اول. **حل:** فرض کنیم نمک به اندازه‌ی کافی موجود باشد.
ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$200 \times \frac{4}{100} = 8kg$$

حالا اگر بخواهیم x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم وزن نمک $x+8$ و وزن کل محلول $x+200$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{8+x}{200+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید به محلول ۷ درصد نمک تبدیل شود تناسب زیر برقرار خواهد بود؛

$$\frac{8+x}{200+x} = \frac{7}{100}$$

برای حل معادله‌ی اخیر که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $100(200+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$100(x+8) = 7(200+x) \xrightarrow{\text{از حل معادله داریم}} x = \frac{600}{93}$$

این میزان نمک تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم خواهد بود. ■

راه دوم. **حل:** اگر نمک در مغازه موجود نباشد. در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله‌ی مورد نظر به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{8}{200-y} = \frac{7}{100} \xrightarrow{\text{از حل معادله داریم}} y = \frac{600}{7}$$

و این بدین معنی است که باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسیم. ■

تمرین ۱.۳.۱. در مثال صفحه‌ی قبل حالت سومی وجود دارد که نمک به اندازه‌ی کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و آن را به محلول بیفزاییم. چند کیلوگرم از آب محلول باید تبخیر شود تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسیم؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

توجه

برای حل معادلات شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به دست آمده معادله را حل می کنیم. **جواب به دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در عالم واقع، مطابقت نداشته باشند** که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال ۳.۲.۱

معادله‌ی $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

حل: کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها (ک.م.م) برابر $x(x^۲-۴)$ می‌باشد. با ضرب این عبارت در طرفین معادله داریم؛

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)\hookrightarrow ۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰\hookrightarrow (x-۴)(x+۲)=۰\hookrightarrow \boxed{x=۴} \text{ یا } x=-۲$$

اما جواب $x=-۲$ مورد قبول نمی‌باشد. و تنها جواب مورد قبول معادله $x=۴$ است. ■

مثال ۳.۳.۱

ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

آ. $\frac{۳}{x+۱}=\frac{۲x}{x+۲}$

ب. $\frac{x-۲}{x^۲+۲x}=\frac{۲}{x-۲}+\frac{۱}{x}$

حل:

$$\text{آ)}\quad \frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳}{x+۱}\rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۲,-۱\}$$

$$\frac{۲x}{x+۲}=\frac{۳}{x+۱}\xhookrightarrow{\times(x+۱)(x+۲)}۳\,(x+۲)=۲x\,(x+۱)\rightarrow$$

$$۲x^۲-x-۶=۰\rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۱+۴۸}}{۴}=\frac{۱\pm ۷}{۴}\rightarrow \begin{cases}\boxed{x=۲} & \text{is true}\\ \boxed{x=-\frac{۳}{۲}} & \text{is true}\end{cases}$$

■

حل:

$$\text{ب)}\quad \frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۲}=\frac{x-۲}{x^۲+۲x}\to D=\mathbb{R}-\{-۲,۰,۲\}$$

$$\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x-۲}=\frac{x-۲}{x\left(x+۲\right)}\xhookrightarrow{x(x-۲)(x+۲)}$$

$$\left(x-۲\right)\left(x+۲\right)+۲x\left(x+۲\right)=\left(x-۲\right)\left(x-۲\right)\to$$

$$x^۲-۴+۲x^۲+۴x=x^۲-۴x+۴\to x^۲+۴x-۴=۰\to$$

$$x=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶+۱۶}}{۲}=-۲\pm۲\sqrt{۲}\ \text{are true}$$

■

مثال ۳.۴.۱

پارامتر t را چنان بیابید تا $x=۱$ ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{۳}{t}=\frac{۱}{x}+\frac{x-۲}{tx}$ باشد.

حل:

$$\frac{x-۲}{tx}+\frac{۱}{x}=\frac{۳}{t}\xhookrightarrow{x=۱}\frac{۱-۲}{t\times۱}+\frac{۱}{۱}=\frac{۳}{t}$$

$$\xhookrightarrow{\times t\neq۰}\frac{-۱}{t}+۱=\frac{۳}{t}-۱+t=۳\to\boxed{t=۴}$$

■

تمرین‌هایی برای فصل ۳.۱

تمرین ۲.۳.۱. اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم؛

$$\boxed{\frac{W}{L}=\frac{L}{L+W}}$$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۳۲۰ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۳.۳.۱. ریشه‌های معادلات زیر را در صورت وجود به دست آورید.

آ. $\frac{x+۲}{x^۲-۳x}=\frac{۶}{۴x}$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. $\dfrac{x+۲}{x-۲}-\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۲}{x^۲-۲x}$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. $\dfrac{x^۲-۱}{x^۲-۴}+\dfrac{x^۲-۴}{x^۲-۱}=\dfrac{۳}{۲}$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۴.۳.۱. پارامتر k را چنان بیابید تا $x=۲$ ریشه‌ی معادله‌ی $\frac{۳}{x+۲}=\frac{kx+۱}{x}$ باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۵.۳.۱. علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله‌ی ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از تایپ مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک نماید، کار ویرایش حدود ۱

ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۳.۶. اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، حساب کنید هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

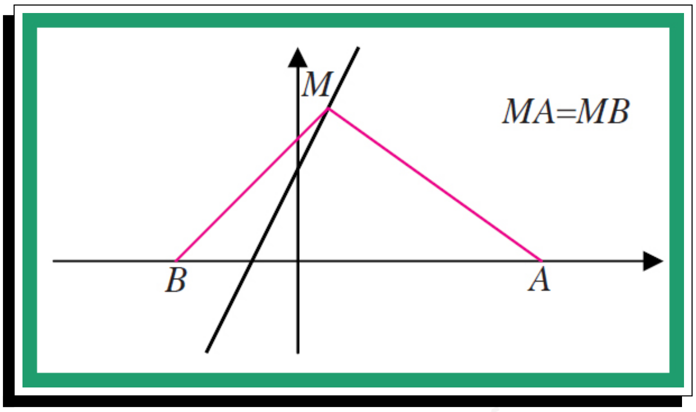
۲.۳.۱ معادلات شامل عبارت‌های گنگ

با یک مثال وارد موضوع می‌شویم.

مثال ۳.۵.۱

نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

حل:



فرض کنید $M(x,y)$ نقطه‌ای روی خط $y = ۲x+۱$ باشد. با پارامتری کردن نقطه‌ی M مختصات آن به صورت $M(x,۲x+۱)$ می‌باشد. حال باید فاصله‌ی نقطه‌ی M از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد.

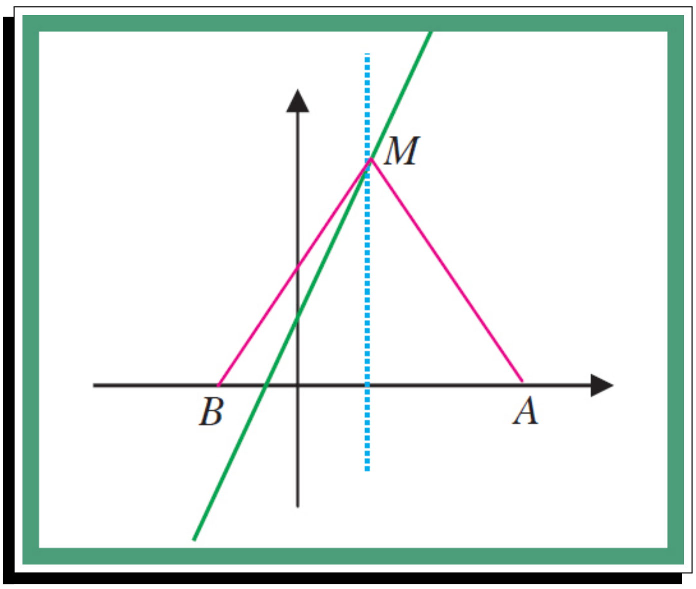
$$\mathrm{MA} = \sqrt{(x-۳)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲} = \sqrt{(x+۱)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲} = \mathrm{MB}$$

$$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} (x-۳)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲ = \sqrt{(x+۱)^۲ + (۲x+۱-۰)^۲}$$

$$x^۲ - ۶x + ۹ = x^۲ + ۲x + ۱ \xrightarrow{\text{بعد از حل معادله داریم}} \boxed{x = ۱} \hookrightarrow \mathrm{M}(۱,۳)$$

■

این مثال را می‌توانیم به صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله اند روی عمودمنصف پاره خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه‌ی $\mathrm{M}(۱,۳)$ روی عمودمنصف AB است؛ ازطرف دیگر M روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد پس M محل برخورد این دو خط است.



توجه

برخی از معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آنها را معادلات گنگ می نامند. برای حل آنها با **به توان رسانی طرفین معادله** (و در صورت لزوم تکرار آن) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال ۳.۶.۱

معادله‌ی $\sqrt{x+۲} = x - ۴$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x+۲})^۲ = (x-۴)^۲ \\
&x + ۲ = x^۲ - ۸x + ۱۶ \\
&x^۲ - ۹x + ۱۴ = ۰ \\
&(x-۲)(x-۷) = ۰ \\
&x = ۲ \text{ یا } x = ۷
\end{aligned}$$

حال جواب‌های بدست آمده را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$\text{if } x = ۲ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲ \neq -۲$$

$$\text{if } x = ۷ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۳ = ۳$$

پس تنها جواب معادله $\boxed{x = ۷}$ است. ■

مثال ۳.۷.۱

معادله‌ی $x - \sqrt{x} = ۲۰$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x} = x - ۲۰ \\
&x = x^۲ - ۴۰x + ۴۰۰ \\
&x^۲ - ۴۱x + ۴۰۰ = ۰ \\
&(x-۱۶)(x-۲۵) = ۰ \\
&x = ۱۶ \text{ یا } x = ۲۵
\end{aligned}$$

حال جواب‌های بدست آمده را در معادله امتحان می‌کنیم.

$$\text{if } x = ۲۵ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲۰ = ۲۰$$

$$\text{if } x = ۱۶ \text{ then } \xrightarrow{\text{با قرار دادن آن در صورت سوال}} ۲۰ \neq ۱۲$$

پس تنها جواب معادله $\boxed{x = ۲۵}$ است. ■

۳.۱ چند تست و تمرین برای بخش ۳.۱

تمرین ۷.۳.۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$a)۱-\sqrt{x-۳}=۴\ ,\ b)۶=\frac{۱۲}{\sqrt{۲a-۳}}\ ,\ c)x^{۲}\sqrt{۱-x^{۲}}=۴x\sqrt{۱-x^{۲}}$$

$$d)\sqrt{۲+\sqrt{x^{۳}-x}}=\sqrt{۲}\ ,\ e)\sqrt{۳x-۲}=۲-۳x\ ,\ f)\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$$

$$g)\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۸.۳.۱. معادله‌ی $\sqrt{x^{۲}-۴}+۲\sqrt{x}=۰$ را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۹.۳.۱. به کمک نتیجه‌ای که از تمرین قبل می‌گیرید تعداد جواب‌های معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$۷|x^{۲}-۴|+۲|x^{۳}-۸|+۵\sqrt{x^{۳}-۴x}=۰$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۰.۳.۱. پدربزرگ چند اسباب بازی یکسان برای اهدا به مهدکودک مجموعاً به قیمت ۱۲۰ هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی هزار تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول چهار اسباب بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۱.۳.۱. فاصله‌ی بین دو شهر واقع در کنار رودخانه‌ای ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۳.۱. ماشین A کاری را به تنهایی ۴ ساعت زودتر از ماشین A انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین کار را در ۵ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهد؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱۳.۳.۱. مخزنی گازی از دونیم کره به شعاع r و استوانه‌ای به ارتفاع ۴ متر تشکیل شده است. اگر حجم مخزن ۳۰π باشد، شعاع هر یک از نیم کره‌ها چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۱.۳.۱. معادله‌ی $\sqrt{x^{۲} - x - ۶} + \sqrt{x^{۳} - ۵x^{۲} - ۲x + ۲۴} = ۰$ چند جواب دارد ؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

.

■ ✓

تست ۲.۳.۱. معادله‌ی $x - ۲\sqrt{x - ۱} = ۰$

۱) يك ريشه دارد
۲) دو ریشه‌ی متمایز دارد
۳) ریشه‌ی حقيقي ندارد
۴) ریشه‌ی مضاعف دارد

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۳.۳.۱. معادله‌ی $(۳x-۲)\sqrt{۱-۹x^{۲}}=۰$

۱) ریشه ندارد
۲) یك ریشه‌ی ساده دارد
۳) یك ریشه‌ی مضاعف دارد
۴) دو ریشه دارد

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تست ۴.۳.۱. تعداد جواب‌هاي معادله‌ی $\frac{۸}{x^{۲}-۴}=\frac{x}{x-۲}+\frac{x-۲}{x+۲}$ کدام است؟

۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

۴.۱ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی خواص آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a| = \begin{cases} +a & a \geq ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

فعالیت ۱.۴.۱. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

$$|-۵-(-۳)| =$$
$$|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}| =$$
$$|۱/۵ - ۱\frac{۱}{۲}| =$$

فعالیت ۲.۴.۱. عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

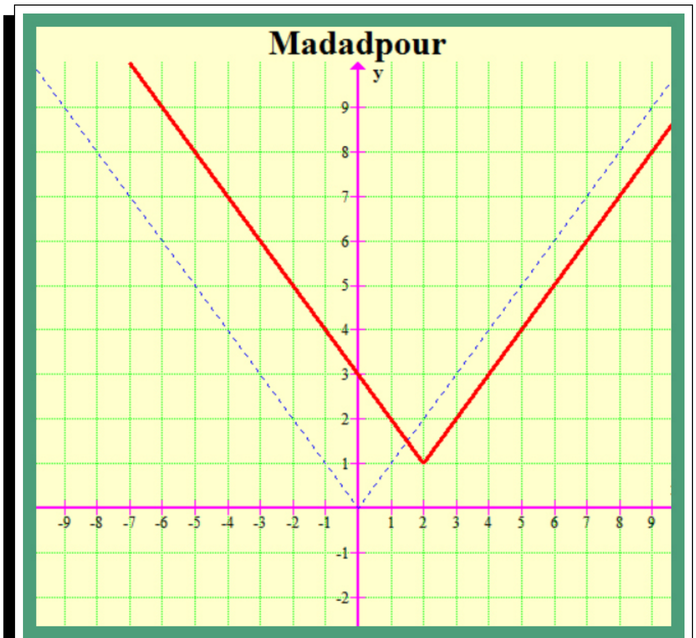
$$\sqrt{a^۴+۲a^۲+۱} = \sqrt{(\cdots+\cdots)^۲} =$$

$$\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(\sqrt{۳}-\cdots)^۲} =$$

فعالیت ۳.۴.۱. نمودار تابع $y = |x-۲|+۱$ را رسم کنید.

راه اول. حل: در این راه از انتقال استفاده می‌کنیم. نمودار فوق در واقع انتقال یافته‌ی نمودار تابع $y=|x|$ تحت بردار انتقال $O(۲,۱)$ می‌باشد. نمودار تابع را در زیر ببینید.

■



شکل ۲.۱: $y = |x-۲|+۱$

راه دوم. حل: با استفاده از تعیین علامت، تابع را به صورت یک تابع دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y = |x-۲|+۱ = \begin{cases} +(x-۲)+۱ & x \geq ۲ \\ -(x-۲)+۱ & x < ۲ \end{cases} = \begin{cases} x-۱ & x \geq ۲ \\ -x+۳ & x < ۲ \end{cases}$$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم. حاصل همان شکل (۲.۱) خواهد بود. ■

توجه

روش دوم در حالت کلی یک روش جامع برای رسم نمودار توابع شامل قدرمطلق می‌باشد. به مثال زیر در این زمینه توجه کنید.

مثال ۴.۱.۱

نمودار تابع $y = |x-۱|+|x+۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

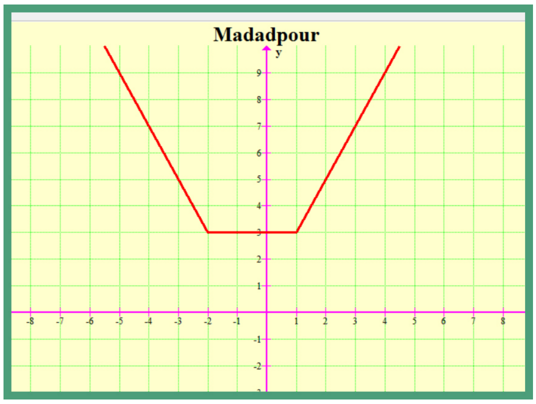
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$

if $x < -۲$ then : $y = -(x-۱)-(x+۲) = -۲x-۱$

if $-۲ \leq x \leq ۱$ then : $y = -(x-۱)+(x+۲) = -۳$

if $x > ۱$ then : $y = +(x-۱)+(x+۲) = ۲x+۱$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.



شکل ۳.۱: $y = |x - ۱| + |x + ۲|$

نمودار توابع مشابه شکل (۳.۱) به **نمودار گلدانی** معروفند.

مثال ۴.۲.۱

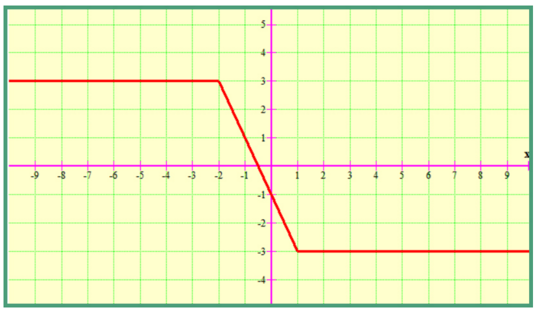
نمودار تابع $y = |x - ۱| - |x + ۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$

$$\text{if } x < -۲ \text{ then}: \ y = -(x - ۱) + (x + ۲) = ۳$$
$$\text{if } -۲ \leq x \leq ۱ \text{ then}: \ y = -(x - ۱) - (x + ۲) = -۲x - ۱$$
$$\text{if } x > ۱ \text{ then}: \ y = +(x - ۱) - (x + ۲) = -۳$$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.



شکل ۴.۱: $y = |x - ۱| - |x + ۲|$

نمودار توابع مشابه شکل (۴.۱) به **نمودار آبشاری یا سرسره‌ای** معروفند.

مثال ۴.۳.۱

نمودار تابع $y = |۲x - ۱| - |x + ۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا عبارات درون قدر مطلق را مطابق زیر تعیین علامت می‌کنیم؛ ■

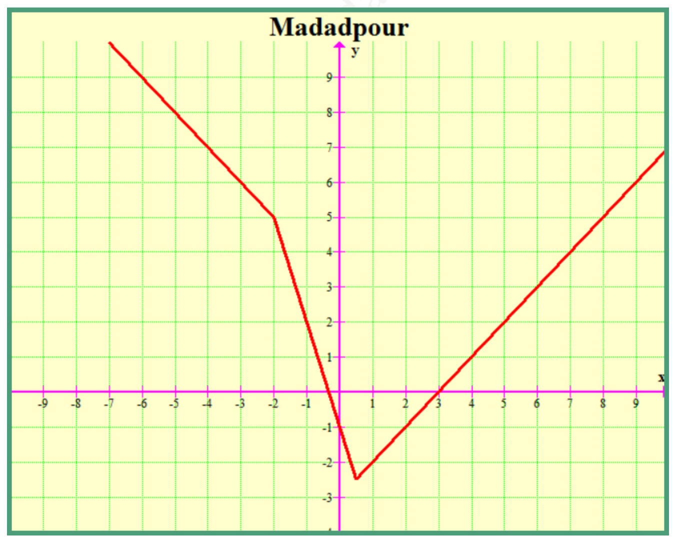
x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	

$$\text{if } x < -۲ \text{ then : } \; y = -(۲x - ۱) + (x + ۲) = -x + ۳$$

$$\text{if } -۲ \leq x \leq \frac{۱}{۲} \text{ then : } \; y = -(۲x - ۱) - (x + ۲) = -۳x - ۱$$

$$\text{if } x > \frac{۱}{۲} \text{ then : } \; y = +(۲x - ۱) - (x + ۲) = x - ۳$$

حال هر ضابطه را در بازه‌ی دامنه‌اش رسم می‌کنیم.

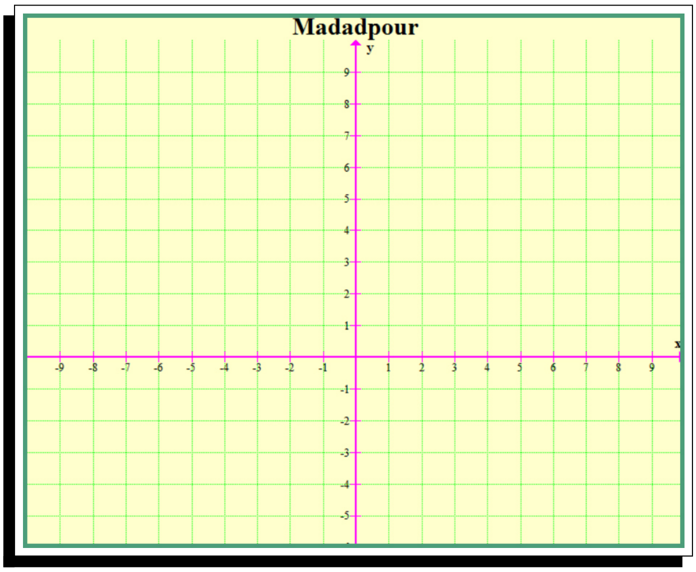


شکل ۱.۵: $y = |۲x - ۱| - |x + ۲|$

تمرین ۱.۴.۱. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

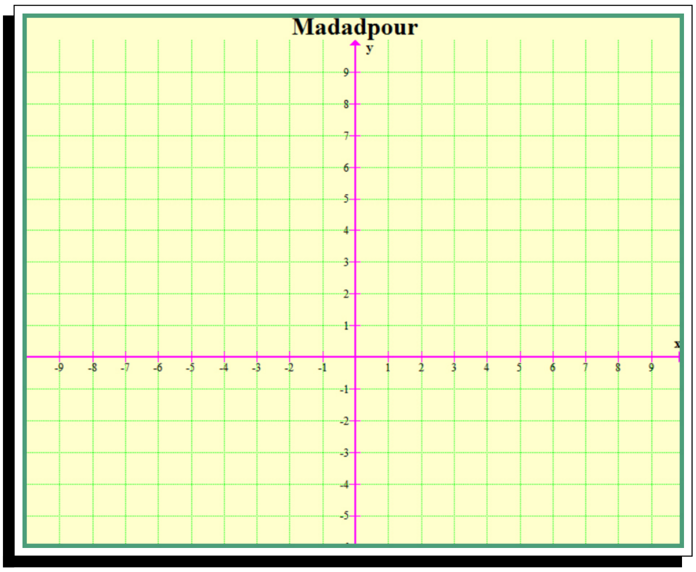
۱. $y = |x + ۳| - |x - ۲|$
۲. $y = |x + ۳| + |x - ۲|$
۳. $y = |۲x + ۳| + |۳x - ۲|$

حل: ۱. به عهده‌ی شما



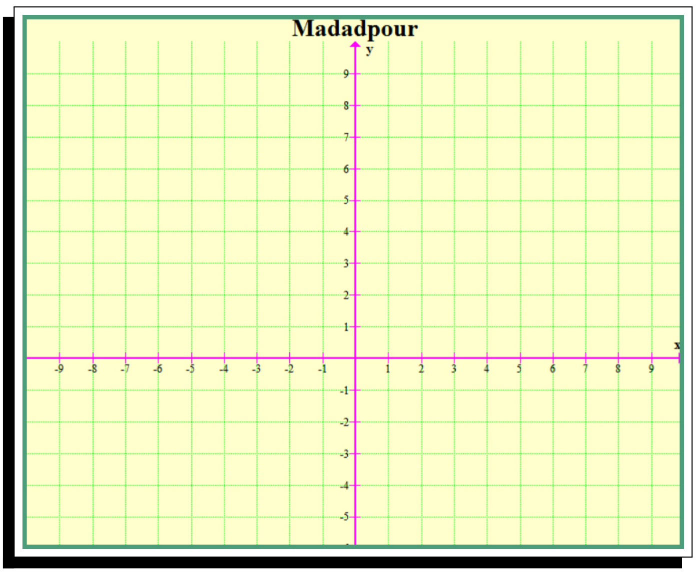
✓ ■

حل: ۲. به عهده‌ی شما



✓ ■

حل: ۳. به عهده‌ی شما



✓ ■

با توجه به تعریف قدرمطلق، $|x|$ همان فاصله‌ی عدد حقیقی x تا مبدأ مختصات می‌باشد. به‌عنوان مثال فاصله‌ی هر عدد حقیقی از مبدأ مختصات همواره عددی نامنفی است. پس می‌توان گفت برای هر عدد حقیقی x همواره داریم؛ $|x| \geq 0$ ویژگی‌های زیر با استفاده از تعریف قدر مطلق همواره برقرار هستند.

۱. $|x| \geq 0$

۲. $|x| = \sqrt{x^2}$

۳. $|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ or } x = -a \quad , \quad a \geq 0$

۴. $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ or } x = -a$

۵. $|x| = |-x|$

۶. $|x|^2 = x^2$

فعالیت ۴.۴.۱. فرض کنید a و b و c عددهای حقیقی دلخواه باشند.

آ. از رابطه‌ی $|a| = \sqrt{a^2}$ استفاده کنید و نشان دهید؛

$$\boxed{|a.b| = |a||b|}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

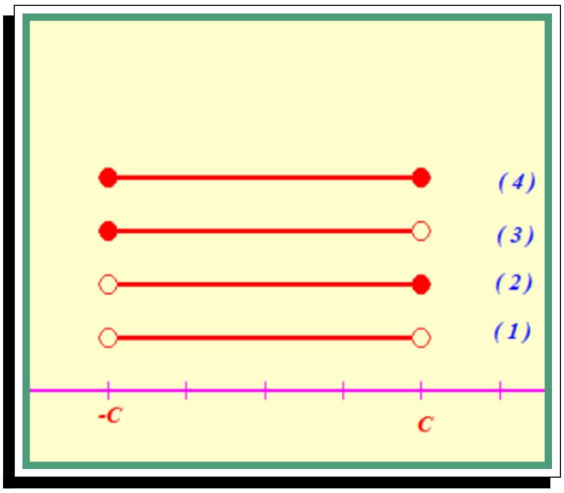
ب. با فرض $b \neq 0$ و استفاده‌ی از مرحله قبل ثابت کنید. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

حل: راهنمایی.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \times \frac{1}{b}\right| = \dots$$

✓ ■

فعالیت ۵.۴.۱. فرض کنید C یک عدد حقیقی نامنفی باشد. مجموعه‌ی جواب‌های زیر برای کدام یک از نامعادلات داده شده می‌توانند قابل قبول باشند؟چرا؟



آ. $|x| < C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}}$ ○

ب. $|x| > C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}}$ ○

پ. $|x| \geq C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}}$ ○

ت. $|x| \leq C \xrightarrow[\text{مربوط به قسمت}]{\text{مجموعه‌ی جواب}}$ ○

فعالیت ۶.۴.۱. برای هر عدد حقیقی a نشان دهید؛

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

فعالیت ۷.۴.۱. برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید؛

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

فعالیت ۱.۴.۸. با استفاده از قسمت قبل « **نامساوی مثلث** » را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید.

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

حل: به عهده‌ی شما

■

✓

در نامساوی بالا چه شرطی باید برقرار باشد تا داشته باشیم؛

$$|a+b| = |a|+|b|$$

از نامساوی مثلث در حل برخی از مسائل مربوط به نامساوی‌ها می‌توان استفاده نمود.

مثال ۱.۴.۴

با استفاده از نامساوی مثلث ثابت کنید کمترین مقدار تابع زیر برابر ۳ است.

$$f(x) = |x-۱|+|x+۲|$$

حل: می‌دانیم؛

$$|-a| = |a|$$

از طرفی؛

$$f(x) = |x-۱|+|x+۲| = |x-۱|+|-x-۲|$$

حال با استفاده از نامساوی مثلث داریم:

$$|x-۱|+|-x-۲| \geq |(x-۱)+(-x-۲)| \geq ۳$$

پس حداقل مقدار تابع f برابر ۳ است.

مجدداً به رسم تابع $f(x)$ در صفحات قبل مراجعه کنید (نمودار گلدانی) و از طریق نمودار تابع درستی مطلب را مشاهده کنید. ■

مثال ۱.۵.۴

مجموعه جواب نامعادله‌ی $|۳x-۱|+|۲x+۱| > ۵\,|x|$ کدام است؟

حل: با انتخاب $a = ۳x-۱, b = ۲x+۱$ داریم؛ $a+b = ۵x$ و چون

$$|a+b| < |a|+|b|$$

شده پس برای مجموعه‌ی جواب با توجه به نکته بالا باید $ab < ۰$ باشد که

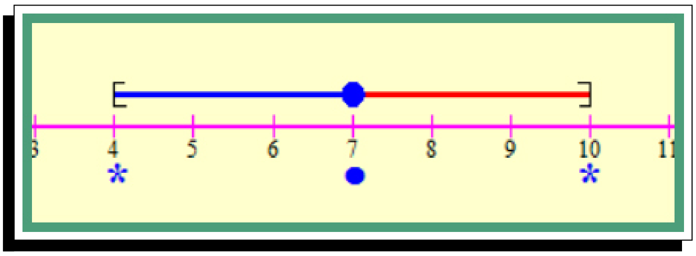
$$-\frac{۱}{۲} < x < \frac{۱}{۳}$$

است. ■

۱.۴.۱ معادلات قدرمطلقی

فعالیت ۹.۴.۱. فاصله چه نقاطی روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ی ثابت ۷ برابر ۳ است؟

حل: برای حل مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب مسئله را x بنامیم شرط مسئله به این معناست که $|x-۳|=۷$ با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق داریم؛ $x-۳=\pm۷$ و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=-۴$ که هر دو جواب‌های معادله مورد قبول هستند. ■

توجه

جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله‌ی $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ روی‌هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

مثال ۴.۶.۱

معادله‌ی $|۳x-۲|=|x-۴|$

راه اول. حل: به کمک خواص قدر مطلق داریم؛

$$۳x-۲=\pm(x-۴)\hookrightarrow\begin{cases}۳x-۲=x-۴\hookrightarrow \boxed{x=-۱}\\ ۳x-۲=-x+۴\hookrightarrow \boxed{x=\frac{۳}{۲}}\end{cases}$$

■

راه دوم. حل: با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت

$$۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲-۸x+۱۶$$

و از آنجا $۲x^۲-x-۳=۰$ و جوابهای معادله $\boxed{x=\frac{۳}{۲}}$ و $\boxed{x=-۱}$ می‌باشند. ■

مثال ۴.۷.۱

معادله‌ی قدر مطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را حل کنید.

راه اول. حل: در این روش از تعیین علامت عبارت درون قدرمطلق استفاده می‌کنیم.

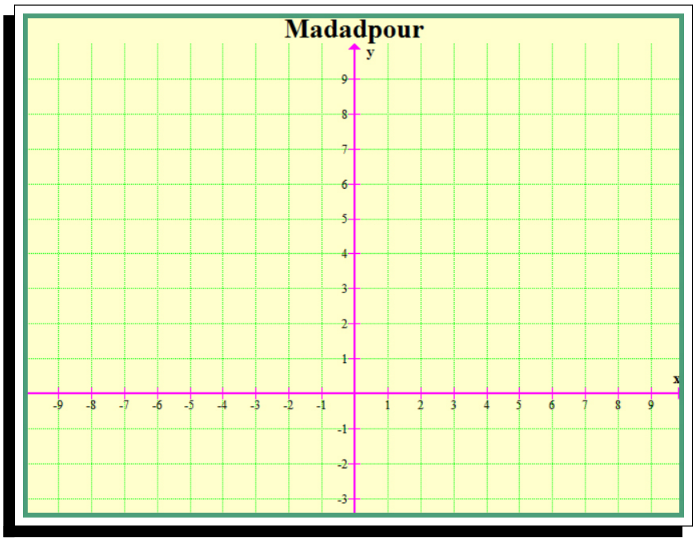
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

if $x < 1$ then : $+(x-1) = 4 - 3x \hookrightarrow \boxed{x = \frac{5}{4}}$ غ.ق.ق

if $x \geq 1$ then : $-(x-1) = 4 - 3x \hookrightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$ ق.ق

■

راه دوم. حل: در این روش از رسم شکل استفاده می‌کنیم.(روش نمودار هندسی) به عهده‌ی شما



■ ✓

راه سوم. حل: با فرض مثبت یا صفر بودن سمت راست یعنی با فرض این‌که

$$4 - 3x \geq 0 \hookrightarrow x \leq \frac{4}{3}$$

طرفین معادله را می‌توان به توان ۲ رساند که داریم؛(به عهده‌ی شما)

■

✓

تست ۱.۴.۱. معادله‌ی $|x^۳+۸|+|x^۲-۴|+|x+۲|=۰$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

حل: واضح است که تنها جواب معادله $x=-۲$ است.زیرا جمع چند عدد مثبت (یا صفر) مساوی صفر شده و این زمانی امکان پذیر است که هر سه عبارت همزمان صفر باشند. پس داریم؛

$$|x^۳+۸|+|x^۲-۴|+|x+۲|=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} x^۳+۸=۰ \hookrightarrow \boxed{x=-۲} \\ x^۲-۴=۰ \hookrightarrow \boxed{x=\pm ۲} \\ x+۲=۰ \hookrightarrow \boxed{x=-۲} \end{array}\right\} \hookrightarrow \boxed{x=-۲}$$

■

۲.۴.۱ نامعادلات قدر مطلق

به کمک فعالیت (۵.۴.۱) دیدیم که اگر a عددی حقیقی نامنفی باشد همواره داریم:

۱. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

۲. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$

در حالت کلی‌تری برای عددی حقیقی و نامنفی a همواره داریم:

دستور ۹

فرمولهای بسیار مهم برای حل نامعادلات خاص به فرم روبرو

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$$
$$x^۲ \leq a^۲ \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$$
$$x^۲ \geq a^۲ \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$$

مثال ۴.۸.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زیر را در صورت امکان به کمک بازه‌ها نمایش دهید.

حل:

$$۱)\ |x| \leq ۵ \Leftrightarrow -۵ \leq x \leq ۵ \hookrightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = [-۵, ۵]$$

$$۲)\ x^۲ \leq ۲۵ \Leftrightarrow -۵ \leq x \leq ۵ \hookrightarrow \text{مجموعه‌ی جواب} = [-۵, ۵]$$

$$۳)\ |-۲x+۳| - ۱ \leq ۵ \quad \Leftrightarrow |-۲x+۳| \leq ۶ \Leftrightarrow -۶ \leq -۲x+۳ \leq ۶$$

$$\xhookrightarrow{-۳} -۹ \leq -۲x \leq ۳ \xhookrightarrow{:(-۲)} \frac{۹}{۲} \geq x \geq -\frac{۳}{۲} \xhookrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left[-\frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۲}\right]$$

$$۴)\left(\frac{۴x-۱}{۳}\right)^۲ \leq ۲ \Leftrightarrow -\sqrt{۲} \leq \frac{۴x-۱}{۳} \leq \sqrt{۲} \xhookrightarrow{\times ۳} -۳\sqrt{۲} \leq ۴x-۱ \leq ۳\sqrt{۲}$$

$$\xhookrightarrow{+۱} ۱-۳\sqrt{۲} \leq ۴x \leq ۱+۳\sqrt{۲} \xhookrightarrow{\div ۴} \frac{۱-۳\sqrt{۲}}{۴} \leq x \leq \frac{۱+۳\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\xhookrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left[\frac{۱-۳\sqrt{۲}}{۴}, \frac{۱+۳\sqrt{۲}}{۴}\right]$$

■

مثال ۴.۹.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زیر را در صورت امکان به کمک بازه‌ها نمایش دهید.

حل:

$$۱)\ |x| \geq ۳ \quad \Leftrightarrow x \geq ۳ \cup x \leq -۳ \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} (-\infty, -۳] \cup [۳, +\infty)$$

$$۲)\ |۱+۵x| - ۳ > ۱ \Leftrightarrow |۱+۵x| > ۴ \hookrightarrow \begin{cases} ۱+۵x > ۴ \hookrightarrow x > \frac{۳}{۵} \\ \cup \\ ۱+۵x < -۴ \hookrightarrow x < -۱ \end{cases} \cup$$

$$\xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} (-\infty, -۱) \cup \left(\frac{۳}{۵}, +\infty\right)$$

$$۳)(x+۱)^۲ + ۳ < ۲ \hookrightarrow (x+۱)^۲ < -۱ \hookrightarrow \text{that is false}$$

$$۴)(۲x+۱)^۲ < ۰ \hookrightarrow \text{that is false}$$

$$۵)(۲x+۱)^۲ > ۰ \hookrightarrow ۲x+۱ > ۰ \cup ۲x+۱ < ۰ \hookrightarrow$$

$$x > -\frac{۱}{۲} \cup x < -\frac{۱}{۲} \xrightarrow[\text{جواب}]{\text{مجموعه‌ی}} \left(-\infty, \frac{-۱}{۲}\right) \cup \left(-\frac{۱}{۲}, +\infty\right) \ or\ \mathbb{R} - \left\{\frac{-۱}{۲}\right\}$$

$$۶)(-x+۸)^۲ \leq ۰ \hookrightarrow -x+۸ = ۰ \hookrightarrow x = ۸$$

■

تذکر ۱.۴.۱. *توجه کنید که برای حل نامعادلات شامل قدر مطلق همواره فرمولهای قبل جوابگو نمی‌باشند بلکه در واقع راه حل کلی به کمک تعیین علامت می‌باشد. به مثال زیر توجه کنید.*

مثال ۴.۱۰.۱

مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $|x-۱| + |۲x+۴| > ۳x$ کدام است؟

حل:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	

به کمک جدول تعیین علامت بالا داریم؛

$$\text{if}\ :\ x < -۲ \hookrightarrow -(x-۱)-(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow x < -\frac{۱}{۲} \hookrightarrow$$

$$(x < -۲) \cap \left(x < -\frac{۱}{۲}\right) = \boxed{x < -۲} \hookrightarrow (۱)$$

$$\text{if}\ :\ -۲ \le x \le ۱ \hookrightarrow -(x-۱)+(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow x < \frac{۵}{۲} \hookrightarrow$$

$$(-۲ \le x \le ۱) \cap \left(x < \frac{۵}{۲}\right) = \boxed{-۲ \le x \le ۱} \hookrightarrow (۲)$$

$$\text{if}\ :\ x > ۱ \hookrightarrow (x-۱)+(۲x+۴) > ۳x \hookrightarrow ۳ > ۰ \hookrightarrow x \in \mathbb{R} \hookrightarrow$$

$$(x > ۱) \cap (\mathbb{R}) = \boxed{x > ۱} \hookrightarrow (۳)$$

$$\text{finally} \hookrightarrow (۱) \cup (۲) \cup (۳) = \boxed{x < -۲ \cup -۲ \le x \le ۱ \cup (x > ۱)} = \mathbb{R}$$

■

توجه

در یک نامعادله هرگاه طرفین مثبت باشند می‌توان با به توان دو رساندن طرفین مجموعه‌ی جواب را به دست آورد.

تست ۱.۴.۲. مجموعه‌ي جواب نامعادله‌ي $|۸-۲x| \ge |۴x|$ کدام است؟

۱) $x \le \frac{۴}{۳}$ ۲) $x \ge ۴$ ۳) $\frac{۴}{۳} \le x \le ۴$ ۴) $-۴ \le x \le \frac{۴}{۳}$

حل:

$$|۸-۲x| \ge |۴x|$$

$$۶۴ - ۳۲x + ۴x^۲ \ge ۱۶x^۲$$

$$۱۲x^۲ + ۳۲x - ۶۴ \le ۰ \rightarrow ۳x^۲ + ۸x - ۱۶ \le ۰$$

$$x_۱ = -۴, x_۲ = \frac{۴}{۳} \xrightarrow[\text{تعیین علامت}]{\text{به کمک}} -۴ \le x \le \frac{۴}{۳}$$

■

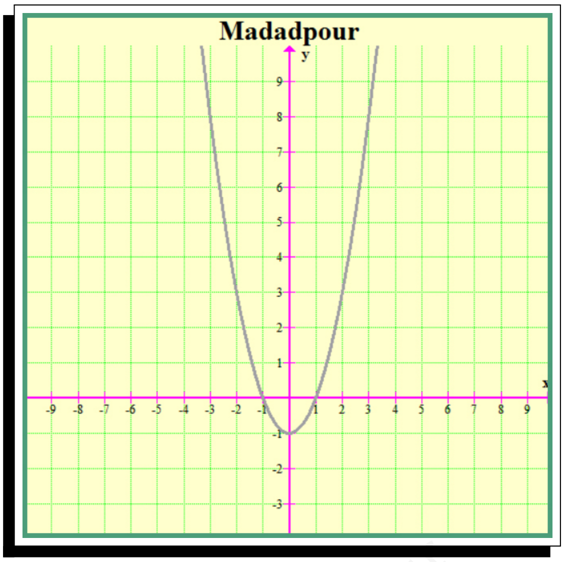
توجه

برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ کافی‌است نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

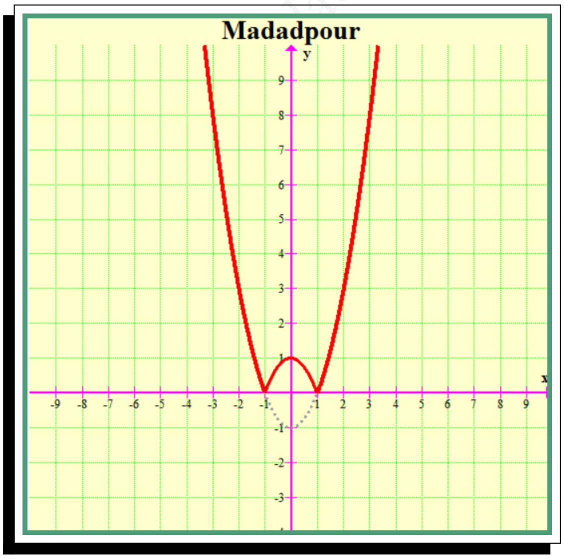
مثال ۴.۱۱.۱

نمودار تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار تابع $y = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم.



سپس به کمک توضیحات بالا نمودار $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را رسم می‌کنیم.

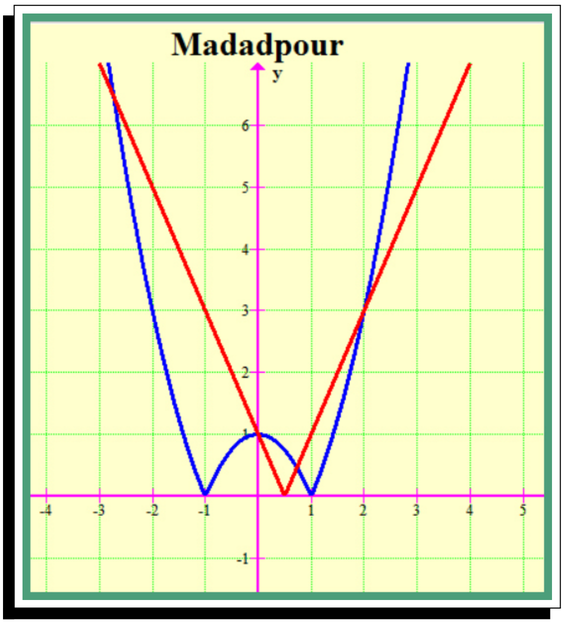


■

مثال ۴.۱۲.۱

به کمک رسم نمودار تعداد جوابها را بیابید و همچنین به کمک روش جبری معادله‌ی $|x^۲ - ۱| = |۲x - ۱|$ را حل کنید. آیا در روش هندسی می‌توانیم مقدار دقیق ریشه‌ها را بیابیم؟

راه هندسی. حل: کافی است هر دو نمودار را روی یک صفحه‌ی مختصات رسم کنیم.



واضح است که سه جواب داریم. $\boxed{x=0}$ و $\boxed{x=2}$ و جواب دیگر به طور تقریبی $\boxed{x \simeq -2/7}$ می‌باشد. ■

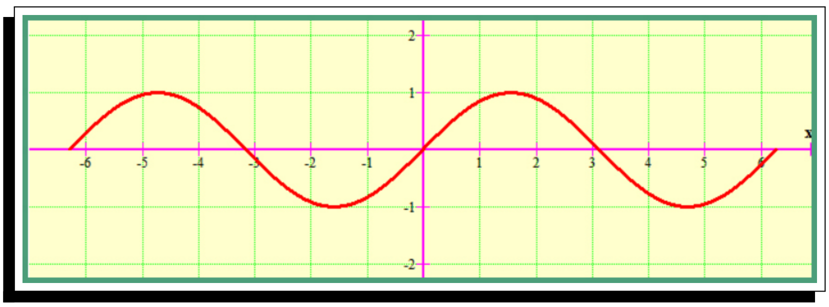
راه جبری. حل:

$$|x^2-1| = |2x-1|$$

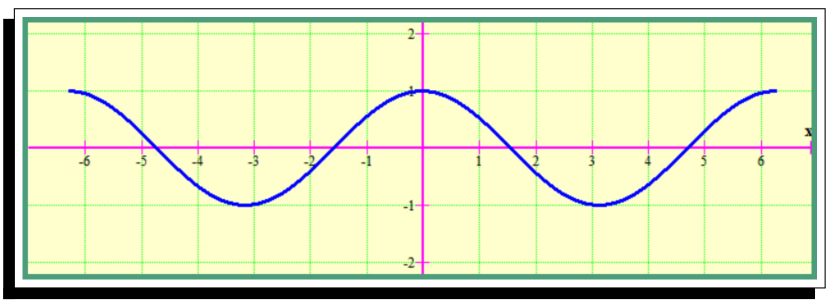
$$x^2-1 = \pm(2x-1) \hookrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-1 = +(2x-1) \hookrightarrow x^2-2x=0 \hookrightarrow \boxed{x=0},\ \boxed{x=2} \\ \text{یا} \\ x^2-1 = -(2x-1) \hookrightarrow x^2+2x-2=0 \hookrightarrow \begin{cases} \boxed{x=-1-\sqrt{3}}\ \text{ق.ق} \\ \boxed{x=-1+\sqrt{3}}\ \text{غ.ق.ق} \end{cases} \end{cases}$$

تذکر ۲.۴.۱. در مثلثات می‌بینیم که نمودار تابع $y=\sin(x)$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت زیر است. ■



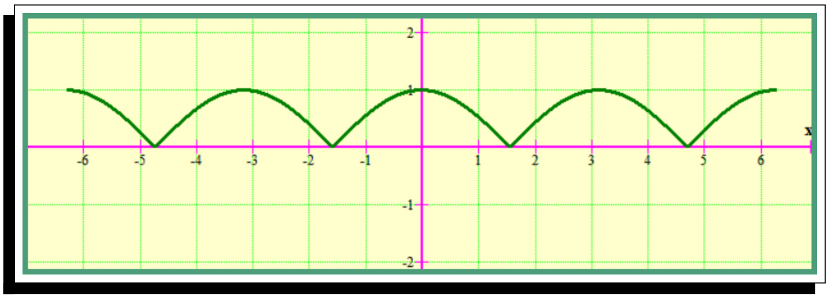
و همچنین نمودار تابع $y=\cos(x)$ در بازه‌ی $[-2\pi, 2\pi]$ به صورت زیر است.



مثال ۴.۱۳.۱

به کمک تذکر (۲.۴.۱) نمودار تابع $y = |cos(x)|$ را رسم کنید.

حل:



■

دستور ۱۰

اگر $a, c \neq ۰$ **و**

$$y = |ax + b| + |cx + d|$$

$$y \geq \left\{f\left(-\frac{b}{a}\right), f\left(-\frac{d}{c}\right)\right\}$$

تمرین ۲.۴.۱. برد تابع $f(x) = |x - ۱| + |۱ - ۳x|$ کدام است؟

حل:

$$y = |x - ۱| + |۱ - ۳x|$$

$$\min f(x) = \min\left\{f(۱), f\left(\frac{۱}{۳}\right)\right\} = \min\left\{۲, \frac{۲}{۳}\right\} = \frac{۲}{۳}$$

$$R_f = \left[\frac{۲}{۳}, +\infty\right)$$

■

چند تست و تمرین برای بخش ۴.۱

تمرین ۳.۴.۱. مجموعه‌ی جواب نامعادله‌هاي زير را در صورت امکان به کمك بازه‌ها نمايش دهيد.

۱. $|1-2x|<2$

۲. $|1-3x|>|x+1|$

۳. $|2x-1|<|3-4x|$

۴. $|x+2|+1>3$

۵. $|x-1|+|x|<3x+1$

۶. $|x-1|+2x-3<5x$

حل: به عهده‌ی شما

.

تمرین ۱.۴.۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱. $y = |x - ۲| - |x + ۳|$

۲. $y = |x + ۱| + |x - ۳|$

۳. $y = |۲x + ۳| - |x - ۳|$

۴. $y = \left|x^۲ - ۳\right|$

۵. $y = ||x| - ۳|$

۶. $y = |\sin(x)|$

حل: به عهده‌ی شما

.

تمرین ۵.۴.۱. با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

۱. $y = x|x|$

۲. $y = |x^۲ - ۱|$

۳. $y = |x - ۱| + |x + ۱|$

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تست ۳.۴.۱. معادله‌ي $|x^۲ - ۱| = x^۳$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۶.۴.۱. به کمک نامساوی مثلث در قدر مطلق ثابت کنید معادله‌ی زیر جواب ندارد.

$$|۲x - ۳| + |۲x + ۱| = ۳/۸$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۷.۴.۱. نمودار هر تابع $y = x - \frac{x}{|x|}$ را رسم کنید سپس به ازای $y = ۳$ معادله‌ی به دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۴.۸. مساحت محدود بین منحنی نمودار تابع $f(x) = |x-۲| + |x-۱|$ و خط $y = x$ چه‌قدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

.

✓ ■

تمرین ۱.۴.۹. ابتدا نمودار تابع $f(x) = ||x| - ۲|$ را رسم کنید، سپس معادله‌ی $f(x) = ۱$ را به روش هندسی و جبری حل نمایید.

حل: به عهده‌ی شما

.

ریاضی یازدهم

■ ✓

تست ۴.۴.۱. معادله‌ی $\sqrt{x^5+x^3-4x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}=0$ چند ریشه دارد؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 5

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تست ۵.۴.۱. ساده شده‌ی عبارت $2|x+1|+|x|+|x-1|-3$ را با توجه به اینکه $0<x\leq 1$ است کدام گزینه می‌باشد.

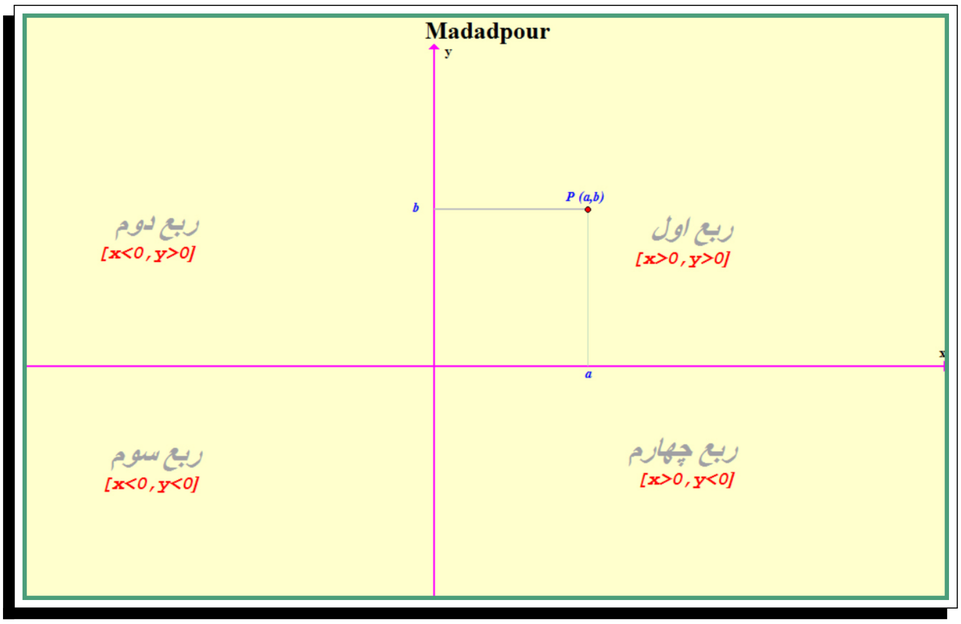
۱) $2x-2$ ۲) $2x$ ۳) $3x$ ۴) $x-1$

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

۵.۱ مختصات

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شدید یک دستگاه مختصات دکارتی شامل دو محور عمود بر هم از اعداد حقیقی است که محورهای مختصات نامیده می‌شود و در مبدأ یکدیگر را قطع می‌کنند. محور افقی را محور xها (طول‌ها) و محور عمودی را محور yها (عرض‌ها) می‌نامند. این محورهای مختصات صفحه مختصات (یا صفحه‌ی xy) را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود و نقاط **روی محورها** در هیچ ربعی نیستند.
برای هر نقطه‌ی P یک زوج مرتب یا دوتایی مرتب (a,b) وجود دارد که مختصات نقطه‌ی P نامیده می‌شود. a مختص x یا طول و b مختص y یا عرض نامیده می‌شود.

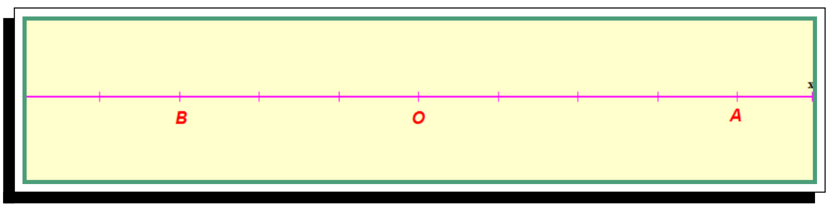


در این بخش با برخی از نکات در رابطه با مختصات نقاط در صفحه آشنا می‌شویم.

۱.۵.۱ فاصله بین دو نقطه

فعالیت ۱.۵.۱. روی محور اعداد مبدأ را با O و نقطه‌ی متناظر ۴ را با A و نقطه‌ی متناظر ۳− را با B مشخص کرده‌ایم.

آ. طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟



حل:

✓ ■

ب. طول پاره‌خط AB چقدر است؟

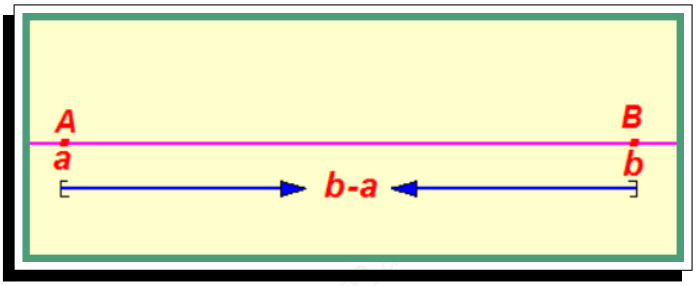
حل:

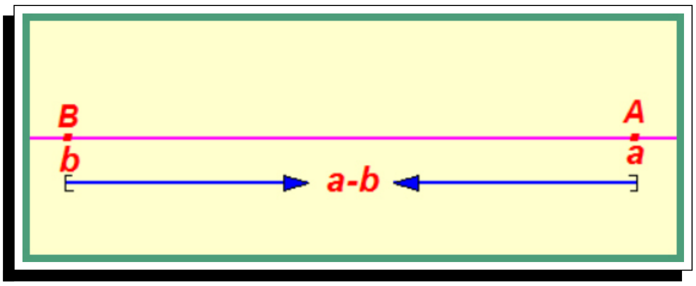
✓ ■

ج. فاصله دو نقطه‌ی A و B متناظر با ۴ و ۳− از یکدیگر قدر است؟ حل:

✓ ■

د. با توجه به محورهای زیر در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟





حل:

✓ ■

تعریف ۱.۱. اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

دستور ۱۱

فرمول محاسبه‌ی طول پاره‌خط روی محور اعداد حقیقی

$$\boxed{AB = |x_B - x_A|}$$

مثال ۵.۱.۱

نقاط M و N به ترتیب به طولهای ۴− و ۵ سانتی‌متر روی محور اعداد حقیقی مفروضند. طول پاره‌خط MN را بیابید.

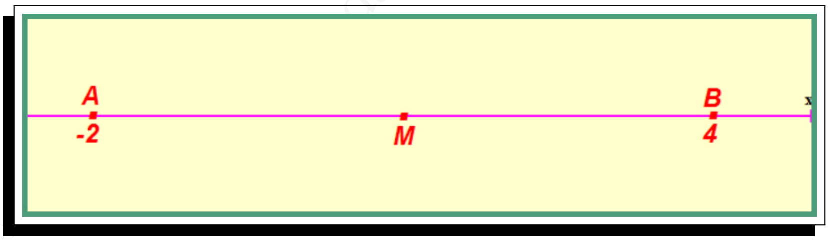
حل: بنا به فرمول قبل داریم:

$$MN = |x_M - x_N| = |-۴ - ۵| = ۹\,\text{cm}$$

■

۲.۵.۱ مختصات نقطه وسط یک پاره خط

فعالیت ۲.۵.۱. آ. در شکل زیر نقطه‌ی M وسط پاره خط AB است. طول نقطه‌ی M چقدر است؟



حل:

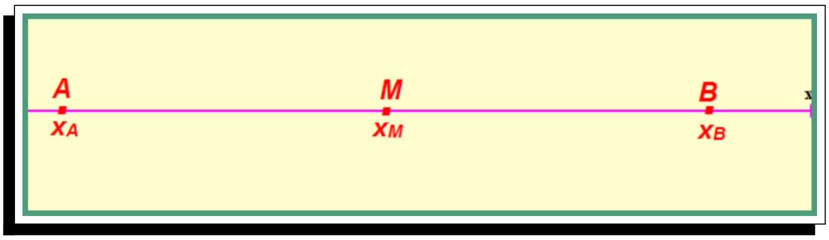
✓ ■

ب. چه ارتباطی بین طول نقطه‌ی M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟

حل:

✓ ■

ج. اگر A و B دو نقطه‌ی دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه‌ی M را برحسب طولهای نقاط A و B به‌دست آورید.



حل:

$$AM = MB \xrightarrow{\text{بنا به تعریف}} x_M - x_A = \cdots$$

✓ ■

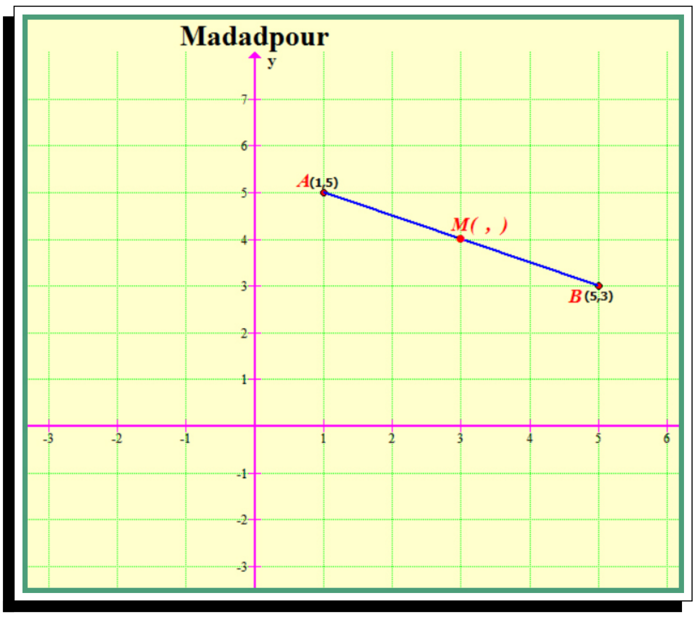
د. اگر A و B دو نقطه‌ی دلخواه روی محور yها و عرض نقاط A و A را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AM باشد، چه دستوری برای محاسبه‌ی عرض نقطه‌ی M می‌توان بیان کرد؟

حل:

✓ ■

فعالیت ۱.۵.۳. اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره خط AB و $M(a,b)$ وسط پاره‌خط AB باشد:

آ. تصویر نقاط M و A و B را روی محور مختصات مشخص کنید.



ب. با توجه به تصویر نقاط M و A و B روی محورها، مختصات نقطه‌ی M را به دست آورید.
حل:

✓ ■

به طور کلی اگر $M(x_M, y_M)$ و $A(x_۱, y_۱)$ باشد و $B(x_۲, y_۲)$ وسط پاره‌خط AB باشد همواره داریم:

دستور ۱۲

مختصات نقطه‌ی وسط یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

$$x_M = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}, \; y_M = \frac{y_۱ + y_۲}{۲}$$

مثال ۵.۲.۱

هرگاه $A(۳, ۴)$ و $B(-۱, ۴)$ و $C(۵, ۰)$ مختصات سه رأس یک مثلث باشند معادله‌ی میانه‌ی وارد بر ضلع AC از این مثلث را به‌دست آورید.

حل: می‌دانیم میانه‌ی وارد بر هر ضلع مثلث پاره‌خطی است که از وسط آن ضلع به رأس مقابل وصل می‌شود. فرض کنید نقطه‌ی K وسط پاره‌خط AC باشد. ابتدا به کمک فرمول قبل مختصات K را به‌دست می‌آوریم.

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{۳ + ۵}{۲} = ۴$$

$$y_K = \frac{y_A + y_C}{۲} = \frac{۴ + ۰}{۲} = ۲$$

$$\xrightarrow{\text{بنابراین}} K(۴, ۲)$$

$$m_{BK} = \frac{y_K - y_B}{x_K - x_B} = \frac{۲ - ۴}{۴ - (-۱)} = -\frac{۲}{۵}$$

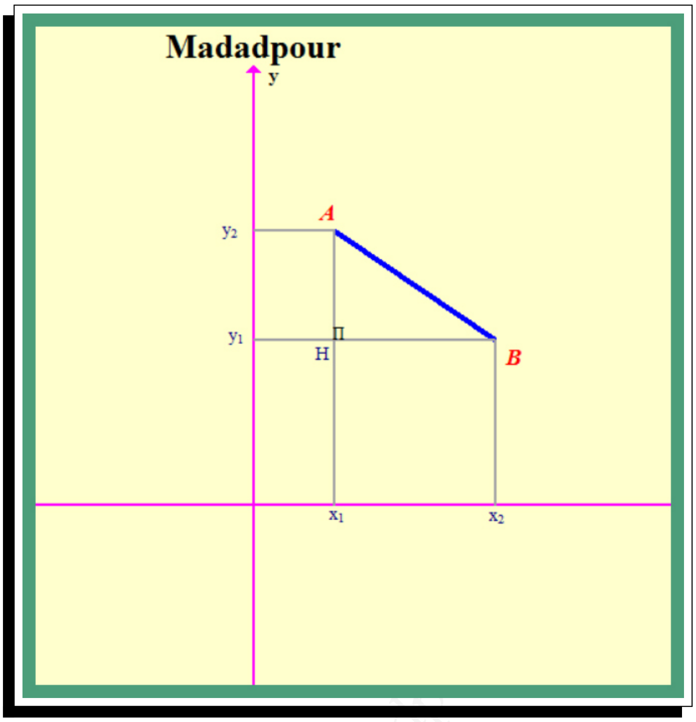
$$y - y_B = m_{BM}(x - x_B)$$

$$y - ۴ = -\frac{۲}{۵}(x + ۱) \hookrightarrow \boxed{y = -\frac{۲}{۵}x + \frac{۱۸}{۵}}$$

■

۳.۵.۱ طول یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

فعالیت ۴.۵.۱. در این فعالیت طریقه‌ی پیدا کردن طول یک پاره‌خط را به‌دست می‌آوریم.



اگر $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ دو نقطه دلخواه در صفحه‌ی مختصات باشند، با توجه به شکل زیر طول AB را محاسبه کنید.

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲$$

$$(AB)^۲ = (y_۲ - y_۱)^۲ + (x_۲ - x_۱)^۲$$

$$AB = \pm\sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}}$$

دستور ۱۳

فرمول پیدا کردن طول یک پاره‌خط در دستگاه دکارتی

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

مثال ۵.۳.۱

با توجه به داده‌های مثال (۲.۵.۱) طول میانه‌ی BK را بیابید.

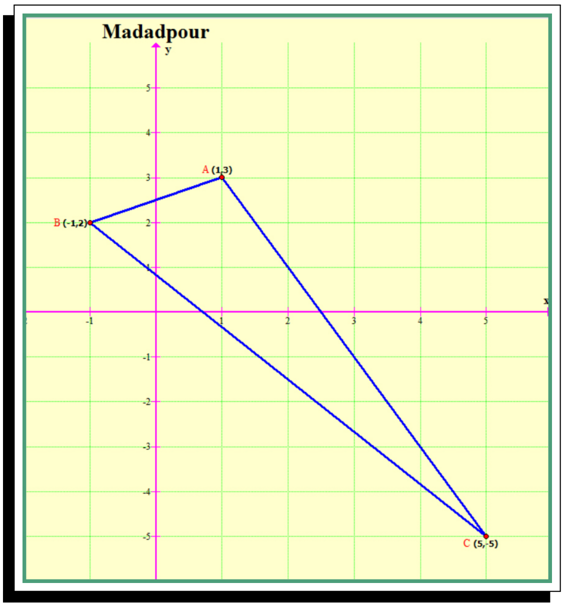
حل:

$$BK = \sqrt{(x_K - x_B)^۲ + (y_K - y_B)^۲} = \sqrt{(۴ + ۱)^۲ + (۲ - ۴)^۲} = \sqrt{۲۹}$$

تمرین ۱.۵.۱. سه نقطه‌ی $A(۱,۳)$ و $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند.

آ. مثلث ABC را رسم کنید.

حل:



■

ب. طول اضلاع مثلث ABC را به دست آورید.

حل:

✓ ■

ج. نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

حل:

✓ ■

د. محیط مثلث ABC را به‌دست آورید.
حل:

✓ ■

ه. شیب دو خط AC و AB را به دست آورید. چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟
حل:

✓ ■

مثال ۵.۴.۱

معادله‌ی خط عمودمنصف پاره خطی که نقاط $A(۷,-۸)$ و $A(-۲,۵)$ را به هم وصل می‌کند را بیابید.

حل: عمودمنصف یک پاره خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد.اگر فرض کنیم نقطه‌ی $P(x,y)$ باشد آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت:

$$\sqrt{(x-۷)^۲+(y+۸)^۲}=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۵)^۲}$$

با به‌توان دو رساندن و ساده کردن معادله‌ی فوق داریم:

$$۹x-۱۳y=۲۴ \xrightarrow[\text{مرتب می‌کنیم}]{\text{بر حسب } y} \boxed{y=\frac{۹}{۱۳}x+\frac{۲۴}{۱۳}}$$

این معادله برای تمام نقاط هم فاصله از A و B برقرار است بنابراین، معادله‌ی عمودمنصف AB است. ■

تذکر ۱.۵.۱. *در مثال (۳.۵.۱) شیب خط AB برابر $\frac{-۱۳}{۹}$ و شیب خط عمود منصف آن برابر $\frac{۹}{۱۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟*

توجه

همان‌طور که در مثال (۳.۵.۱) و قسمت (ه) از تمرین (۱.۵.۱) مشاهده کردید می‌توان نتیجه گرفت:
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $\boxed{m.m' = -۱}$ یعنی؛ شیبهای آنها **قرینه و معکوس** یکدیگرند.

تمرین ۲.۵.۱. به دو روش نشان دهید نقطه‌ی $K(-۱۲, ۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $M(۰, -۳)$ و $M(۶, ۱۵)$ قرار دارد.

راه اول. **حل:** به عهده‌ی شما

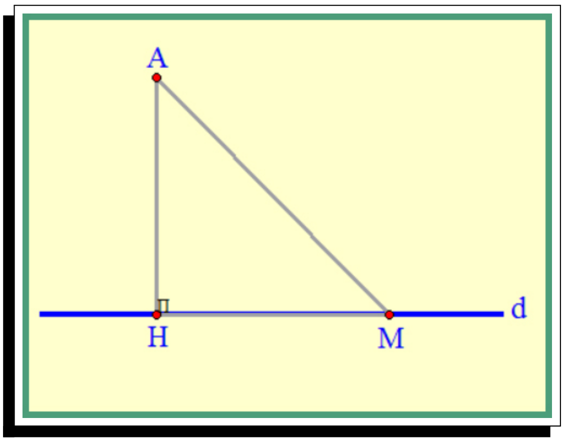
✓ ■

راه دوم. **حل:** به عهده‌ی شما

✓ ■

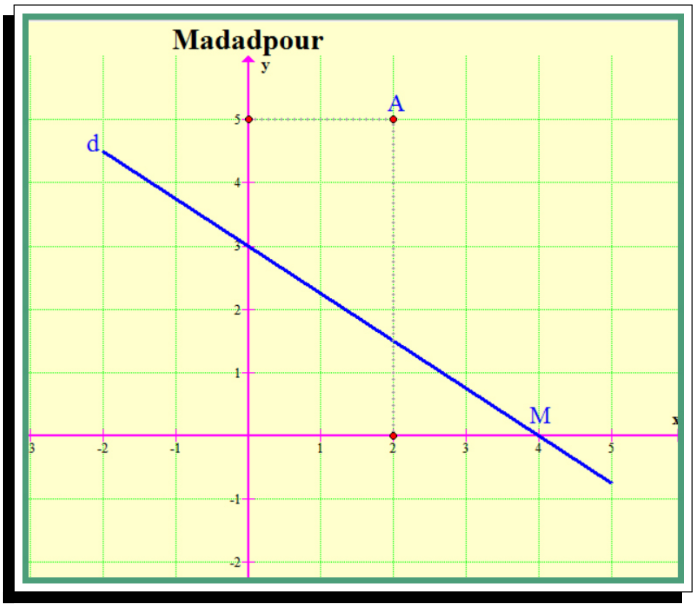
۴.۵.۱ فاصله‌ی یک نقطه از یک خط

اگر خط d و نقطه‌ی A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه‌ی A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله‌ی A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.



بنابراین برای به دست آوردن فاصله‌ی نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمود رسم کرده و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.

فعالیت ۱.۵.۵. خط $d: ۳x+۴y=۱۲$ و نقطه‌ی $A(۲,۵)$ در شکل زیر داده شده است.



آ. عمود AH را رسم کنید.

ب. شیب خط d و خط گذرنده از AH چه ارتباطی با هم دارند؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. شیب AH را به‌دست آورده و معادله‌ی خط گذرنده از AH را بنویسید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه‌ی H) را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ه. طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

توجه

به طورکلی اگر بخواهیم فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط

$$ax + by + c = \circ$$

را به دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت طول عمود AH برابر است با:

$$\boxed{AH = d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}}$$

که در آن علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.

این فرمول را می‌توان در حالت کلی نیز مطابق (۴.۵.۱) اثبات کرد.[۲]

دستور ۱۴

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(x_\circ, y_\circ)$ **از خط** $ax + by + c = \circ$	$AH = d = \frac{\lvert ax_\circ + by_\circ + c\rvert}{\sqrt{a^۲ + b^۲}}$

مثال ۵.۵.۱

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۲, -۳)$ را از خط $۳y = ۲ - ۴x$ به‌دست آورید.

حل: ابتدا معادله‌ی خط را به صورت استاندارد خواسته شده در فرمول و مطابق زیر تبدیل می‌کنیم.

$$۴x + ۳y - ۲ = \circ$$

حال به کمک فرمول قبل داریم:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۴(۲) + ۳(-۳) - ۲|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{-۳}{۵}$$

■

مثال ۵.۶.۱

فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱, -۴)$ از خط $۸x + ۶y = k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل: ابتدا معادله‌ی خط را به صورت $۸x + ۶y - k = \circ$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله‌ی نقطه از خط داریم:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۸(۱) + ۶(-۴) - k|}{\sqrt{۸^۲ + ۶^۲}} = \frac{|-۱۶ - k|}{۱\circ} = ۴$$

[۲] از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند به اثبات آن بپردازند.

$$\xrightarrow[|x|=|-x|]{\text{می‌دانیم}} |k+16| = 40$$

$$\text{if } \ k+16 = 40 \hookrightarrow \boxed{k=24}$$

$$\text{if } \ k+16 = -40 \hookrightarrow \boxed{k=-56}$$

■

تمرین ۱.۵.۳. داشتن دو جواب برای $k=24, k=-56$ و در نتیجه دو خط $8x+6y+56=0, 8x+6y-24=0$ را در مثال قبل از نظر هندسی توجیه کنید.

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۱.۵.۴. فاصله‌ی مبدأ مختصات را از خط به معادله‌ی $ax+by+c=0$ را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

دستور ۱۵

فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط

$$ax+by+c=0$$

$$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال ۱.۷.۵

فاصله‌ی مبدأ مختصات را از خط به معادله‌ی $3x=-y+5$ را بیابید.

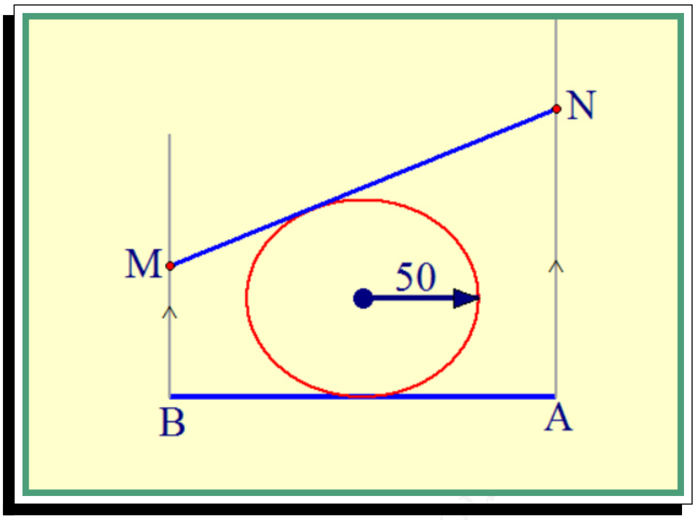
حل:

$$d = \frac{|-5|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

■

مثال ۵.۸.۱

دو نفر در نقاط A و B مطابق شکل زیر ابتدای دو جاده‌ی موازی با هم ایستاده اند فاصله‌ی A و B برابر ۲۰۰ متر و خط AB بر دو جاده عمود است. ساختمانی دایره‌ای شکل در بالای خط AB و مماس بر آن و در فاصله‌ی مساوی از دو جاده قرار دارد. شعاع نمای این دایره ۵۰ متر است. این دو نفر با سرعت‌های ۳ و ۱ متر بر ثانیه شروع به حرکت به سمت شمال می‌کنند. پس از چند ثانیه آنها می‌توانند مجدداً یکدیگر را ببینند؟



حل: نقطه‌ی B را را مبدأ مختصات و BA را محور xها در نظر می‌گیریم. در زمان t شخص B در نقطه‌ی $M(۰, t)$ و شخص A در نقطه‌ی $N(۲۰۰, ۳t)$ قرار دارند. معادله‌ی خط گذرنده از موقعیت A و B در زمان t (خط گذرنده از M و N) را می‌نویسیم.

$$y - y_۰ = m(x - x_۰)$$

$$y - t = \frac{۳t - t}{۲۰۰}(x - ۰)$$

$$tx - ۱۰۰y + ۱۰۰t = ۰$$

زمانی که مجدداً A و B یکدیگر را می‌بینند پاره‌خط MN بر دایره مماس می‌شود. در نتیجه فاصله‌ی مرکز دایره $O(۱۰۰, ۵۰)$ تا خط مماس برابر ۵۰ متر می‌شود. داریم: o

$$\text{فاصله‌ی O تا MN} = \frac{|ax_۰ + by_۰ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۱۰۰t - ۱۰۰(۵۰) + ۱۰۰t|}{\sqrt{t^۲ + ۱۰۰^۲}} = ۵۰$$

$$\frac{|۴t - ۱۰۰|}{\sqrt{t^۲ + ۱۰۰^۲}} = ۱ \hookrightarrow (۴t - ۱۰۰)^۲ = t^۲ + ۱۰۰^۲ \hookrightarrow ۱۵t^۲ = ۸۰۰t$$

$$t = ۰ \text{ غ.ق.ق} \quad , \quad \boxed{t = \frac{۱۶۰}{۳}}$$

بنابراین بعد از $\frac{۱۶۰}{۳}$ ثانیه A و B یکدیگر را مجدداً خواهند دید. ■

۵.۱ چند تست و تمرین برای بخش

تمرین ۵.۵.۱. درصورتی‌که $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادله‌ی یک ضلع آن به صورت $۲x - ۵y = ۳$ باشد، مساحت این مربع چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۶.۵.۱. خطوط $۳x + ۲y = ۱$ و $۲x - ۳y = ۲$ معادلات دو ضلع یک مستطیل و $A(۲,۳)$ یک رأس آن است. مساحت مستطیل چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

تمرین ۷.۵.۱. مثلث ABC با رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۲)$ را در نظر بگیرید.

آ. مثلث را رسم کنید.
حل: به عهده‌ی شما

■ ✓

ب. نشان دهید مثلث ABC متساوی الساقین است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ج. معادله‌ی عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

د. طول و معادله‌ی ارتفاع AH را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ه. طول و معادله‌ی میانه‌ی AM را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

و. معادله‌ی عمودمنصف وارد بر ضلع BC را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ز. آیا این مثلث می‌تواند قائم‌الزاویه هم باشد؟چرا؟

حل: به عهده‌ی شما

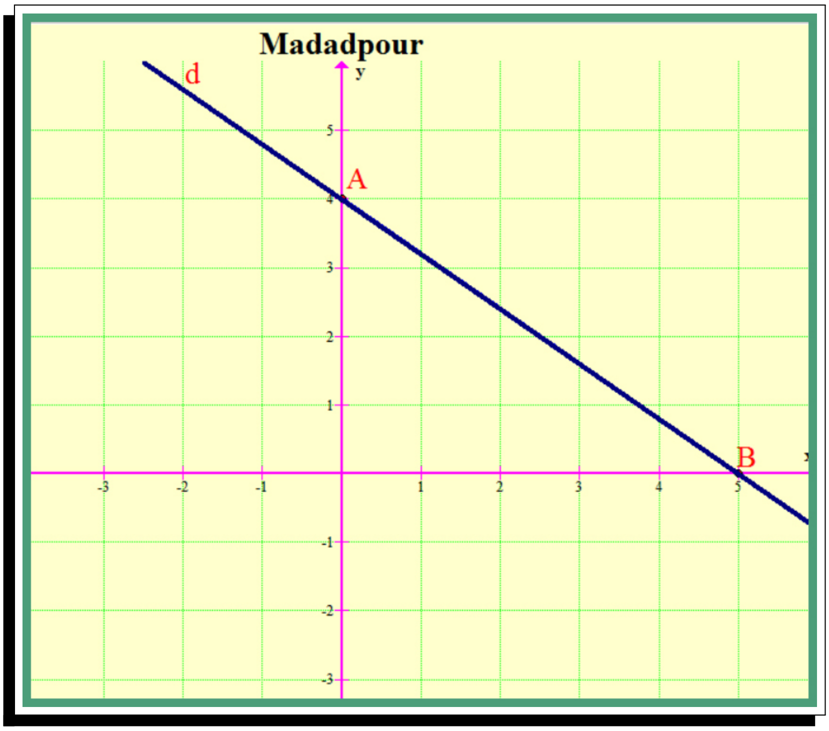
✓ ■

تمرین ۱.۵.۸. نقاط $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۸)$ نقاط انتهای قطر یک دایره می‌باشند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۹.۵.۱. در شکل صفحه‌ی بعد خط d محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کرده است.



آ. طول پاره خط AB را به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. فاصله مبدأ مختصات از خط AB را به دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۵.۱۰. ثابت کنید فاصله دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر $d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۶

فرمول فاصله‌ی دو خط موازی	$d=\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

تمرین ۱.۵.۱۱. خط $4x+3y=5$ بر دایره‌ی C به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۲.۵.۱. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۳.۵.۱. سه رأس مثلث ABC نقاط $A(-۱۰,-۱۳)$ و $B(-۳,۳)$ و $C(۳,۱)$ هستند.

آ. طول عمودی که از رأس B بر میانه‌ی نظیر رأس C وارد می شود را به دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۷

رابطه‌ی بین مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$	$x_A + x_C = x_B + x_D$ $y_A + y_C = y_B + y_D$

تمرین ۱۴.۵.۱. اگر M مرکز ثقل(محل برخورد میانه‌ها) در مثلث ABC با مختصات رئوس $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ و $C(x_۳, y_۳)$ باشد، ثابت کنید:

$$x_M = \frac{x_۱ + x_۲ + x_۳}{۳}$$
$$y_M = \frac{y_۱ + y_۲ + y_۳}{۳}$$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

دستور ۱۸

فرمول بدست آوردن مختصات مرکز ثقل مثلث ABC

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{۳}$$
$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{۳}$$

تمرین ۱.۵.۱۵. نشان دهید یک چهارضلعی با رئوس $A(۲, ۷)$ و $B(۱, ۰)$ و $C(۸, -۳)$ و $D(۵, -۱)$ یک مربع است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

نکته‌ی ۵.۱.۱

شرط عمود بودن دو خط $y = mx + h\ ,\ y = m'x + h'$ این‌است که:

$$\boxed{mm' = -۱}$$

و نیز شرط موازی بودن دو خط $y = mx + h\ ,\ y = m'x + h'$ خط این‌است که:

$$\boxed{m = m'}$$

تست ۱.۵.۱. به ازاء چه مقدار m دو خط $y - mx + ۲ = ۰$ و $y = ۲x + ۱$ بر هم عمودند؟

۱) -۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y = mx - ۲ \\ y = ۲x + ۱ \end{array}\right\} \hookrightarrow ۲m = -۱ \hookrightarrow m = -\frac{۱}{۲}$$

■

نکته‌ی ۵.۲.۱

بحث در وجود جواب دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ و بررسی اوضاع نسبی دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$

۱. اگر $\boxed{\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\ a'x+b'y=c'$ متقاطع هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد(یکتا) دارد.

۲. اگر $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\ a'x+b'y=c'$ موازی هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ جواب ندارد.

۳. اگر $\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}$ باشد دو خط $ax+by=c\,,\ a'x+b'y=c'$ منطبق هستند و دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد.

تست ۲.۵.۱. به ازاء چه مقدار m خط $۲x+۵my=۴$ و خط زیر بر هم منطبق‌اند؟

$$mx+۲\left(m^۲+۱\right)y=۳m+۲$$

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

حل:

$$\begin{cases} ۲x+۵my=۴ \\ mx+۲\left(m^۲+۱\right)y=۳m+۲ \end{cases} \hookrightarrow \frac{۲}{m}=\frac{۵m}{۲\left(m^۲+۱\right)}=\frac{۴}{۳m+۲} \hookrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{۲}{m}=\frac{۵m}{۲\left(m^۲+۱\right)} \hookrightarrow ۴m^۲+۴=۵m^۲ \hookrightarrow m=\pm ۲ \\ \frac{۲}{m}=\frac{۴}{۳m+۲} \hookrightarrow ۶m+۴=۴m \hookrightarrow m=-۲ \end{cases} \hookrightarrow \boxed{m=-۲}$$

■

تست ۳.۵.۱. معادله‌ي خطي که از نقطه‌ي تلاقي دو خط $y=۲x+۳, y=x+۲$ گذشته و بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد کدام است؟

۱) $y=x+۱$ ۲) $y=x$ ۳) $y=-x+۱$ ۴) $y=-x$

حل:

$$\begin{cases} y=۲x+۳ \\ y=x+۲ \end{cases} \hookrightarrow ۲x+۳=x+۲ \hookrightarrow x=-۱, y=۱ \hookrightarrow A\left(-۱,۱\right)$$

$$y=x \hookrightarrow m=۱ \hookrightarrow m'=-۱ \hookrightarrow y-y_۱=m'\left(x-x_۱\right) \hookrightarrow$$

$$y-۱=-۱\left(x+۱\right) \hookrightarrow \boxed{y=-x}$$

■

نکته‌ی ۵.۳.۱

معادلهٔ خطی که از دو خط $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax+by+c'=0 \end{cases}$ به‌یک فاصله باشد به صورت زیر است.

$$ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

تست ۴.۵.۱. معادلهٔ خطی که از دو خط $6x+4y+14=0$, $3x+2y-5=0$ به‌یک فاصله باشد کدام است؟

۱) $3x+2y-1=0$ ۲) $3x+2y+1=0$ ۳) $2x+3y+1=0$ ۴) $2x+3y-1=0$

حل:

$$\begin{cases} 3x+2y-5=0 \hookrightarrow 6x+4y-10=0 \\ 6x+4y+14=0 \hookrightarrow 6x+4y+14=0 \end{cases}$$

$$6x+4y+\frac{14-10}{2}=0 \hookrightarrow \boxed{3x+2y+1=0}$$

■

تست ۵.۵.۱. معادلهٔ دو ضلع مقابل یك مربع به صورت $3x-6y-2=0$ و $x-2y+2=0$ است مساحت مربع کدام است؟

۱) $\frac{58}{45}$ ۲) $\frac{62}{45}$ ۳) $\frac{68}{45}$ ۴) $\frac{64}{45}$

حل:

$$\begin{cases} 3x-6y-2=0 \\ 3x-6y+6=0 \end{cases} \hookrightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-2-6|}{\sqrt{9+36}}=\frac{8}{\sqrt{45}}$$

$$\hookrightarrow s=d^2=\frac{64}{45}$$

■

تست ۶.۵.۱. اوضاع نسبی دستگاه زیر را بررسی کنید.

$$\begin{cases} x+5y=6 \\ 2x-y=1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$$

۱) دو جواب دارد ۲) بی‌شمار جواب دارد
۳) جواب ندارد ۴) فقط یک جواب دارد.

حل: فقط یک جواب دارد.(سه خط همرسند)

$$\begin{cases} x+5y=6 \\ 2x-y=1 \end{cases} \to \begin{cases} 2x+10y=12 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \to y=1, x=1$$

$$2x+3y=5 \to 2(1)+3(1)=5 \to 5=5$$

■

تست ۷.۵.۱. نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC با رئوس $C\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right., B\left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right., A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ کدام است؟

۱) $(۱,۰)$ ۲) $(۱,-۱)$ ۳) $(-۱,۰)$ ۴) $(۱,۱)$

حل: می‌دانیم سه ارتفاع هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند(در یک نقطه همرسند). این سه رأس ،رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. پس سه ارتفاع آن از رأس قائمه یعنی $(۱,۱)$ می‌گذرند. ■

نکته‌ی ۵.۴.۱

شرط هم استقامت بودن (روی یک خط راست بودن)سه نقطه‌ی A و B و C این است که:

$$\boxed{m_{AB}=m_{BC}}$$

تست ۸.۵.۱. در صورتي كه $A(۱,۲)$ و $B(۳,۳)$ و $C(a,۱)$ بر يك استقامت باشند a كدام‌است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

حل:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{۳-۲}{۳-۱}=\dfrac{۱}{۲} \\ m_{BC}=\dfrac{۱-۳}{a-۳}=\dfrac{-۲}{a-۳} \end{array}\right\} \dfrac{-۲}{a-۳}=\dfrac{۱}{۲}\hookrightarrow a-۳=-۴\hookrightarrow \boxed{a=-۱}$$

■

تست ۹.۵.۱. اگر خطوط به معادلات $x+y=۲$, $۲x-y=۱$, $x-my=-۱$ از يك نقطه بگذرند m كدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

حل:

$$\begin{cases} ۲x-y=۱ \\ x+y=۲ \end{cases}\hookrightarrow \begin{cases} ۳x=۳\hookrightarrow x=۱ \\ ۱+y=۲\hookrightarrow y=۱ \end{cases}$$
$$x-my=-۱\hookrightarrow ۱-m\,(۱)=-۱\hookrightarrow \boxed{m=۲}$$

■

تست ۱۰.۵.۱. مختصات نقطه‌ای روي خط $y=۳x$ كه از مبدأ مختصات به فاصله‌ي $\sqrt{۱۰}$ بوده و بالاي محور xها باشد كدام است؟

۱) $(۱,۳)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۳,۹)$ ۴) $(۴,۱۲)$

حل:

$$y=۳x\hookrightarrow M\left|\begin{array}{l} x \\ ۳x \end{array}\right.\hookrightarrow OM=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow$$
$$\sqrt{x^۲+۹x^۲}=\sqrt{۱۰}\hookrightarrow x^۲=۱\hookrightarrow x=\pm۱\hookrightarrow M\left|\begin{array}{l} ۱ \\ ۳ \end{array}\right. ,M\left|\begin{array}{l} -۱ \\ -۳ \end{array}\right.$$

■

تست ۱۱.۵.۱. زاويه‌ي بردار مكان نقطه‌ي $M\left(۳,۳\sqrt{۳}\right)$ با محور xها كدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

حل:

$$M\left(۳,۳\sqrt{۳}\right)$$
$$\tan(\alpha)=\frac{y}{x}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}\hookrightarrow\boxed{\alpha=\frac{\pi}{۶}}$$

■

تست ۱۲.۵.۱. خط $y=x+۲$ منحني تابع $y=\dfrac{۲x+۱}{x}$ رادر دو نقطه‌ي A و B قطع مي‌كند معادله‌ي عمودمنصف AB كدام است؟

۱) $y=x+۱$ ۲) $y=x+۲$ ۳) $y=-x$ ۴) $y=-x+۲$

حل: فرض كنيد Δ عمودمنصف AB باشد.

$$\begin{cases} y=\dfrac{۲x+۱}{x} \\ y=x+۲ \end{cases} \hookrightarrow \frac{۲x+۱}{x}=x+۲ \hookrightarrow x^۲+۲x=۲x+۱ \hookrightarrow x^۲=۱$$
$$\hookrightarrow x=\pm۱ \hookrightarrow A(۱,۳)\ ,\ B(-۱,۱) \hookrightarrow M\left(\frac{۱-۱}{۲},\frac{۳+۱}{۲}\right)=(۰,۲)$$
$$\hookrightarrow m_{AB}=\frac{۱-۳}{-۱-۱}=۱ \hookrightarrow m_{\Delta}=-۱ \hookrightarrow$$
$$y-y_۰=m_{\Delta}(x-x_۰) \hookrightarrow y-۲=-۱(x-۰) \hookrightarrow \boxed{y=-x+۲}$$

■

تست ۱۳.۵.۱. دو خط $y=mx+۲, y=۲x+m$ يكديگر را روي نيمساز ناحيه‌ي اول و سوم قطع مي‌كند m كدام است؟

۱) -۳ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۱

حل:

$$\begin{cases} y=mx+۲ \\ y=۲x+m \end{cases} \hookrightarrow \begin{cases} mx-y=-۲ \\ -۲x+y=m \end{cases}$$
$$\begin{cases} x(m-۲)=m-۲ \xhookrightarrow{x\neq۲} x=-۱ \\ y=-۲+m \xhookrightarrow{y=x=-۱} \boxed{m=۱} \end{cases}$$

■

تست ۱۴.۵.۱. نقاط $A(۲\beta,\beta), B(\beta+۳,\beta-۴)$ دو رأس مثلث ABC و معادله‌ي ميانه‌ي نظير رأس C خط $y=۵$ مي‌باشد مختصات وسط AB كدام است؟

۱) $(۵,۹)$ ۲) $(۵,۱۲)$ ۳) $(۹,۵)$ ۴) $(۱۲,۵)$

حل: فرض كنيد M نقطه‌ي وسط AB باشد.

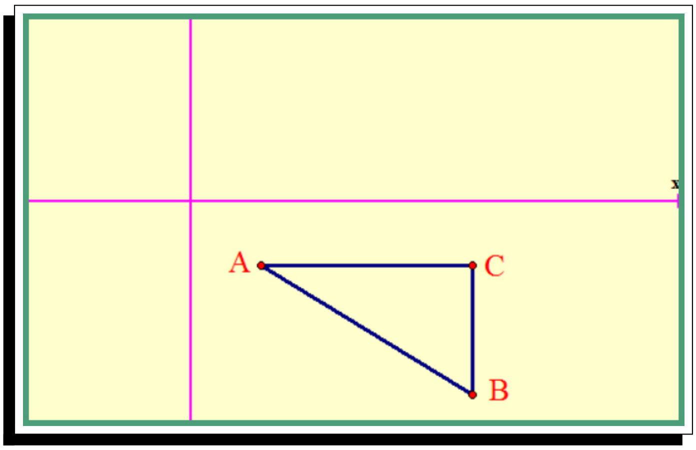
$$\left.\begin{array}{l} M\left(\dfrac{۲\beta+\beta+۳}{۲},\dfrac{\beta+\beta-۴}{۲}\right)=\left(\dfrac{۳\beta+۳}{۲},\dfrac{۲\beta-۴}{۲}\right) \\ \dfrac{۲\beta-۴}{۲}=۵ \hookrightarrow ۲\beta-۴=۱۰ \hookrightarrow \beta=۷ \end{array}\right\} \hookrightarrow \boxed{M(۱۲,۵)}$$

■

تست ۱۵.۵.۱. در شكل زير ضريب زاويه‌ي خطي كه از دو نقطه‌ي A و B مي‌گذرد كدام است؟

$$AC=\frac{۵}{۳}, BC=\frac{۲}{۳}$$

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $-\frac{5}{2}$ ۴) $-\frac{2}{5}$



حل:

$$\tan\left(\widehat{A}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \hookrightarrow \boxed{m = -\frac{2}{5}}$$

■

تست ۱۶.۵.۱. محل برخورد دو خط به معادله‌هاي $my = x + n, y = x + 2$ روي محور ox قرار دارد n کدام است؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) -1

حل:

$$\begin{cases} my = x + n \xrightarrow{y=0} x + n = 0 \hookrightarrow x = -n \\ y = x + 2 \xrightarrow{y=0} 0 = -n + 2 \hookrightarrow \boxed{n = 2} \end{cases}$$

■

تست ۱۷.۵.۱. مطلوب است تعیین معادله‌ي خطي که از نقطه‌ي برخورد دو خط $x + y - 1 = 0$ و $3x - 5y + 6 = 0$ گذشته و با جهت مثبت محور xها زاويه‌ي ۴۵ درجه بسازد.

۱) $y = x + \frac{3}{4}$ ۲) $y = x + \frac{5}{4}$ ۳) $y = -x + \frac{3}{4}$ ۴) $y = -x + \frac{5}{4}$

حل:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} -3x - 3y + 3 = 0 \\ 3x - 5y + 6 = 0 \end{cases} \begin{cases} -8y = -9 \\ x = -\frac{1}{8} \end{cases} A \left| \begin{matrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{9}{8} \end{matrix} \right.$$

$$\hookrightarrow \tan(45^\circ) = 1 \hookrightarrow y - \frac{9}{8} = x + \frac{1}{8} \hookrightarrow \boxed{y = x + \frac{5}{4}}$$

■

تست ۱۸.۵.۱. منحني به معادله‌ي $y^4 + 3xy - 4 = 0$ و نيمساز ناحيه‌ي دوم و چهارم مفروضند مجموع فواصل نقاط برخورد آنها تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} y^۴ - ۳xy - ۴ = ۰ \\ y = -x \end{array}\right\} x^۴ - ۳x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲ \\ x^۲ = -۱ \end{cases}$$

$$A\left|\begin{array}{l} ۲ \\ -۲ \end{array}\right., B\left|\begin{array}{l} -۲ \\ ۲ \end{array}\right., O\left|\begin{array}{l} ۰ \\ ۰ \end{array}\right.$$

$$\mathrm{AO} + \mathrm{BO} = \sqrt{۴ + ۴} + \sqrt{۴ + ۴} = ۴\sqrt{۲} \hookrightarrow \boxed{\mathrm{AO} + \mathrm{BO} = ۴\sqrt{۲}}$$

■

تمرین ۱۶.۵.۱. وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به‌هم مشخص کنید:

$l : ۲x - y = ۱$
$d : y = ۲x - ۳$
$\Delta : x + ۲y = ۰$

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱۷.۵.۱. دو نقطه‌ی $A(۱۴, ۳)$ و $B(۱۰, -۱۳)$ را در نظر بگیرید.

آ. فاصله‌ی مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB به‌دست آورید.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. معادله‌ی عمودمنصف پاره‌خط AB را بنویسید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۵.۱۸. نشان دهید مثلث با رئوس $A(۱,۲)$ و $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۵.۱۹. دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

آ. اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. آیا نقطه‌ی $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

حل: به عهده‌ی شما

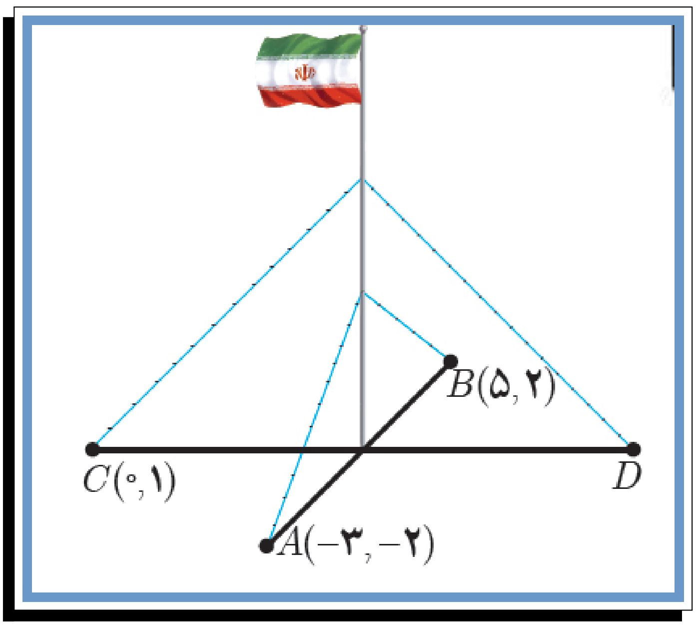
✓ ■

تمرین ۲۰.۵.۱. نقاط $O(\circ,\circ)$ و $M(۴,\circ)$ دو رأس از یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس سوم آن را بیابید. مسأله چند جواب دارد؟

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۱.۵.۱. یک میله‌ی پرچم بزرگ، مطابق شکل زیر توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است به طوری که فاصله‌ی هر نقطه تا میله برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل آن تا میله. مختصات نقطه‌ی D را به‌دست آورید.



حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۲.۵.۱. نقاط $A(۲,۳)$ و $B(-۱,۰)$ و $C(۱,-۲)$ سه رأس از یک مستطیل هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه حل کوتاه‌تری برای مسأله ارائه کنید؟)

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۳.۵.۱. فاصله‌ی نقطه‌ی $P(۷,-۴)$ را از خط به معادله‌ی $۲x+y=۵$ به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۲۴.۵.۱. یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=۲x-۱$ واقع است. اگر $A(۳,۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به‌دست آورید.

حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

تمرین ۱.۵.۲۵. اگر a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند، نشان دهید؛

آ. خط گذرا از نقاط $P(a,b)$ و $Q(b,a)$ همواره بر خط $y=x$ عمود است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

ب. نقطه‌ی وسط پاره‌خط PQ همیشه بر روی خط $y=x$ واقع است.
حل: به عهده‌ی شما

✓ ■

Mathematics(11)

by:

Shapour

Madadpour

madad_sh@yahoo.com

knowledge is power ▪ june 2017

حسابان

فصل ۲

تابع

❖ یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. اعضای A و B هر شیء می‌توانند باشند اما اگر $A\subseteq\Re$ و $B\subseteq\Re$ تابع f را تابع حقیقی می‌نامیم.

❖ A را دامنه تابع ، B را هم دامنه آن و مجموعه $\{f(x)|x\in A\}$ را برد تابع f گوییم.

مثال: تابع حقیقی $f:A\to B$ را که در آن $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و هر عضواز f به صورت $(t,۲t)$ می‌باشد را در نظر بگیرید.

الف) مجموعه B را توصیف کنید.

ب) تابع f را با اعضایش مشخص کنید.

ج) ضابطه تابع f را مشخص کنید؟

د) اگر $B=N$ (N مجموعه اعداد طبیعی است)، معرفی کاملی از تابع f را بنویسید.

حل:

الف) مجموعه B هر زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی شامل مجموعه $\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ می‌تواند باشد

ب) اعضای تابع f به صورت $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۶),(۴,۸),(۵,۱۰)\}$ می‌باشد.

ج) ضابطه تابع f را می‌توان به صورت $f(x)=۲x$ نوشت.

د) تابع f را می‌توان به صورت‌های $\begin{cases} f:A\to N \\ f(x)=۲x \end{cases}$ یا $\begin{cases} f:\{۱,۲,۳,۴,۵\}\to\{۱,۲,۳,۴,۵,...\} \\ f(x)=۲x \end{cases}$ نوشت که به‌طورکامل تابع فوق را معرفی می‌کنند توجه کنید که مجموعه A دامنه تابع f و مجموعه N، هم دامنه تابع و همچنین برد تابع مجموعه $\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ می‌باشد.

مثال: مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو می‌باشد و تابع g از A به B تعریف شده است.

الف) در نمودار ون مربوط به تابع g چند پیکان باید وجود داشته باشد.

ب) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m<n$.

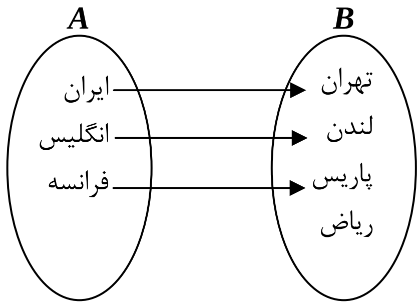
ج) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m=n$.

د) نمودار ون تابع g را طوری رسم کنید که $m>n$.

حل:

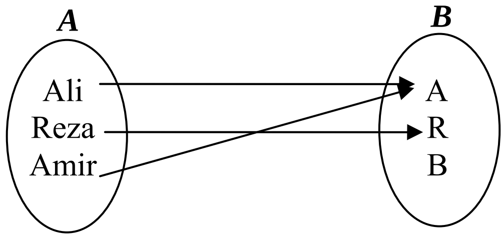
الف) با توجه به اینکه از هر عضو A دقیقاً یک پیکان باید خارج شده باشد بنابراین دقیقاً باید m پیکان از A به B کشیده شود.

ب) بی‌شمار تابع برای g می‌توان در نظر گرفت. به عنوان مثال می‌توان g را چنین در نظر گرفت:



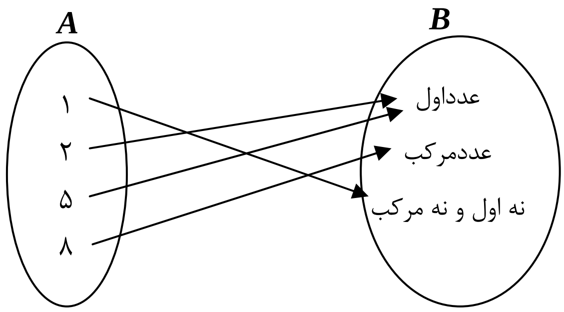
مجموعه {فرانسه، انگلیس، ایران} دامنه تابع و مجموعه {ریاض، پاریس، لندن، تهران} هم دامنه تابع و مجموعه {پاریس، لندن، تهران} برد تابع می‌باشند.

ج) می‌توان g را چنین در نظر گرفت.



مجموعه $\{Ali, Reza, Amir\}$ دامنه تابع و $\{A, R, B\}$ هم دامنه تابع و مجموعه $\{A, R\}$ برد تابع می‌باشند.

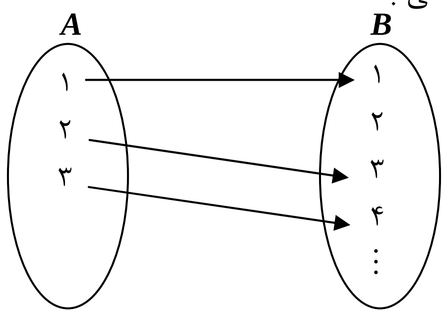
د) تابع g را می‌توان چنین در نظر گرفت:



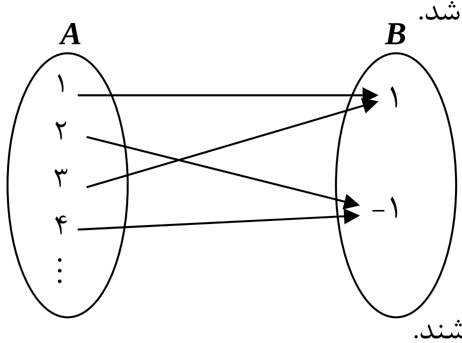
مجموعه $\{۱,۲,۵,۸\}$ دامنه تابع و مجموعه {نه اول و نه مرکب، عدد مرکب، عدد اول} هم دامنه و برد تابع هستند.

مثال: تابع $g: A \to B$ را طوری مشخص کنید که:

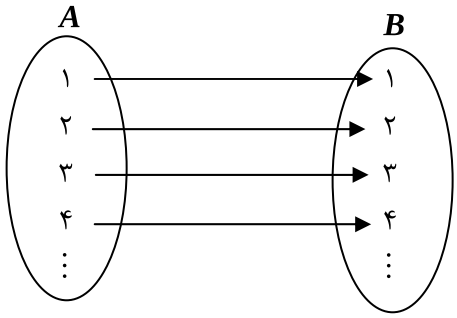
الف) A متناهی و B نامتناهی باشد.



ب) A نامتناهی و B متناهی باشد.



ج) A و B هر دو نامتناهی باشند.



مثال: الف) تابع f با ضابطه $y=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ را رسم کنید.

ب) تابع $g:[-۲۰,۲۰]\to\Re$ با ضابطه $g(x)=\frac{۹}{۵}x+۳۲$ را رسم کنید.

ج) آیا تابع h را می‌توان به قسمتی در نظر گرفت که دامنه و ضابطه آن با تابع g یکی باشد اما هم
دامنه آن مجموعه Z باشد.

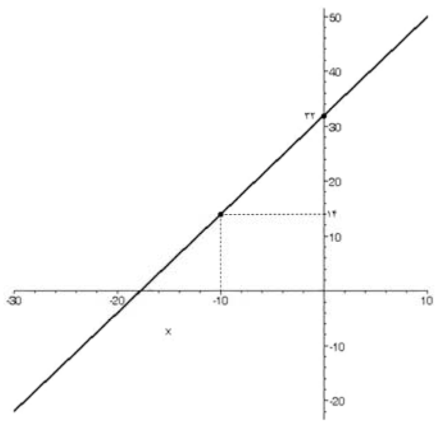
حل:

الف) با توجه به اینکه نمودار ضابطه داده شده یک خط است و هر خط با ۲ نقطه مشخص می‌شود کافی است ۲ نقطه از این خط را یافته و خط را رسم کرد.

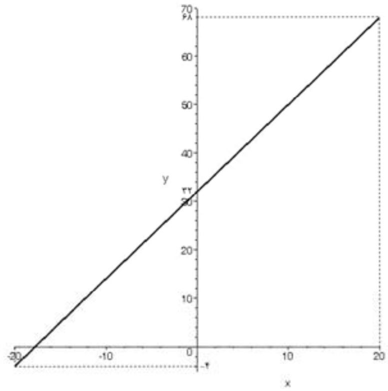
به عنوان مثال:

$$x=۰\Rightarrow y=۳۲\Rightarrow(۰\ ,\ ۳۲)\in f\ ,\quad x=-۱۰\Rightarrow y=۱۴\Rightarrow(-۱۰,۱۴)\in f$$

لذا شکل آن به صورت زیر خواهد بود.



ب) نموار این تابع قسمتی از تابع f است که در آن $-۲۰ \le x \le ۲۰$. در واقع تابع g را تحدید تابع f می‌نامیم و نمودار آن چنین است:

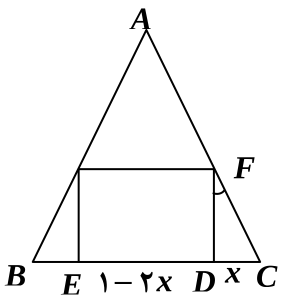


ج) با توجه به اینکه $\frac{۱۶۹}{۵} = ۳۲ + \frac{۹}{۵} = g(۱)$ و $\frac{۱۶۹}{۵} \notin Z$ لذا چنین تابعی نمی‌توان یافت.

مثال: از بین مستطیل‌های قابل محاط شدن در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ کدام مستطیل بیش‌ترین مساحت را دارد؟

حل: طبق شکل اگر DC را برابر x بگیریم، داریم $D\hat{F}C = ۳۰^\circ$ (چرا؟) و از آن‌جا $FC = ۲x$. با توجه به رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$FC^۲ = DC^۲ + FD^۲ \Rightarrow (۲x)^۲ = x^۲ + FD^۲ \Rightarrow FD = \sqrt{۳}\,x$$



لذا مساحت مستطیل فوق از رابطه $S = (۱-۲x)x\sqrt{۳}$ بدست می‌آید و داریم:

$$s = -۲\sqrt{۳}\,(x^۲ - \frac{۱}{۲}x) = -۲\sqrt{۳}[(x-\frac{۱}{۴})^۲ - \frac{۱}{۱۶}] = -۲\sqrt{۳}(x-\frac{۱}{۴})^۲ + \frac{\sqrt{۳}}{۸}$$

اما بیشترین مقدار عبارت $-۲\sqrt{۳}(x-\frac{۱}{۴})^۲$ صفر است که به ازای $x = \frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید و لذا ماکزیمم S برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۸}$ است و طول و عرض این مستطیل برابر است با $x\sqrt{۳} = \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$ و

$$۱-۲x = ۱-۲(\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

تمرین:

۱- اگر رابطه‌ی $f=\{(-۳,۲),(۳,a),(۳,-۱),(۳a,b)\}$ تابع باشد a و b را بیابید.

۲- m را طوری بیابید که رابطه $\{(m,-۱),(۲,-۲),(۱,m^۲-۴),(۱,۰)\}$ تابع باشد.

۳- نمودار ون مربوط به رابطه‌ی $|x|+|y|=۱$ را که در آن x و y اعدادی صحیح هستند را رسم کنید. آیا این رابطه تابع است؟

۴- دامنه تابع f مجموعه $D_f=\{x:|x+۱|\le ۲\}$ می‌باشد و تابع f به ازای $\{x:|x|<۱\}$، $f(x)<۰$ و به ازای سایر xها $f(x)\ge ۰$، دامنه $g(x)=\sqrt{f(x)}$ را بیابید.

۵- دامنه‌ی توابع زیر را بیابید:

الف) $y=\sqrt{\dfrac{۱-x}{۱+x}}$ ب) $y=\dfrac{\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱+x}}$

ج) $y=\dfrac{\sqrt{۱+x}}{\sqrt{x-۱}}$ د) $y=\sqrt{\dfrac{۱+x}{x-۱}}$

ه) $y=\sqrt{۴x-x^۳}$ و) $y=\sqrt{\dfrac{x+۳}{۱-۲x}}$

ز) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}(x^۲-۱)$ ح) $y=\log_{\frac{۱}{۳}}(\log_۲^x)$

ط) $y=\log_۲(\log_{\frac{۱}{۳}}x)$ ی) $y=\log(\sin x)$

۶- برای اندازه‌گیری دما از واحدهای سانتی‌گراد C و فارنهایت F استفاده می‌شود که با رابطه‌ی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$ به یکدیگر وابسته هستند در چه دمایی هر دو واحد یک عدد را نشان می‌دهد؟

۷- نمودار تابعی را رسم کنید که هر سه ویژگی زیر را داشته باشد:

الف) دامنه آن بازه $[-۱,۳)$ باشد.

ب) برد آن بازه $(۱,۴]$ باشد.

ج) یک به یک نباشد.

۸- ارتفاع یک جسمی که به بالا پرتاب شده است از رابطه $h=-۵t^۲+۲۰t$ به دست می‌آید که در آن t زمان طی شده پس از پرتاب جسم بر حسب ثانیه و h ارتفاع جسم بر حسب متر است.

الف) پس از یک ثانیه جسم در چه ارتفاعی قرار دارد؟

ب) جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ج) پس از چه زمانی جسم به زمین برخورد می‌کند؟

د) در چه بازه‌ی زمانی ارتفاع جسم از ۱۵ متر بیشتر است؟

ه) در چه بازه‌ی زمانی ارتفاع جسم حداکثر ۱۰ متر است؟

۹- اگر تابع f به ازای هر $x\ge\frac{۱}{۲}$ در رابطه‌ی $f(\frac{x-۱}{x})=\sqrt{۲x-۱}$ صدق کند دامنه و برد تابع را بیابید.

۱۰- اگر $f(\frac{۲x+۱}{x}) = ۵x - ۱$ ، $f(۴)$ را بیابید.

۱۱- اگر $f(\frac{x-۱}{x}) = \sqrt{۲x-۱}$ ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۱۲- اگر $f(x+\frac{۱}{x}) = x^۲ + \frac{۱}{x^۲}$ ضابطه‌ی تابع f را بیابید.

۱۳- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است اگر حاصل ضرب آن دو عدد مینیمم باشد دو عدد را بیابید.

۱۴- دو ضلع از مستطیلی منطبق بر جهت مثبت محورهای مختصات بوده و رأس چهارم آن بر خط به معادله $y = -۳x + ۹$ واقع می‌باشد بیشترین مساحت ممکن این مستطیل چقدر است؟

۱۵- محیط مستطیلی ۲۰۰ متر است ابعاد آن را چنان بیابید که مساحت آن ماکزیمم شود.

۱۶- مساحت مستطیلی ۶۴ متر مربع است ابعاد آن را به قسمی بیابید که محیط آن مینیمم شود.

۱۷- از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن بر محور xها منطبق و دو رأس آن روی منحنی تابع $y = ۶ - x^۲$ (با شرط $y > ۰$) قرار دارد کدام مستطیل بیشترین محیط را دارد؟

۱۸- نقطه A به طول ۴ بر محور طول‌ها واقع است بر منحنی $y = ۳\sqrt{x}$ نقطه‌ای را بیابید که فاصله‌اش از A کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

۱۹- کوتاهترین فاصله مبدأ مختصات از منحنی به معادله $y^۲ = ۲x - ۱$ چقدر است؟

۲۰- از بین مثلثهایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۲ است بیشترین مساحت را چه مثلثی دارد؟

۲۱- از بین مستطیل‌هایی که محیط آن مقدار ثابت k است کدام مستطیل کمترین طول قطر را دارد؟

۲۲- بیشترین مساحت مستطیلی که به وسیله یک طناب به طول ۲۴۰۰ متر در حاشیه یک دریا می‌توان محصور کرد چند متر مربع است (ضلع مجاور به دریا نیازی به محصور کردن ندارد).

۲۳- از بین استوانه‌هایی که مجموع ارتفاع و شعاع قاعده آن‌ها عدد ثابت k است کدام استوانه بیشترین سطح جانبی را دارد؟

۲۴- از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ واحد است کدام بیشترین مساحت را دارد.

❖ **دوتابع f و g در صورتی مساویند که هردو شرط زیر برقرار باشد:**

الف) دامنه دو تابع با هم برابر باشند.

ب) به ازای هر عضو از دامنه آن‌ها داشته باشیم $f(x)=g(x)$.

مثال: توابع $g=\{(۳\,,۴),(۷\,,۵),(۹\,,-۱)\}$ و $f=\{(۳\,,۴),(۷\,,-۱),(۹\,,۵)\}$ را در نظر بگیرید. آیا این دو تابع با هم مساویند.

حل: دامنه این دو تابع مجموعه $\{۳\,,۷\,,۹\}$ است که با هم مساوی است. $f(۷)=-۱$ ولی $g(۷)=۵$ پس دو تابع با هم مساوی نیستند.

مثال: توابع $\begin{cases} f: A\to \Re \\ f(x)=۳x^۳+۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} g: A\to \Re \\ g=\{(۱\,,a)\,,(b\,,۲)\,,(a\,,c)\} \end{cases}$ را در نظر بگیرید. a، b و c را طوری بیابید که دو تابع با هم مساوی باشند.

حل: چون $۱\in D_g$ لذا باید $۱\in D_f$ و $f(۱)=۴$ پس باید $g(۱)=۴$ یعنی $a=۴$. همچنین $g(b)=۲$ و از حل معادله $f(x)=۲$ نتیجه می‌شود که $x=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}$ لذا $b=\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}$. با استدلال‌های مشابه $۴\in D_g$ و در نتیجه باید $۴\in D_f$ و چون $f(۴)=۱۹۳$ لذا $g(۴)=۱۹۳$ یعنی $c=۱۹۳$.

پس تابع g به صورت $g(x)=\left\{(۱\,,۴),(\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\,,۲),(۴\,,۱۹۳)\right\}$ بوده و A نیز چنین است: $A=\left\{۱\,,\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}\,,۴\right\}$.

مثال: توابع $f(x)=\sin^۲ x+\cos^۲ x$ و $g(x)=۱$ با هم برابرند دقت کنید که دامنه هر دو تابع مجموعه $\Re$ است.

مثال: آیا توابع $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=x$ با هم مساویند؟

حل: دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است اما به ازای هر $x<۰$ مقادیر دو تابع برابر نیست.
مثلاً $f(-۵)=\sqrt{(-۵)^۲}=۲۵=۵$ ، ولی $g(-۵)=-۵$.

مثال: آیا توابع $f(x)=\tan x$ و $g(x)=\frac{۱}{\cot x}$ با هم برابرند؟

حل: می‌دانید که $\tan x$ به ازای هر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\,,k\in Z$ تعریف نشده است یعنی این نقاط در دامنه تابع f قرار ندارند.

امّا $\cot x$ به ازای هر $x=k\pi\,,k\in Z$ تعریف نشده و به ازای هر $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\,,k\in Z$ صفر می‌شود لذا مجموعه این نقاط یعنی نقاط به طول $x=k\frac{\pi}{۲}\,,k\in Z$ عضو دامنه تابع g نمی‌باشد.

بنابراین دامنه این دو تابع برابر نیست. به عنوان مثال $f(۰)$ تعریف شده و برابر صفر است اما تابع g به ازای $x=۰$ تعریف نشده است.

مثال: به طور مشابه با مثال قبل توابع $f(x)=\log x^{۲}$ و $g(x)=۲\log x$ با هم برابر نیستند زیرا دامنه تابع f مجموعه $R-\{۰\}$ است ولی دامنه تابع g مجموعه $\{x|\ \ x>۰\}$ می‌باشد که برابر نیستند.

مثال: M و L را طوری بیابید که توابع f و g باهم برابر باشند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+۲}{x^{۲}-۴} & x\neq -۲,۲\\ L & x=-۲\\ ۵ & x=۲\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x-۲} & x\neq ۲\\ M & x=۲\end{cases}$$

حل: اولاً دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است و $g(۲)=M$ و $f(۲)=۵$ بنابراین $M=۵$.

همچنین $f(-۲)=L$ و $g(-۲)=\dfrac{۱}{-۴}$ لذا $L=-\dfrac{۱}{۴}$. توجه کنید که اگر $x\neq ۲\ ,\ x\neq -۲$ آن‌گاه:

$$f(x)=\frac{x+۲}{x^{۲}-۴}=\frac{x+۲}{(x-۲)(x+۲)}=\frac{۱}{x-۲}$$

چون $x\neq -۲$، ساده کردن اشکالی را به وجود نمی‌آورد و $g(x)=\dfrac{۱}{x-۲}$، یعنی به ازای هر $x\neq ۲\ ,x\neq -۲$ نیز این دو تابع با هم برابرند و لذا با قرار دادن $M=۵$ و $L=-\dfrac{۱}{۴}$ دو تابع f و g با هم مساوی خواهند شد.

تمرین:

۱- تحقیق کنید آیا هر جفت از توابع داده شده با هم مساویند یا خیر و چرا؟

الف) $f(x)=\dfrac{(x-۳)^{۲}}{(x-۳)}$ و $g(x)=\sqrt{\dfrac{(x-۳)^{۳}}{x-۳}}$

ب) $f(x)=\sqrt{۱-\sin^{۲}x}$ و $g(x)=\cos x$

ج) $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۲}-x}}{\sqrt{x}}$

د) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}\quad x\neq ۰$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^{۴}+x^{۳}}}{x}$

هـ) $f(x)=\sqrt{-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{-x}$

و) $f(x)=\sqrt{x-۱}\ .\ \sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۱}$

ز) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{۲}$ و $g(x)=|x|$

ح) $f(x)=\sqrt{۱-x}\ .\ \sqrt{۱+x}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

ط) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^۳+x^۲}{۵-x}}$ و $g(x)=\dfrac{x\sqrt{x+۱}}{\sqrt{۵-x}}$

ی) $f(x)=۱+\cot^۲ x$ و $g(x)=\dfrac{۱+\tan^۲ x}{\tan^۲ x}$

۲- کدام تابع با بقیه مساوی نیست؟

$$y=\sqrt{\frac{۲-x}{x+۳}}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{۲-x}}{\sqrt{x+۳}}\quad,\quad y=\sqrt{\frac{x-۲}{-x-۳}}\quad,\quad y=\frac{\sqrt{x-۲}}{\sqrt{-x-۳}}$$

۳- اگر توابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x+۱} & x\neq -۱\\ K & x=-۱\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-x}{x} & x\neq ۰\\ L & x=۰\end{cases}$ با هم برابر باشند مقدار K و L را بیابید.

توابع چند ضابطه‌ای

❖ **توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند.**

امروزه توابعی که در سازمان‌ها جهت محاسبه‌ی هزینه‌ی آب، برق، گاز، تلفن و ... مشترکین مورد محاسبه قرار می‌گیرد به صورت توابع چند ضابطه‌ای می‌باشد.

مثال: یک مغازه زنجیره‌ای جهت جذب مشتری اعلام کرده است که به مشتریانی که مبلغ خریدشان حداقل ۲۰۰۰۰ تومان باشد ۵٪ و مشتریانی که مبلغ خریدشان حداقل ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد ۱۰٪ تخفیف می‌دهد تابع فوق را مشخص کنید.

حل: x را مبلغ خرید مشتری و $y=f(x)$ را مبلغی که مشتری باید بپردازد در نظر بگیرید خواهیم داشت

$$f(x)=\begin{cases}x & ۰<x<۲۰۰۰۰\\ ۰/۹۵x & ۲۰۰۰۰\leq x<۱۰۰۰۰۰\\ ۰/۹x & x\geq ۱۰۰۰۰۰\end{cases}$$

مثال: مدرسی تصمیم می‌گیرد جهت ارفاق به دانشجویان خود، نمره دانشجویانی که کمتر از ۸ است را از فرمول $\dfrac{x}{۲}+۶$ ودانشجویانی که نمره ۸ تا ۲۰ گرفته‌اند را از فرمول $\dfrac{۵}{۶}x+\dfrac{۱۰}{۳}$ محاسبه کند.

الف) تابع را مشخص کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) اگر دانشجویی در امتحان نمره ۱۱ گرفته باشد نمره نهایی او چقدر است؟

حل: x را نمره برگه دانشجو و $y=f(x)$ را نمره نهایی او در نظر بگیرید خواهیم داشت:

$$f(x)=\begin{cases} ۶+\dfrac{x}{۲} & ۰\le x<۸ \\ \dfrac{۵}{۶}x+\dfrac{۱۰}{۳} & ۸\le x\le ۲۰ \end{cases}$$

بدیهی است دامنه تابع یعنی نمراتی که دانشجو گرفته است از صفر تا ۲۰ یعنی $[۰\,,۲۰]$ می‌باشد.

اما برد آن یعنی نمراتی که مدرس ثبت خواهد کرد چنین به دست می‌آید:

$$۰\le x\le ۸\Rightarrow ۰\le \frac{x}{۲}<۴\rightarrow ۶\le ۶+\frac{x}{۲}<۱۰$$

$$۸\le x\le ۲۰\Rightarrow \frac{۴۰}{۶}\le \frac{۵}{۶}x\le \frac{۱۰۰}{۶}\rightarrow ۱۰\le \frac{۵}{۶}x+\frac{۱۰}{۳}\le ۲۰$$

یعنی برد تابع یا نمرات نهایی مجموعه $[۶\,,۲۰]$ می‌باشد.

ب) برای محاسبه نمره نهایی دانشجویی که نمره ۱۱ گرفته است باید از ضابطه دوم استفاده کرد، یعنی:

$$\text{نمره نهایی}=\frac{۵}{۶}\times ۱۱+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۹۵}{۶}=۱۲/۵$$

مثال: تابع چند ضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$g(x)=\begin{cases} x^{۲} & x<-۲ \\ ۵ & -۲\le x\le ۲ \\ ۴-۲x & x>۲ \end{cases}$$

الف) دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

ب) مقدار $g(g(-۳))$ را بیابید..

حل: الف) دامنه به وضوح مجموعه اعداد حقیقی است.

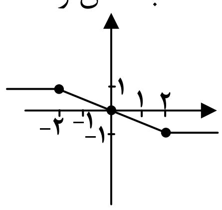
برای محاسبه برد آن ملاحظه می‌کنیم که

$$\left.\begin{array}{l} x<-۲\Rightarrow x^{۲}>۴\Rightarrow g(x)>۴ \\ -۲\le x\le ۲\Rightarrow g(x)=۵ \\ x>۲\Rightarrow -۲x<-۴\Rightarrow ۴-۲x<۰\Rightarrow g(x)<۰ \end{array}\right\}\Rightarrow R_g=(-\infty\,,۰)\cup(۴\,,+\infty)$$

ب)

$$g(-۳)=(-۳)^{۲}=۹\Rightarrow g(g(-۳))=g(۹)=۴-۲\times ۹=-۱۴$$

مثال: نمودار تابع f به شکل زیر است ضابطه آن را مشخص کنید.



حل: واضح است که اگر $x \le -۲$ آن گاه $f(x)=۱$ و اگر $x \ge ۲$ آن گاه $f(x)=-۱$ امّا به ازای $-۱ \le x \le ۱$ نمودار تابع خطی است لذا با داشتن دو نقطه از آن مثلاً نقاط $(-۲,۱)$ و $(۰,۰)$ می‌توان معادله آن را به دست آورد. شیب خط برابر است با $\frac{۱-۰}{-۲-۰}=-\frac{۱}{۲}$ و معادله آن به صورت $y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۰)$ یا $y=-\frac{۱}{۲}x$ است لذا ضابطه تابع f به صورت

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x<-۲ \\ -\frac{۱}{۲}x & -۲\le x\le ۲ \\ -۱ & x>۲ \end{cases}$$

می‌باشد توجه کنید که این تابع را می‌توان به صورت $f(x)=\frac{۱}{۴}(|x-۲|-|x+۲|)$ نیز نوشت. چرا؟

تمرین:

۱- تابع $\text{sgn}(x)=\begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$ (تابع علامت) یک تابع چند ضابطه‌ای است نمودار آن را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۲- تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\frac{x}{|x|}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

۳- تابع $D(x)=\begin{cases} ۱ & x\in Q \\ ۰ & x\notin Q \end{cases}$ به تابع دیریکله معروف است. دامنه و برد این تابع را بیابید و مقادیر $D(D(\sqrt{۲}))$ و $D(D(-۴))$ محاسبه کنید.

۴- تابع $c\ge ۰$, $u_c(t)=\begin{cases} ۰ & t<c \\ ۱ & t\ge c \end{cases}$ را تابع پله‌ای واحد گویند. تابع $u_۲(t)$ را رسم کنید.

۵- تابع چند ضابطه‌ای $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ \ , & |x|<۲ \\ |x| \ , & |x|\ge ۲ \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید سپس مقادیر $f(-۳)$ و $f(f(-۳))$ را بیابید.

۶- تابع $f:N\to\Re$ با ضابطه $f(x)=\begin{cases} -\frac{n}{۲} & n\in E \\ \frac{n-۱}{۲} & n\in O \end{cases}$ مفروض است برد تابع را بیابید. (E و O به ترتیب مجموعه‌های اعداد طبیعی زوج و فرد می‌باشند.)

۷- ضابطه‌های متفاوت تابع $f(x)=|x|+|x-۱|$ را بیابید و سپس آن را رسم کنید.

۸- یک شرکت خصوصی، هزینه مصرف انرژی توسط مشترکین خود را چنین محاسبه می‌کند:

مصرف تا ۲۰ واحد، قیمت به ازای هر واحد ۲۵۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۲۰ تا ۲۰۰ واحد، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۵۰۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۲۰۰ تا ۱۰۰۰ واحد، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۷۵۰۰ ریال.

مازاد مصرف از ۱۰۰۰ به بالا، قیمت هر واحد اضافی به ازای هر واحد ۲۰۰۰۰ ریال.

الف) تابع مربوط به هزینه مشترکین را بنویسید.

ب) اگر مشترکی ۱۰۵۰ واحد مصرف کرده باشد مبلغ قابل پرداخت او چقدر است؟

معادلات و توابع

❖ **در رابطه‌هایی که شامل x و y هستند اگر به ازای هر x تنها یک y داشته باشیم این رابطه نسبت به متغیر مستقل x تابعی را مشخص می‌کند به‌ویژه اگر بتوان y را بر حسب x محاسبه کرد اگر به رابطه‌ای به فرم $y=\pm f(x)$ که y همواره صفر نباشد، برسیم؛ رابطه فوق تابعی را مشخص نمی‌کند به عبارت دیگر f تابع است اگر و تنها اگر بتوان نشان داد:**

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱=x_۲$$

یا به طور معادل

$$f(x_۱)\neq f(x_۲)\Rightarrow x_۱\neq x_۲$$

مثال: بررسی کنید روابط زیر تابع‌اند یا خیر؟

الف) $y^۲-x^۳=۱$ ب) $x^۲+y^۲-۲y=-۱$

ج) $y^۳+x^۲=۲$ د) $x+|y|=۰$

حل:

الف) داریم:

$$y^۲-x^۳=۱\Rightarrow y^۲=۱+x^۳\Rightarrow y=\pm\sqrt{۱+x^۳}$$

یعنی به ازای هر $x>-۱$ بیش از یک y داریم. مثلاً اگر $x=۰$ داریم $y=\pm۱$. لذا این رابطه مشخص کننده‌ی یک تابع نیست. البته تنها ذکر این مطلب که هر دو نقطه $(۰\ ,\ ۱)$ و $(۰\ ,-۱)$ روی نمودار این رابطه قرار دارد نشان دهنده‌ی این است که رابطه‌ی فوق تابع نمی‌باشد.

ب) داریم:

$$x^۲+y^۲-۲y=-۱\Rightarrow x^۲+(y-۱)^۲=۰\Rightarrow(y-۱)^۲=-x^۲$$
$$\Rightarrow y-۱=\pm\sqrt{-x^۲}\Rightarrow y=۱\pm\sqrt{-x^۲}$$

اما x تنها مقدار صفر را می‌تواند اختیار کند که خروجی آن تنها یک می‌باشد یعنی در این رابطه تنها زوج مرتب $(۰\ ,\ ۱)$ صدق می‌کند لذا y تابعی از x است.

ج) داریم:

$$y^۳ + x^۲ = ۲ \Rightarrow y^۳ = ۲ - x^۲ \Rightarrow y = \sqrt[۳]{۲ - x^۲}$$

یعنی به ازای هر x، y منحصر به فردی وجود دارد یعنی y تابعی از x است برای اثبات این مطلب می‌توان نوشت:

$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow x_۱^۲ = x_۲^۲ \Rightarrow ۲ - x_۱^۲ = ۲ - x_۲^۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲ - x_۱^۲} = \sqrt[۳]{۲ - x_۲^۲} \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

د) داریم:

$$x + |y| = ۰ \Rightarrow |y| = -x \Rightarrow y = \pm(-x)\quad ,\quad x \le ۰$$

یعنی اگر $x > ۰$، هیچ نقطه‌ای در رابطه صدق نمی‌کند. اگر $x = ۰$، تنها نقطه‌ی $(۰\ ,۰)$را مشخص می‌کند اما اگر $x < ۰$، به ازای هر x، دو y نظیر می‌شود؛ لذا y تابعی از x نیست. مثلاً اگر $x = -۱$ داریم $y = \pm۱$. یعنی دو نقطه $(-۱,۱)$ و $(-۱,-۱)$ را مشخص می‌کند لذا این رابطه تابعی را نسبت به x مشخص نمی‌کند. اما این رابطه یک تابع x بر حسب y را مشخص می‌کند. چرا؟

تمرین:

۱- تحقیق کنید روابط زیر نسبت به متغیر مستقل x تابع هستند یا خیر؟

الف) $x^۷ + y^۷ = ۱$ ب) $x^۲ + y^۲ = ۴$

پ) $x^۶ + y^۶ = ۰$ ت) $x^۳ + y^۴ = ۲$

ث) $|y| = x$ ج) $|x| + |y| = ۲$

چ) $y = \sqrt{x^۲}$ ح) $x = \sqrt{y}$

خ) $x^۲ - ۴xy + ۴y^۲ = ۰$ د) $|y - ۱| + |x + ۱| = ۰$

ذ) $y^۳ = ۲x + ۱$ ر) $|x| + y^۲ = ۰$

ز) $y^۳ - y = ۳x$ س) $y^۲ + y = ۲x$

ش) $y = x^۳ - ۳x$ ص) $y^۲ - y = ۲x + ۱$

ض) $x^۲ + ۳y + x - ۵ = ۰$ ط) $x^۲ = y^۲ + ۲y + ۱$

ظ) $xy + x^۲ - y = ۰$ ع) $|x + ۲| + \sqrt{y^۲ - ۲x + ۱} = ۰$

۲- تحقیق کنید روابط داده شده در تمرین (۱) نسبت به متغیر مستقل y تابع هستند یا خیر؟

۳- اگر رابطه $|y| = |x^۳ - ۱|$ تابع باشد، آن را مشخص کنید.

۴- تحقیق کنید آیا ضابطه‌های داده شده نمایش دهنده تابع هستند یا خیر؟

الف) $f(x^۲ + ۲) = x + ۱$.

ب) $f(x^۲ - ۲) = x^۲ + ۱$.

ج) $f(|x| - ۱) = x + ۱$.

رسم نمودار توابع وابسته به f با استفاده از نمودار تابع f

❖ **(۱) نمودار تابع $g(x)=f(x)+a$ همان نمودار تابع $f(x)$ است که a واحد در امتداد محور y ها منتقل شده است. (اگر $a>0$ انتقال در جهت مثبت محور y و اگر $a<0$ انتقال در جهت منفی می‌باشد.)**

توجه کنید اگر $(x_0\,,y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن گاه $g(x_0)=f(x_0)+a=y_0+a$ یا $(x_0\,,y_0+a)\in g$ یعنی نقطه به اندازه a واحد به موازات محور y ها منتقل شده است.

❖ **(۲) نمودار تابع $h(x)=f(x+a)$ همان نمودار تابع f است که a واحد در امتداد محور x ها منتقل شده است. (اگر $a>0$ انتقال در جهت منفی محور و اگر $a<0$ انتقال در جهت مثبت می‌باشد.)**

توجه کنید که اگر $(x_0\,,y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن‌گاه:

$$h(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$$

یا $(x_0-a\,,y_0)\in h$. یعنی نقطه به اندازه a واحد به موازات محور x ها منتقل شده است.

❖ **(۳) نمودار تابع $k(x)=a\,f(x)$ با کشیدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور y ها به دست می‌آید (اگر $a>1$، انبساط در امتداد محور y ها و با ضریب a رخ می‌دهد و اگر $0<a<1$، انقباض و در امتداد محور y ها و با ضریب a رخ می‌دهد و اگر $a<0$ برای بدست آوردن نمودار تابع $y=k(x)$ ابتدا قرینه نمودار f نسبت به محور x ها یعنی نموار تابع $y=-f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس نمودار جدید را با ضریب $-a$ منبسط یا منقبض (بسته به اینکه $-a>1$ یا $0<-a<1$) می‌کنیم.**

توجه کنید اگر $(x_0\,,y_0)\in f$ یعنی $y_0=f(x_0)$ آن گاه $k(x_0)=a\;f(x_0)=ay_0$ یعنی $(x_0\;,ay_0)\in k$ که موید نکته گفته شده است.

❖ **(۴) نمودار تابع $t(x)=f(ax)\;,\;a>0$ با کشیدن نمودار تابع $y=f(x)$ در امتداد محور x ها به دست می‌آید. (اگر $a>1$ نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$، منقبض شده و اگر $0<a<1$ نمودار f با ضریب $\frac{1}{a}$ منبسط خواهد شد.)**

توجه کنید که اگر $(x_0 , y_0) \in f$ یعنی $y_0 = f(x_0)$ آن‌گاه $t(\frac{x_0}{a}) = f(a \times \frac{x_0}{a}) = f(x_0) = y$

یعنی $(\frac{x_0}{a} , y_0) \in t$ که نکات گفته شده را تایید می‌کند.

❖ **(۵) برای رسم نمودار تابع $M(x) = f(ax)$ که در آن $a < 0$ با توجه به آن‌که نمودار تابع $l(x) = f(-x)$ قرینه نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور yها است برای رسم تابع $a < 0$, $M(x) = f(ax)$ ابتدا می‌توان نمودار تابع $N(x) = f(-ax)$ را مانند آن‌چه در (۴) بیان شد، رسم نمود سپس نمودار تابع M که $M(x) = N(-x)$ می‌باشد را با رسم قرینه نمودار تابع N نسبت به محور yها رسم کرد.**

توجه کنید که اگر $(x_0 , y_0) \in f$ یعنی $y_0 = f(x_0)$ آن‌گاه:

$$l(-x_0) = f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$$

یعنی $(-x_0 , y_0) \in l$ که قرینه‌ی نقطه (x_0 , y_0) نسبت به محور yها است.

❖ **(۶) برای رسم نمودار تابع $p(x) = af(bx + c) + d$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:**

الف) اگر $b > 0$ مطابق مرحله (۴) نمودار f را با ضریب $\frac{1}{b}$ در امتداد محور ط انقباض

یا انبساط می‌دهیم و اگر $b < 0$

مطابق مرحله (۵) عمل می‌کنیم. (در این حالت نمودار $y = f(bx)$ حاصل می‌شود.)

ب) با توجه به مرحله ۲ نموار بدست آمده در مرحله قبل را به اندازه $\frac{c}{b}$ در راستای محور xها و در جهت مخالف علامت $\frac{c}{b}$ انتقال دارد (در این حالت نمودار تابع $y = f(bx + c)$ حاصل می‌شود.

ج) با توجه به مرحل ۳ نمودار به دست آمده در مرحله قبل را انبساط یا انقباض داد. (با ضریب $|a|$. در این مرحله نمودار تابع $y = af(bx + c)$ بدست مآید.)

د) با توجه به مرحله ۱ نمودار به دست آمده در مرحله قبل را به اندازه d واحد در جهت محور yها انتقال می‌دهیم

(در این مرحله نموار تابع $y = af(bx + c) + d$ که همان $y = p(x)$ است به دست می‌آید.)

قابل ذکر است که در این مرحله اگر $a = 1$ یا $b = 1$ یا $c = 0$ یا $d = 0$ مرحله نظیر داده شده قابل حذف است.

توجه کنید که اگر $(x_0\ ,y_0)\in f$ یعنی $y=f(x_0)$ آن‌گاه:

$$p(\frac{x_0-c}{b})=a\ f(b(\frac{x_0-c}{b})+c)+d=a\ f(x_0)+d=ay_0+d$$

لذا

$$(\frac{x_0}{b}-\frac{c}{b},a\,y_0+d)=(\frac{x_0-c}{b},a\,y_0+d)\in p$$

که موید مطالب فوق است.

مثال: فرض کنید $A(۲,۳)\in f$، نقطه نظیر A را بر روی توابع زیر مشخص کنید.

الف) $g(x)=f(x)+۱$ ب) $h(x)=f(x+۱)$

ج) $k(x)=۳f(۲x)$ د) $l(x)=۲f(x+۱)$

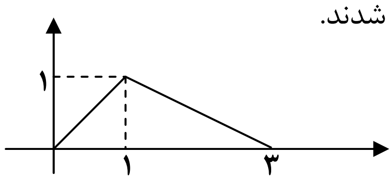
هـ) $t(x)=-۴f(-x)$ و) $p(x)=۳f(۲x-۱)+۱$

حل:

الف) $(۲,۴)\in g$ ب) $(۱,۳)\in h$ ج) $(۱,۹)\in k$

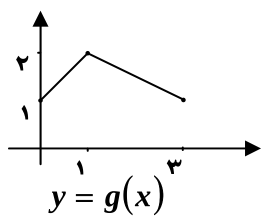
د) $(۱\ ,۶)\in l$ هـ) $(-۲\ ,-۱۲)\in t$ و) $(\frac{۳}{۲}\ ,۱۰)\in p$

مثال: فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر باشد. مطلوب است رسم نمودار توابع g، h، k، t، l و p که در مثال قبل معرفی شدند.

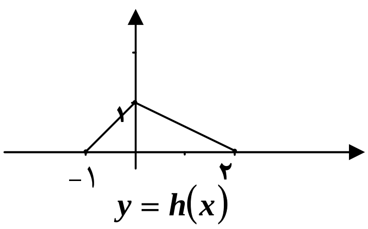


حل: داریم:

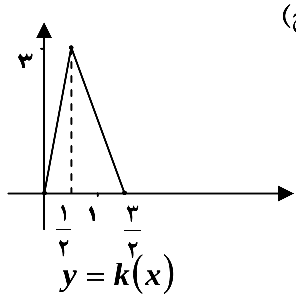
الف)



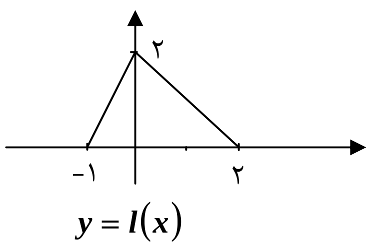
ب)



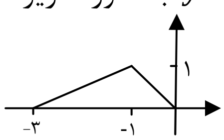
ج)



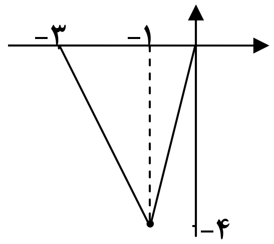
د)



هـ) توجه کنید که نمودار تابع $y=f(-x)$ به صورت زیر است:



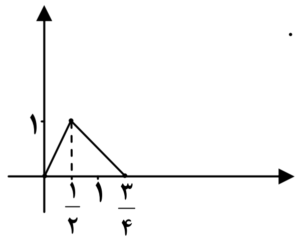
و با توجه به آن نمودار $y=t(x)$ به صورت زیر است:



$y=t(x)$

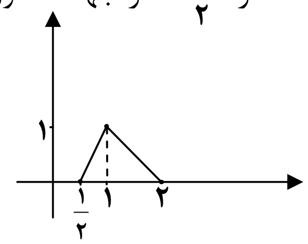
و) برای رسم نمودار تابع p مطابق دستورالعمل ۶ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله‌ی الف) نمودار $y=f(2x)$.



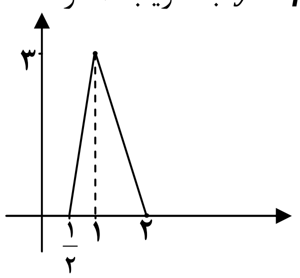
نمودار $y=f(2x)$

مرحله‌ی ب) انتقال $y=f(2x)$ به اندازه $+\frac{1}{2}$ در جهت محور x ها.



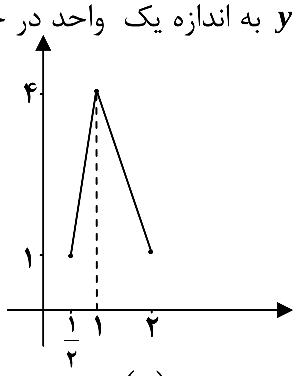
نمودار $y=f(2x-1)$

مرحله‌ی ج) انبساط نمودار $y=f(2x)$ با ضریب ۳ در امتداد محور y ها.



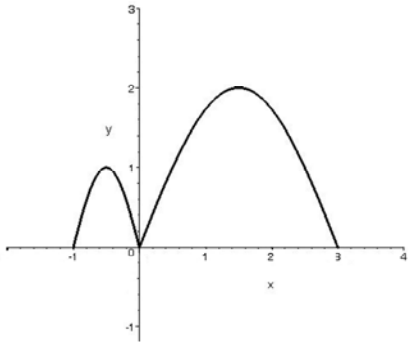
نمودار $y=3f(2x-1)$

مرحله (د) انتقال $y=3f(2x-1)$ به اندازه یک واحد در جهت محور y ها.



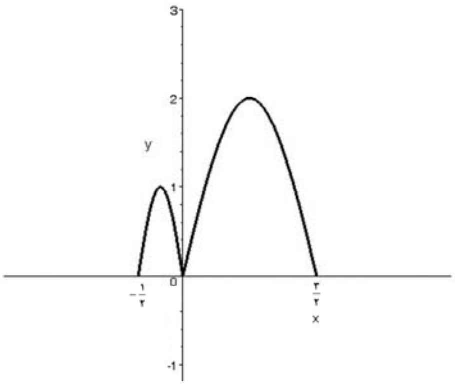
$y=p(x)$

مثال: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر باشد.

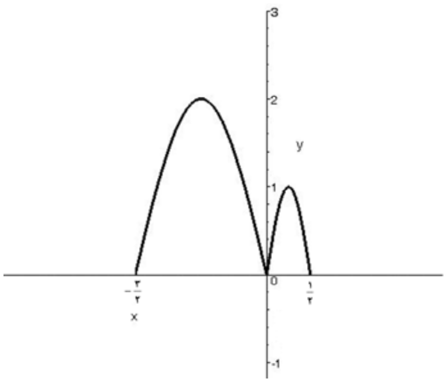


نمودار تابع $y = f(-2x)$ را رسم کنید.

مطابق دستورالعمل ۵ و سپس ۴ ابتدا نمودار تابع $y = f(2x)$ را رسم می‌کنیم:

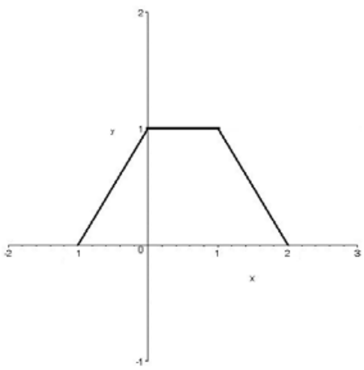


بنابراین نمودار $y = f(-2x)$ به صورت می‌باشد:



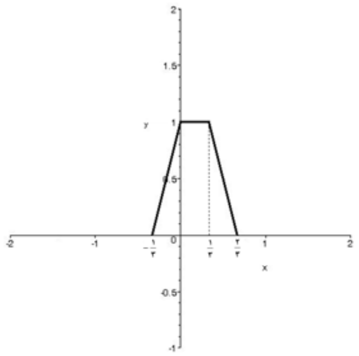
مثال: اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه‌ی آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $y = f(3x)$ ب) $y = f(-3x)$ ج) $y = f(-3x+1)$



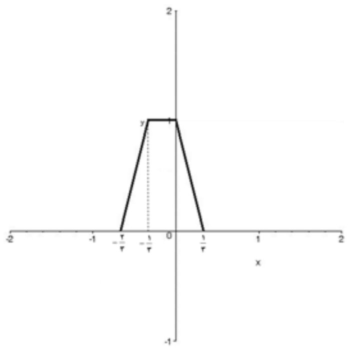
حل: با توجه به دستورالعمل‌های گفته شده مراحل زیر را خواهیم داشت.

الف) نمودار $y = f(۳x)$



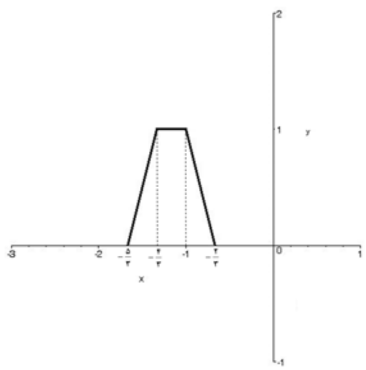
دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۱}{۳} , \frac{۲}{۳}]$ است.

ب) نمودار $y = f(-۳x)$



دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۲}{۳} , \frac{۱}{۳}]$ است.

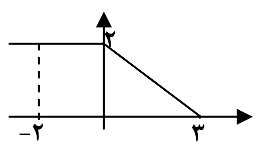
ج) نمودار $y = f(-۳x+۱)$



دامنه‌ی این تابع با توجه به شکل بازه $[-\frac{۵}{۳} , -\frac{۲}{۳}]$ است.

تمرین:

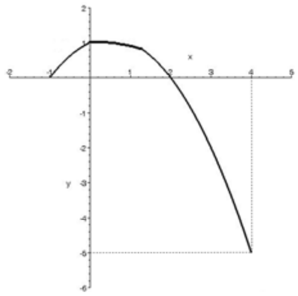
۱- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x) - ۱$ ب) $y = -f(x)$ ج) $y = ۲f(۳x)$

د) $y = f(-x)$ هـ) $y = ۳f(۲x+۱)$ و) $y = f(\frac{x}{۲}) + ۲$

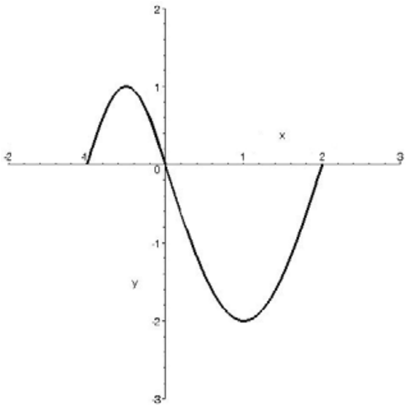
۲- اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x-۱)$ ب) $y = ۲f(-\frac{x}{۲})$ ج) $y = -۲f(۳x)$

د) $y = ۲f(-۳x)$ هـ) $y = -۲f(-۳x)$ و) $y = -۲f(۱-x) + ۱$

۳- اگر نمودار تابع $y = f(x+۲)$ به صورت زیر باشد، نمودار توابع زیر را رسم کنید.



الف) $y = f(x)$ ب) $y = f(x-۲)$ ج) $y = f(-\frac{۱}{۲}x + ۱)$

د) $y = f(|x|)$ هـ) $y = |f(x)|$ و) $y = |f(-|x|)|$

۴- اگر $f = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۵) , (۳ , -۴)\}$ مطلوب است تعیین تابع $y = ۳f(\frac{x}{۲} - ۱)$.

۵- اگر دامنه و برد تابع $y = ۳f(\frac{x}{۲})$ به ترتیب بازه‌های $[-۴,۱) , [-۱,۲)$ باشند دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = f(x)$ ب) $y = -f(۱-۳x)$

۶- برد تابع $y = -۲f(۳x-۱) + ۳$ بازهٔ $[-۳,۱)$ است. برد تابع f را بیابید.

۷- اگر $D_f = [-۲,۳]$ و $R_f = (-۴,۲)$ باشد، دامنه و برد تابع $y = ۲f(-\frac{۱}{۲}x + ۲) + ۳$ را بیابید.

اعمال جبری روی توابع

برای دو تابع f , g تابع $f+g$ روی $D_f \cap D_g$ تعریف می‌شود و برای هر مقدار x در $D_f \cap D_g$ داریم $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ به طور مشابه توابع $f-g$ و $f.g$ نیز روی $D_f \cap D_g$ تعریف می‌شود و به ازای هر $x \in D_f \cap D_g$ داریم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x).\,g(x)$$

و تابع $\frac{f}{g}$ نیز به ازای $x \in D_f \cap D_g - \{x|g(x)=۰\}$ تعریف می‌شود و به ازای هر عدد x در این مجموعه داریم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال: مدرسه علی تاکنون از دانش‌آموزان ۲ مرحله آزمون گرفته است. در مرحله اول دروس مورد آزمون عبارتند از: حسابان، هندسه، فیزیک، شیمی، ادبیات و دروس آزمون مرحله دوم عبارتند از: حسابان، جبر و احتمال، فیزیک، ادبیات و زبان انگلیسی. نمرات علی بر حسب درصد چنین است:

مرحله اول **f** = {(حسابان , ۷۰), (هندسه , ۵۶), (فیزیک , ۶۸), (شیمی, ۷۹), (ادبیات, ۸۵)}

مرحله دوم **g** = {(حسابان, ۷۴), (جبرواحتمال, ۵۶), (فیزیک, ۶۸), (ادبیات, ۷۹), (زبان‌انگلیسی , ۸۵)}

حل: اگر تابع مربوط به اختلاف نمرات مرحله دوم از مرحله اول را بنویسیم این تابع تنها برای دروسی با معنی است که در هر دو آزمون مورد سنجش واقع شده‌اند، یعنی:

g − **f** = { (حسابان , ۴), (فیزیک , ۰), (ادبیات , -۶)}

و با مشاهده این تابع مشخص است که وی در درس حسابان پیشرفت، در فیزیک بدون تغییر و در ادبیات دچار افت شده است.

مثال: فرض کنید $f(x)=۲x+۵$ و $g=\{(-۱\,,۳),(۰\,,-۵),(۴\,,۰),(-۲/۵\,,۱),(۳\,,۲)\}$ توابع $f+g$ ،$f-g$ ،$g-f$ ،$f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

حل: دامنه تابع f، مجموعه $\Re$ و دامنه تابع g مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ است. لذا دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ و $g-f$ و $f.g$ مجموعه حاصل از اشتراک این دو مجموعه یعنی مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ است. همچنین $f(۳)=۱۱$ ، $f(-۲/۵)=۰$ ، $f(۴)=۱۳$ ، $f(۰)=۵$ و $f(-۱)=۳$.

بنابراین:

$$f+g=\{(-۱\,,۶),(۰\,,۰),(۴\,,۱۳),(-۲/۵\,,۱),(۳\,,۱۳)\}$$

$$f-g=\{(-۱\,,۰),(۰\,,۱۰),(۴\,,۱۳),(-۲/۵\,,-۱),(۳\,,۹)\}$$

$$g-f=\{(-۱\,,۰),(۰\,,-۱۰),(۴\,,-۱۳),(-۲/۵\,,-۱),(۳\,,-۹)\}$$

$$f.g=\{(-۱\,,۹),(۰\,,-۲۵),(۴\,,۰),(-۲/۵\,,۰),(۳\,,۲۲)\}$$

همچنین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ به جز اعضایی که خروجی g به ازای آن‌ها صفر است؛ یعنی عضو ۴، چون $g(۴)=۰$. لذا دامنه آن، مجموعه $\{-۱,۰,-۲/۵,۳\}$ می‌باشد. بنابراین:

$$\frac{f}{g}=\left\{(-۱,۱),(۰,-۱),(-۲/۵,۰),(۳,\frac{۱۱}{۲})\right\}$$

دامنه تابع $\frac{g}{f}$ مجموعه $\{-۱,۰,۴,-۲/۵,۳\}$ به جز اعضایی که خروجی f به ازای آن‌ها صفر است؛ یعنی عضو $-\frac{۵}{۲}$، چون $f(-\frac{۵}{۲})=۰$. لذا دامنه آن مجموعه $\{-۱,۰,۴,۳\}$ بنابراین:

$$\frac{g}{f}=\left\{(-۱,۱),(۰,-۱),(۴,۰),(۳,\frac{۲}{۱۱})\right\}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ و $g(x)=\sqrt{\frac{x^۲+۲x}{۲-x}}$ ضابطه و دامنه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را مشخص کنید.

حل: دامنه تابع f مجموعه $D_f=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$ است و دامنه تابع g مجموعه $Dg=(-\infty,-۲]\cup[۰,۲)$ است. بنابراین:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{\frac{x^۲+۲x}{۲-x}}\quad,\quad D_{f+g}=(-\infty,-۲]$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x^۲-۴}+\sqrt{\frac{x^۲+۲x}{۲-x}}\quad,\ D_{f-g}=(-\infty,-۲]$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x^۲-۴}\ .\ \sqrt{\frac{x^۲+۲x}{۲-x}}\quad,\ D_{f.g}=(-\infty,-۲]$$

این تابع با تابع $h(x)=|x+۲|\sqrt{-x}$ که به دامنه $(-\infty,-۲]$ تحدید (محدود) شده باشد برابر است. (واضح است بدون تحدید دو تابع برابر نیستند.)

تابع g به ازای $x=۰$ و $x=-۲$ صفر خواهد شد لذا تابع $\frac{f}{g}$ عبارتست از:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{\frac{x^۲+۲x}{۲-x}}}\quad,\ D_{\frac{f}{g}}=(-\infty,-۲)$$

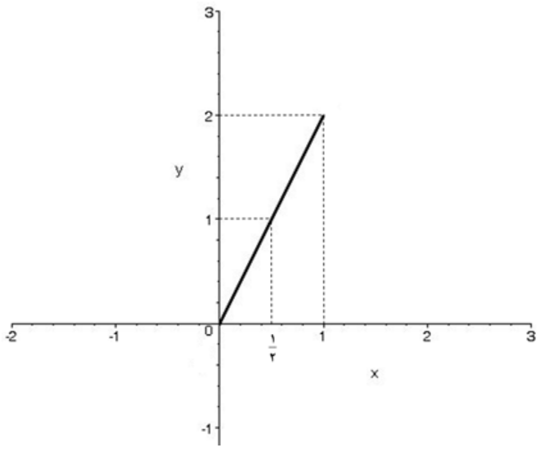
این تابع با تابع $k(x)=\frac{|x-۲|}{\sqrt{-x}}$ وقتی که دامنه آن به مجموعه $(-\infty,-۲)$ تحدید شده باشد برابر است.

همچنین تابع g به ازای $x=۲$ و $x=-۲$ صفر خواهد شد لذا

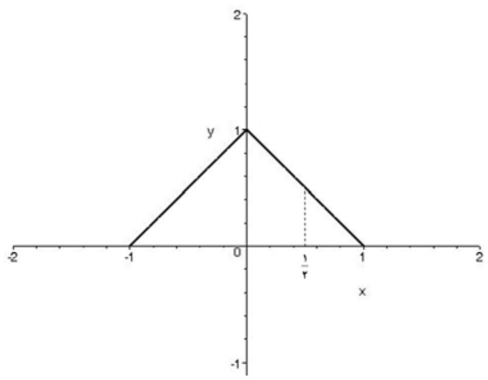
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{\dfrac{x^{۲}+۲x}{۲-x}}}{\sqrt{x\ \ -۴}}\quad , D_{\frac{g}{f}}=(-\infty\ , -۲)$$

و این تابع با تابع $m(x)=\dfrac{\sqrt{-x}}{|x-۲|}$، وقتی دامنه آن به مجموعه $(-\infty\ , -۲)$ تحدید شده باشد برابر است.

مثال: اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشد، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ را رسم کنید.



g



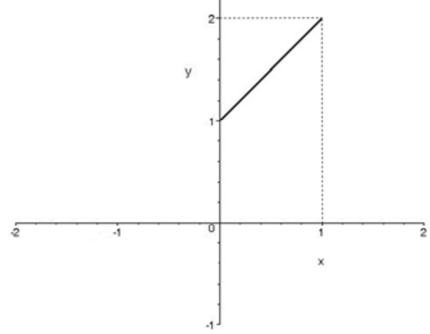
f

حل: با توجه به شکل تابع f در فاصله $[-۱\ , ۱]$ تعریف شده است و تابع g در $[۰\ , \infty)$. لذا توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ در فاصله $[۰, ۱]$ تعریف شده‌اند.

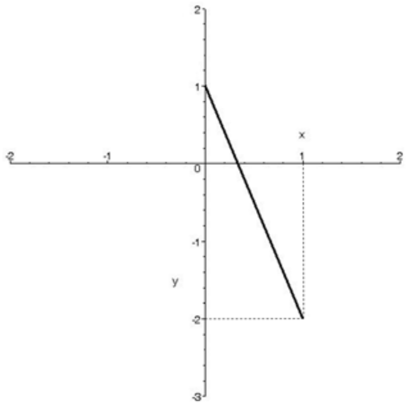
برای رسم $f+g$ کافی است $(f+g)(x)$ را به ازای هر مقدار $۰\leq x\leq ۱$ را محاسبه کنیم یعنی مقادیر f و g را در هر یک محاسبه نموده و با هم جمع کرد. مثلاً:

$$(f+g)(۰)=f(۰)+g(۰)=۱+۰=۱$$
$$(f+g)(۱)=f(۱)+g(۱)=۰+۲=۲$$
$$(f+g)\left(\frac{۱}{۲}\right)=f\left(\frac{۱}{۲}\right)+g\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۳}{۲}$$

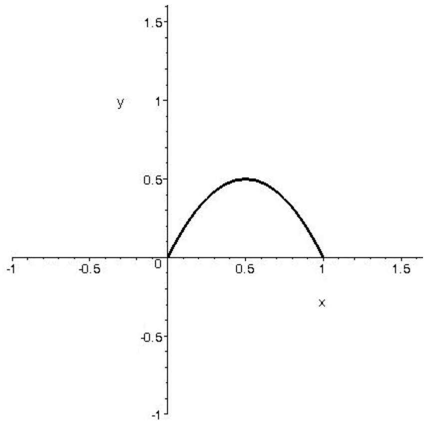
لذا شکل $g+f$ به طور تقریبی چنین خواهد بود.



به طور مشابه مقادیر $f-g$ را به ازای هر $۰ \le x \le ۱$ از تفاضل مقدار تابع g از f و $f \cdot g$ را به ازای هر $۰ \le x \le ۱$ از ضرب مقادیر توابع f و g به دست می‌آوریم. نمودارهای تقریبی به صورت زیر است:



$f-g$



$f \cdot g$

تمرین:

۱- توابع f و g به صورت:

$$f=\{(۱\,,۴),(۰\,,۲),(-۲\,,۱),(۴\,,۰),(۵\,,۰)\}$$

و

$$g=\{(۱\,,۰),(۰\,,۳),(۴\,,-۱),(۵\,,۰),(۷\,,۱)\}$$

تعریف می‌شوند. مطلوب است تعیین توابع:

الف) $\dfrac{g}{f}$ ب) $\dfrac{۲f}{g^۲}$

ج) $\dfrac{۱}{۳}f+\dfrac{۱}{g+۲}$ د) $f \cdot g-\dfrac{g}{f}$

۲- اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۳x+۲}$، ضابطه و دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $\dfrac{f}{g}$ ب) $f \cdot g$

ج) $f^۲$ د) $y=\dfrac{f(۲x)}{g(۱)-۲}$

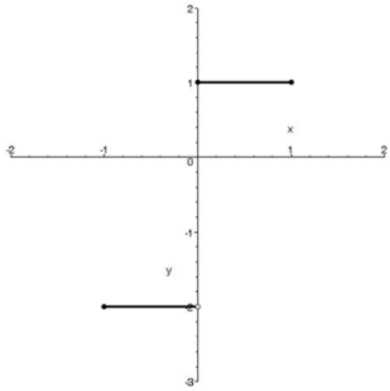
۳- اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۲}$، ضابطه و دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f+g$ ب) $\dfrac{۱}{f}+۳g$

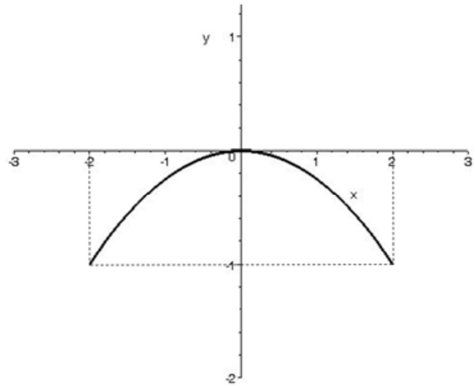
ج) $f.g$ د) $\dfrac{f}{۲g}\cdot-\dfrac{g}{۲f}$

۴- اگر $f(x)=\sqrt{۳x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{۳-۶x}$ و $h(x)=x^۲-۳x+۲$ ضابطه و دامنه تابع $\dfrac{f+g}{h}$ را بیابید.

۵- اگر نمودار توابع f و g به صورت زیر باشند، مطلوب است رسم نمودار توابع زیر:



g



f

الف) $f+g$ ب) $f.g$ ج) $\frac{f}{g}$

د) $\frac{g}{f}$ هـ) $\frac{۱}{f}$ و) $\frac{-۲}{g}$

ز) $۲f-۳g$ ح) $\frac{۱}{g}+f$

۶- یک واحد تولیدی کالایی که c تومان هزینه داشته است را به قیمت $R(c)=۵۰+\frac{۱}{۲}c$ می‌فروشد هم‌چنین خریدار باید $\frac{۱}{۱۰}$ قیمت خرید را به عنوان مالیات بر ارزش افزوده بپردازد.

الف) ضابطه تابع M، مالیات برارزش افزوده را بنویسید.

ب) ضابطه تابع K، قیمت نهایی خرید کالا را به صورت تابعی از هزینه تمام شده، بنویسید.

ج) قیمت کالایی که هزینه تمام شده آن ۲۰۰۰۰ تومان است چقدر است؟

د) اگر قیمت نهایی خرید یک کالا ۵۰۰۰ تومان باشد هزینه تمام شده کالا چقدر است؟

ترکیب توابع

اگر f و g دو تابع باشند، تابع fog تابعی است که از ترکیب دو تابع بوجود می‌آید که اعضای آن زوج مرتب‌هایی از $(x\,,\,y)$ هستند که x در دامنه g قرار دارد و $g(x)$ هم در دامنه f می‌باشد و y مقدار تابع f به ازای $g(x)$ می‌باشد. یعنی:

$$x \longrightarrow \boxed{}^{\,g} \xrightarrow{(g(x))} \boxed{}^{\,f} \longrightarrow f(g(x))$$

به عبارت دیگر

$$fog = \{(x\,,\,y) \mid x \in D_g\,,\, g(x) \in D_f\,,\, y = f(g(x))\}$$

مثال: توابع f و g به صورت:

$$g = \{(۱\,,\,۳)\,,(۳\,,\,۵)\,,(۵\,,\,۷)\,,(۷\,,\,۱)\} \quad \text{و} \quad f = \{(۱\,,\,۲)\,,(۲\,,\,۳)\,,(۳\,,\,۴)\,,(۴\,,\,۵)\,,(۶\,,\,۷)\}$$

تعریف شده‌اند. مطلوب است تعیین توابع fog و gof.

حل: برای تعیین تابع fog دقت می‌کنیم که اعضای دامنه تابع fog اعضایی از دامنه تابع g می‌باشد که $g(x)$ در دامنه f قرار داشته باشد. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} ۱ \in D_g\,,\, g(۱) = ۳\,,\, ۳ \in D_f \Rightarrow ۱ \in D_{fog} \\ ۳ \in D_g\,,\, g(۳) = ۵\,,\, ۵ \notin D_f \Rightarrow ۳ \notin D_{fog} \\ ۵ \in D_g\,,\, g(۵) = ۷\,,\, ۷ \notin D_f \Rightarrow ۵ \notin D_{fog} \\ ۷ \in D_g\,,\, g(۷) = ۱\,,\, ۱ \in D_f \Rightarrow ۷ \in D_{fog} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fog} = \{۱\,,\,۷\}$$

و لذا

$$\left.\begin{array}{l} fog(۱) = f(g(۱)) = f(۳) = ۴ \\ fog(۷) = f(g(۷)) = f(۱) = ۲ \end{array}\right\} \Rightarrow fog = \{(۱\,,\,۴)\,,(۷\,,\,۲)\}$$

به طور مشابه برای تعیین تابع gof، اعضای دامنه تابع gof اعضایی از دامنه تابع f هستند که $f(x)$ در دامنه g قرار دارند. داریم:

$$\left.\begin{array}{llll} ۱ \in D_f & , & f(۱) = ۲ & , \quad ۲ \notin D_g \rightarrow ۱ \notin D_{gof} \\ ۲ \in D_f & , & f(۲) = ۳ & , \quad ۳ \in D_g \rightarrow ۲ \in D_{gof} \\ ۳ \in D_f & , & f(۳) = ۴ & , \quad ۴ \notin D_g \rightarrow ۳ \notin D_{gof} \\ ۴ \in D_f & , & f(۴) = ۵ & , \quad ۵ \in D_g \rightarrow ۴ \in D_{gof} \\ ۶ \in D_f & , & f(۶) = ۷ & , \quad ۷ \in D_g \rightarrow ۶ \in D_{gof} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{gof} = \{۲,۴,۶\}$$

و لذا

$$\left.\begin{array}{l} gof(۲) = g(f(۲)) = g(۳) = ۵ \\ gof(۴) = g(f(۴)) = g(۵) = ۷ \\ gof(۶) = g(f(۶)) = g(۷) = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow gof = \{(۲,۵),(۴,۷),(۶,۱)\}$$

مثال: فرض کنید $g(x) = \sqrt{x} + ۱$ و $f = \{(-۲,۰),(۰\,,\,۱)\,,(۱\,,\,۴)\,,(۲\,,\,-۵)\}$. مطلوب است تعیین توابع fog و gof.

حل: تعیین تابع fog :

دامنه آن اعضایی از دامنه g، $\{x|x\geq ۰\}$ می‌باشد که:

$$g(x)\in D_f=\{-۲,۰,۱,۲\}$$

$$g(x)=-۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱=-۲\Rightarrow \sqrt{x}=-۳ \qquad \text{غیرممکن}$$

$$g(x)=۰\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۰\Rightarrow \sqrt{x}=-۱ \qquad \text{غیرممکن}$$

$$g(x)=۱\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۱\Rightarrow \sqrt{x}=۰\Rightarrow x=۰$$

$$g(x)=۲\Rightarrow \sqrt{x}+۱=۲\Rightarrow \sqrt{x}=۱\Rightarrow x=۱$$

پس از اعضای دامنه تابع g تنها دو عضو ۰ و ۱ در دامنه تابع fog وجود دارند و داریم.

$$fog(۰)=f(g(۰))=f(۱)=۴$$

$$fog(۱)=f(g(۱))=f(۲)=-۵$$

یعنی:

$$fog=\{(۰,۴),(۱,-۵)\}$$

تعیین تابع gof:

دامنه آن اعضایی از دامنه تابع f، $\{-۲,۰,۱,۲\}$ هستند که $f(x)\in D_g=\{x|\ x\geq ۰\}$ اما:

$$f(-۲)=۰\quad,\quad ۰\in D_g\Rightarrow -۲\in D_{gof}$$

$$f(۰)=۱\quad,\quad ۱\in D_g\Rightarrow ۰\in D_{gof}$$

$$f(۱)=۴\quad,\quad ۴\in D_g\Rightarrow ۱\in D_{gof}$$

$$f(-۵)=۰\quad,\quad -۵\in D_g\Rightarrow ۲\notin D_{gof}$$

پس از اعضای دامنه تابع f تنها سه عضو ۲-، ۰ و ۱ در دامنه تابع gof حضور دارند و داریم.

$$gof(-۲)=g(f(-۲))-g(۰)=۱$$

$$gof(۰)=g(f(۰))=g(۱)=۲$$

$$gof(۱)=g(f(۱))=g(۴)=۳$$

یعنی

$$gof=\{(-۲,۱),(۰,۲),(۱,۳)\}$$

مثال: فرض کنید $f(x)=\dfrac{۱}{x}$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ مطلوب است تعیین دامنه و برد توابع fog و gof.

حل:

تعیین تابع fog :

دامنه تابع g مجموعه $D_g=\{x|\ -۱\leq x\leq ۱\}$ است اما $g(x)$ باید در دامنه تابع f باشد و $D_f=\{x|\ x\neq ۰\}$. پس $g(x)$ نباید صفر شود. اما $g(x)$ در ۱- و ۱ صفر می‌شود. پس $D_{fog}=\{x|\ -۱<x<۱\}$ و به ازای این xها داریم $fog(x)=f(g(x))=f\left(\sqrt{۱-x^۲}\right)=\dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$.

تعیین تابع gof:

دامنه تابع gof عضوهایی از مجموعه $\{x | x \neq ۰\}$ می‌باشد که $f(x) \in D_g$ باشد یعنی $-۱ \leq f(x) \leq ۱$ یا $-۱ \leq \frac{۱}{x} \leq ۱$ یعنی $D_{gof} = (-\infty , -۱] \cup [۱ , \infty)$. پس با در نظر گرفتن هر دو شرط، دامنه gof مجموعه $(-\infty , -۱] \cup [۱ , \infty)$ می‌باشد و به ازای این xها داریم:

$$gof(x) = g(f(x)) = g(\frac{۱}{x}) = \sqrt{۱ - (\frac{۱}{x})^۲}$$

مثال: فرض کنید $f(x) = \frac{x}{۲ - x}$ مطلوب است تعیین دامنه و برد تابع fof .

حل: دامنه تابع f مجموعه $\Re - \{۲\}$ است. بنابراین

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\} = \left\{x \neq ۲ \,\middle|\, \frac{x}{۲ - x} \neq ۲\right\}$$

اما

$$\frac{x}{۲ - x} = ۲ \Rightarrow x = ۴ - ۲x \Rightarrow ۳x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

لذا

$$D_{fof} = \left\{x \neq ۲ , x \neq \frac{۴}{۳}\right\} = (-\infty , \frac{۴}{۳}) \cup (\frac{۴}{۳} , ۲) \cup (۲ , +\infty)$$

هم‌چنین

$$fof(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{۲ - x}\right) = \frac{\frac{x}{۲ - x}}{۲ - \frac{x}{۲ - x}}$$

توجه کنید که اگر این ضابطه را ساده کنیم حتماً باید شرط دامنه را قید کنیم در غیر این صورت تابع حاصل با تابع fof برابر نخواهد بود.

$$fof(x) = \frac{x}{۴ - ۳x} \quad , \quad x \neq \frac{۴}{۳} , ۲$$

البته شرط $x \neq \frac{۴}{۳}$ از ضابطه واضح است اما شرط $x \neq ۲$ حتماً باید قید شود.

مثال: در پرتاب جسم با سرعت اولیه $v_۰$ در راستای قائم ارتفاع جسم بر حسب زمان از رابطه‌ی $h(t) = \frac{۱}{۲} gt^۲ + v_۰ t$ به دست می‌آید که در آن g ثابت و شتاب ثقل می‌باشد. هم‌چنین سرعت جسم بر حسب t از رابطه $v(t) = v_۰ + gt$ به دست می‌آید. تابع ارتفاع جسم را برحسب متغیر v (سرعت جسم) بیابید.

حل: داریم

$$v = v_۰ + gt \Rightarrow t = \frac{v - v_۰}{g} \Rightarrow t(v) = \frac{v - v_۰}{g}$$

حال از ترکیب توابع $h(t)$ و $t(v)$ به تابع $h(t(v))$ می‌رسیم. بنابراین:

$$h(t(v))=\frac{1}{2}g(\frac{v-v_0}{g})^2+v_0(\frac{v-v_0}{g})\Rightarrow h(t(v))=\frac{v^2-v_0^2}{2g}$$

مثال: دامنه تابع $h(x)=\sqrt{\sqrt{3x-4}-6x+8}$ را بیابید.

حل: اگر قرار دهیم $g(x)=3x-4$ و $f(x)=\sqrt{\sqrt{x}-2x}$ آن‌گاه $h=fog$ و داریم $D_f=[0,\frac{1}{4}]$.

پس

$$D_h=D_{fog}\{x\in D_g \mid f(x)\in D_f\}=\left\{x\in\Re \mid 0\le x\le\frac{1}{4}\right\}=[0\,,\frac{1}{4}]$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ x+1 & x\ge 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-5x & x\le 0\\ 1 & x>0\end{cases}$ ضابطه تابع fog را بیابید.

حل: توجه کنید که x ابتدا به تابع g رفته و خروجی آن وارد تابع f می‌شود. حال اگر $x>0$ را بعنوان ورودی تابع g در نظر بگیریم خروجی آن عدد ۱ می‌باشد حال ۱ ورودی f را تشکیل می‌دهد که خروجی f به ازای $x=1$ برابر $1+1=2$ می‌باشد. این مطلب را چنین نمایش می‌دهیم:

$$x>0 \xrightarrow{g} 1 \xrightarrow{f} 1+1=2$$

حال اگر $x\le 0$ ورودی تابع g باشد خروجی آن $-5x$ است. اگر $-5x<1$ باشد، خروجی تابع f، $(-5x)^2=25x^2$ است و اگر $-5x\ge 1$ باشد خروجی تابع f ، $-5x+1$ است یعنی:

$$x\le 0\ \begin{cases} -\frac{1}{5}<x\le 0 \xrightarrow{g} -5x \xrightarrow[-5x<1]{f} (-5x)^2=25x^2 \\ x\le -\frac{1}{5} \xrightarrow{g} -5x \xrightarrow[-5x\ge 1]{f} -5x+1 \end{cases} \Rightarrow fog(x)=\begin{cases}-5x+1 & x\le -\frac{1}{5}\\ 25x^2 & -\frac{1}{5}<x\le 0\\ 2 & x>0\end{cases}$$

مثال: اگر $f(x)=\sqrt{x}+1$ و $fog(x)=\sqrt{x^2-1}+1$ ، تابع $g(x)$ را بیابید.

حل: داریم

$$f(x)=\sqrt{x}+1\Rightarrow f(g(x))=\sqrt{g(x)}+1$$

از سوی دیگر

$$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{x^2-1}+1$$

لذا $\sqrt{g(x)}+1=\sqrt{x^2-1}+1$ و در نتیجه $\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2-1}$ یا $g(x)=x^2-1$.

مثال: اگر $fog(x)=f(g(x))=\sqrt{\sin^4 x+2\sin^2 x+2}=\sqrt{(\sin^2 x+1)^2+1}=\sqrt{g^2(x)+1}$

حالا با قرار دادن x به جای $g(x)$ در تساوی‌ها داریم $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

تمرین:

۱- فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x^{۲}-۴}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$، ضابطه توابع fog و gof را بیابید، سپس به کمک تعریف، دامنه هر یک را بیابید.

۲- فرض کنید $f(x)=\sqrt{x^{۲}+x}$ و $g(x)=۲\sqrt{x}$، ضابطه تابع fog را بیابید، سپس به کمک تعریف، دامنه آن را بیابید.

۳- فرض کنید $f(x)=\sqrt{۱-۲x}$ و $g(x)=\frac{x-۱}{x+۳}$، دامنه تابع fog را به کمک تعریف بیابید.

۴- اگر $f(x)=۱-\frac{x}{۲}$ و $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)$، ضابطه تابع $(g+۲f)of$ را بیابید.

۵- اگر $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ و $Dg=[-۲\,,\,۴]$ دامنه تابع gof را بیابید.

۶- اگر $\begin{cases} f:[۱\,,\,۴]\to \Re \\ f(x)=۲x-۳ \end{cases}$ و $\begin{cases} g:[-۲\,,\,۴]\to \Re \\ g(x)=۱-۲x \end{cases}$ دامنه تابع gof را بیابید.

۷- اگر $f=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,-۱),(۴\,,\,-۱),(-۱\,,۰)\}$ و $g(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-۲}}$ توابع fog و gof و fof را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

۸- $f(x)=\sqrt{۹-x^{۲}}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ ضابطه و دامنه توابع gof، gog و $fo(۲f)$ را بیابید.

۹- اگر $f(x)=\frac{x-۱}{۲x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x-۱}{۲x+۱}$ ضابطه و دامنه توابع gof، fog و fof را بیابید.

۱۰- اگر $f=\{(۱\,,\,۲),(۳\,,\,a),(۴\,,\,-۱),(a\,,a+۱)\}$ و $fof(۳)=۰$ مقدار a را بیابید.

۱۱- اگر $f(x)=۳x+۳$ و $g(x)=۲x^{۲}+۱$ معادله $fog(x)=۰$ را حل کنید.

۱۲- اگر $f(x)=x^{۳}$ و $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)$ ضابطه $g(۱-t^{۲})$ را بیابید.

۱۳- اگر $fog(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x}{x+۱}$ ضابطه تابع f را بیابید.

۱۴- اگر $fog(x)=-f(x)$ و $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ ضابطه تابع g را بیابید.

۱۵- اگر $f(x)=x^{۲}+x$ و $fog(x)=x+۱$ و برد تابع g شامل هیچ عدد مثبتی نباشد ضابطه تابع g را بیابید.

۱۶- اگر $f(x)=x^{۲}-۲x$ و $fog(x)=x$ و $Df=[۱\,,\,\infty]$ ضابطه تابع g را بیابید.

۱۷- در حرکت پرتابی در امتداد افق با سرعت اولیه v. فاصله افقی جسم از مبدأ برحسب زمان در هر لحظه از رابطه $x(t)=v.t$ به دست می‌آید و فاصله عمود آن از مبدأ بر حسب زمان از رابطه $y(t)=\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ (g شتاب ثقل است) تابع $yox(t)$ را به دست آورید و آن را تعبیر کنید.

مجموعه‌های متقارن

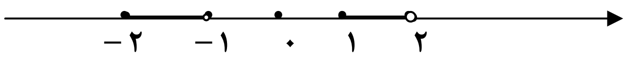
❖ **مجموعه‌ی $A \subseteq \Re$ را متقارن گوییم هر گاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $-x \in A$.**

مثال: مجموعه‌ی $A=\{-۳\,,-۲\,,-۱\,,۰\,,۱\,,۲\}$ متقارن نیست، زیرا $-۳ \in A$ ولی $۳ \notin A$.

مثال: مجموعه‌ی $A=\{-۱\,,۲\}$ متقارن نیست، زیرا $۲ \in A$ ولی $-۲ \notin A$.

مثال: مجموعه‌ی $A=\{-۲\,,۲\}$ متقارن است زیرا هر عضوی از A انتخاب کنیم قرینه‌ی آن عضو نیز در A وجود دارد.

مثال: مجموعه‌ی A که به صورت زیر، روی محور نمایش داده شده، متقارن نیست، زیرا $-۲ \in A$ ولی $۲ \notin A$.



تمرین:

کدام یک از مجموعه‌های زیر متقارن است.

الف) $\{x \mid x=۲k\,,\,k \in z\}$

ب) $(-\infty\,,۴]$

ج) $\Re-[-۲\,,۲)$

د) $\{x \mid \frac{۱}{x}<۱\}$

هـ) $\Re-\{x \mid x^۳-x=۰\}$

و) $\{x \mid ۳^x \neq ۲^x\}$

ز) $\{x \mid \sqrt{\frac{x^۲+۱}{۴-x^۲}} \in \Re\}$

ح) $\{x \mid ۲<|x|<۳\}$

ط) $\{x \in \Re \mid x \geq x^۲\}$

توابع زوج و فرد

❖ **تابع f با دامنه‌ی متقارن را زوج گوییم، هر گاه به ازای هر $x \in D_f$، تساوی $f(-x)=f(x)$ برقرار باشد.**

❖ **تابع f با دامنه‌ی متقارن را فرد گوییم، هر گاه به ازای هر $x \in D_f$، تساوی $f(-x)=-f(x)$ برقرار باشد.**

مثال: **زوج** یا فرد بودن تابع $f=\{(-۳\,,-۱)\,,(۲\,,۳)\,,(-۲\,,۳)\,,(۳\,,۱)\}$ را بررسی کنید.

حل: چون $D_f=\{-۳,-۲,۲,۳\}$، لذا دامنه f متقارن است. $f(-۳)=-f(۳)$ ولی $f(-۲)=f(۲)$ بنابراین تابع f نه زوج است و نه فرد.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\dfrac{x+۱}{x-۳}$ را بررسی کنید.

حل: داریم $D_f=\Re-\{۳\}$ و $-۳\in D_f$ ولی $۳\notin D_f$، پس دامنه‌ی تابع f متقارن نیست.
بنابراین تابع f نه زوج است نه فرد.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-|x|}{x^۲+۱}$ را بررسی کنید.

حل: داریم $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=\frac{(-x)^۲-|-x|}{(-x)^۲+۱}=\frac{x^۲-|x|}{x^۲+۱}=f(x)$$

بنابراین f تابعی زوج است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^۲+۱}\right)$ را بررسی کنید.

حل: با توجه به $x^۲+۱\geq ۱$ و این که $\sqrt{x^۲+۱}\geq -x \Rightarrow x+\sqrt{x^۲+۱}>۰$ همواره برقرار است،
دامنه‌ی f برابر $\Re$ است و لذا متقارن است و

$$f(-x)=\log(-x+\sqrt{(-x)^۲+۱})=\log(\frac{(\sqrt{x^۲+۱}-x)(\sqrt{x^۲+۱}+x)}{\sqrt{x^۲+۱}+x})$$

$$=\log\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}+x}=\log۱-\log(\sqrt{x^۲+۱}+x)=-f(x)$$

بنابراین f تابعی فرد است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\begin{cases}x^۴-۲x & x\geq ۰\\ x^۴+۲x & x<۰\end{cases}$ را بررسی کنید.

حل: $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است.

حالت اول: $x=۰\Rightarrow f(۰)=۰$.

حالت دوم: اگر $x<۰$ آنگاه $-x>۰$ و داریم:

$$f(-x)=(-x)^۴+۲(-x)=x^۴-۲x=f(x)$$

بنابراین f تابعی زوج است.

مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=|x-۲|-|x+۲|$ را بررسی کنید.

حل: $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=|-x-۲|-|-x+۲|=|-(x+۲)|-|-(x-۲)|=|x+۲|-|x-۲|$$
$$=-(|x-۲|-|x+۲|)=-f(x)$$

بنابراین f تابعی فرد است.

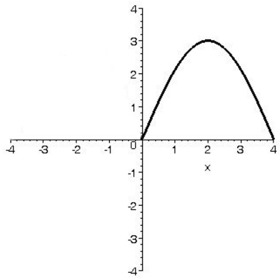
مثال: زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\sin x+\cos x$ را بررسی کنید.

حل: $D_f=\Re$ و لذا دامنه f متقارن است و

$$f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$$

واضح است که $f(-x)\neq f(x)$ و $f(-x)\neq -f(x)$ پس تابع f نه زوج است و نه فرد.

مثال: قسمتی از نمودار تابع f با دامنه‌ی $[-۴\,,\,۴]$ به صورت



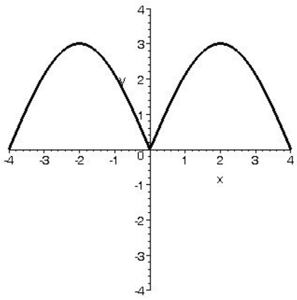
رسم شده است، نمودار تابع را طوری کامل کنید تا:

الف) f تابعی زوج را نمایش دهد.

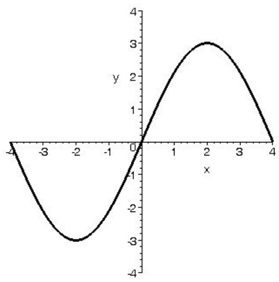
ب) f تابعی فرد را نمایش دهد.

حل:

الف) می‌دانیم نمودار تابع زوج نسبت به محور yها متقارن است. پس لازم است نمودار f به صورت مقابل باشد.



ب) می‌دانیم نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. پس لازم است نمودار f به صورت مقابل باشد.



مثال: ثابت کنید تنها تابعی که هم زوج است و هم فرد، تابع ثابت صفر با دامنه‌ی متقارن است.

حل: فرض کنیم f تابعی با دامنه‌ی متقارن باشد، آنگاه به ازای هر $x\in D_f$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ تابعی زوج است } \Rightarrow f(-x)=f(x) \\ f \text{ تابعی فرد است } \Rightarrow f(-x)=-f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=-f(x) \Rightarrow f(x)=۰$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=cx^۳+(a-۳)x^۲-۲bx+b+۴$ داده شده است.

الف) به ازای چه مقادیری از a و b تابع f زوج است.

ب) به ازای چه مقادیری از a و b تابع f فرد است.

حل: واضح است که $D_f=\Re$.

الف)

$$f(-x)=f(x) \Rightarrow -cx^۳+(a-۳)x^۲+۲bx+b+۴=cx^۳+(a-۳)x^۲-۲bx+b+۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-c \\ ۲b=-۲b \\ a-۳=a-۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=۰ \\ b=۰ \\ a\in\Re \end{cases}$$

توجه: برای زوج بودن تابع چند جمله‌ای f لازم است تنها جملات با درجه‌ی زوج وجود داشته باشند.

ب)

$$f(-x)=-f(x) \Rightarrow -cx^۳+(a-۳)x^۲+۲bx+b+۴=-cx^۳-(a-۳)x^۲+۲bx-b-۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۳=-(a-۳) \\ b+۴=-b-۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=-۴ \end{cases}$$

توجه: برای فرد بودن تابع چند جمله‌ای f، لازم است در ضابطه‌ی آن تنها جملات با درجه‌ی فرد وجود داشته باشند.

مثال: اگر f و g هر دو فرد باشند، زوج یا فرد بودن تابع $\frac{f}{g}$ را بررسی کنید.

$x\in D_{\frac{f}{g}}$ دلخواه $\Rightarrow x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq ۰$

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} x\in D_f \Rightarrow -x\in D_f \\ x\in D_g \Rightarrow -x\in D_g \end{array}\right\} \Rightarrow -x\in D_f\cap D_g \\ g(-x)=-g(x)\neq ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow -x\in D_{\frac{f}{g}}$$

بنابراین دامنه تابع $\frac{f}{g}$ متقارن است و داریم:

$$\frac{f}{g}(-x)=\frac{f(-x)}{g(-x)}=\frac{-f(x)}{-g(x)}=\frac{f}{g}(x)$$

پس تابع $\frac{f}{g}$ تابع زوج است.

تمرین:

۱- زوج یا فرد بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{-\sin^{۲}\pi x}$ ب) $f(x)=\cos(۲x)$

ج) $f(x)=\tan x$ د) $f(x)=\tan x+۱$

هـ) $f(x)=\tan(\sin x)$ و) $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+\sqrt[۳]{x+۱}$

ز) $f(x)=\dfrac{۳}{۲^{x}-۴}$ س) $f(x)=\dfrac{۲^{x}-۱}{۲^{x}+۱}$

ط) $f(x)=\log\dfrac{x+۱}{x-۱}$ ظ) $f(x)=۳^{-x}(۳^{x}+۱)^{۴}$

ش) $f(x)=\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۱}$ ی) $f(x)=x\sin x$

ت) $f(x)=\dfrac{x+۵}{x^{۴}-۳x^{۲}+۲}$ پ) $f(x)=\dfrac{x+۱}{x^{۲}+۴x-۵}$

۲- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+ax & x\le -۱ \\ cx & -۱<x<۱ \\ bx^{۲}+x & x\ge ۱\end{cases}$ تابعی زوج باشد، مقادیر a و b و c را تعیین کنید.

۳- اگر $f(x)=\dfrac{x-۱}{x+۱}$ ، تابع $g(x)=(fof)(x)$ زوج است یا فرد؟ چرا ؟

۴- زوج یا فرد بودن تابع $y=\dfrac{-\sqrt[۳]{x^{۲}}+x}{\sqrt[۳]{x-۱}}$ را بررسی کنید.

۵- زوج یا فرد بودن تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & x\in Q \\ -۱ & x\notin Q\end{cases}$ را بررسی کنید.

۶- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^{۲}+x+۱} & x>۰ \\ a\sqrt{x^{۲}+bx+c} & x<۰\end{cases}$ فرد باشد، $a+b+c$ چقدر است.

۷- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۳x}{x^{۲}+۵x-۱} & x>۰ \\ \dfrac{ax}{x^{۲}+bx+c} & x<۰\end{cases}$ فرد باشد، آنگاه $a+b+c$ چقدر است.

۸- مقادیر a و b را طوری به دست آورید تا تابع

$$f(x)=x+(a-۱)x^{۲}+(b+۲)\cos x+\sin x$$

تابعی فرد باشد.

۹- اگر f تابعی فرد و g تابعی زوج باشد زوج یا فرد بودن هر یک از توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ ، fog ، gof ، fof و gog را بررسی کنید.

۱۰- نمودار تابعی با دامنه‌ی $\Re-[-۲,۲]$ رسم کنید که:

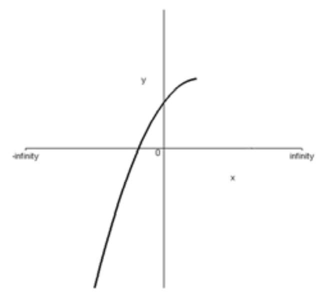
الف) زوج باشد ب) فرد باشد ج) هم زوج باشد هم فرد د) نه زوج باشد نه فرد

توابع صعودی و توابع نزولی

- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) \le f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را صعودی گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) < f(x_2)$ و بالعکس، آنگاه تابع f را صعودی اکید گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) \ge f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را نزولی گوییم.
- اگر برای هر $x_1 , x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نتیجه گرفت $f(x_1) > f(x_2)$ ، آنگاه تابع f را نزولی اکید گوییم.

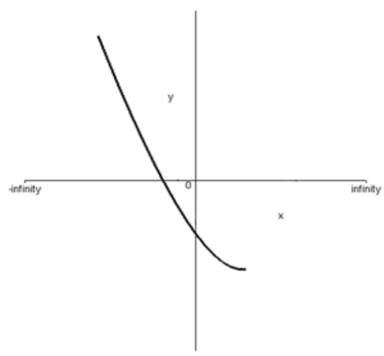
مثال: صعودی یا نزولی بودن هر یک از توابع زیر را روی دامنه تعریفشان بررسی کنید.

الف)



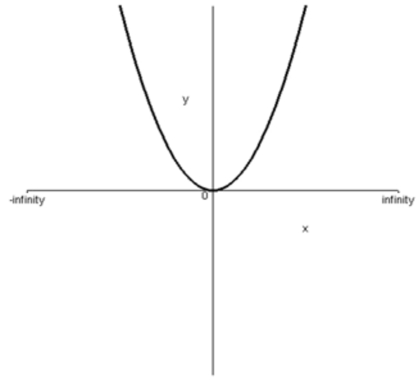
ب)

ج)

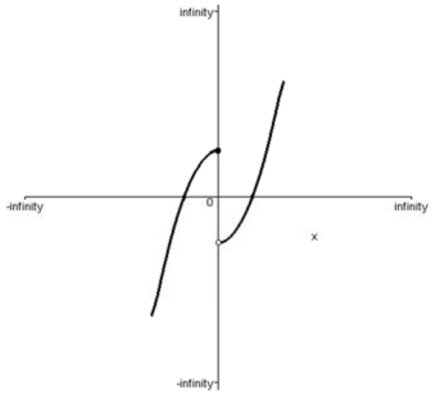


د)

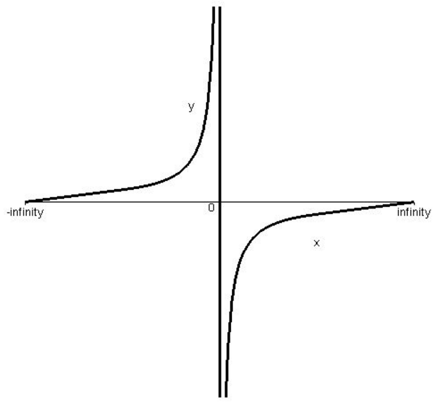
هـ)



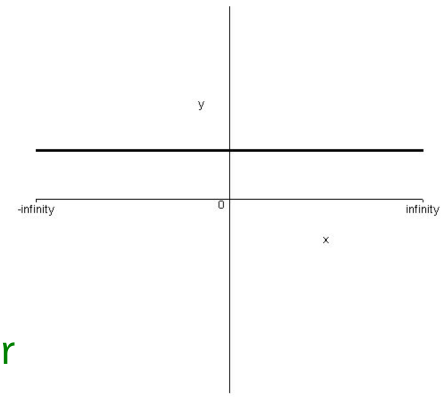
و)



ز)



ح)



حل:

الف) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y نیز زیاد می‌شود. پس تابع صعودی اکید است.

ب) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) \leq f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y زیاد می‌شود یا ثابت می‌ماند. پس تابع صعودی است.

ج) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم می‌شود. پس تابع نزولی اکید است.

د) به ازای هر x_2 و x_1 که $x_1 < x_2$ داریم $f(x_1) \geq f(x_2)$. یعنی در واقع با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم می‌شود یا ثابت می‌ماند. پس تابع نزولی است.

ه) اگر $x_2 \leq 0$ و x_1 و $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. این نشان می‌دهد تابع f صعودی نیست از طرف دیگر، اگر $x_2 \geq 0$ و x_1 و $x_1 < x_2$ آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. این نشان می‌دهد تابع f نزولی نیست، بنابراین تابع f نه صعودی است و نه نزولی.

و) تابع در هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0]$ و $[0, +\infty)$ صعودی اکید است، ولی مقادیر تابع در مجاورت چپ صفر از مقادیر تابع در مجاورت راست صفر بیشتر است. بنابراین تابع روی دامنه‌ی تعریف خود یعنی بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ نه صعودی است و نه نزولی.

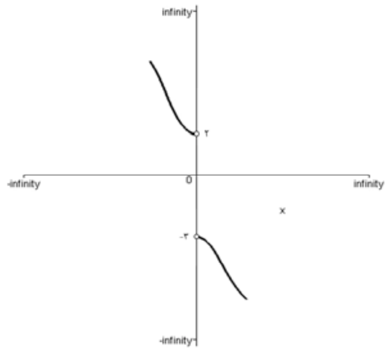
ز) تابع در بازه‌ی $(-\infty , ۰)$ و $(۰ , +\infty)$ صعودی اکید است ولی مقادیر تابع در مجاورت چپ صفر از مقادیر تابع در مجاورت راست صفر بیشتر است. پس تابع در دامنه‌ی تعریف خودیعنی بازه‌ی $(-\infty , ۰)\cup(۰ , +\infty)$ نه صعودی است و نه نزولی.

ح) با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y کم نمی‌شود. پس تابع صعودی است و همچنین با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y زیاد نمی‌شود. پس تابع نزولی است ولی صعودی اکید یا نزولی اکید نیست.

مثال: حدود k را طوری به دست آورید تا تابع $f=\{(۲ , ۷) , (-۱ , ۲) , (۰ , k) , (-۲ , ۱)\}$ صعودی اکید شود.

حل: چون تابع صعودی اکید است باید با زیاد شدن مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم نیز زیاد شوند. بنابر این لازم است $k\in(۲ , ۷)$ باشد.

مثال: در تابع f که نمودار آن به صورت زیر رسم شده، مقادیر $f(۰)$ در چه بازه‌ای می‌تواند تغییر کند تا تابع f نزولی اکید باشد.



حل: با توجه به اینکه با زیاد شدن مقادیر x، مقادیر y باید کم شود. لذا لازم است $f(۰)$ عددی در فاصله‌ی $[-۳ , ۲]$ باشد.

مثال: صعودی یا نزولی بودن هر یک از توابع زیر را روی دامنه‌ی تعریفشان بررسی کنید.

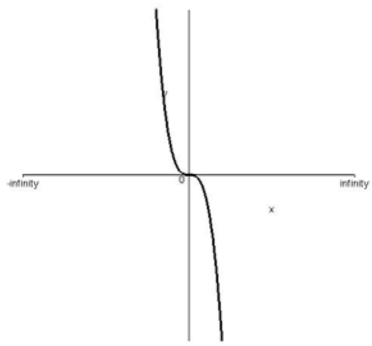
الف) $f(x)=-x^۳$ ب) $f(x)=۲x^۳+۴x-۱$

ج) $f(x)=\log_a^x$ د) $f(x)=\sqrt{۳-۲x}$

هـ) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<۰ \\ ۲-x & x\geq ۰ \end{cases}$ و) $f(x)=|x-۱|+۳$

حل:

الف) روش اول: نمودار تابع f به صورت زیر است.



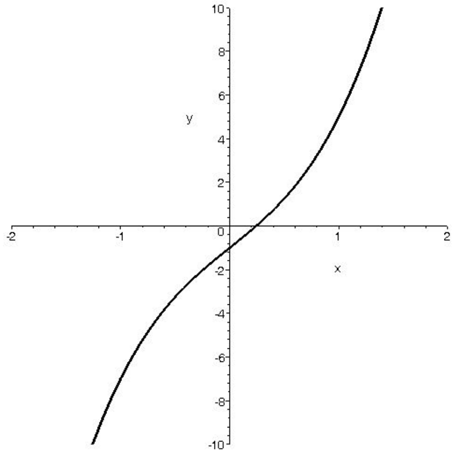
با توجه به نمودار واضح است که تابع نزولی اکید می‌باشد.

روش دوم: $x_1, x_2 \in D_f = \Re$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$ پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

بنابراین تابع f نزولی اکید است.

ب) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



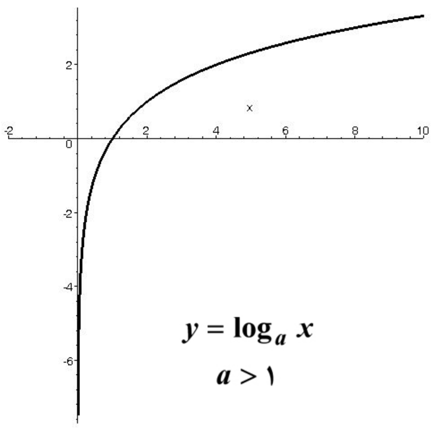
همان‌گونه که از روی نمودار مشخص است، تابع صعودی اکید می‌باشد.

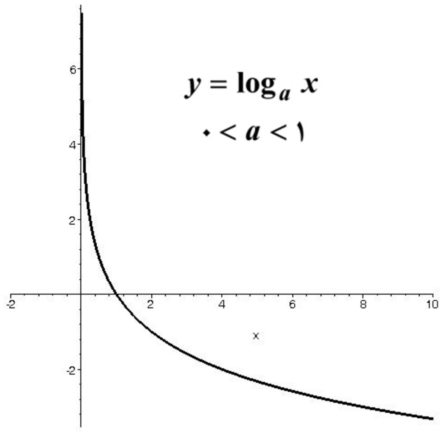
روش دوم: $x_1, x_2 \in D_f = \Re$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$ پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ 4x_1 < 4x_2 \end{cases} \Rightarrow 2x_1^3 + 4x_1 < 2x_2^3 + 4x_2 \Rightarrow 2x_1^3 + 4x_1 - 1 < 2x_2^3 + 4x_2 - 1$$
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بنابراین تابع f ، صعودی اکید است.

ج) روش اول: نمودار تابع شبیه یکی از دو نمودار زیر است.





بنابراین اگر $a > 1$ باشد تابع صعودی اکید است و اگر $0 < a < 1$ ، تابع نزولی اکید می‌باشد.

روش دوم: رابطه‌های

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \log x_1 < \log x_2 \quad \text{و} \quad \log_a^x = \frac{\log x}{\log a}$$

را در نظر گرفته، دو عضو $x_1 , x_2 \in D_f = (0, +\infty)$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$. سپس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول $(a > ۱)$:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log x_۱ < \log x_۲ \overset{\log a > ۰}{\Rightarrow} \frac{\log x_۱}{\log a} < \frac{\log x_۲}{\log a} \Rightarrow \log_a^{x_۱} < \log_a^{x_۲}$$
$$\Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

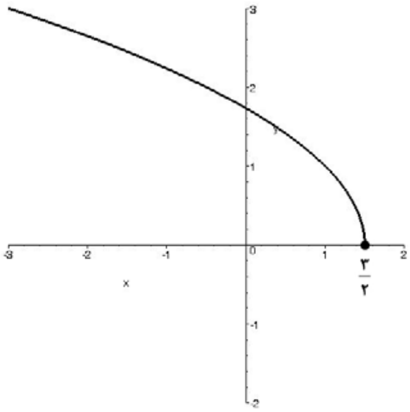
در نتیجه f صعودی اکید است.

حالت دوم $(۰ < a < ۱)$:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log x_۱ < \log x_۲ \overset{\log a < ۰}{\Rightarrow} \frac{\log x_۱}{\log a} > \frac{\log x_۲}{\log a} \Rightarrow \log_a^{x_۱} > \log_a^{x_۲}$$
$$\Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

در نتیجه f نزولی اکید است.

د) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



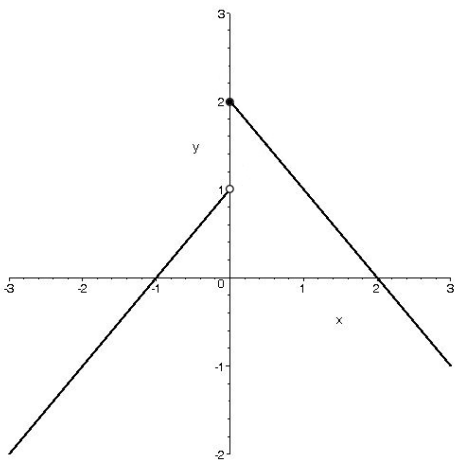
با توجه به نمودار واضح است که تابع نزولی اکید می‌باشد

روش دوم: $x_۱, x_۲ \in D_f = (-\infty , \frac{۳}{۲}]$ را به دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_۱ < x_۲$. لذا داریم:

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow ۳ - ۲x_۱ > ۳ - ۲x_۲ \Rightarrow \sqrt{۳ - ۲x_۱} > \sqrt{۳ - ۲x_۲} \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

در نتیجه f نزولی اکید است.

هـ) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشخص است تابع f در دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است نه نزولی.

توجه: تابع روی $(-\infty , ۰)$ صعودی اکید و روی $[۰ , +\infty)$ نزولی اکید است.

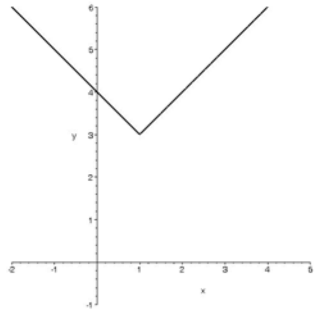
روش دوم: x_1 و x_2 را به دلخواه به صورت‌های زیر انتخاب می‌کنیم. ضابطه قسمت اول تابع صعودی اکید است.

$$\begin{cases} x_1, x_2 < 0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\begin{cases} x_1, x_2 > 0 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow -x_1 < -x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

ضابطه قسمت دوم، تابع نزولی اکید است. بنابراین تابع روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است و نه نزولی.

و) روش اول: نمودار تابع به صورت زیر است و با توجه به نمودار واضح است که تابع f روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است نه نزولی.



روش دوم : دو عضو دلخواه از $D_f = \Re$ را به صورت‌های زیر انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1, x_2 \le 1 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow |x_1 - 1| > |x_2 - 1| \Rightarrow |x_1 - 1| + 3 > |x_2 - 1| + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

پس تابع f در فاصله‌ی $(-\infty, 1]$ نزولی اکید است.

$$\begin{cases} x_1, x_2 \ge 1 \\ x_1 < x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow |x_1 - 1| < |x_2 - 1| \Rightarrow |x_1 - 1| + 3 < |x_2 - 1| + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

پس تابع f در فاصله‌ی $[1, +\infty)$ صعودی اکید است. اما تابع روی دامنه‌ی تعریف خود نه صعودی است و نه نزولی.

مثال: اگر f تابعی صعودی با دامنه‌ی $\Re$ باشد، دامنه‌ی تعریف تابع

$$g(x) = \sqrt{f(|x-2|) - f(|2x-1|)}$$

را به دست آورید.

حل: داریم:

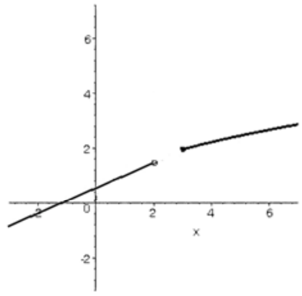
$$f(|x-2|) - f(|2x-1|) \ge 0 \Rightarrow f(|x-2|) \ge f(|fx-1|)$$

چون f تابعی صعودی است داریم:

$$|x-2| \ge |2x-1| \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \ge 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 3 \le 0 \Rightarrow -1 \le x \le 1 \Rightarrow D_g = [-1, 1]$$

مثال: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \ge 3 \\ \frac{1}{2}x + a & x < 2 \end{cases}$ صعودی اکید باشد، بیشترین مقدار a را به دست آورید.

حل: نمودار تابع به صورت زیر است.



چون تابع f صعودی است پس لازم است $۱+a \le ۲$ یعنی $a \le ۱$ بنابراین بیشترین مقدار a می‌تواند یک باشد.

تمرین :

۱- یکنوایی هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{x-۲}$

ب) $x \ge ۰$ $\quad f(x)=\dfrac{x^۲+۴}{x^۲+۱}$

ج) $x \ge ۰$ $\quad f(x)=۲-\dfrac{۴}{\sqrt{x+۳}}$

د) $x > ۲$ $\quad f(x)=\dfrac{۱}{x-۲}$

هـ) $۰ \le x \le \pi$ $\quad f(x)=x+|x|$

و) $x \le ۰$ $\quad f(x)=۲-۵x^۲$

ز) $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x+۳ & x<۲ \\ x^۳-۵ & x \ge ۲ \end{cases}$

ح) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<۰ \\ ۲-x^۲ & x \ge ۰ \end{cases}$

ط) $\pi \le x \le ۲\pi$ $\quad f(x)=\sin x$

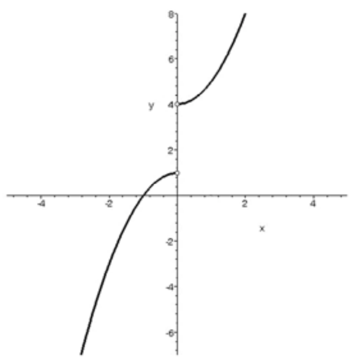
ی) $f(x)=\log_۲(x-۲)$

ک) $۰ \le x \le \pi$ $\quad f(x)=\cos x$

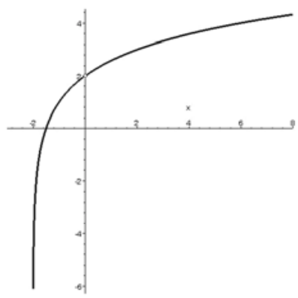
۲- هرگاه تابع $f=\{(۲,-۳),(-۱,۵),(۰,k),(۱,۲)\}$ نزولی باشد، حدود k را به دست آورید.

۳- در توابع زیر $f(۰)$ چه مقداری باشد، تا تابع f روی $\Re$ صعودی اکید باشد.

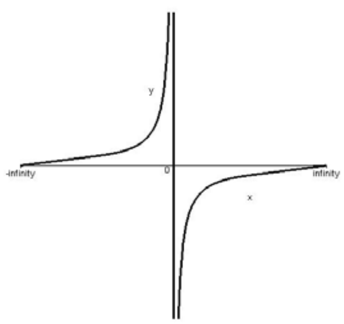
الف)



ب)



ج)



❖ **توابعی که یا صعودی باشند یا نزولی، توابع یکنوا نامیده می‌شوند.**

❖ **توابعی که اکیداً صعودی باشند یا اکیداً نزولی، توابع اکیداً یکنوا نامیده می‌شوند.**

مثال: تابع $y = x^{2}$ روی دامنه تعریف خود نه صعودی است نه نزولی. پس تابعی غیر یکنوا است.

مثال: اگر تابع f نزولی اکید و تابع g بر R_f نزولی اکید باشد، یکنوایی تابع gof را بررسی کنید.

حل: دو عضو دلخواه $x_1, x_2 \in D_f$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$. پس داریم:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2) \;\Rightarrow\; g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

یعنی در واقع داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (gof)(x_1) < (gof)(x_2)$$

پس تابع gof صعودی اکید می‌باشد، بنابراین یکنوای اکید می‌باشد.

مثال: اگر دو تابع f و g در بازه‌ی I، صعودی اکید باشند یکنوایی تابع $f+g$ را روی I بررسی کنید.

حل: $x_1, x_2 \in I$ را به طور دلخواه طوری انتخاب می‌کنیم که $x_1 < x_2$. پس داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ g(x_1) < g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1)+g(x_1) < f(x_2)+g(x_2)$$

$$\Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$$

تابع $f+g$ صعودی اکید است. بنابراین تابع $f+g$ یکنوای اکید می‌باشد.

مثال: تابع $y = -x^{3}$ تابع نزولی اکید است. پس تابع یکنوای اکید می‌باشد.

توجه: بعد از فراگیری مبحث مشتق، می‌توانیم در توابع مشتق پذیر، یکنوایی را با روش‌های ساده‌تری بررسی کنیم.

تمرین:

۱- یکنوایی هر یک از توابع زیر را روی دامنه تعریف بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-2}$ ب) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ ج) $f(x) = \begin{cases} -x^{3} & x < 0 \\ x^{3} & x \geq 0 \end{cases}$

۲- اگر دو تابع f و g در بازه‌ی I صعودی اکید و با مقادیر مثبت باشند، یکنوایی تابع $f \times g$ را روی بازه I بررسی کنید.

۳- اگر f نزولی اکید و g بر R_f نزولی اکید باشد، یکنوایی تابع gof را بررسی کنید.

تابع یک به یک

❖ **تابع f یک به یک است، اگر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:**

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

و یا به بیان دیگر:

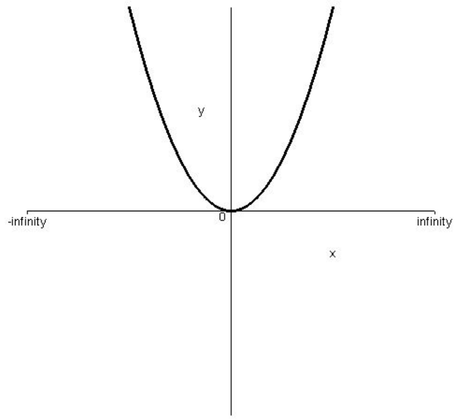
❖ **تابع f یک به یک است اگر برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داشته باشیم:**

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

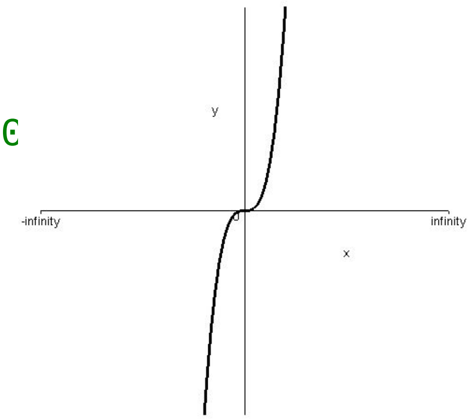
❖ **نمودار یک تابع در صورتی نمودار تابع یک به یک است که هر خط موازی محور x ها حداکثر در یک نقطه آن را قطع کند.**

مثال: کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند.

الف)



ب)



ج) $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 2)\}$

حل:

الف) یک به یک نیست زیرا مثلاً خط $y = 1$ نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

ب) هر خط موازی محو xها رسم کنیم. نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. پس تابع یک به یک است.

ج) یک به یک نیست زیرا $f(1) = f(4)$ ولی $1 \neq 4$.

مثال: یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \sqrt{x^3 + 4}$ ب) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

ج) $f(x) = x + |x - 2|$ د) $f(x) = \log x$

هـ) $f(x) = \sin x - \cos x$ و) $f(x) = \dfrac{3^x}{3^x + 1}$

حل:

الف) روش اول:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1^3+4}=\sqrt{x_2^3+4}\Rightarrow x_1^3+4=x_2^3+4\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$$

بنابراین تابع f یک به یک است.

روش دوم:

$$x_1\neq x_2\Rightarrow x_1^3\neq x_2^3\Rightarrow x_1^3+4\neq x_2^3+4\Rightarrow\sqrt{x_1^3+4}\neq\sqrt{x_2^3+4}\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

بنابراین تابع f یک به یک است.

ب)

$$f(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$$

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow(x_1+1)^2+2=(x_2+1)^2+2\Rightarrow(x_1+1)^2=(x_2+1)^2$$

$$\Rightarrow x_1+1=\pm(x_2+1)\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\x_1=-x_2-2\end{cases}$$

پس تابع f یک به یک نیست.

ج)

$$f(0)=f(1)=2\Rightarrow 0\neq 1$$

پس تابع f یک به یک نیست.

د)

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\log x_1=\log x_2\Rightarrow\log x_1-\log x_2=0$$

$$\Rightarrow\log\frac{x_1}{x_2}=0\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=1\Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع f یک به یک است.

هـ)

$$f(0)=f(2\pi)=-1\Rightarrow 0\neq 2\pi$$

بنابراین تابع f یک به یک نیست.

توجه: توابع متناوب یک به یک نیستند.

و)

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{3^{x_1}}{3^{x_1}+1}=\frac{3^{x_2}}{3^{x_2}+1}\Rightarrow 3^{x_1}\times3^{x_2}+3^{x_1}=3^{x_2}\times3^{x_1}+3^{x_2}$$

$$\Rightarrow 3^{x_1}=3^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

پس تابع f یک به یک است

مثال: ثابت کنید اگر تابع f یکنوای اکید باشد آنگاه تابع f یک به یک است.

حل: مثلاً فرض کنیم تابع f صعودی اکید باشد آنگاه اگر $x_1\neq x_2$ دو حالت رخ می‌دهد:

حالت اول: اگر $x_1<x_2$ باشد، داریم:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

لذا f یک به یک است.

حالت دوم اگر $x_1 > x_2$ باشد، داریم:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

لذا f یک به یک است.

مثال: اگر توابع f و g یک به یک باشند، یک به یک بودن هر یک از توابع $f+g$ و fog را بررسی کنید.

حل: تابع $f+g$ همواره نمی‌تواند یک به یک باشد زیرا مثلاً اگر $f=\{(0,0),(1,1)\}$ و $g=\{(0,0),(1,-1)\}$ را در نظر بگیریم، داریم $f+g=\{(0,0),(1,0)\}$ که یک به یک نیست.

اما تابع fog یک به یک است زیرا:

$$(fog)(x_1)=(fog)(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$
$$\underset{1-1}{\overset{f}{\Rightarrow}} g(x_1) = g(x_2)$$
$$\underset{1-1}{\overset{g}{\Rightarrow}} x_1 = x_2$$

مثال: آیا یک تابع می‌تواند هم فرد و هم یک به یک باشد.

حل: بلی. مثلاً توابع $y=x^3$ و $y=x$ هم فرد است و هم یک به یک. ولی تابع $y=\sin x$ فرد است، اما یک به یک نیست.

مثال: آیا یک تابع می‌تواند هم زوج و هم یک به یک باشد.

حل: فرض کنیم f تابعی زوج و یک به یک باشد. داریم:

$$\text{تابعی زوج است } f \Rightarrow f(x) = f(-x) \overset{\text{یک به یک است } f}{\Rightarrow} x = -x \Rightarrow x = 0$$

پس تنها تابعی که هم زوج و هم یک به یک است، تابعی دلخواه با دامنه‌ی یک عضوی صفر می‌باشد.

تمرین:

۱- یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $y = x^{۳} + ۵$ ب) $y = ۵ - x^{۲}$

ج) $y = x^{۲} - ۶x + ۲$ د) $y = x + \sqrt[۳]{x}$

هـ) $y = \sqrt[۳]{x+۵}$ و) $y = \sin x \, , \, x \in \left[-\frac{\pi}{۲} \, , \, \frac{\pi}{۲}\right]$

ز) $y = \cos x \, , \, x \in [۰ \, , \, \pi]$ ح) $y = ۲^{x+۱}$

ط) $y = \frac{x^{۲} - ۱}{x^{۲} + ۴}$ ی) $y = \frac{۲x + ۳}{۵ - ۳x}$

ک) $y = |x - ۲| - ۵$

۲- اگر f و g تابعی یک به یک باشند یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را در حالت کلی بررسی کنید.

الف) $f - g$ ب) $f \times g$ ج) $\frac{f}{g}$

❖ **یک تابع چند ضابطه‌ای در صورتی یک به یک است که هر یک از ضابطه‌ها یک به یک بوده و اشتراک برد دوبه‌دوی ضابطه‌ها مجموعه تهی باشد.**

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = \begin{cases} x+۱ & x < ۱ \\ ۲x+۳ & x \geq ۱ \end{cases}$ را بررسی کنید.

حل:

$$f_{۱}(x_{۱}) = f_{۱}(x_{۲}) \Rightarrow x_{۱} + ۱ = x_{۲} + ۱ \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$$

ضابطه اول یک به یک است.

$$f_{۲}(x_{۱}) = f_{۲}(x_{۲}) \Rightarrow ۲x_{۱} + ۳ = ۲x_{۲} + ۳ \Rightarrow ۲x_{۱} = ۲x_{۲} \Rightarrow x_{۱} = x_{۲}$$

ضابطه دوم یک به یک است.

$$\left.\begin{array}{l} x < ۱ \Rightarrow x + ۱ < ۲ \Rightarrow R_{۱} = (-\infty \, , \, ۲) \\ x \geq ۱ \Rightarrow ۲x \geq ۲ \Rightarrow ۲x + ۳ \geq ۵ \Rightarrow R_{۲} = (۵ \, , \, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow R_{۱} \cap R_{۲} = \phi$$

پس اشتراک برد ضابطه‌ها نیز تهی است. بنابراین f تابعی یک به یک است.

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x) = \begin{cases} ۳x - ۲ & x > ۱ \\ ۲x + k & x \leq ۱ \end{cases}$ یک به یک باشد.

حل: واضح است که هر یک از ضابطه‌ها تابعی یک به یک هستند، کافی است اشتراک برد آن‌ها نیز تهی باشد.

$$\left.\begin{array}{l} x > ۱ \Rightarrow ۳x > ۳ \Rightarrow ۳x - ۲ > ۱ \Rightarrow R_{۱} = (۱ \, , \, +\infty) \\ x \leq ۱ \Rightarrow ۲x \leq ۲ \Rightarrow ۲x + k \leq ۲ + k \Rightarrow R_{۲} = (-\infty \, , \, ۲ + k) \end{array}\right\} \Rightarrow ۲ + k \leq ۱ \Rightarrow k \leq -۱$$

تمرین:

۱- یک به یک بودن هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & x<۰ \\ ۲-x & x\geq ۰ \end{cases}$ 　 ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x<۱ \\ ۲x+۳ & x\geq ۱ \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^۲+۳ & x>۰ \\ ۱-x^۲ & x\leq ۰ \end{cases}$ 　 د) $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۰ \\ x+۲ & ۰\leq x<۲ \\ x+۴ & x\geq ۲ \end{cases}$

هـ) $f(x)=\begin{cases} x^۲-۲x & x<۲ \\ x+۱ & ۲\leq x<۳ \\ ۴-x & x\geq ۳ \end{cases}$ 　 و) $y=\dfrac{x}{۳+|x|}$

ز) $y=x^۲|x|$ 　 ح) $y=x|x|$

۲- مقدار a را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} x+a & x<۳ \\ ۲x+۵ & x\geq ۳ \end{cases}$ یک به یک باشد.

۳- مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} ۳x+۲k & k>۱ \\ ۲x-k & x\leq ۱ \end{cases}$ یک به یک باشد.

۴- مقدار a و b را طوری بیابید تا تابع $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x<-۱ \\ x+۲ & -۱\leq x<۲ \\ ۲x+b & x\geq ۲ \end{cases}$ تابعی یک به یک باشد.

۵- حدود m را طوری تعیین کنید تا تابع $g(x)=\begin{cases} ۳x+۵ & x\leq m \\ ۲x-۷ & x>m \end{cases}$، یک به یک باشد.

وارون تابع

❖ **اگر وارون $f=\{(x\,,\,y)|x\in A\,,\,y\in B\}$ یک تابع باشد، وارون تابع f به صورت $\{(y\,,\,x)|(x\,,\,y)\in f\}$ تعریف می‌شود. اگر تابع f به صورت نمودار نمایش داده شده باشد، برای پیدا کردن وارون آن کافی است قرینه‌ی نقاط نمودار را نسبت به خط $y=x$ رسم کنیم.**

مثال: وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f=\{(۱\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۶)\}$ 　 ب) $g=\{(۱\,,\,۳)\,,\,(۲\,,\,۴)\,,\,(۵\,,\,۳)\}$

حل:

الف) $f=\{(۲,\,۱)\,,\,(۴\,,۳)\,,\,(۶\,,\,۵)\}$ همان‌گونه که مشاهده می‌شود وارون تابع f یک تابع را مشخص می‌کند.

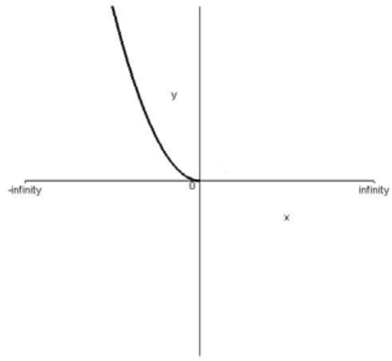
ب) $g=\{(۳,\,۱)\,,\,(۴\,,\,۲)\,,\,(۳\,,\,۵)\}$ همان‌گونه که مشاهده می‌شود وارون تابع g یک تابع نیست.

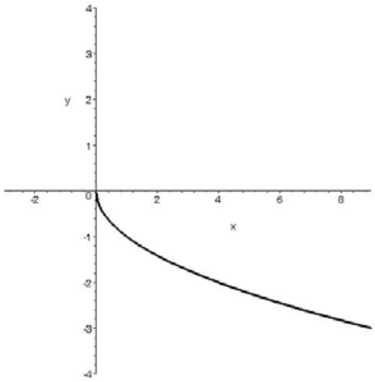
تمرین:

۱- وارون هر یک از توابع زیر را مشخص کنید و معین نمایید وارون کدام یک، تابع را مشخص می‌کند.

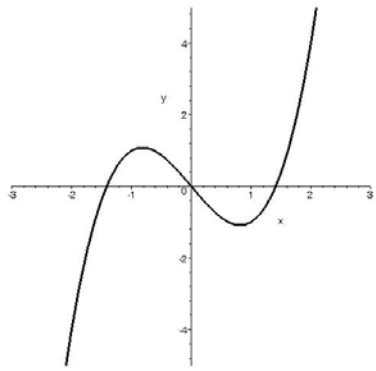
الف) $g = \{(۱ , ۲) , (۷ , ۲) , (۳ , ۴)\}$ ب) $g = \{(۱ , ۲) , (۷ , ۲) , (۳ , ۴)\}$

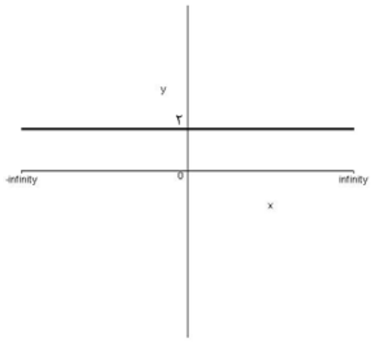
ج) د)





هـ) و)





۲- تحقیق کنید چه شرط یا شرایطی باید موجود باشد تا وارون تابع f ، خود نیز یک تابع باشد.

❖ **اگر وارون تابع f خود یک تابع باشد، آن را تابع وارون f می‌گویند و f را وارون‌پذیر می‌نامند. بدیهی است f وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد و وارون تابع f را با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم.**

مثال: تابع وارون تابع $f(x) = ۳x + ۵$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: ابتدا یک به یک بودن تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow ۳x_۱ + ۵ = ۳x_۲ + ۵ \Rightarrow ۳x_۱ = ۳x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

تابع f یک به یک است، پس وارون پذیر می‌باشد. برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون کافی است y را به جای $f(x)$ قرار دهیم و x را برحسب y به دست آورده، سپس جای x و y را با هم عوض کنیم.

$$y = ۳x + ۵ \Rightarrow ۳x = y - ۵ \Rightarrow x = \frac{y - ۵}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x - ۵}{۳}$$

مثال: اگر $f=\{(۱\,,۲)\,,(۳\,,۴)\}$، توابع $f^{-۱}$ و $\frac{۱}{f}$ را محاسبه کنید.

حل: f یک به یک است پس $f^{-۱}=\{(۲,۱)\,,(۴\,,۳)\}$ و $\frac{۱}{f}=\left\{\left(۱\,,\frac{۱}{۲}\right),\left(۳\,,\frac{۱}{۴}\right)\right\}$. واضح است که $f^{-۱}$ و $\frac{۱}{f}$ با هم مساوی نیستند.

مثال: تابع وارون هر یک از توابع وارون‌پذیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=x^{۳}+۴$

ب) $f(x)=x^{۲}-۴\ ,\ x<۰$

ج) $f(x)=۲x^{۳}+۶x^{۲}+۶x$

د) $f(x)=\log_{۵}^{x}$

هـ) $f(x)=\sqrt{۲-۳x}$

و) $f(x)=x+\frac{۱}{x}\ ,\ x\geq ۱$

ز) $f(x)=\frac{۲x+۱}{۳x-۲}$

حل: با توجه به اینکه روی وارون‌پذیری توابع داده شده تصریح شده است، بررسی وارون‌پذیری لازم نیست.

الف)

$$y=x^{۳}+۴\Rightarrow x^{۳}=y-۴\Rightarrow x=\sqrt[۳]{y-۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x-۴}$$

ب)

$$y=x^{۲}-۴\Rightarrow x^{۲}=y+۴\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+۴}\overset{x<۰}{\Rightarrow}x=-\sqrt{y+۴}\Rightarrow f^{-۱}(x)=-\sqrt{x+۴}$$

ج)

$$y=۲\left(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x\right)\Rightarrow y=۲\left(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱-۱\right)\Rightarrow y=۲(x+۱)^{۳}-۲$$

$$\Rightarrow(x+۱)^{۳}=\frac{y+۲}{۲}\Rightarrow x+۱=\sqrt[۳]{\frac{y+۲}{۲}}\Rightarrow x=-۱+\sqrt[۳]{\frac{y+۲}{۲}}$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{x+۲}{۲}}-۱$$

د)

$$y=\log_{۵}^{x}\Rightarrow x=۵^{y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=۵^{x}$$

هـ)

$$y=\sqrt{۲-۳x}\Rightarrow y^{۲}=۲-۳x\Rightarrow ۳x-۲-y^{۲}\Rightarrow x=\frac{۲-y^{۲}}{۳}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۲-x^{۲}}{۳}$$

و)

$$y=x+\frac{۱}{x}\Rightarrow y=\frac{x^{۲}+۱}{x}\Rightarrow x^{۲}-yx+۱=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{y\pm\sqrt{y^{۲}-۴}}{۲}\overset{(۲,\frac{۵}{۲})\in f}{\Rightarrow}x=\frac{y+\sqrt{y^{۲}-۴}}{۲}\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۴}}{۲}$$

ز)

$$y=\frac{2x+1}{3x-2}\Rightarrow 3xy-2y=2x+1\Rightarrow 3xy-2x=2y+1\Rightarrow x(3y-2)=2y+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+1}{3y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{3x-2}$$

توجه: در بعضی توابع امکان دارد تابع وارون f و تابع f با هم مساوی شوند.

تمرین:

۱- تابع وارون هر یک از توابع زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1-3x}{5}$ ب) $f(x)=\sqrt{3}-2\pi$

ج) $f(x)=2^x+3$ د) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}\ ,\ x<-3$

هـ) $f(x)=x^3+3x^2+3x$ و) $f(x)=x^3-3x$

ز) $f(x)=\log_3(x-2)$ ح) $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

۲- فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد تابع نمایی $y=2^x$ با محور yها و نقطه‌ی برخورد وارون این تابع نمایی با محور xها چقدر است؟

۳- اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$، ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ را به دست آورید.

۴- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(0,3),(4,-1)\}$ و $g=\{(2,3),(-1,4),(4,1),(3,0)\}$
تابع gof^{-1} را به دست آورید.

۵- اگر $f(x)=1+\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2$ و $x>0$ آنگاه ضابطه‌ی تابع $g^{-1}of^{-1}$ را به دست آورید.

۶- با توجه به ماشین $x\rightarrow\boxed{g}\rightarrow\boxed{f}\rightarrow x$، اگر $f(x)=2x-1$، آنگاه $g(0)$ را به دست آورید.

❖ **اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم:**

$$D_g=R_f\quad,\quad R_g=D_f$$

و برای هر $x\in D_f$ داریم:

$$g(f(x))=x$$

و برای هر $x\in D_g$ داریم:

$$f(g(x))=x$$

مثال: نشان دهید توابع $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=\frac{x-۵}{۲}$ وارون یکدیگرند.

حل:

$$\text{دلخواه } x\in D_g : f(g(x))=f\left(\frac{x-۵}{۲}\right)=۲\times\frac{x-۵}{۲}+۵=x$$

$$\text{دلخواه } x\in D_f : g(f(x))=g(۲x+۵)=\frac{۲x+۵-۵}{۲}=x$$

مثال: آیا دو تابع $f(x)=\frac{x+۱}{۲}$ و $g(x)=۲x+۱$ وارون یکدیگر هستند؟

حل:

روش اول:

$$\text{دلخواه } x\in D_g : f(g(x))=f(۲x+۱)=\frac{۲x+۱+۱}{۲}=x+۱\neq x$$

روش دوم:

$(۰,\frac{۱}{۲})\in f$ ولی $(\frac{۱}{۲},۰)\notin g$.

روش سوم:

$$f(x)=\frac{x+۱}{۲}\Rightarrow y=\frac{x+۱}{۲}\Rightarrow ۲y=x+۱\Rightarrow x=۲y-۱\Rightarrow f^{-۱}(x)=۲x-۱\neq g(x)$$

بنابراین f و g وارون یکدیگر نیستند.

مثال: برد تابع وارون تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۴}-۲}$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم $R_{f^{-۱}}=D_f$. پس کافی است دامنه‌ی تعریف تابع f را به دست آوریم.

$$\begin{cases} x+۴\geq ۰ \\ \sqrt{x+۴}-۲\Rightarrow \sqrt{x+۴}\neq ۲\Rightarrow x\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\geq -۴ \\ x\neq ۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f=(-۴,۰)\cup(۰,\infty)\Rightarrow R_{f^{-۱}}=(-۴,۰)\cup(۰,+\infty)$$

مثال: $f(x)=\frac{۱-۳x}{۴}\ ,\ ۲\leq x<۴$ داده شده است. دامنه‌ی تابع $f^{-۱}$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم $R_{f^{-۱}}=R_f$. پس کافی است برد تابع f را به دست آوریم.

$$۲\leq x<۴\Rightarrow -۱۲<-۳x\leq -۶\Rightarrow -۱۱<۱-۳x\leq -۵\Rightarrow \frac{-۱۱}{۴}<\frac{۱-۳x}{۴}\leq -\frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۱}{۴}<y\leq -\frac{۵}{۴}\Rightarrow R_f=(\frac{-۱۱}{۴},\frac{-۵}{۴}]\Rightarrow D_{f^{-۱}}=(\frac{-۱۱}{۴},\frac{-۵}{۴}]$$

تمرین:

۱- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۴x+۲\ ,\ x\geq ۳$ را به دست آورید.

۲- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳\ ,\ x<۰$ را به دست آورید.

۳- دامنه‌ی تابع وارون تابع $f(x)=-x^۲+۴x+۱\ ,\ x>۳$ را به دست آورید.

۴- اگر برد تابع یک به یک f برابر $[-۲\,,۵)$ باشد، دامنه‌ی تابع وارون هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $g(x)=f(x+۲)$ ب) $g(x)=f(x-۳)$

ج) $g(x)=۲f(x)-۳$ د) $g(x)=۱-۳f(x-۲)$

۵- کدام دسته از توابع زیر وارون یکدیگر هستند.

۱) $f(x)=-\sqrt{x-۳}\quad ,\quad g(x)=x^۲+۳$

۲) $f(x)=x\sqrt{x}+۱\quad ,\quad g(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$

۳) $f(x)=۵+\sqrt{۱+x^۳}\quad ,\quad g(x)=\sqrt[۳]{(x-۵)^۲-۱}$

۴) $f(x)=(۲-۳x)^۵\quad ,\quad g(x)=\frac{۱}{۳}\left(۲+\sqrt[۵]{x}\right)$

۵) $f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<۰ \\ x^۲+۱ & x\geq ۰\end{cases}\quad ,\quad g(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۱ \\ \sqrt{x-۱} & x\geq ۱\end{cases}$

۶- دامنه تابع وارون تابع $y=\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$ را به دست آورید.

❖ **برای به دست آوردن تابع وارون یک تابع چند ضابطه‌ای در صورت وجود وارون هر یک از ضابطه‌ها را به دست می‌آوریم. بدیهی است دامنه‌ی هر ضابطه، برد ضابطه‌ی نظیر در تابع اصلی است.**

مثال: تابع وارون تابع وارون‌پذیر $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x<۱ \\ ۲x+۴ & x\geq ۱\end{cases}$ را به دست آورید.

حل: برای ضابطه‌ی اول داریم:

$$x<۱\Rightarrow x-۲<-۱\Rightarrow R_۱=(-\infty\,,-۱)$$

در نتیجه:

$$y=x-۲\Rightarrow x=y+۲\Rightarrow f_۱^{-۱}(x)=x+۲$$

برای ضابطه‌ی دوم داریم:

$$x\geq ۱\Rightarrow ۲x\geq ۲\Rightarrow ۲x+۴\geq ۶\Rightarrow R_۲=[۶\,,+\infty)$$

در نتیجه:

$$y=۲x+۴\Rightarrow ۲x=y-۴\Rightarrow x=\frac{y-۴}{۲}\Rightarrow f_۲^{-۱}(x)=\frac{x-۴}{۲}$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون f به صورت زیر خواهد بود.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x+2 & x<-1 \\ \dfrac{x-4}{2} & x\geq 6 \end{cases}$$

تمرین:

۱- ضابطه‌ی تابع وارون هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ x^2+1 & x\geq 0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases} x & 0\leq x<1 \\ x+1 & 1\leq x<2 \end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases} 2^x & x>1 \\ 3^x & x\leq 1 \end{cases}$

د) $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x>0 \\ x+1 & x\leq 0 \end{cases}$

هـ) $f(x)=\begin{cases} x+1 & x<0 \\ 2x+3 & 0\leq x<2 \\ x+9 & x\geq 2 \end{cases}$

و) $f(x)=\begin{cases} -x^2-1 & x<0 \\ x-1 & 0\leq x<1 \\ \log x & x\geq 1 \end{cases}$

۲- اگر $f(x)=\begin{cases} -4x+1 & x<2 \\ -x^2+4x-11 & x\geq 2 \end{cases}$ ، مقدار $f^{-1}(-11)$ را به دست آورید.

❖ **اگر f تابع صعودی اکید باشد، محل برخورد f و f^{-1} در صورت وجود روی خط $y=x$ قرار دارد.**

مثال: اگر $f(x)=x^3+x-8$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی f و f^{-1} تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

حل:

$$x_1<x_2\Rightarrow\begin{cases} x_1^3<x_2^3 \\ x_1<x_2 \end{cases}\Rightarrow x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\Rightarrow x_1^3+x_1-8<x_2^3+x_2-8$$
$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

در نتیجه تابع f صعودی اکید است.

بنابراین برای محاسبه محل تلاقی f و f^{-1} کافی است محل تلاقی f و خط $y=x$ را در صورت وجود محاسبه کنیم.

$$\begin{cases} y=x^3+x-8 \\ y=x \end{cases}\Rightarrow x^3+x-8=x\Rightarrow x^3=8\Rightarrow x=2\ ,\ y=2$$
$$\Rightarrow d=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

مثال: نقاط برخورد تابع $f(x)=x-\sqrt{x+1}$ را با وارونش، در صورت وجود پیدا کنید.

$x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$, $x_1 < x_2$ دلخواه

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1+1 < x_2+1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1+\sqrt{x_1+1} < x_2+\sqrt{x_2+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f صعودی اکید است.

برای پیدا کردن نقطه‌ی برخورد داریم:

$$\begin{cases} y=x \\ y=x+\sqrt{x+1} \end{cases} \Rightarrow x=x+\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1}=0 \Rightarrow x=-1 \ , \ y=-1$$

تمرین:

۱- نقطه‌ی برخورد تابع $f(x)=x^3+2x$ را با وارونش، در صورت وجود به دست آورید.

۲- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ با وارونش چند نقطه‌ی تلاقی دارند؟ مختصات آن‌ها را به دست آورید.

۳- آیا ممکن است نقطه‌ی تلاقی f و f^{-1} در صورت وجود، روی خطی غیر از خط $y=x$ قرار گیرد؟ ادعای خود را ثابت کنید.

۴- اگر تابع $f(x)=(a+1)x^4+(a+2)x^3+(a+4)x^2+3x$ با دامنه $\Re$ وارون‌پذیر باشد، وارون آن خط $y=x$ را در چند نقطه قطع می‌کند؟

توابع متناوب

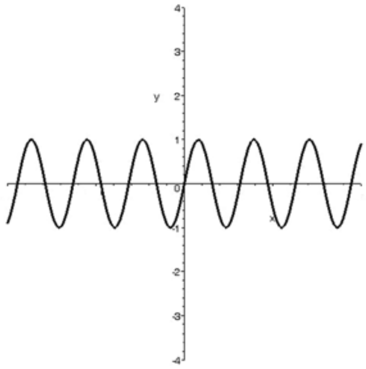
❖ **تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد، که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم:**

$$f(x+T)=f(x) \ \ , \ \ x+T \in D_f$$

❖ **کوچک‌ترین عدد T با خاصیت‌های بالا را دوره تناوب f می‌نامند.**

مثال: با استفاده از رسم نمودار دوره تناوب تابع $y=\sin x$ را تعیین کنید.

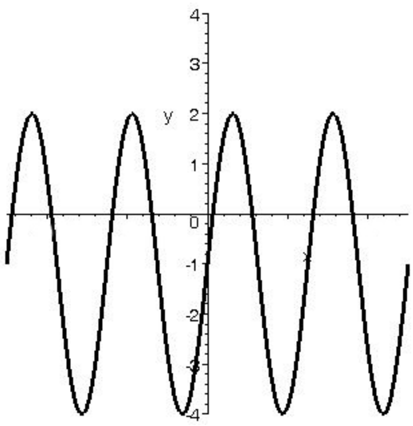
حل:



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود کمترین طولی که نمودار تابع در آن عیناً تکرار می‌شود ۲πاست. پس دوره تناوب تابع $T=۲\pi$ می‌باشد.

مثال: دوره تناوب تابع $y=۳\sin x-۱$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به اینکه برای رسم نموار تابع $y=۳\sin x-۱$ می‌توانیم ابتدا نمودار تابع $y=\sin x$ را رسم و نمودار را با یک انبساط در جهت محور yها و یک انتقال به راست، نمودار تابع را رسم کنیم در واقع دوره تناوب این تابع با تابع $y=\sin x$ یکسان است. این مطلب در شکل زیر به خوبی قابل مشاهده می‌باشد.



توجه: در حالت کلی اگر f تابعی متناوب با دوره تناوب T باشد توابع $y=af(x)+b$ نیز متناوب با همان دوره تناوب T خواهند بود. ولی دوره تناوب تابع $y=f(ax)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است. (به علت انقباض و انبساط در جهت محور x ها).

مثال: آیا تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ متناوب است؟ چرا؟

حل: خیر- زیرا $D_f=[-1,1]$ و شرط $x+T\in D_f$ نمی‌تواند برای تابع برقرار باشد.

مثال: آیا تابع $y=2$ متناوب است؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب آن را تعیین کنید.

حل: دامنه تعریف تابع برابر $\Re$ است. پس T هر عدد حقیقی مثبت که باشد داریم:

$$\begin{cases} x+T\in D_f \\ f(x+T)=f(x) \end{cases}$$

پس تابع متناوب است. اما چون کوچک‌ترین عدد حقیقی مثبت وجود ندارد، پس دوره تناوب ندارد.

تمرین:

دوره تناوب توابع زیر را در صورت وجود، به دست آورید.

الف) $f(x)=\pi$ ب) $f(x)=\cos x$

ج) $f(x)=2\cos x-4$ د) $f(x)=\sin 3x$

هـ) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ و) $f(x)=1-3\cos(2x-\frac{\pi}{4})$

❖ **برای تعیین دوره تناوب می‌توانیم از دستورهای زیر استفاده کنیم:**

1) $y=\sin^{2n-1}(ax)\ ,\ y=\cos^{2n-1}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{2\pi}{|a|}$

2) $y=\sin^{2n-1}(ax)\ ,\ y=\cos^{2n-1}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{2\pi}{|a|}$

3) $y=\sin^{2n}(ax)\ ,\ y=\cos^{2n}(ax)\ ,\ y=\tan^{n}(ax)\ ,\ y=\cot^{n}(ax)\ \overset{n\in N}{\Rightarrow}\ T=\frac{\pi}{|a|}$

4) $y=|\sin(ax)|\ ,\ y=|\cos(ax)|\ ,\ y=|A\sin(ax)+B\cos(ax)|\Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$

مثال: دوره تناوب توابع زیر را تعیین می‌کنیم.

1) $y=\sin^3(2x)\Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

2) $y=\sin^2(2x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$

$$۳)\ y=-۳\sin(۲x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

$$۴)\ y=\sin^۳(۲x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

$$۵)\ y=\frac{\pi}{۴}-۳\sin(۱-۲x)\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|-۲|}=\pi$$

$$۶)\ y=\tan^۲(۳x)\Rightarrow T=\frac{\pi}{۳}$$

$$۷)\ y=۴-۲\cot^۲\left(\frac{\pi}{۴}-۳\pi x\right)\Rightarrow T=\frac{\pi}{|-۳\pi|}=\frac{۱}{۳}$$

مثال: دوره تناوب تابع $y_۱=\sin(\frac{۲}{۳}x+\frac{\pi}{۶})-۱$ چند برابر دوره تناوب تابع $y_۲=\sin^۲(\frac{۳}{۲}x)$ است.

حل:

$$T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۲}{۳}}=۳\pi\ ,\ T_۲=\frac{\pi}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow\frac{T_۱}{T_۲}=\frac{۳\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=\frac{۹}{۲}$$

تمرین:

دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y=۳\cos^۲(۴x)-۱$

ب) $y=-۲\sin^۳(۱-۲x)+۷$

ج) $y=\sin^۳(\frac{۳\pi}{۵}-\frac{۲x}{۳})-۱$

د) $y=\sqrt{\sin ۴x}$

هـ) $y=\sqrt{\cos ۲x+۱}$

و) $y=\begin{cases}۱ & , x\in E\\ ۰ & , x\in O\end{cases}$

ز) $y=\begin{cases}۱ & , x\in Q\\ ۰ & , x\in Q^c\end{cases}$

(Q، Q^c، E و O به ترتیب مجموعه‌های اعداد گویا، گنگ، زوج طبیعی و فرد طبیعی هستند.)

❖ **توابع زیر متناوب نیستند:**

- **توابع مثلثاتی که در آن کمان x زیر رادیکال و یا توانی غیر از یک داشته باشد متناوب نیستند.**
- **هر گاه در تابع، کمان با یکی از چهار عمل اصلی با نسبت مثلثاتی قرار گیرد، تابع متناوب نیست.**

مثال: توابع زیر متناوب نیستند.

الف) $y=\cos\frac{1}{x}$ ب) $y=\sin x^2$

ج) $y=\tan\sqrt[3]{x}$ د) $y=x-\sin x$

هـ) $y=\sin|x|$

تمرین:

از بین توابع زیر توابع متناوب را مشخص کرده، دوره تناوب آن‌ها را تعیین کنید.

الف) $y=\cos|x|$ ب) $y=x\cos x$

ج) $y=\sqrt{x}+\tan x$ د) $y=\cot\frac{1}{x}$

هـ) $y=\sin(1-2\pi x)$ و) $y=x^2+\cos x$

جزء صحیح

❖ **برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ یا $\lfloor x\rfloor$ نمایش می‌دهیم. یعنی برای هر عدد حقیقی x یک عدد صحیح p موجود است به طوری که:**

$$p\le x<p+1\Rightarrow [x]=p$$

مثال:

الف) $\left[-\frac{\pi}{3}\right]=-2$ ب) $\left[\frac{\pi}{3}\right]=1$

ج) $\lfloor-\sqrt{3}\rfloor=-2$ د) $[\log 176]=2$

هـ) $\left[\sin\frac{7\pi}{4}\right]=-1$

مثال: معادلات زیر را حل می‌کنیم.

۱) $[x]=3\Rightarrow 3\le x<4$

۲) $\left[\frac{1-2x}{3}\right]=4\Rightarrow 4\le\frac{1-2x}{3}<5\Rightarrow 12\le 1-2x<15\Rightarrow 11\le -2x<14\Rightarrow -7<x\le-\frac{11}{2}$

۳) $[x]^2-3[x]+2=0\Rightarrow([x]-2)([x]-1)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}[x]-2=0\Rightarrow[x]=2\Rightarrow 2\le x<3\\ [x]-1=0\Rightarrow[x]=1\Rightarrow 1\le x<2\end{cases}\Rightarrow 1\le x<3$$

۴) $[\log x]=4\Rightarrow 4\le\log x<5\Rightarrow 10^4\le x<10^5$

۵) $3[x]=2\Rightarrow[x]=\frac{2}{3}$ جواب ندارد

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]<2$ ب) $[x]\leq 2$

ج) $[x]<-\frac{1}{2}$ د) $[x]\leq -\sqrt{2}$

هـ) $\left[\frac{3x+1}{2}<4\right]$ و) $[x]^2-3[x]+2<0$

ز) $[\log_2^x]<8$

حل:

الف) $[x]<2\Rightarrow [x]\leq 1\Rightarrow \quad x<2$

ب) $[x]\leq 2\Rightarrow \quad x<3$

ج) $[x]<-\frac{1}{2}\Rightarrow [x]<-\frac{1}{2}<0\Rightarrow x<0$

د) $[x]\leq -\sqrt{2}\Rightarrow [x]\leq -\sqrt{2}<-1\Rightarrow x<-1$

هـ) $[\frac{3x+1}{2}]<4\Rightarrow \frac{3x+1}{2}<4\Rightarrow 3x+1<8\Rightarrow x<\frac{7}{3}$

و) $[x]^2-3[x]+2<0 \overset{[x]=t}{\Rightarrow} t^2-3t+2<0 \quad \Rightarrow 1<t<2 \quad \Rightarrow 1<[x]<2$ جواب ندارد

ز) $|\log_2^x|<9\Rightarrow \log_2^x<9\Rightarrow x<2^9$

تمرین:

نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[1-x]\leq 3$ ب) $-1\leq [\frac{x+2}{3}]\leq 4$

ج) $\frac{1}{[x]}\leq 2$ د) $-2<[\frac{1-3x}{5}]\leq 3$

هـ) $-[x]^2+[x]+6<0$ و) $[x]^3\leq [x]+12$

❖ **دستورهای زیر برای جزء صحیح همواره برقرار است.**

$$[x\pm k]\overset{k\in z}{\Rightarrow}[x]\pm k$$

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

$$0\leq x-[x]<1$$

$$x-1<[x]\leq x$$

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\ldots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx]$$

$$x>0\Rightarrow [x]\geq 0$$

$$x<0\Rightarrow [x]<0$$

مثال: معادله‌ی $[x]+[x+3]-[x+2]=5$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+[x]+3-[x]-2=5\Rightarrow[x]=4\Rightarrow 4\le x<5$$

مثال: معادله‌ی $4[x^2]+x=5$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases}4[x^2]\in z\\ 4[x^2]+x=5\end{cases}\Rightarrow x\in z\Rightarrow x^2\in z\Rightarrow 4x^2+x-5=0\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-\frac{5}{4} & \text{غیر قابل قبول}\end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $[x]+[-x]=\frac{1}{x-[x]}$ را حل کنید.

حل: می‌دانیم

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in z\\ -1 & x\notin z\end{cases}$$

با توجه به اینکه صورت کسر طرف دوم عدد یک است پس طرف اول صفر نمی‌تواند باشد، بنابراین $x\notin z$ و برابر -1 است و داریم:

$$-1=\frac{1}{x-[x]}\Rightarrow x-[x]=-1\overset{0<x-[x]<1}{\Rightarrow}\text{جواب ندارد}$$

مثال: معادله $[2[x]+x]=-9$ را حل کنید.

حل:

$$2[x]+[x]=-9\Rightarrow 3[x]=-9\Rightarrow[x]=-3\Rightarrow -3\le x<-2$$

مثال: معادله $\frac{x^2-[x]}{[-x]}=1$ را حل کنید.

حل:

$$x^2-[x]=[-x]\Rightarrow x^2=[x]+[-x]$$

حالت اول: اگر $x\in Z$ داریم $x^2=0$ و از آنجا $x=0$.

حالت دوم: اگر $x\notin Z$ داریم $x^2=-1$ که دارای جواب نیست.

تمرین:

۱- هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x+3]+[x]=2+[4-x]$

ب) $[\frac{2x-1}{x}]=-1$

ج) $[\frac{x-1}{x-2}]=4$

د) $\frac{1}{[x]}+[x]=-2$

هـ) $[x]+[x+\frac{1}{2}]=5$

۲- هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x]+[x-۲]+[x+۱]\le ۲[x-۳]$

ب) $[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+\left[x+\frac{۲}{۳}\right]>-۱$

ج) $x>[x]+۲$

د) $[x]<۳+x$

هـ) $[x]+[-x]+۱>x$

❖ **تابعی که به هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x)=[x]$ نمایش داده می‌شود.**

مثال: دامنه و برد تابع $f(x)=۲[x]-\frac{۳}{۲}$ را تعیین کنید.

حل :

$$D_f=\Re,$$
$$x\in\Re\Rightarrow[x]=k\in Z\Rightarrow ۲[x]=۲k\Rightarrow ۲[x]-\frac{۳}{۲}=۲k-\frac{۳}{۲},\ k\in Z$$
$$\Rightarrow R_f=\left\{۲k-\frac{۳}{۲}\mid k\in Z\right\}$$

مثال: دامنه و برد تابع $y=\sqrt{[x]+[-x]}$ را تعیین کنید.

حل: می‌دانیم

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$D_f=Z,$$
$$x\in z\Rightarrow[x]+[-x]=۰\Rightarrow y=۰\Rightarrow R_f=\{۰\}$$

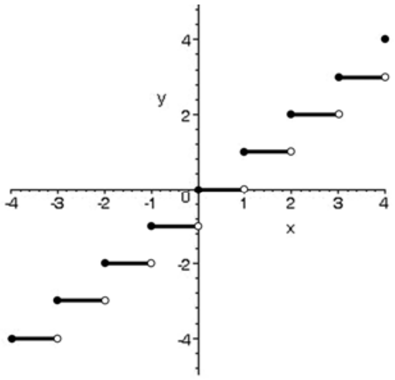
مثال: دامنه و برد تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x-[x]}}$ را تعیین کنید.

حل: لازم است $x-[x]>۰$ باشد،

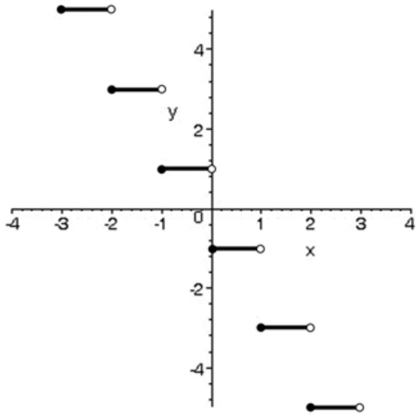
$$۰\le x-[x]<۱\overset{x-[x]>۰}{\Rightarrow} x-[x]\ne۰\Rightarrow x\ne[x]\Rightarrow x\notin Z\Rightarrow D_f=\Re-Z,$$
$$x\in\Re-Z\Rightarrow ۰<x-[x]<۱\Rightarrow ۰<\sqrt{x-[x]}<۱\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{x-[x]}}>۱\Rightarrow R_f=(۱,+\infty)$$

مثال: نمودار تابع $y=-۲[x]-۱$ را رسم کنید.

حل: می‌دانیم نمودار تابع $y=[x]$ به صورت مقابل است.



پس لازم است ابتدا yهای نقاط این نمودار در ۲- ضرب شود، سپس تمام نقاط آن یک واحد به سمت پایین انتقال یابد. بنابراین نمودار به صورت زیر در می‌آید.

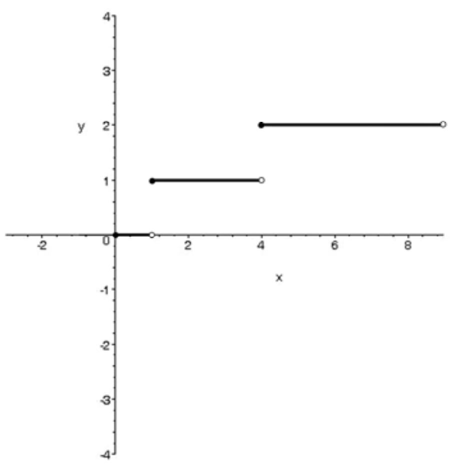


مثال: نمودار تابع $y=[\sqrt{x}]$ را در فاصله‌ی $[۰ , ۹)$ رسم کنید.

حل: داریم

$$۰\le x<۹ \Rightarrow ۰\le \sqrt{x}<۳ \Rightarrow [\sqrt{x}]=۰\,,۱\,,۲$$
$$[\sqrt{x}]=۰ \Rightarrow ۰\le \sqrt{x}<۱ \Rightarrow ۰\le x<۱\,,\ y=۰$$
$$[\sqrt{x}]=۱ \Rightarrow ۱\le \sqrt{x}<۲ \Rightarrow ۱\le x<۴\,,\ y=۱$$
$$[\sqrt{x}]=۲ \Rightarrow ۲\le \sqrt{x}<۳ \Rightarrow ۴\le x<۹\,,\ y=۲$$

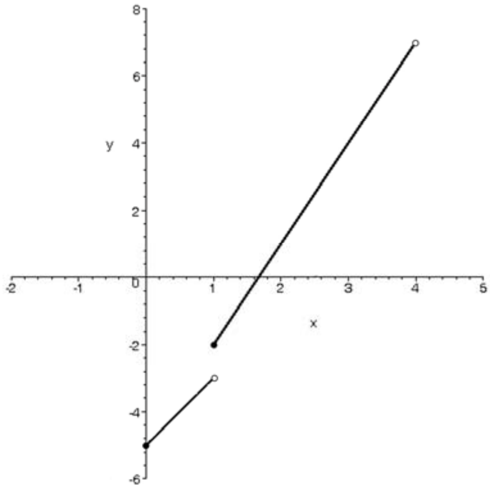
و نمودار به صورت زیر در می‌آید.



مثال: نمودار تابع $y=x[\sqrt{x}]+۲x-۵$ را در فاصله‌ی $[۰\,,۴)$ رسم کنید.

حل:

$$۰\le x<۴\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow\left[\sqrt{x}\right]=۰\,,۱\Rightarrow\begin{cases}\left[\sqrt{x}\right]=۰\Rightarrow ۰\le\sqrt{x}<۱\Rightarrow\begin{cases}۰\le x<۱\\ y=۲x-۵\end{cases}\\ \left[\sqrt{x}\right]=۱\Rightarrow ۱\le\sqrt{x}<۲\Rightarrow\begin{cases}۱\le x<۴\\ y=۳x-۵\end{cases}\end{cases}$$



تمرین:

۱- نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $[-۲\,,۲]$, $y=x-[x]$ ب) $[-۳\,,۳]$, $y=[x]+[-x]$

ج) $(-۱\,,۳)$, $y=[۲x]-۱$ د) $(۰\,,۱]$, $y=۳\left[\frac{x}{۴}\right]-۱$

هـ) $(-۳\,,۱)$, $y=[x]-x+۱$ و) $(-۲\,,۱]$, $y=[-۲x]$

۲- دامنه و برد هر یک از توابع زیر را تعیین کنید.

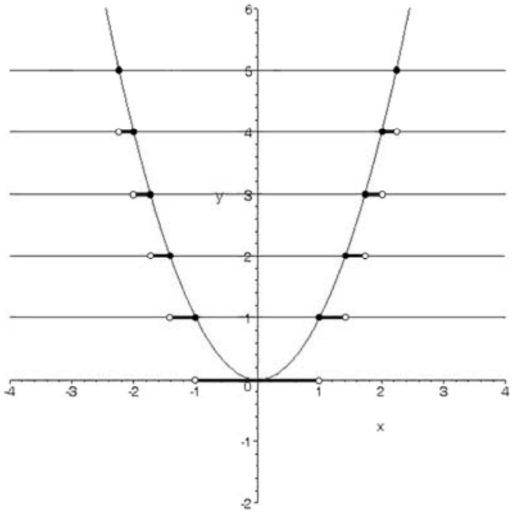
الف) $y=\frac{۱}{[x]}$ ب) $y=[x]-۳$

ج) $y=\frac{\sqrt{[x]}}{۳}$

❖ **برای رسم نمودار تابع $f(x)=[g(x)]$ ، می‌توانیم ابتدا نمودار تابع $y=g(x)$ را رسم کنیم. سپس خطوط $y=k\ ,\ k\in z$ را رسم نموده و در انتها هر قسمت از نمودار را که بین دو خط افقی متوالی قرار گرفت را روی خط پایینی تصویر کنیم. محل تلاقی خطوط افقی با نمودار نقطه‌ای توپر می‌باشد.**

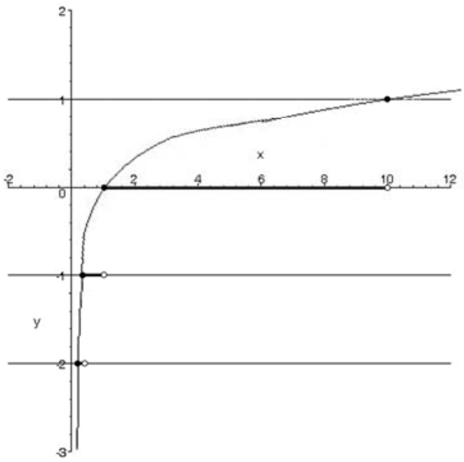
مثال: نمودار تابع $y=[x^{2}]$ را رسم کنید.

حل:



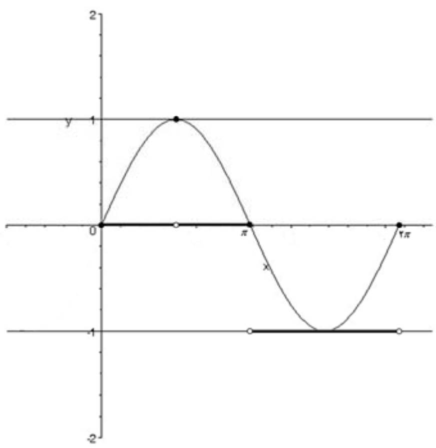
مثال: نمودار تابع $y=[\log x]$ را رسم کنید.

حل:



مثال: نمودار تابع $y=[\sin x]$ را در فاصله‌ی $[0\,,\,2\pi]$ رسم کنید.

حل:



تمرین:

نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=[\cos x] \quad , \quad [۰\,,\,۲\pi]$ 　 ب) $y=\left[۲x+\frac{۱}{۲}\right]$

ج) $y=[x^۲-۲x]$ 　 د) $y=[\sin x]-۱ \quad , \quad [-۲\pi\,,\,۰]$

هـ) $y=[۱-\cos x] \quad , \quad [۰\,,\,۲\pi]$ 　 و) $y=[۳^x]$

تمرین‌های تکمیلی:

۱- آیا توابع $f(x)=\dfrac{۲x-۱-x^۲}{\sqrt{x^۲-۲x\ +۱}}$ و $g(x)=\begin{cases}-x+۱ & x>۱\\ x-۱ & x<۱\end{cases}$ مساویند؟

۲- آیا توابع:

$$f(x)=\begin{cases}[\frac{۱}{x-۱}]-[\frac{۱}{x+۱}]+۲ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=\begin{cases}[\frac{x}{x-۱}]-[\frac{-x}{x+۱}] & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

مساویند؟

۳- اگر $f=\{(۱\,,\,۳),(۲\,,\,-۱),(۳\,,\,۲),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱\,,\,۳),(۳\,,\,۰),(-۱\,,۵),(۰,۱)\}$ مطلوب است تعیین توابع:

الف) gof 　 ب) $\left(\frac{۱}{f}og\right)^{-۱}$

ج) $f^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)$ 　 د) $f^{-۱}(۲x)$

هـ) $\dfrac{f}{g-۱}+۲g$ 　 و) $۳\,fo(g+۱)^{-۱}$

ز) $۲f\times(fog)^{-۱}$ 　 ح) $\dfrac{۲-g^{-۱}}{۳f}$

۴- اگر $f=\{(۲\,,\,۳),(۱\,,\,۴),(۰\,,\,۵),(-۲,۰)\}$ و $g(x)=-۴x$ مطلوب است تعیین توابع:

الف) $g^{-۱}of^{-۱}$ 　 ب) $(fog)^{-۱}$

ج) $\dfrac{۲-f^{-۱}}{۳g}$ 　 د) $f^{-۱}o\,g^{-۱}-(g-۱)^{-۱}$

هـ) $\dfrac{f^{-۱}(۲x)}{g^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)}$ 　 و) $\left(\frac{۱}{g}\right)^{-۱}of$

۵- اگر $f=\{(۱\,,\,۲)\,,\,(۲\,,\,۵)\,,\,(۵\,,\,a)\}$ و توابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ مساوی باشند a را بیابید.

۶- اگر $f(۲)+f(x-۱)=x^۲+۵x$ ضابطه تابع f را بیابید.

۷- اگر $f(-۱)+f(۳x+۴)=۲x^۲+۱$ ضابطه تابع f را بیابید.

۸- اگر $f(۲)$ $۲f(x+۵)-۳f(۱)=x+$، مقدار $f(۰)$ را بیابید.

۹- اگر دامنه تابع f بازه $(-\infty,۳)$ و برد آن بازه $(-۱,+\infty)$ باشد. دامنه تابع $y=f^{-۱}(\frac{x}{۲})$ را بیابید.

۱۰- اگر دامنه و برد تابع f به ترتیب بازه‌های $[-۲,۳],[-۱,+\infty]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f^{-۱}(-۳x+۱)-۲$ را بیابید.

۱۱- اگر $f=\left\{(۴,\frac{۱}{۲}),(۵,\frac{۳}{۲}),(۳,\frac{۱}{۴}),(۰,۲)\right\}$ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{f}(\frac{x}{۲}-۱)=۲$ 　　 ب) $f^{-۱}(۲x+۱)=۳$

۱۲- اگر $g(x)=f(۳x-۴)$ و $f^{-۱}(x)=x+\sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-۱}(۱۶)$ را بیابید.

۱۳- اگر $D(x)$ تابع دیریکله و تابع $u_c(t)$ تابع پله‌ای واحد باشند مطلوب است تعیین توابع زیر:

الف) $Dou_۵(t)$ 　　 ب) $u_۵oD(t)$

ج) $DoD(t)$ 　　 د) $u_۵ou_۵(t)$

۱۴- ضابطه‌های توابع چند رابطه‌ای زیر را مشخص کنید.

الف) $u_\pi(t)-u_{۲\pi}(t)$ 　　 ب) $t^۳(u_۰(t)-u_۱(t))$

۱۵- توابع زیر را بر حسب $u_c(t)$ بنویسید.

الف) $f(x)=۱ \quad ۲\le x<۸$ 　　 ب) $g(x)=۳ \quad ۵\le x<۸$

ج) $h(x)=x^۲ \quad ۵\le x<۱۰$ 　　 د) $k(x)=\sin x \quad ۰\le x<۲\pi$

۱۶- اگر $f(x)=\begin{cases}x+۱ & x>۰\\ ۲x & x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x^۲ & x>-۱\\ \frac{x}{۲} & x\le -۱\end{cases}$ ضابطه‌های توابع fog و gof را مشخص کنید.

۱۷- اگر $f(x)=\begin{cases}۵x+۱ & x<۲\\ ۴-x^۲ & x\ge ۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۴-۵x & x<۱\\ ۲x+۳ & x\ge ۱\end{cases}$ ضابطه‌های توابع fog و gof را بیابید.

۱۸- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{-۱}{x} & x>۰\\ -x & x<۰\end{cases}$ ضابطه تابع fof را بیابید.

۱۹- اگر تابع f با دامنه $[-۱,۲]$ صعودی (اکید) و $f(۱)=۰$ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $g(x)=\sqrt{(۱-x)\,f(x)}$ 　　 ب) $h(x)=\sqrt{x\,f(۳-x)}$

ج) $k(x)=\sqrt{(۲+x)\,f(\frac{x}{۲})}$ 　　 د) $m(x)=\sqrt{(۴x^۲-x^۳)\,f\left(\frac{x}{۳}+۱\right)}$

حسابان

فصل ۳

❖ توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ از ساده‌ترین توابع مثلثاتی هستند که به ازای هر مقدار x تعریف شده‌اند به عبارتی دامنه این توابع، مجموعه اعداد حقیقی $\Re$ است و با تغییر x مقادیری که برای $\sin x$ و $\cos x$ به دست می‌آید اعدادی بین ۱ و ۱- می‌باشند که در حقیقت برد این توابع $[-۱,۱]$ می‌شود.

❖ در حالت کلی‌تر، بیش‌ترین مقدار توابع $y=a\sin bx$ و $y=a\cos bx$، $|a|$ و کم‌ترین مقدار $-|a|$ و دوره تناوب آن‌ها $\frac{۲\pi}{b}$ می‌باشند.

❖ همچنین بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ عبارتست از:

$\max=|a|+c$ و $\min=-|a|+c$

مثال: در تابع $f(x)=-۲\sin ۳x$ مقادیر حداقل و حداکثر و T، دوره تناوب تابع را مشخص کرده، نمودار آن را در بازه‌ی $[۰,T]$ رسم کنید.

حل:

$$\min f=-|-۲|=-۲\ ,\quad \max f=|-۲|=۲\ ,\quad T=\frac{۲\pi}{۳}$$

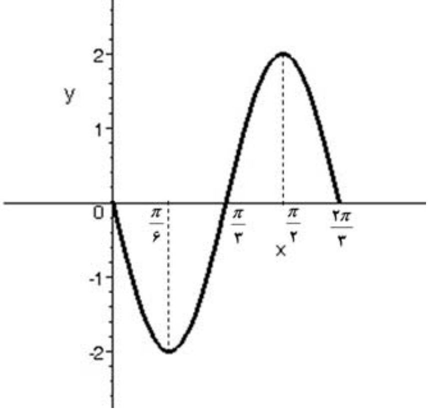
برای رسم، نقاطی که تابع مقادیر حداکثر و حداقل دارد را به دست آورده، همچنین نقاطی که تابع صفر می‌شود را نیز مشخص می‌کنیم. سپس با توجه به نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ شکل را کامل می‌کنیم.

$$۲=-۲\sin ۳x \Rightarrow \sin ۳x=-۱ \Rightarrow ۳x=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}$$

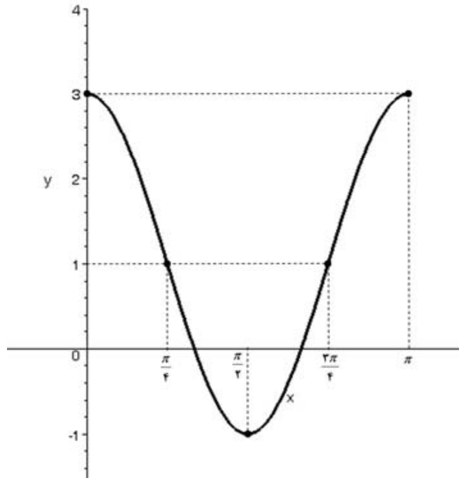
$$-۲=-۲\sin ۳x \Rightarrow \sin ۳x=۱ \Rightarrow ۳x=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶}$$

$$۰=-۲\sin ۳x \Rightarrow \sin ۳x=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳x=۰ \Rightarrow x=۰ \\ ۳x=\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳} \\ ۳x=۲\pi \Rightarrow x=\frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

نمودار تابع به صورت زیر است:



مثال: تابع مثلاتی مربوط به نمودار رسم شده را بنویسید (موج کسینوسی)



حل:

$$\left.\begin{array}{l}\min y=-۱=-|a|+c\\ \max y=۳=|a|+c\end{array}\right\}\Rightarrow c=۱,\ \ |a|=۲$$

با توجه به شکل $a=۲$ می‌باشد چون موج کسینوسی از بالا شروع شده است. هم‌چنین:

$$T=\pi\Rightarrow\pi=\frac{۲\pi}{b}\Rightarrow b=۲\Rightarrow y=۲\cos(۲x)+۱$$

مثال: اگر آونگ یک ساعت بزرگ، نوسانات عمودی داشته باشد و ضابطه این نوسانات $d(t)=۲\cos\frac{\pi t}{۱۰}+۶$ باشد (t بر حسب ثانیه و d برحسب متر)،

الف) آونگ از حالت تعادل حداکثر چند متر بالا می‌رود.

ب) چه مدت طول می‌کشد تا یک نوسان کامل انجام گیرد.

ج) پاندول چند نوسان کامل در مدت ۲ دقیقه انجام می‌دهد

د) نمودار تابع را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حل: الف)

در واقع باید بیشترین مقدار تابع را محاسبه نمود، بنابراین کافیست به جای $\cos\frac{\pi t}{۱۰}$ عدد یک قرار داده یعنی $\max d=|a|+c$ بنابراین $\max d=۲+۶=۸$.

ب)

$$b=\frac{\pi}{۱۰}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۱۰}}=۲۰$$ در ۲۰ ثانیه یک نوسان کامل انجام می‌گیرد

ج)

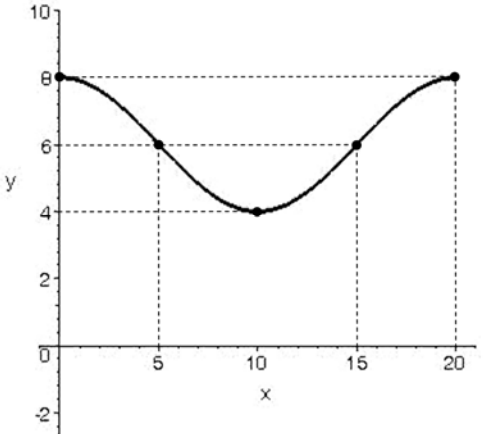
$۲\times۶۰=۱۲۰$ ثانیه $\Rightarrow ۱۲۰\div۲۰=۶$ نوسان کامل

د)

$$\max d=۸\Rightarrow ۸=۲\cos\frac{\pi}{۱۰}t+۶\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۰}t=۱\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=۰\ ,\ \frac{\pi}{۱۰}t=۲\pi\Rightarrow t=۰\ ,\ t=۲۰$$

$$\min d=۴\Rightarrow ۴=۲\cos\frac{\pi}{۱۰}t+۶\Rightarrow \cos\frac{\pi}{۱۰}t=-۱\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=\pi\Rightarrow t=۱۰$$

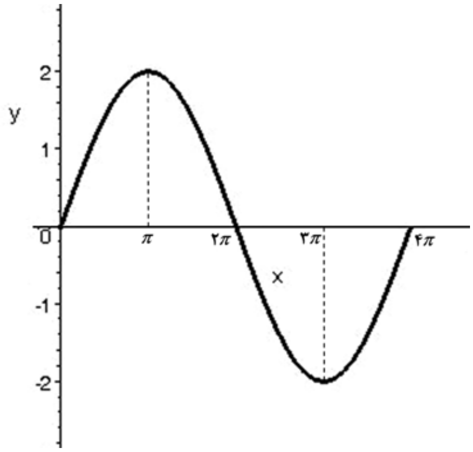
$$d=۰\Rightarrow \cos(\frac{\pi t}{۱۰})=۰\Rightarrow \frac{\pi}{۱۰}t=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{\pi}{۱۰}t=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow t=۵\ ,\ t=۱۵$$



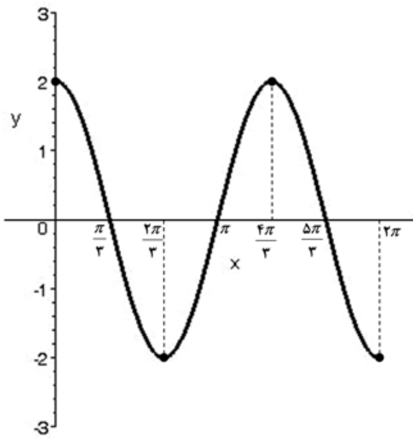
تمرین:

۱- معادله توابعی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید.

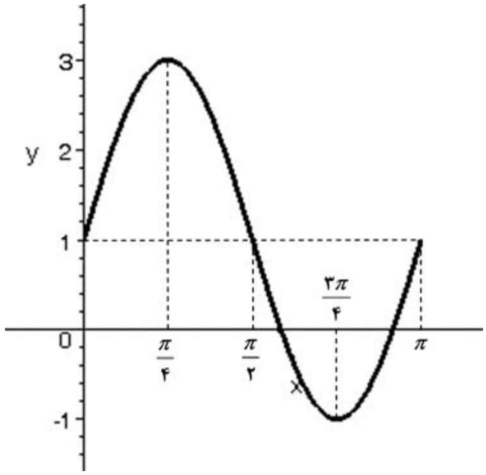
الف)



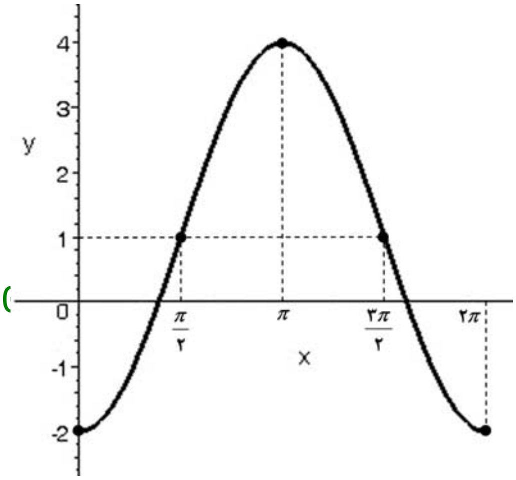
ب)



ج)



د)

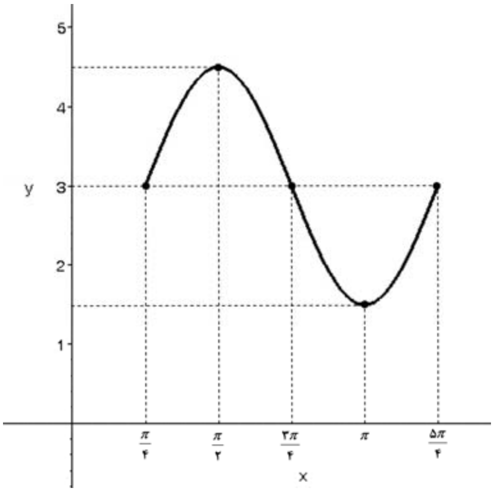


۲- در یک نمایشگاه چرخ و فلکی قرار دارد که در هر کابین آن دو نفر می‌توانند سوار شوند. مریم و زهرا تصمیم گرفتند سوار یکی از کابینهای چرخ و فلک شوند که محل استقرار آنها ۴ متر با زمین فاصله دارد حرکت این چرخ و فلک بدین گونه است که در بدو حرکت به طرف پایین‌ترین نقطه که یک متر با زمین فاصله دارد، آمده و سپس به بالاترین نقطه که ۷ متر با زمین فاصله دارد حرکت می‌کند و مدت زمان یک دوران کامل ۱۲ ثانیه طول می‌کشد تابع مربوط به ارتفاع کابین مریم و زهرا نسبت به زمین را به صورت یک تابع سینوسی بنویسید؟ آیا می‌توان این تابع را به صورت تابع کسینوسی نیز نوشت؟

۳- اگر حداقل و حداکثر تابع کسینوسی $y = a\cos bx + c$ به ترتیب ۵ و ۹ و دوره تناوب آن ۱۲ باشد (با شرط $a < ۰$, $b < ۰$) معادله این تابع را بنویسید. آیا موج کسینوسی این تابع حتماً باید از $x = ۰$ آغاز شود.

❖ **معادله‌ی توابع سینوسی و کسینوسی در حالت کلی به صورت $y=a\sin[b(t-c)]+d$ و $y=a\cos[b(t-c)]+d$ می‌باشد که مقدار c نمایشگر تعداد واحدی است که $y=a\sin(bt)$ و $y=a\cos(bt)$ در راستای محور طول‌ها انتقال می‌یابند. هرگاه $c>0$ انتقال به طرف راست محور طول‌ها و هرگاه $c<0$ انتقال در جهت چپ محور طول‌ها صورت می‌گیرد. d تعداد واحدی است که توابع $y=a\sin[b(t-c)]$ و $y=a\cos[b(t-c)]$ در راستای محور عرض‌ها منتقل می‌شود. اگر $b>0$ انتقال به طرف بالا و اگر $b<0$ انتقال در جهت پایین صورت می‌گیرد.**

مثال: معادله تابع مربوط به نمودار مثلاتی زیر که در یک دوره‌ی تناوب رسم شده است را بنویسید (با شرط $a>0$).



حل:

$$a=\frac{۴/۵-۱/۵}{۲}=۱/۵$$

$$T=\frac{۵\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{b}=\pi \Rightarrow b=۲$$

هم‌چنین با توجه به شکل، نمودار شبیه نمودار سینوسی است که از $x=\frac{\pi}{۴}$ شروع شده است. یعنی موج سینوسی به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ به طرف راست منتقل شده است. پس $c=\frac{\pi}{۴}$ و مقدار d نیز برابر است با:

$$d=\frac{\max y+\min y}{۲}=\frac{۴/۵+۱/۵}{۲}=۳$$

در نتیجه معادله‌ی تابع به صورت زیر است:

$$y=۱/۵\sin[۲(t-\frac{\pi}{۴})]+۳$$

تحقیق کنید آیا معادله‌ی فوق را می‌توان به صورت $y=-۱/۵\cos ۲t+۳$ نیز نوشت؟

مثال: ارتفاع یک موج سوار نسبت به سطح زمین در حرکت بر روی آب از رابطه‌ی

$$h(t)=۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲$$

بدست می‌آید. (h برحسب متر و t برحسب ثانیه)

الف) بیش‌ترین و کم‌ترین ارتفاع موج سوار چقدر است؟

ب) چه مدت طول می‌کشد تا موج سوار از نقطه با کم‌ترین ارتفاع به نقطه با بیش‌ترین ارتفاع برسد؟

ج) چه مدت طول می‌کشد تا یک حرکت نوسانی کامل انجام گیرد؟

د) در طول یک دقیقه در چه زمان‌هایی ارتفاع موج سوار نسبت به سطح زمین ۱۷ متر خواهد بود؟

حل: الف:

$$\max h=۱۰+۱۲=۲۲$$
$$\min h=۱۲-۱۰=۲$$

ب:

$$\left.\begin{array}{l} ۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲=۲۲\Rightarrow \sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]=۱ \\ \qquad \Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t-۱۵=۱۵\Rightarrow t=۳۰ \\ ۱۰\sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]+۱۲=۲ \Rightarrow \sin[\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)]=-۱ \\ \qquad \Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow t-۱۵=-۱۵\Rightarrow t=۰ \end{array}\right\}\Rightarrow ۳۰-۰=۳۰s$$

ج:

$$T=\frac{۲\pi}{b}=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۳۰}}=۶۰s$$

با استفاده از قسمت ب نیز می‌توان تشخیص داد که دوره تناوب $۶۰=۳۰\times۲$ ثانیه می‌شود.

د)

$$h(t)=۱۷\Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵))=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{\pi}{۶}\ ,\ \frac{\pi}{۳۰}(t-۱۵)=\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow t=۲۰\ ,\ t=۴۰$$

تمرین:

۱- ارتفاع آب در یکی از ورودی‌های جزیره‌ی ونکوور در کانادا در هر ساعت از شبانه‌روز از تابع

$$h(t)=۵\sin(\frac{\pi}{۶}t-\frac{۲\pi}{۳})+۱۳$$

به دست می‌آید.

الف) در هر روز چند بار عمق آب ماکسیمم می‌گردد؟

ب) در چه ساعاتی از روز عمق آب ماکسیمم می‌شود؟

ج) ارتفاع بیش‌ترین عمق آب چقدر است؟

۲- در نزدیکی یک لنگرگاه بیشترین مقدار عمق آب $۱/۸m$ در ساعت ۹ صبح و کمترین عمق آب $۰/۱m$، ۶ ساعت بعد اتفاق می‌افتد.

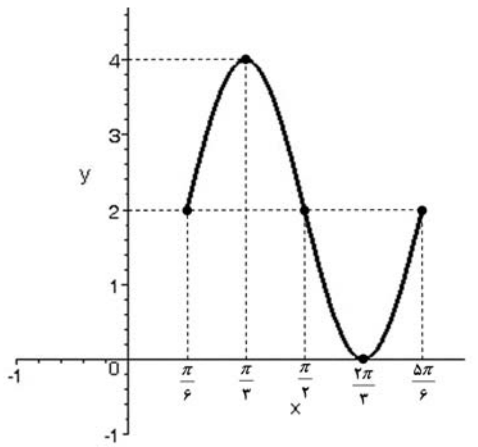
الف) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع کسینوسی بنویسید.

ب) ارتباط بین عمق آب و زمان را به صورت یک تابع سینوسی بنویسید.

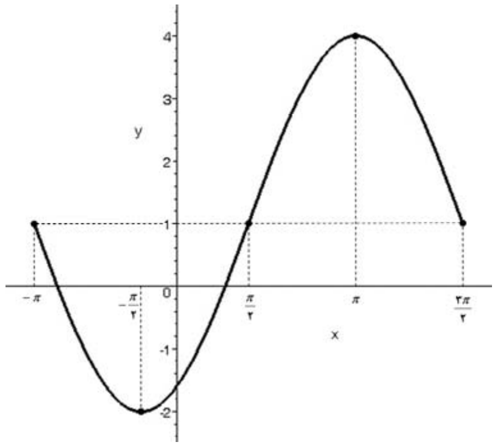
ج) در ساعت ۵ بعد از ظهر عمق آب چقدر است؟

۳- معادله توابع مثلثاتی که شکل آن‌ها رسم شده‌اند را بنویسید. برای هر شکل یک معادله سینوسی و یک معادله کسینوسی بنویسید.

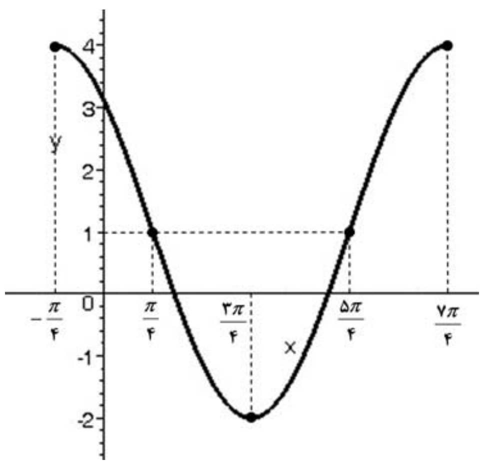
الف)



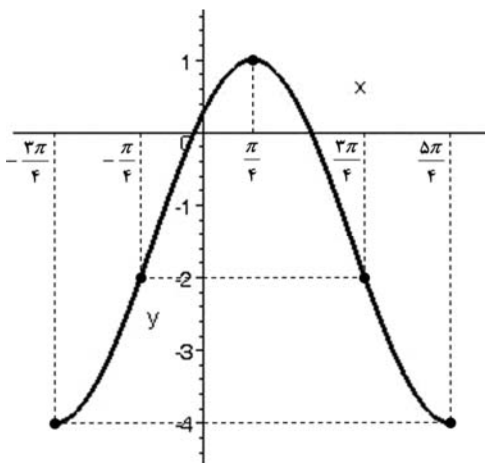
ب)



ج)



د)



۴- اگر $\frac{-\pi}{۳} < \alpha < \frac{\pi}{۳}$ و $۲\cos\alpha - ۱ = m^۲ - ۳$، حدود m را بیابید.

۵- برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y = ۳\sin^۲ x + ۱$

ب) $y = \sin(x + \frac{\pi}{۴}) - ۱$

ج) $y = \sin^۲ x + \sin x - ۱$

د) $y = \sin^۲ x + ۳\sin x + ۱$

۶- یک تابع سینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع زوج درآورد؟

۷- یک تابع کسینوسی را چگونه می توان به صورت یک تابع فرد درآورد؟

۸- اگر $x \in (\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶})$ و $\sin x = \frac{۲ - m^۲}{۴ + m^۲}$ مقدار m در چه فاصله ای قرار می گیرد؟

۹- صعودی یا نزولی بودن توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در چهار ناحیه دستگاه مختصات بررسی کنید.

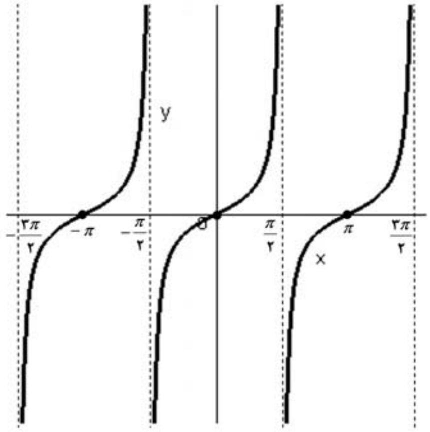
۱۰- اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۴}$ باشد، چه رابطه ای بین $\sin x$ و $\cos x$ وجود دارد؟ و اگر $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲}$ باشد، این رابطه چگونه خواهد بود؟

۱۱- یک به یک بودن توابع سینوس و کسینوس را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید و سپس دامنه را به گونه‌ای تحدید کنید تا تابع یک به یک شود.

❖ یکی دیگر از توابع مثلثاتی $y=\tan x$ است که از رابطه $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ به دست می آید. بنابراین $\tan x$ به ازای x هایی که $\cos x=0$ تعریف نمی شود. یعنی تانژانت زوایایی که کمان آن ها بر حسب رادیان به صورت $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ تعریف نمی شوند. بنابراین دامنه تابع تانژانت برابر است با $\Re-\left\{x\,|\,x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\},\ k\in Z$ و با توجه به این که $\tan(x+\pi)=\tan x$، دوره تناوب تابع تانژانت $T=\pi$ می باشد.

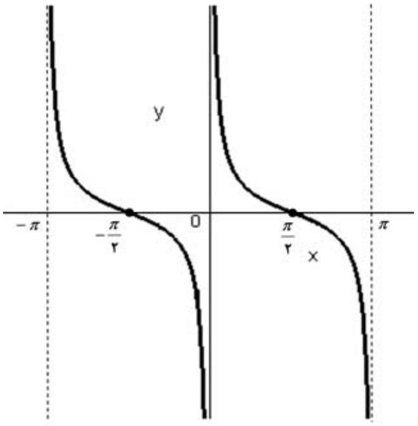
❖ یکی دیگر از توابع مثلثاتی $y=\cot x$ است که برابر است با $y=\frac{1}{\tan x}$ و چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ بنابراین تابع $y=\cot x$ به ازای هر x که $\sin x=0$ تعریف نمی شود. یعنی دامنه‌ی تابع کتانژانت برابر است با $D=\Re-\{x|\ x=k\pi\},k\in Z$.

نمودار تابع $y=\tan x$ در فاصله‌ی $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ به صورت زیر می‌باشد:



دیده می‌شود که هر شاخه در فاصله‌های به طول π تکرار می‌گردد. واضح است که هر شاخه از منحنی صعودی است. اما تابع در دامنه‌اش نه صعودی و نه نزولی است.

هم‌چنین نمودار تابع $y=\cot x$ در فاصله‌ی $-\pi<x<\pi$ به صورت زیر می‌باشد:



واضح است که هر شاخه از منحنی نزولی است.

مثال: اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه مقادیر تابع $y = \tan x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار دارند.

مثال: اگر $-\pi < x < \frac{-\pi}{2}$ آن‌گاه مقادیر تابع $y = \cot x$ در بازه‌ی $(0, +\infty)$ قرار می‌گیرند.

تمرین:

۱- دامنه تابع $y = \tan(x + \frac{\pi}{4}) + 1$ را به دست آورید.

۲- اگر $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ و $\tan\alpha = \frac{2}{m-1}$ حدود m را به دست آورید.

۳- اگر $0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ و $\tan\alpha = m - 1$، حدود m را بیابید.

۴- دامنه تابع $y = -2\cot(x + \frac{2\pi}{5}) - 2$ را بیابید.

۵- آیا تابع تانژانت را می توان به یک تابع کتانژانت تبدیل کرد؟ چگونه؟

۶- یک به یک بودن تابع تانژانت و کتانژانت را در یک دوره تناوب آن بررسی کنید.

❖ روابط زیر بین توابع مثلثاتی برقرار است (اتحادهای مثلثاتی):

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

۳) $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

۴) $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

۵) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

۶) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

۷) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

۸) $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

مثال: درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$

ب) $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

ج) $\frac{2\sin 2x}{2\cos 2x + 1} = \frac{\sin x}{2\cos x - 1} + \frac{\sin x}{2\cos x + 1}$

حل: الف)

$$\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}=\frac{\frac{۲\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{\cos^{۲} x}}$$
$$=۲\sin x\cos x$$
$$=\sin ۲x$$

ب)

$$\frac{۱-\tan^{۲} x}{۱+\tan^{۲} x}=\frac{۱-\frac{\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}}{\frac{۱}{\cos^{۲} x}}$$
$$=\frac{\cos^{۲} x-\sin^{۲} x}{\cos^{۲} x}$$
$$=\cos^{۲} x-\sin^{۲} x$$
$$=\cos ۲x$$

ج)

$$\frac{\sin x}{۲\cos x-۱}+\frac{\sin x}{۲\cos x+۱}=\frac{۲\sin x\cos x+\sin x+۲\sin x\cos x-\sin x}{۴\cos^{۲} x-۱}$$
$$=\frac{۴\sin x\cos x}{۴\cos^{۲} x-۱}$$

$$=\frac{۲\sin ۲x}{۲\left(۲\cos^{۲} x-۱\right)+۱}$$
$$=\frac{۲\sin ۲x}{۲\cos ۲x+۱}$$

مثال: مقدار نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۵ درجه را بیابید.

حل:

$$\sin ۷۵=\sin(۴۵+۳۰)=\sin ۴۵\cos ۳۰+\cos ۴۵\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos ۷۵=\cos(۴۵+۳۰)=\cos ۴۵\cos ۳۰-\sin ۴۵\sin ۳۰=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲})=\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۷۵=\tan(۴۵+۳۰)=\frac{\tan ۴۵+\tan ۳۰}{۱-\tan ۴۵\tan ۳۰}=\frac{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}=\frac{۳+\sqrt{۳}}{۳-\sqrt{۳}}$$

$$\cot ۷۵=\frac{۱}{\tan ۷۵}=\frac{۳-\sqrt{۳}}{۳+\sqrt{۳}}$$

به عنوان تمرین با قرار دادن ۳۰ - ۴۵ در مثال بالا نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۱۵ درجه را بیابید.

تمرین:

۱- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\dfrac{\sin^{۳} x+\cos^{۳} x}{\sin x+\cos x}=۱-\dfrac{۱}{۲}\sin ۲x$ ب) $\dfrac{\cos^{۲} x}{۱+۲\sin x-۳\sin^{۲} x}=۱-\dfrac{۱}{۲}\sin ۲x$

ج) $\tan(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})+\cot(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})=\dfrac{۲}{\cos x}$ د) $\dfrac{\sin x-\tan\frac{x}{۲}}{\cos x}=\tan\dfrac{x}{۲}$

هـ) $\tan ۲x\cot x-\tan x\tan ۲x=۲$ و) $\dfrac{۲}{\tan x+\cot x}=\sin ۲x$

ز) $\dfrac{\sin ۲x}{۱-\cos ۲x}=\cot x$ ح) $\cos^{۲}(\alpha+\beta)+\cos^{۲}(\alpha-\beta)-\cos ۲\alpha\cos ۲\beta=۱$

۲- اگر $\cos ۱۸^\circ=a$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۹۹ درجه را به دست آورید.

۳- اگر $\sin ۱۸^\circ=b$ نسبت های مثلثاتی زاویه ۳۶ درجه را به دست آورید.

۴- حاصل $\sin^{۲} ۲\alpha(۲+\tan^{۲}\alpha+\cot^{۲}\alpha)$ را بیابید.

۵- اگر $\cos x=\dfrac{-\sqrt{۵}}{۳}$ و انتهای کمان x در ناحیه دوم باشد $\tan ۲x$ را به دست آورید

۶- اگر $\tan(x+۱۷)=\dfrac{۳}{۴}$ حاصل $\cot(۲۸-x)$ را بیابید.

۷- اگر $\dfrac{۳\pi}{۴}\le x\le\dfrac{۷\pi}{۴}$ حاصل $f(x)=\sqrt{\sin^{۲} x(۱+\cot x)+\cos^{۲} x(۱+\tan x)}$ را به دست آورید.

۸- مقدار $\sin ۴۰^\circ+\sqrt{۳}\sin ۵۰^\circ$ را به دست آورید.

۹- اگر $\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}=۳$، مقدار $\tan ۲x$ را به دست آورید.

۱۰- اگر $\dfrac{\sin(۳۰+x)-\cos(۶۰+x)}{\sin(۳۰+x)+\cos(۳۰+x)}=۲$، مقدار $\cot$ را بیابید.

۱۱- درستی اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید:

الف) $\sin ۳\alpha=۳\sin\alpha-۴\sin^{۳}\alpha$ ب) $\cos ۳\alpha=۴\cos^{۳}\alpha-۳\cos\alpha$

ج) $\tan ۳\alpha=\dfrac{۳\tan\alpha-\tan^{۳}\alpha}{۱-۳\tan^{۲}\alpha}$

۱۲- عبارت $\cos ۳x-\cot x\sin ۳x$ را ساده کنید.

۱۳- اگر $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x=\dfrac{۳}{۵}$ حاصل $\sin^{۶} x+\cos^{۶} x$ را بیابید.

۱۴- اگر $f(x)=(x^{۲}-۲)$ و $g(x)=f(f(f(۲\cos x)))$، حاصل $g(\dfrac{\pi}{۱۶})$ را بیابید.

❖ روابط مثلثاتی زیر همواره برقرار است:

❖ قوانین ضرب به جمع

$$۱)\ \sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$۲)\ \sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$۳)\ \cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

❖ قوانین جمع به ضرب

$$۱)\ \cos\alpha+\cos\beta = ۲\cos(\frac{\alpha+\beta}{۲})\cos(\frac{\alpha-\beta}{۲})$$

$$۲)\ \sin\alpha+\sin\beta = ۲\sin(\frac{\alpha+\beta}{۲})\cos(\frac{\alpha-\beta}{۲})$$

$$۳)\ \cos\alpha-\cos\beta = -۲\sin(\frac{\alpha+\beta}{۲})\sin(\frac{\alpha-\beta}{۲})$$

اثبات روابط فوق به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

مثال:

$$\sin x+\cos x = \sin x+\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{x-\frac{\pi}{۲}+x}{۲}$$

$$= \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}-x)$$

$$= \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴}+x)$$

مثال:

$$\sin x-\cos x = \sin x-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$= \sin x+\sin(x-\frac{\pi}{۲})$$

$$= ۲\sin\frac{x+x-\frac{\pi}{۲}}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$= \sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

$$= \sqrt{۲}\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)$$

مثال: درستی اتحادهای زیر را تحقیق کنید.

الف) $\dfrac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x+\cos x}=\tan 4x$

ب) $\cos 5x\cos 2x+\sin 4x\sin 3x-\cos 4x\cos x=\sin 2x\sin 3x$

حل: الف:

$$\frac{\sin 7x+\sin x}{\cos 7x+\cos x}=\frac{2\sin(\frac{7x+x}{2})\cos(\frac{7x-x}{2})}{2\cos(\frac{7x+x}{2})\cos(\frac{7x-x}{2})}=\frac{\sin 4x}{\cos 4x}=\tan 4x$$

ب:

$$\begin{aligned}
\cos 5x\cos 2x+\sin 4x\sin 3x-\cos 4x\cos x &= \frac{1}{2}\left[\cos(5x+2x)+\cos(5x-2x)\right]\\
&+\frac{1}{2}\left[\cos(4x-3x)-\cos(4x+3x)\right]\\
&-\frac{1}{2}\left[\cos(4x+x)+\cos(4x-x)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos 7x+\cos 3x+\cos x-\cos 7x-\cos 5x-\cos 3x\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\cos x-\cos 5x\right]\\
&=\frac{1}{2}(-2)\sin(\frac{x+5x}{2})\sin(\frac{x-5x}{2})\\
&=-\sin 3x\sin(-2x)\\
&=\sin 3x\sin 2x
\end{aligned}$$

تمرین:

۱- تساوی های زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin 20+\cos 50=\cos 10$

ب) $\sin 10+\sin 50-\sin 70=0$

ج) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$

۲- مقدار عبارت $\dfrac{\sin 54^\circ}{\sin 18^\circ}$ را بیابید.

۳- عبارت $\cot 2x-\dfrac{2\sin x}{\cos x-\cos 3x}$ را ساده کنید.

۴- حاصل $\cos^2(\frac{\pi}{12})-\cos^2(\frac{\pi}{8})$ را بیابید.

۵- حاصل $\sin 70^\circ\sin 65^\circ(\tan 20^\circ+\tan 25^\circ)$ را بیابید.

❖ حل ۴ معادله‌ی مثلثاتی اصلی به صورت‌های زیر است ($k \in Z$):

۱) $\sin x = \sin\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \,, x = ۲k\pi + \pi - \alpha$

۲) $\cos x = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$

۳) $\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

۴) $\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos^۲\theta + \cos\theta = ۱$

ب) $۱ - ۳\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$

ج) $۴\tan x + \cot x = ۵$

حل: الف)

$$۲\cos^۲\theta + \cos\theta = ۱ \Rightarrow ۲\cos^۲\theta + \cos\theta - ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\cos\theta - ۱)(\cos\theta + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\cos\theta - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow \theta = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \\ \cos\theta + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos\theta = -۱ = \cos\pi \Rightarrow \theta = ۲k\pi + \pi \text{ یا } \theta = ۲k\pi - \pi \end{cases}$$

ب)

$$۱ - ۳(۱ - ۲\sin^۲ x) = ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۱ - ۳ + ۶\sin^۲ x = ۲\sin^۲ x \Rightarrow +۴\sin^۲ x = +۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۴} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۴}$$

چهار جواب معادله‌ی مثلثاتی فوق را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۴}, k \in Z$$

ج)

$$۴\tan x + \cot x = ۵ \Rightarrow ۴\tan x + \frac{۱}{\tan x} = ۵ \overset{\tan x \neq ۰}{\Rightarrow} ۴\tan^۲ x + ۱ = ۵\tan x \;\; (x \neq \frac{k\pi}{۲})$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲ x - ۵\tan x + ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۱ = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = \frac{۱}{۴} = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \end{cases}$$

چون کوچک‌ترین زاویه‌ای که مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{۱}{۴}$ است را بدون ماشین حساب نمی‌توان یافت از زاویه α استفاده کردیم.

تمرین:

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

الف) $۲-۳\cos^{۲} x-۲\sin x=۰$

ب) $\cot^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta=۰$

ج) $\sin^{۴} x+\cos^{۴} x=\frac{۵}{۸}$

د) $\sin\frac{x}{۲}+\cos x=۱$

هـ) $\cos ۳x+۲\cos x=۰$

و) $\sin x-\sqrt{۳}\cos x=۱$

ز) $\tan x-\cot x=۴\cos ۲x$

ح) $۲\sin(\frac{۳\pi}{۸}-x)=\sin(۳x-\frac{\pi}{۸})$

ط) $\sin x-\cos x=\cos ۲x$

ی) $\sin ۳x+\sin x=۰$

ک) $\cos x+\cos ۲x+\cos ۳x=۰$

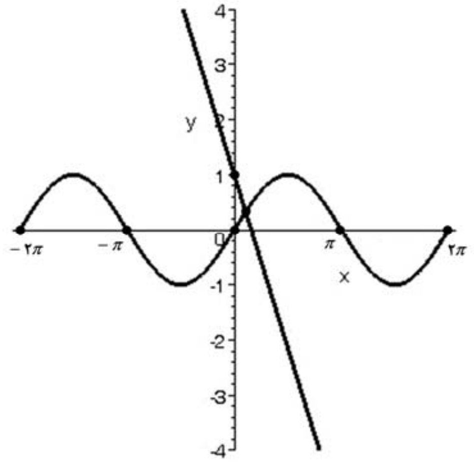
حل معادلات مثلثاتی به روش نمودار

بعضی از معادلات مثلثاتی از طریق جبری قابل حل نیستند و فقط با استفاده از رسم نمودار می‌توان تعداد جواب‌ها را بدست آورد و مقدار آن‌ها را تخمین زد.

مثال: معادله $\sin x + ۲x = ۱$ را حل کنید.

حل:

ابتدا معادله را به صورت $\sin x = -۲x + ۱$ می‌نویسیم. سپس نمودارهای $f(x) = \sin x$ و $g(x) = -۲x + ۱$ را رسم می‌کنیم طول نقاط تلاقی این دو نمودار جواب معادله مورد نظر می‌باشد.



همان‌طورکه مشاهده می‌کنید معادله یک جواب دارد که بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ است با روش آزمایش و خطا می‌توان جواب تقریبی را بدست آورد. مثلاً:

$$x = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \approx \frac{۱/۴}{۲} = ۰/۷ \\ g(\frac{\pi}{۴}) = -\frac{\pi}{۲} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۲} + ۱ = -۰/۵۷ \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۶}) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \\ g(\frac{\pi}{۶}) = -\frac{\pi}{۳} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۳} + ۱ \approx -۰/۰۵ \end{cases}$$

$$x = ۱۵^\circ = \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{\pi}{۱۲}) = \sin ۱۵^\circ \approx ۰/۲۵ \\ g(\frac{\pi}{۱۲}) - \frac{\pi}{۶} + ۱ \approx -\frac{۳/۱۴}{۶} + ۱ = \frac{۲/۸۶}{۶} = ۰/۴۸ \end{cases}$$

لذا جواب معادله‌ی فوق نزدیک به $۰/۲۶ \approx \frac{\pi}{۱۲}$ است و با ادامه‌ی این روش و با استفاده از ماشین حساب می‌توان تقریب‌های بهتری یافت.

تمرین:

معادلات زیر را با روش نموداری حل کنید و تعداد جواب و حدود جواب را مشخص کنید.

الف) $\tan ۳x = x - ۲$

ب) $۱ - ۲\cot x = \frac{x}{۳}$

ج) $۱ - ۲x = \cot(x + \frac{\pi}{۳})$

د) $۲\sin x = x^{۲}$

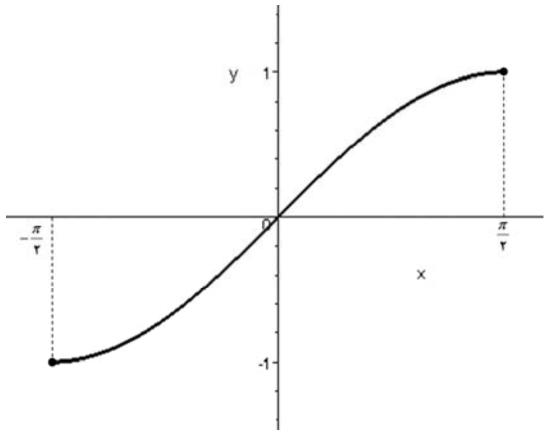
هـ) $\sin x + |x - ۲| = ۱$

و) $\cos x - ۲x = x^{۲}$

می‌دانیم تابعی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد بنابراین برای بدست آوردن وارون توابع مثلثاتی که یک به یک نیستند، باید دامنه‌ی آن‌ها را تحدید کنیم تا آن‌ها تبدیل به یک تابع یک به یک شوند.

تحدید تابع $y=\sin x$ به بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

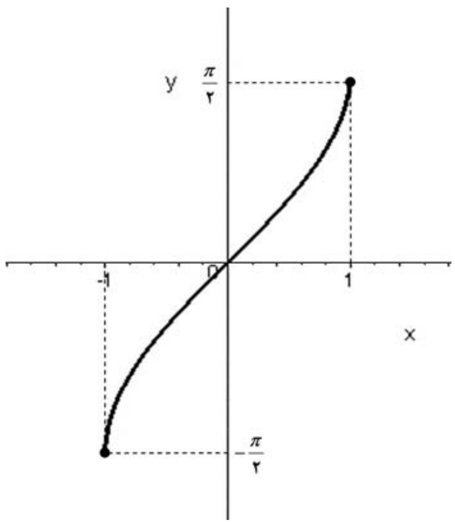
$$y=\sin x \quad , \; x\in[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$$



معکوس $y=\sin x$ را با نمادهای $y=\arcsin x$ یا $y=\sin^{-۱} x$ نمایش می دهیم. پس:

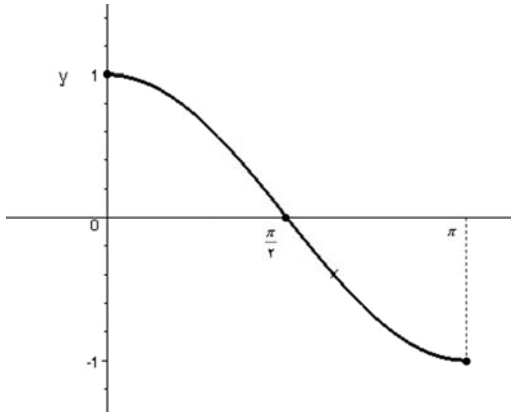
$$y=\sin^{-۱} x:[-۱,۱]\to[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تحدید تابع $y = \cos x$ به بازه‌ی $[0,\pi]$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

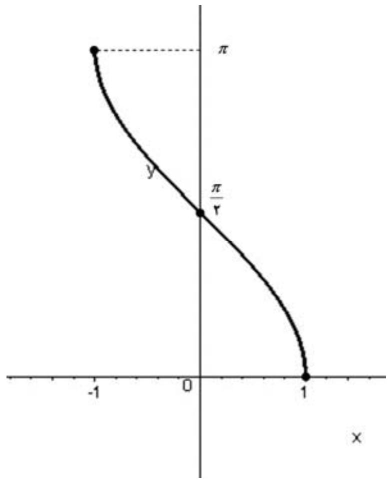
$$y = \cos x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$



معکوس $y = \cos x$ را با نمادهای $y = \arccos x$ یا $y = \cos^{-1} x$ نمایش می دهیم. پس:

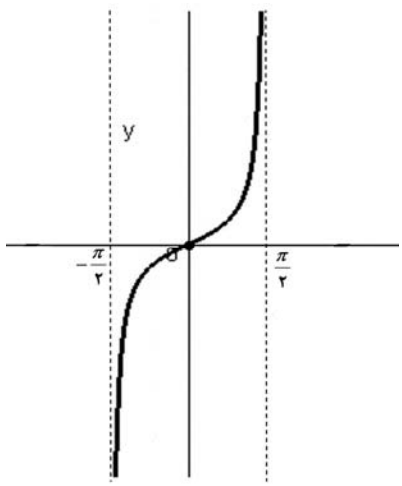
$$y = \cos^{-1} x : [-1,1] \to [0,\pi]$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تحدید تابع $y = \tan x$ به بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

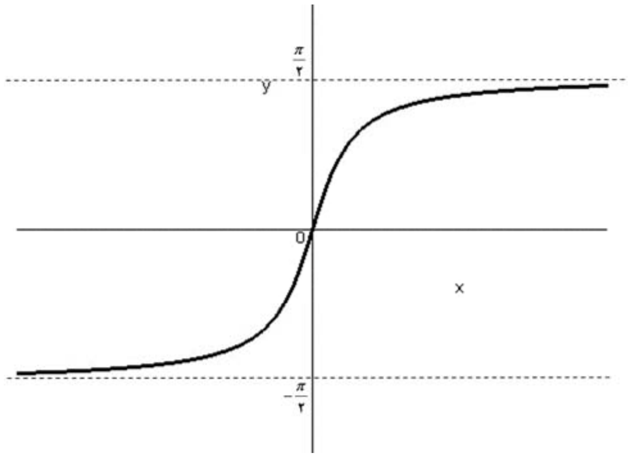
$$y = \tan x \quad , \quad x \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$



معکوس $y=\tan x$ را با نمادهای $y=\arctan x$ یا $y=\tan^{-1}x$ نمایش می دهیم. پس:

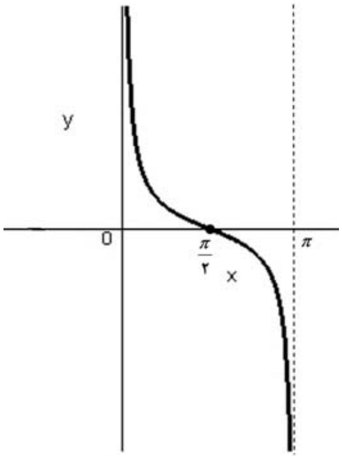
$$y=\tan^{-1}x:\Re\to(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



تابع $y=\cot x$ به بازه‌ی $(۰،\pi)$ یک به یک بوده و معکوس‌پذیر است.

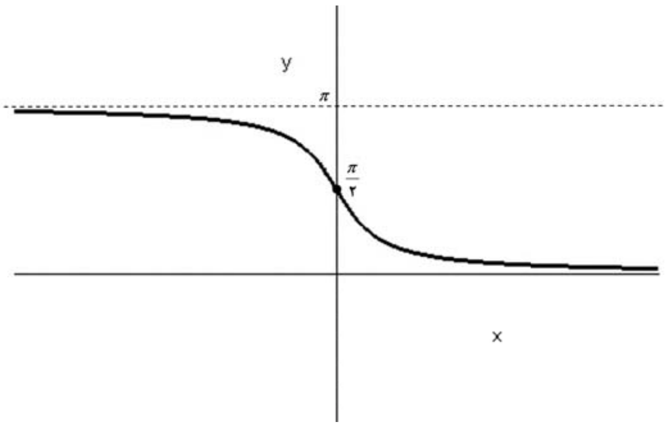
$$y=\cot x \quad , \; x\in(۰،\pi)$$



معکوس $y=\cot x$ را با نمادهای $y=arc\cot x$ یا $y=\cot^{-1}x$ نمایش می دهیم. پس:

$$y=\cot^{-1}x:\Re\to(۰،\pi)$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



مثال: مقدار $\sin^{-1}(0)$ و $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $\tan^{-1}(1)$ و $\cot^{-1}(-1)$ را بدست آورید.

حل:

$\sin^{-1}(a)=b$ یعنی $\sin b=a$. با این توضیح داریم:

$$\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\pi}{4} \qquad \sin^{-1}(0)=0$$

$$\cot^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4} \qquad \tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$$

تمرین:

آیا تساوی‌های زیر نیز درست است؟ جرا؟

$$\sin^{-1}(0)=\pi \qquad \cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\pi}{4}$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos[2\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\cos^{-1}(\frac{-1}{2})]$

ب) $\cos(\sin^{-1}(-\frac{4}{5}))$

حل: الف)

$$\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{\pi}{3}\\ \cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow \cos(-\frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})=\cos 0=1$$

ب)

$\sin^{-1}(-\frac{4}{5})=A$ بنابراین $\sin A=-\frac{4}{5}$. چون سینوس A منفی است و دامنه تابع $y=\sin^{-1}x$ بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ است. پس A در ناحیه چهارم قرار دارد بنابراین $\cos A$ مثبت بوده و

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$$

تابع $f(x)=\arcsin(\sin x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب 2π است، زیرا:

$$f(x+2\pi)=\arcsin(\sin(x+2\pi))=\arcsin(\sin x)$$

همچنین اگر $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$، داریم:

$$\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x & -\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲} \\ \pi - x & \frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲} \end{cases}$$

اگر $\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}$ آن‌گاه $-\frac{\pi}{۲}\le\pi-x\le\frac{\pi}{۲}$ و بنابراین:

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin(\sin(\pi-x))=\pi-x$$

به طور مشابه تابع $g(x)=\arccos(\cos x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۲π است و به ازای $۰\le x\le ۲\pi$ داریم:

$$\arccos(\cos x)=\begin{cases} x & ۰\le x\le\pi \\ ۲\pi-x & \pi\le x\le ۲\pi \end{cases}$$

همچنین تابع $h(x)=\arctan(\tan x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$ داریم:

$$\arctan(\tan x)=x$$

و بالاخره تابع $k(x)=arc\cot(\cot x)$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب π است و به ازای $۰<x<\pi$ داریم:

$$arc\cot(\cot x)=x$$

تمرین:

۱- نمودار توابع f ، g ، h و k تعریف شده در بالا را در فاصله‌ی $[۲\pi,۲\pi]$ رسم کنید

۲- نمودار توابع $\sin(\arcsin x)$ و $\cos(\arccos x)$ را رسم کنید.

۳- دامنه و برد توابع زیر را بیابید.

الف) $y=\arctan(\cos x)$ ب) $y=\arctan\frac{x}{۱+x}$

ج) $y=\arcsin\frac{x}{۱+x^۲}$

۴- درستی اتحاد های زیر را بررسی کنید.

الف) $\tan(\sin^{-۱}۰)+\cot(\cos^{-۱}۰)=\cos(\sin^{-۱}۱)$

ب) $\tan^{-۱}۱+\tan^{-۱}۲+\tan^{-۱}۳=\pi$

ج) $\sin(\frac{\pi}{۴}+\cos^{-۱}\frac{۳}{۵})=\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$

۵- دامنه تابع با ضابطه $y=\tan^{-۱}\sqrt{x-۱}$ را به دست آورید.

۶- مقدار عبارت های زیر را بیابید.

الف) $\cot^{-۱}(\tan\frac{۱۹\pi}{۴})+\cos^{-۱}(\sin\frac{۲۱\pi}{۴})$

ب) $\cot^{-1}(-1)+\cos^{-1}(\sin(\frac{-\pi}{3}))$

۷- برد تابع $y=2+\sin^{-1}(1+x^2)$ چند عضو دارد؟

۸- معادله $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\frac{\pi}{4}$ را در نظر گرفته تابع y برحسب x را در این معادله بیابید.

۹- تابع $y=\sin^{-1}\frac{1}{x-1}$ صعودی است یا نزولی؟

۱۰- دامنه تابع $y=\sin^{-1}\sqrt{x-1}+\cos^{-1}(2x-1)$ را بیابید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- اگر $\sin x=\frac{3}{5}$ و $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ مقدار $\tan 2x$ را بیابید.

۲- اگر $\sin\alpha=\frac{m+1}{2}$ و $\cos\alpha=\frac{m-1}{2}$ باشد، چند مقدار متمایز برای m به دست می آید.

۳- معادله $\tan x+\cot x=5$ چند جواب در بازه‌ی $[0,3\pi]$ دارد؟

۴- معادله $3\sin x+\cos 2x=2$ در بازه ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۵- حاصل $\cos(45+x)\cos(45-x)$ را بیابید.

۶- کسر $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+2\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$ را ساده کنید.

۷- معادله $\cos 4x\cos x+\sin 4x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ در فاصله $[0,\pi]$ چند جواب دارد؟

۸- حاصل $\frac{\sin 40+\sin 20}{\cos 40-\cos 20}$ را بیابید.

۹- معادله $\cos 5x+\cos 3x=0$ چند جواب در بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ دارد؟

۱۰- معادله $\sin 5x-\sin 3x=\sin x$ در فاصله $[0,\frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۱۱- معادله $\cos x+\cos 3x+\cos 5x=0$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱۲- فرض کنیم $x\neq\frac{k\pi}{2}$ و $|\sin x+\tan x|=|\sin x|+|\tan x|$ انتهای کمان x در چه ناحیه‌ای از دستگاه مختصات واقع است؟

۱۳- اگر $\cos 3x=\frac{m-1}{2}$ باشد و $|x|<\frac{\pi}{9}$. حدود مقادیر m را بیابید.

۱۴- کم‌ترین مقدار عبارت $3\sin^2\pi x-7\sin\pi x$ را در فاصله $[\frac{3}{2},\frac{11}{6}]$ را به دست آورید.

۱۵- اگر $\sin x-\cos x=\frac{1}{2}$ آنگاه مقدار $\cos 4x$ چقدر است؟

۱۶- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $3\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+\sin 2x+5=0$ را بیابید.

۱۷- معادله $2\sin x-\tan x=0$ چند جواب متمایز در بازه‌ی $[0,2\pi]$دارد؟

۱۸- حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos^{-1}(\cos(-\frac{3\pi}{2}))$ ب) $\cos(\cos^{-1}\frac{1}{3})$

ج) $\tan(\cot^{-1}\frac{11}{60})$ د) $\tan(\sin^{-1}\frac{21}{29})$

۱۹- معادله $1+\cos 2x = 4\cos 4x$ در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ چند جواب دارد؟

۲۰- جواب کلی معادله $\sin(x+\frac{\pi}{6})\sin(x-\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$ را بیابید.

۲۱- از رابطه‌ی $\sin^3 x + \cos^3 x = \sin\alpha$ با فرض $\sin 2x = 1$ چند مقدار برای α که $\alpha \in [0,2\pi]$ بدست می‌آید.

۲۲- مقدار $A = (1-\cot 23)(1-\cot 22)$ را بیابید.

۲۳- معادله‌ی $2\cot 2x + \tan x = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ روی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

۲۴- در صورتی که بدانیم $\sin\alpha = \frac{7}{12}$ و $\tan\beta = \frac{5}{12}$ و زوایای α و β حاده باشند مطلوبست محاسبه‌ی هر یک از عبارت‌های زیر:

الف) $\tan[\pi - (\alpha+\beta)]$ ب) $\cos(\pi - \alpha + \beta)$

۲۵- درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

۱) $16\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ \sin 90^\circ = 1$

۲) $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$

۳) $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ = \frac{\sin 25^\circ}{2\sin 5^\circ}$

۴) $8\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \sqrt{7}$

حسابان

فصل ۴

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه‌ی $(a-\delta,a+\delta)$ را یک همسایگی a می‌نامند (a مرکز و δ شعاع همسایگی نام دارند). اگر a را از این همسایگی حذف کنیم، آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۱,۳)$، $(۰,۴)$ و $(۱/۹,۲/۱)$ یک همسایگی ۲ هستند.

مثال: هر یک از مجموعه‌های $(۱,۳)-\{۲\}$، $(۰,۲)\cup(۲,۴)$ و $\{x|\ ۱/۹<x<۲/۱,\ x\neq ۲\}$ یک همسایگی محذوف ۲ هستند.

مثال: اگر $(۳k-۲,k+۴)$ یک همسایگی ۳ باشد، a و δ را به دست آورید.

حل:

عدد ۳ نقطه‌ی وسط بازه است، پس

$$۳=\frac{(۳k-۲)+(k+۴)}{۲}\Rightarrow ۴k+۲=۶\Rightarrow k=۱$$

بنابراین همسایگی به صورت $(۱,۵)$ در می‌آید و $a=\frac{۱+۵}{۲}=۳$ و $\delta=۳-۱=۲$.

مثال: اگر مجموعه‌ی $(-۳,y)\cup(۲,x^{۲}+۱)$ نمایشگر یک همسایگی محذوف باشد، حاصل $۳x^{۲}+y$ را به دست آورید؟

حل:

ابتدا طوری دو بازه را می‌نویسیم که اعداد از کوچک به بزرگ مرتب شوند و داریم $y=۲$. چون همسایگی محذوف ۲ است، باید:

$$۲=\frac{-۳+x^{۲}+۱}{۲}\ \Rightarrow\ x^{۲}-۲=۴\ \Rightarrow\ x=\pm\sqrt{۶}$$

بنابراین داریم:

$$۳x^{۲}+y=۳(\pm\sqrt{۶})^{۲}+۲=۲۰$$

مثال: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهند؟

الف) $\{x\in\Re|\ \ ۰<|x-a|<\delta\}$ ب) $\{x\in\Re|\ \ |x-a|<\delta\}$

حل: الف)

$$۰<|x-a|<\delta\Rightarrow\begin{cases}|x-a|<\delta\\|x-a|\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\delta<x-a<\delta\\x-a\neq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-\delta<x<a+\delta\\x\neq a\end{cases}$$
$$\Rightarrow x\in(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$$

بنابراین یک همسایگی محذوف a را نمایش می‌دهد.

ب)

$$|x-a|<\delta \Rightarrow -\delta < x-a < \delta \Rightarrow a-\delta < x < a+\delta$$

بنابراین یک همسایگی a هست ولی همسایگی محذوف a نیست.

تمرین:

کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی را نمایش می‌دهند. مرکز، شعاع و نوع آن را مشخص کنید؟

الف) $\{x : |x-۲| < ۳\}$ ب) $\{x : |x-۲| \le ۳\}$

ج) $\{x: \ |x-۱| > ۴\}$ د) $\left\{x: \dfrac{۱}{|x|} < ۲\right\}$

هـ) $\left\{x: \ \dfrac{۱}{|x|} > ۲\right\}$ و) $\left\{x: \ \dfrac{۳-x}{x-۲} > ۰\right\}$

ز) $\{x : \sin^{-۱} x \in \Re\}$

همسایگی چپ و راست یک نقطه

❖ **اگر a عددی حقیقی و δ یک عدد مثبت باشد، بازه به صورت $(a-\delta,a)$ را یک همسایگی چپ a و بازه به صورت $(a,a+\delta)$ را یک همسایگی راست a می‌نامیم.**

مثال: هر یک از بازه‌های $(۳,۳/۱)$ و $(۳,۴)$ و $(۳,۵)$ یک همسایگی راست ۳ و هر یک از بازه‌های $(۲/۹,۳)$ و $(۲,۳)$ و $(-۱,۳)$ یک همسایگی چپ ۳ هستند.

مثال: همسایگی $(۳,۴)\cup(۲,۳)$ در واقع از اجتماع یک همسایگی چپ ۳ یعنی $(۲,۳)$ و یک همسایگی راست ۳ یعنی $(۳,۴)$ تشکیل شده است.

تمرین:

۱- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی راست ۲ هستند؟

الف) $(۲,\sqrt{۵})$ ب) $(۲,\pi)$

ج) $(\sqrt{۵},\sqrt{۷})$

۲- آیا مجموعه‌های زیر یک همسایگی چپ ۱- هستند؟

الف) $(-\dfrac{\pi}{۳},-۱)$ ب) $[-۲,-۱)$

ج) $(-۳,-۱]$

❖ **اگر I یک همسایگی نقطه‌ی a باشد، گوییم تابع f در همسایگی I تعریف شده است، هرگاه $I \subseteq D_f$.**

مثال: تابع $y=\sqrt{x}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.

الف) $(۲,۳)$ ب) $(۰,۴)$

ج) $(-۲,۱)$ د) $(-۱,-۳)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۰,+\infty)$ پس داریم:

الف) $(۲,۳)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۲,۳)$ تعریف شده است.

ب) $(۰,۴)\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(۰,۴)$ تعریف شده است.

ج) $(-۲,۱)\not\subseteq D_f$، پس تابع در همسایگی $(-۲,۱)$ تعریف نشده است.

د) $(-۱,-۳)\not\subseteq D_f$ پس تابع در همسایگی $(-۱,-۳)$ تعریف نشده است.

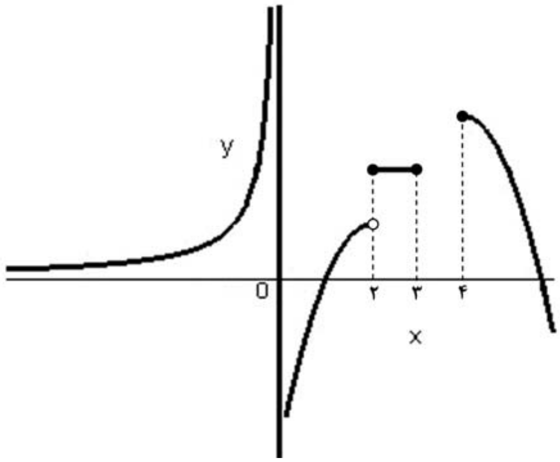
مثال: تابع $y=\sqrt{x-۱}$ در کدام‌یک از همسایگی‌های عدد یک تعریف شده است.

الف) $(۱,۱+\delta)$ ب) $(۱-\delta,۱+\delta)$ ج) $(۱-\delta,۱)$

حل:

می‌دانیم $D_f=[۱,+\infty)$ پس δ هر عدد مثبتی که باشد تابع در همسایگی $(۱,۱+\delta)$ تعریف شده است. ولی به ازای هیچ مقدار مثبتی از δ در همسایگی‌های $(۱-\delta,۱+\delta)$ و $(۱-\delta,۱)$ تعریف نشده است.

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار مشخص کنید تابع f در کدام‌یک از همسایگی‌های زیر تعریف شده است.



الف) $(-۳,-۱)$ ب) $(-۲,۲)$

ج) $(۱,۲)$ د) $(۰,۳)$

هـ) $(۰,۷)$ و) $(۳,۴)$

ز) $(۲,۳)$

حل:

با توجه به شکل داریم:

$$D_f=(-\infty,۰)\cup(۰,۳]\cup[۴,+\infty)$$

بنابراین تابع در همسایگی‌های $(-۳,-۱)$، $(۱,۲)$، $(۰,۳)$ و $(۲,۳)$ تعریف شده ولی در همسایگی‌های $(-۲,۲)$، $(۰,۷)$ و $(۳,۴)$ تعریف نشده است.

تمرین:

بررسی کنید آیا تابع f در همسایگی داده شده تعریف شده است؟

الف) $f(x)=\sin^{-1}x \quad ,(-۱,۱)$

ب) $f(x)=\sqrt{۹-x^۲} \quad ,(-۳,۳)$

ج) $f(x)=\tan^{-1}x \quad ,(-\pi,\pi)$

د) $f(x)=\cos^{-1}x \quad ,(-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳})$

هـ) $f(x)=\frac{۲}{[x]-۱} \quad ,(۰,۲)$

و) $f(x)=\log_{۰/۱}^{x} \quad ,(۰,۲)$

ز) $f(x)=\log_{x}^{۳} \quad ,(۰,۳)$

❖ **وقتی می‌گوییم متغیر مستقل x به عدد ثابت a نزدیک می‌شود. یعنی هر اندازه که بخواهیم متغیر x به a نزدیک می‌شود ولی هیچ‌گاه مساوی a نمی‌شود. به بیان دیگر به ازای هر عدد دلخواه و مثبت مانند ε داریم:**

$$۰<|x-a|<\varepsilon$$

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ۲ نمایش دهید.

حل:

... ۲/۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۰۰۱ ...	۲	... ۱/۹۹۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹ ...

مثال: با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد ثابت ۲- نمایش دهید.

... ۱/۹- ... ۱/۹۹- ... ۱/۹۹۹- ...	۲-	... ۲/۰۰۱- ... ۲/۰۱- ... ۲/۱- ...

تمرین:

۱- اگر به ازای هر $\varepsilon>۰$، متغیر x در نامساوی $۰<|x-۲|<\varepsilon$ صدق کند متغیر x به چه عددی نزدیک شده است.

۲- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $-\frac{۱}{۳}$ نمایش دهید.

۳- با رسم یک جدول و نوشتن چند مقدار در آن، مفهوم نزدیک شدن متغیر x را به عدد $\sqrt{۲}$ نمایش دهید.

❖ **برای یک تابع f اگر مقادیر متغیر مستقل x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقادیر $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک می‌شوند (ممکن است مساوی l هم بشوند)، گوییم تابع f در نقطه‌ی a حد دارد و حد آن برابر l است و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x) = ۲x + ۳$ را در $x = ۵$ محاسبه کنید.

حل:

... ۵/۱ ... ۵/۰۱ ... ۵/۰۰۱ ...	۵	... ۴/۹۹۹ ... ۴/۹۹ ... ۴/۹ ...	x
... ۱۳/۲ ... ۱۳/۰۲ ... ۱۳/۰۰۲ ...	۱۳	... ۱۲/۹۹۸ ... ۱۲/۹۸ ... ۱۲/۸ ...	$f(x)$

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۵، مقادیر تابع f به عدد ۱۳ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x \to ۵} (۲x + ۳) = ۱۳$$

توجه: تابع f در $x = ۵$ تعریف شده است و $f(۵) = ۱۳$ می‌باشد.

مثال: با رسم یک جدول، حاصل حد تابع $f(x) = \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲}$ را در $x = ۲$ محاسبه کنید.

حل:

... ۲/۱ ... ۲/۰۱ ... ۲/۰۰۱ ...	۲	... ۱/۹۹۹ ... ۱/۹۹ ... ۱/۹ ...	x
... ۴/۱ ... ۴/۰۱ ... ۴/۰۰۱ ...	؟	... ۳/۹۹۹ ... ۳/۹۹ ... ۳/۹ ...	$f(x)$

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر متغیر x به عدد ۲، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند و داریم:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{x - ۲} = ۴$$

توجه: تابع f در $x = ۲$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

مثال: با رسم یک جدول، رفتار تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x-۱}$ را وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، بررسی کنید.

حل:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... ۱۰- ... ۱۰۰- ... ۱۰۰۰- ...	؟	... ۱۰۰۰ ... ۱۰۰ ... ۱۰ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود، وقتی متغیر x به عدد یک نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند و از نظر قدر مطلق مرتباً افزایش می‌یابند. بنابراین می‌گوییم تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

توجه: تابع f در $x=۱$ نه تعریف شده و نه حد دارد.

تمرین:

با رسم جدول حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۱)$ ب) $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{۲}{x+۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to \pi}\sin x$ د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-x}{x^۲-۳x+۲}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱۰}\log x$

❖ **شرط لازم برای آن که بتوان در مورد حد تابع f در $x=a$ صحبت کرد، آن است که تابع f دست کم در یک همسایگی a تعریف شده باشد.**

مثال: در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان از حد تابع f در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد.

الف) $f(x)=\dfrac{۱}{[x]}\ ,\quad x=\dfrac{۱}{۲}$ ب) $f(x)=x-[x]\ ,\quad x=۲$

ج) $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۱ \\ ۱-x & x>۱ \end{cases}\ ,x=۱$

حل: الف)

با توجه به این که $D_f=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$، پس تابع f در هیچ همسایگی $\dfrac{۱}{۲}$ تعریف نشده است. یعنی نمی‌توان از حد تابع f در $x=\dfrac{۱}{۲}$ صحبت کرد.

ب)

با توجه به این که $D_f = \Re$، پس می‌توان در مورد حد تابع در $x = ۲$ صحبت کرد.

ج)

با توجه به این که $D_f = \Re - \{۱\}$، پس می‌توان وجود حد تابع در $x = ۲$ را بررسی کرد:

x	... ۰/۹ ... ۰/۹۹ ... ۰/۹۹۹ ...	۱	... ۱/۰۰۱ ... ۱/۰۱ ... ۱/۱ ...
$f(x)$	... −۰/۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۰۰۱ ...	؟	... −۰/۰۰۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۱ ...

همان‌گونه که از جدول مشاهده می‌شود داریم:

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = ۰$$

توجه: تابع f در $x = ۱$ تعریف نشده است ولی حد دارد.

تمرین:

در کدام‌یک از توابع زیر، می‌توان در مورد وجود یا عدم وجود حد تابع در نقطه‌ی داده شده، صحبت کرد؟

الف) $x = ۲$ ، $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۲}$ ب) $x = -۱$ ، $f(x) = \sqrt[۳]{x+۱}$

ج) $x = -۱$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ د) $x = ۲$ ، $f(x) = \dfrac{۱}{|x-۱| + |x-۳|}$

هـ) $x = ۳$ ، $f(x) = \dfrac{۴}{[x] + [-x]}$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای بزرگ‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد راست دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l$$

مثال: با رسم جدول، اگر $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ حاصل $\lim_{x \to ۰^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x		۰	... −۰/۰۰۱ ... −۰/۰۱ ... −۰/۱ ...
$f(x)$		؟	... ۱ ... ۱ ... ۱ ...

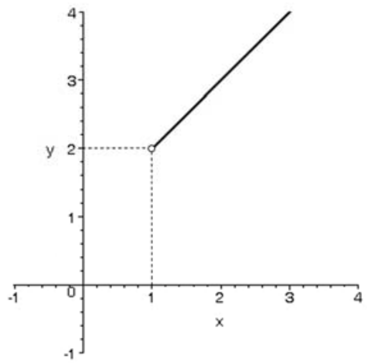
بنابراین داریم:

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{|x|}{x} = ۱$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ۳-x & x<۱ \\ ۳ & x=۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(۱,+\infty)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف راست (مقادیر بزرگ‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد راست هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده محاسبه کنید.

الف) $x=-\frac{\pi}{۲}\,,$ $\quad f(x)=\cos x$

ب) $x=\pi\,,$ $\quad f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<\pi \\ ۴ & x=\pi \\ ۲x & x>\pi \end{cases}$

ج) $x=۱\,,$ $\quad f(x)=\dfrac{x^۲+۲}{x+۱}$

د) $x=۴\,,$ $\quad f(x)=\log_۲^x$

هـ) $x=۲\,,$ $\quad f(x)=\sqrt[۳]{x+۷}$

و) $x=-۱\,,$ $\quad f(x)=\sin^{-۱} x$

ز) $x=-۱\,,$ $\quad f(x)=\cos^{-۱} x$

❖ **در تابع f اگر متغیر x با مقدارهای کوچک‌تر از عدد a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند k نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول a حد چپ دارد و می‌نویسیم:**

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=k$$

مثال: اگر $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ، با رسم جدول حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

x	$... -۰/۱ ... -۰/۰۱ ... -۰/۰۰۱ ...$	۰	
$f(x)$	$... -۱ ... -۱ ... -۱ ...$	؟	

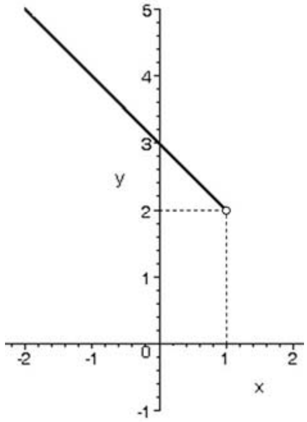
بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{|x|}{x} = ۱$$

مثال: اگر $f(x)=\begin{cases} ۳-x & x<۱ \\ ۳ & x=۱ \\ x+۱ & x>۱ \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ را با استفاده از رسم نمودار تابع محاسبه کنید.

حل:

نمودار تابع f در فاصله‌ی $(-\infty,۱)$ به صورت زیر است.



همان‌گونه که از نمودار مشاهده می‌شود با نزدیک شدن مقادیر x از طرف چپ (مقادیر کوچک‌تر از یک) به یک، مقادیر $f(x)$ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند. بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = ۲$$

تمرین:

با استفاده از جدول یا نمودار، حد چپ هر یک از توابع زیر را در نقطه‌ی خواسته شده در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $x=۲\ ,\quad f(x)=x^۲-۴x$

ب) $x=-۱\ ,\quad f(x)=\begin{cases} x+۱ & x<-۱ \\ ۳ & x=-۱ \\ x-۱ & x>-۱ \end{cases}$

ج) $x=۰\ ,\quad f(x)=\frac{۱}{[x]}$

د) $x=۱۰\ ,\quad f(x)=\log x$

هـ) $x=۱\ ,\quad f(x)=\cos^{-۱} x$

و) $x=۱\ ,\quad f(x)=\sin^{-۱} x$

ز) $x=3$, $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$ ح) $x=\dfrac{\pi}{2}$, $f(x)=\sin x$

❖ **اگر حدهای چپ و راست تابع در نقطه‌ای مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار حد چپ و راست در آن نقطه است.**

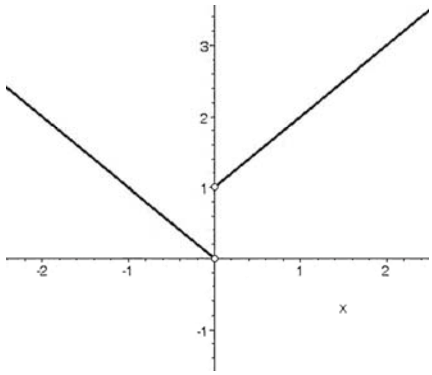
مثال: ابتدا نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید و سپس با استفاده از نمودار، حدهای چپ و راست و حد تابع را در صورت وجود در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

الف) $x=0$, $f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ 3 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$ ب) $x=1$, $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

ج) $x=2$, $f(x)=[x]$

حل: الف)

نمودار تابع به صورت زیر است.

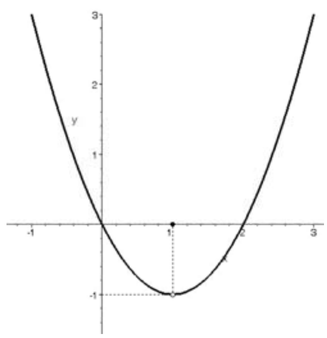


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

ب)

نمودار تابع به صورت زیر است.

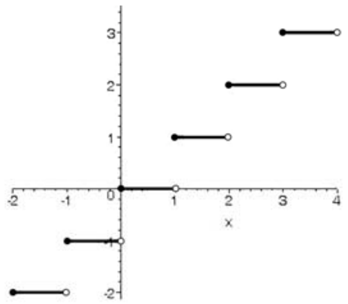


با توجه به نمودار داریم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = -۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x) = -۱$$

ج)

نمودار تابع به صورت زیر است.

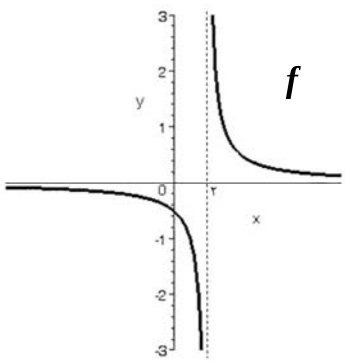


با توجه به نمودار داریم:

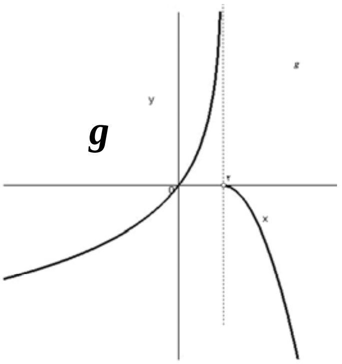
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = ۲ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

مثال: نمودار توابع f ، g و h به صورت زیر رسم شده است. با استفاده از نمودار، حد توابع f ، g و h را در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ محاسبه کنید.

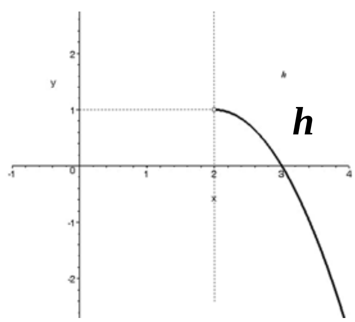
الف)



ب)



ج)



حل: الف)

با توجه به نمودار تابع در $x=۲$ از چپ حد ندارد و از راست نیز حد ندارد. بنابراین تابع در $x=۲$ حد ندارد.

ب)

تابع g در $x=۲$ از چپ حد ندارد ولی $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=۰$. بنابراین g در $x=۲$ حد ندارد.

ج)

به دلیل عدم تعریف تابع h در یک همسایگی چپ ۲، بحث از وجود حد چپ در این نقطه معنادار نیست. در واقع منظور از حد تابع h در $x=۲$ همان حد راست تابع h در $x=۲$ است. یعنی:

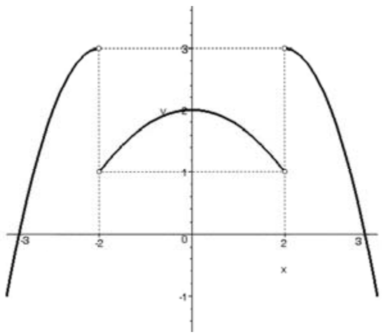
$$\lim_{x\to ۲} h(x)=۱$$

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x>۲ \\ ax+b & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ دارای حد باشد، چه رابطه‌ای بین a و b برقرار است.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x^۲+x)=۶ \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(ax+b)=۲a+b \end{array}\right\} \Rightarrow ۲a+b=۶ \Rightarrow b=۶-۲a$$

مثال: نمودار تابع زوج f به صورت زیر رسم شده است.



با توجه به نمودار، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$

حل:

با توجه به این که f تابعی زوج است، نمودار آن نسبت به محور yها متقارن است. بنابراین داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=۳$

ب) $\lim\limits_{x\to -۳} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=۰$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱$

تمرین:

۱- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲a & x\geq ۱ \\ ax-۱ & x<۱ \end{cases}$ و $\lim\limits_{x\to ۱^{+}} f(x)-\lim\limits_{x\to ۱^{-}} f(x)=-۱$ ، مقدار a را به دست آورید.

(سراسری ریاضی ۸۶)

۲- در تابع $f(x)=\begin{cases} -۱ & x\in Z \\ ۰ & x\in \Re - Z \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x)+\lim\limits_{x\to (\frac{۱}{۲})^{-}} f(x)$ چقدر است؟

(آزاد پزشکی ۸۱)

۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} (x+a)^{۲} & x\geq -۱ \\ ۲x+۱ & x<-۱ \end{cases}$ در $x=-۱$ حد دارد.

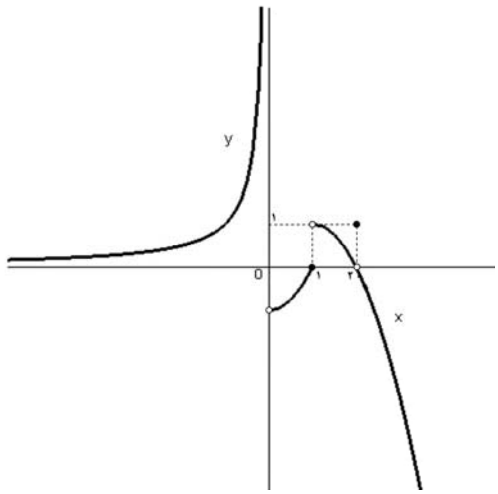
(سراسری تجربی ۸۰)

۴- در هر یک از قسمت‌های زیر با استفاده از نمودار یا جدول، حدود چپ و راست و حد تابع را در نقاط مشخص شده در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲x & x<۰ \\ x+۱ & x\geq ۰ \end{cases} \qquad x=۰,\ x=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\leq ۱ \\ ۳ & ۱<x<۴ \\ x+۱ & x\geq ۴ \end{cases} \qquad x=۱,\ x=۴,\ x=\frac{\pi}{۲},\ x=\pi,\ x=۲\pi$

۵- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌های زیر را در صورت امکان مشخص کنید.



$f(۰)=$ $\qquad$ $f(۱)=$ $\qquad$ $f(۲)=$

$\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$

۶- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $[-۳,۳]$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۷- اگر f تابعی فرد با دامنه‌ی $(-۲,۲)$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۵$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۸- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۳$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)$ را محاسبه کنید.

۹- اگر f تابعی زوج با دامنه‌ی $\Re$ باشد و $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=-۱$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۰- نمودار تابعی رسم کنید که دارای همه‌ی شرایط زیر باشد.

$D_f=[-۳,۲)$, $f(۰)=۴$, $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$

$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۲$, $\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=۳$, $f(-۱)=۲$

❖ تابع ثابت $f(x)=c$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در همه‌ی نقاط c است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} c = c$$

❖ تابع $f(x)=x$ در همه‌ی نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه به طول a برابر a است. یعنی:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲ = ۲$ ب) $\lim_{x\to \pi} ۲ = ۲$ ج) $\lim_{x\to \sqrt{۳}} ۲ = ۲$

د) $\lim_{x\to ۱} x = ۱$ هـ) $\lim_{x\to ۲} x = ۲$ و) $\lim_{x\to \sqrt{۲}} x = \sqrt{۲}$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} x$ ب) $\lim_{x\to (۱-\sqrt{۳})} x$ ج) $\lim_{x\to \frac{۱}{۵}} x$

د) $\lim_{x\to ۱} \pi$ هـ) $\lim_{x\to \sqrt{۵}} \pi\sqrt{۲}$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{۱}{\sqrt{۳}-۱}$

❖ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=k$، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+k$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-k$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\times\lim_{x\to a} g(x)=l\times k$$

❖ این قضایا را برای تعداد متناهی تابع نیز می‌توان تعمیم داد.

مثال:

الف) $\lim_{x\to ۳} ۲x = \lim_{x\to ۳}(x+x) = \lim_{x\to ۳} x + \lim_{x\to ۳} x = ۳+۳=۶$

ب) $\lim_{x\to ۵}(۲x+۳) = \lim_{x\to ۵} ۲x + \lim_{x\to ۵} ۳ = \lim_{x\to ۵} ۲\times \lim_{x\to ۵} x + \lim_{x\to ۵} ۳ = ۲\times ۵+۳ = ۱۳$

ج) $\lim_{x\to ۲} x^{۳} = \lim_{x\to ۲}(x\times x\times x) = \lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x\times \lim_{x\to ۲} x = ۲\times ۲\times ۲ = ۸$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۲}-۳x+۴)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴}(۱-۵x)(۲+۳x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}(\frac{۲x-۳}{۵})(\frac{x-۱}{۲})$ د) $\lim\limits_{x\to -۱}(\frac{x-۱}{۳})(x^{۲}-۳x+۷)$

❖ **اگر $p(x)$ یک تابع چندجمله‌ای باشد، آن‌گاه:**

$$\lim_{x\to a}p(x)=p(a)$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}(۲x+۳)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)$

ج) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)$ د) $\lim\limits_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۴}(۲x+۳)=۲\times ۴+۳=۱۱$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}(x^{۲}-۳x+۵)=۱^{۲}-۳(۱)+۵=۳$$

ج)

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}}(x^{۳}+۲x^{۲}+x)=(\sqrt{۲})^{۳}+۲(\sqrt{۲})^{۲}+\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}+۴$$

د)

$$\lim_{x\to ۷}\frac{۱-۵x}{۳}=\lim_{x\to ۷}(-\frac{۵}{۳}x+\frac{۱}{۳})=-\frac{۵}{۳}(۷)+\frac{۱}{۳}=-\frac{۳۴}{۳}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۳}+۴x^{۲}-۵x+۶)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x+۱)^{۲}}{۳}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۲}(x^{۴}+\frac{۱}{۲}x^{۳}-۵x^{۲}+۶)$

❖ اگر a عضوی از دامنه‌ی تابع باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a} \quad , \quad \lim_{x\to a} b^{x} = b^{a}$$

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a \quad , \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ ب) $\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x}$

ج) $\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲)$ د) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x$

هـ) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^{۲} x$ و) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x)$

ز) $\lim_{x\to -۲} ۳^{x}$ ح) $\lim_{x\to ۴} ۲^{x}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x} = \sqrt{۰} = ۰$$

توجه: منظور از $\lim_{x\to ۰} \sqrt{x}$ در واقع $\lim_{x\to ۰^{+}} \sqrt{x}$ است. زیرا تابع $y = \sqrt{x}$ تنها در همسایگی راست صفر تعریف شده است.

ب)

$$\lim_{x\to ۰} \sqrt[۳]{x} = \sqrt[۳]{۰} = ۰$$

ج)

$$\lim_{x\to ۸} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} - ۲) = \lim_{x\to ۸} \sqrt{x} + \lim_{x\to ۸} \sqrt[۳]{x} - \lim_{x\to ۸} ۲ = \sqrt{۸} + \sqrt[۳]{۸} - ۲ = ۲\sqrt{۲} + ۲ - ۲ = ۲\sqrt{۲}$$

د)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin^{۲} x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} (\sin x \times \sin x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x \times \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x = ۱\times ۱ = ۱$$

و)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} (۲\sin x - ۳\cos x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۲\sin x - \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} ۳\cos x$$

$$= ۲\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \sin x - ۳\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \cos x$$

$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴} - ۳\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$= \sqrt{۲} - ۳\frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ز)

$$\lim_{x\to -۲} ۳^x = ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۴} ۲^x = ۲^۴ = ۱۶$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}} (۳\sin x + ۴\cos x)$

ب) $\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} (\frac{۲\cos x + ۳\sin x}{۵})$

ج) $\lim_{x\to ۲} (۳^x + ۲^x)$

د) $\lim_{x\to -۲} (۳^x + ۲^{-x})$

هـ) $\lim_{x\to ۱۶} (\sqrt{x} + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۴]{x})$

و) $\lim_{x\to \frac{۵\pi}{۳}} (\sin x - ۱)(\cos x + ۲)$

❖ **اگر توابع f و g در a حد داشته باشند و $\lim_{x\to a} g(x) \neq ۰$ آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در a حد دارد و داریم:**

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۲ + ۴x + ۳}{۲x - ۱}$

ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x + \sin x}{۲\sin x - \cos x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{\sqrt{x}+۲x}{x^{۲}-۳}$ د) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱}{x-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^{۲}+۴x+۳}{۲x-۱} = \frac{۴+۸+۳}{۴-۱} = \frac{۱۵}{۳} = ۵$$

ب)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x+\sin x}{۲\sin x-\cos x} = \frac{۰+۱}{۲-۰} = \frac{۱}{۲}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۴} \frac{\sqrt{x}+۲x}{x^{۲}-۳} = \frac{۲+۴}{۱۶-۳} = \frac{۶}{۱۳}$$

د)

$\lim\limits_{x\to ۱}(x-۱)=۰$. پس وقتی x به ۱ نزدیک می‌شود، قدرمطلق مقادیر $\dfrac{۱}{x-۱}$ به طور نامحدود افزایش می‌یابد و به عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. بنابراین $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۱}{x-۱}$ وجود ندارد.

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \tan x = \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{۴}}{\cos \frac{\pi}{۴}} = ۱$$

توجه: اگر $a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{۲}$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ و اگر $a \neq k\pi$، داریم $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^{۲}+۴x+۱}{x^{۳}-x}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{\sqrt{x}+۲^{x}}{۳^{x}-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{۴}{x^{۲}-x}$ د) $\lim\limits_{x\to \frac{۳\pi}{۲}} \dfrac{-۳\cos x+۲\sin x}{\sin x+\cos x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \tan x$ و) $\lim\limits_{x\to \frac{۵\pi}{۴}} \dfrac{\tan x+\cot x}{\sin x+\cos x}$

❖ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ و اگر در یک همسایگی a، $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$، در این صورت گوییم $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ مبهم است. برای محاسبه‌ی حد تابع $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ در صورت وجود، با ساده کردن و حذف عامل‌های مشترک، $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ به کسری تبدیل می‌شود که حد آن را به کمک قضایایی که ذکر آن رفت می‌توان محاسبه نمود.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan(x-\frac{\pi}{4})}{2\sin(\frac{\pi}{4}-x)}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\sin^3 x}{\cos^2 x-\cos^3 x}$

و) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

ز) $\lim\limits_{x\to \frac{2\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{2\cos x+1}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}=\lim_{x\to 0}(1+\sin x)=1$$

ب)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

ج)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)^2}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}(\sin x-\cos x)=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=0$$

د)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{۴})}{۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۴})}{\cos(x-\frac{\pi}{۴})}}{-۲\sin(x-\frac{\pi}{۴})}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{-۲\cos(x-\frac{\pi}{۴})}=-\frac{۱}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x-\sin^۳ x}{\cos^۲ x-\cos^۳ x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos^۲ x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱-\cos x)(۱+\cos x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x(۱-\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+\cos x)(۱-\sin x)}{\cos^۲ x}=۲$$

و)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\tan x}{\sin x-\cos x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\frac{-(\sin x-\cos x)}{\cos x}}{\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{-۱}{\cos x}=\frac{-۱}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=-\sqrt{۲}$$

ز)

$$\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}}\frac{\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x}{۲\cos x+۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}}\frac{(\sin x+\sin ۳x)+\sin ۲x}{۲\cos x+۱}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}}\frac{۲\sin ۲x\cos x+\sin ۲x}{۲\cos x+۱}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}}\frac{\sin ۲x(۲\cos x+۱)}{۲\cos x+۱}$$

$$=\lim_{x\to\frac{۲\pi}{۳}}\sin ۲x=\sin\frac{۴\pi}{۳}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-\sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+2}{\sin x-1}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$

د) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos 2x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}$

❖ **اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند و در محاسبه‌ی حد $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه‌ای به طول a به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برخورد کنیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$ یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیرند و می‌توان عامل (عامل‌های) $x-a$ را در صورت و مخرج ظاهر ساخته، از صورت و مخرج حذف کنیم. سپس حد را در صورت وجود محاسبه کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^3-27}$

ب) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x^3+8}$

ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x-3}{x^4-1}$

حل:

الف) با توجه به اینکه $x=3$ صورت و مخرج را صفر می‌کند. صورت و مخرج بر $x-3$ بخش‌پذیر هستند.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^3-27}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x+9}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

ب)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x^3+8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{x^5+2^5}{x^3+2^3}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x^4-2x^3+4x^2-8x+16}{x^2-2x+4}=\frac{80}{12}=\frac{20}{3}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۳+۲x-۳}{x^۴-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x^۲+x+۳)}{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+x+۳}{(x+۱)(x^۲+۱)}=\frac{۵}{۴}$$

مثال: در تساوی زیر مقادیر a و b را به دست آورید؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b}=۲$$

حل:

عدد یک، صورت را صفر می‌کند. با توجه به اینکه جواب حد عدد ۲ است. لازم است $x=۱$ ریشه‌ی چندجمله‌ای مخرج نیز باشد. یعنی $۱+a+b=۰$. بنابراین صورت و مخرج هر دو عامل $x-۱$ دارند. پس داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+b}&=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۶x+۵}{x^۲+ax+(-a-۱)}\\&=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۵)}{(x-۱)(x+a+۱)}\\&=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۵}{x+a+۱}\\&=\frac{-۴}{۲+a}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{-۴}{۲+a}=۲\Rightarrow ۴+۲a=-۴\Rightarrow a=-۴$$

$$\Rightarrow ۱+a+b=۰\overset{a=-۴}{\Rightarrow} b=۳$$

مثال: اگر $\lim_{x\to ۲}\frac{x^n-۲^n}{x-۲}=۸۰$، مقدار n را به دست آورید؟

حل:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to ۲}\frac{x^n-۲^n}{x-۲}&\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^{n-۱}+۲x^{n-۲}+۴x^{n-۳}+...+۲^{n-۱})}{x-۲}\\&=\lim_{x\to ۲}(x^{n-۱}+۲x^{n-۲}+۴x^{n-۳}+...+۲^{n-۱})\\&=۲^{n-۱}+۲^{n-۱}+۲^{n-۱}+...+۲^{n-۱}\\&=n\times ۲^{n-۱}\\&=۸۰\\&\Rightarrow n=۵\end{aligned}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۳}+x-۱۰}{x^{۴}-۱۶}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x^{۲}+۳x-۵}{x^{۳}+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۱}{x^{۴}-۱}$

د) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^{۵}+۳۲}{x^{۲}-۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^{۶}-۶۴}{x^{۴}-۱۶}$

و) $\lim\limits_{x\to +۱}\dfrac{۴x^{۳}+۳x^{۲}+۲x-۹}{x^{۵}-۱}$

❖ **اگر $P(x)$ یا $Q(x)$ عبارت‌های رادیکالی باشند، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ در حالت مبهم ($\frac{۰}{۰}$) لازم است با گویا کردن و یا روش‌های دیگر عامل صفر کننده را ظاهر ساخته و پس از حذف آن، حد را در صورت وجود محاسبه می‌کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۱-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۵}\dfrac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^{۲}-۲۵}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۲۷}\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}$

و) $\lim\limits_{x\to ۱۶}\dfrac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}-۲}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{x+۳}+۲}=\frac{۱}{۴}$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{۱-\sqrt{x}}{x^{۲}+x-۲}\times\frac{۱+\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{۱-x}{(x-۱)(x+۲)(۱+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{-۱}{(x+۲)(۱+\sqrt{x})}=\frac{-۱}{۶}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۳}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۳}+۲}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(\sqrt{x+۳}+۲)}{(x-۱)(\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳})}$$
$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۳}+۲}{\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳}}=\frac{۴}{۲\sqrt{۳}}=\frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

د)

$$\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^{۲}-۲۵}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۵}\frac{\sqrt[۳]{x+۳}-۲}{x^{۲}-۲۵}\times\frac{(\sqrt[۳]{x+۳})^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴}{(\sqrt[۳]{x+۳})^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴}$$
$$=\lim_{x\to ۵}\frac{x-۵}{(x-۵)(x+۵)((\sqrt[۳]{x+۳})^{۲}+۲\sqrt[۳]{x+۳}+۴)}=\frac{۱}{۱٠\times ۱۲}=\frac{۱}{۱۲٠}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۲۷}\frac{\sqrt[۳]{x}-۳}{\sqrt{x-۲}-۵}\times\frac{(\sqrt[۳]{x})^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}{(\sqrt[۳]{x})^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹}\times\frac{\sqrt{x-۲}+۵}{\sqrt{x-۲}+۵}$$
$$=\lim_{x\to ۲۷}\frac{(x-۲۷)(\sqrt{x-۲}+۵)}{(x-۲۷)((\sqrt[۳]{x})^{۲}+۳\sqrt[۳]{x}+۹)}=\frac{۱٠}{۲۷}$$

و)

با توجه به اتحاد $a^{۴}-b^{۴}=(a-b)(a^{۳}+a^{۲}b+ab^{۲}+b^{۳})$، داریم:

$$\lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}\overset{\frac{٠}{٠}}{=}\lim_{x\to ۱۶}\frac{\sqrt[۴]{x}-۲}{\sqrt{x}-۴}\times\frac{(\sqrt[۴]{x})^{۳}+۲(\sqrt[۴]{x})^{۲}+۴\sqrt[۴]{x}+۸}{(\sqrt[۴]{x})^{۳}+۲(\sqrt[۴]{x})^{۲}+۴\sqrt[۴]{x}+۸}\times\frac{\sqrt{x}+۴}{\sqrt{x}+۴}$$
$$=\lim_{x\to ۱۶}\frac{(x-۱۶)(\sqrt{x}+۴)}{(x-۱۶)((\sqrt[۴]{x})^{۳}+۲(\sqrt[۴]{x})^{۲}+۴\sqrt[۴]{x}+۸)}=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^{۲}-۱}{\sqrt[۳]{۱-x}}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{۱-\sqrt{۳x+۷}}{۲x+\sqrt{x+۱۸}}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x^{۲}-۱}+x-۱}{\sqrt{x-۱}+x^{۲}-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{۳x+۱}-\sqrt{۴x}}{۱-x^{۲}}$

و) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲-\sqrt{x+۴}}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۸}\dfrac{\sqrt{۲+\sqrt[۳]{x}}-۲}{x-۱}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۹}\dfrac{\sqrt{x}-۳}{\sqrt{۶+\sqrt{x}}-۳}$

ط) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۸}-۳}{\sqrt{x+۳}-۲}$

❖ **هرگاه x زاویه‌ای بر حسب رادیان باشد. آنگاه داریم:**

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=۱$$

مثال: ثابت کنید:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱$$

حل:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\frac{۱}{\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}=۱\times ۱=۱$$

توجه: به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{\tan x}=۱$.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۳x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x+\sin ۳x}{۵x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x\sin ۲x}{\tan x^{۲}}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos ۲x}{۳x^{۲}}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos ۷x}{۱-\cos ۴x}$

و) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x-\sin x}{۴x^{۳}}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x-\cos ۲x}{\cos ۲x-\cos ۳x}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{\sin(x-۲)}{\tan(x^{۲}-۳x+۲)}$

ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{\cos x}{۲x-\pi}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{۳x}\times ۳=۱\times ۳=۳$$

ب)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x+\sin ۳x}{۵x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin ۳x}{x}}{\frac{۵x}{x}}=\frac{۱+۳}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

ج)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x\sin ۲x}{\tan x^{۲}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{x\times\frac{\sin ۲x}{۲x}\times ۲x}{\frac{\tan x^{۲}}{x^{۲}}\times x^{۲}}=۲$$

د)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{۳x^{۲}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}x}{۳x^{۲}}=\frac{۲}{۳}\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۲}=\frac{۲}{۳}\times ۱=\frac{۲}{۳}$$

هـ)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۷x}{۱-\cos ۴x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^{۲}(\frac{۷x}{۲})}{۲\sin^{۲}۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\frac{\sin\frac{۷x}{۲}}{\frac{۷x}{۲}}\right)^{۲}\times\left(\frac{۷x}{۲}\right)^{۲}}{\left(\frac{\sin ۲x}{۲x}\right)^{۲}\times(۲x)^{۲}}=\frac{۱\times\frac{۴۹}{۴}}{۱\times ۴}=\frac{۴۹}{۱۶}$$

و)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x-\sin x}{۴x^{۳}}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{۴x^{۳}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x-\cos x\sin x}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۱-\cos x)}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x(۲\sin^{۲}\frac{x}{۲})}{۴x^{۳}\cos x}$$

$$=\frac{۱}{۲}\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin x}{x}\times x\times(\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}})^{۲}\times(\frac{x}{۲})^{۲}}{x^{۳}\cos x}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱\times\frac{۱}{۴}}{۱}=\frac{۱}{۸}$$

ز)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x-\cos ۲x}{\cos ۲x-\cos ۳x}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\frac{x-۲x}{۲}\sin\frac{x+۲x}{۲}}{-۲\sin\frac{۲x-۳x}{۲}\sin\frac{۲x+۳x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۳x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{۵x}{۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sin\frac{۳x}{۲}}{\frac{۳x}{۲}}\times\frac{۳x}{۲}}{\frac{\sin\frac{۵x}{۲}}{\frac{۵x}{۲}}\times\frac{۵x}{۲}}=\frac{۳}{۵}$$

ح)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sin(x-۲)}{\tan(x^{۲}-۳x+۲)}\overset{\frac{۰}{۰}}{=}\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{\sin(x-۲)}{(x-۲)}\times(x-۲)}{\frac{\tan(x^{۲}-۳x+۲)}{(x^{۲}-۳x+۲)}\times(x-۲)(x-۱)}=۱$$

ط)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-2(\frac{\pi}{2}-x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{(\frac{\pi}{2}-x)}=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$$

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 2x}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x\cos 3x}{\tan 5x^{2}}$

د) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{x-\frac{\pi}{6}}{\sin(2x-\frac{\pi}{3})}$

هـ) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4-x^{2}}{\sin(x+2)}$

و) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi\sin x)}{\sin x}$

ز) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\cos 3x-1}$

ح) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{2}}{1-\sqrt{\cos x}}$

ط) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}$

ی) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\cos^{2}(x+t)-\cos^{2}x}{t}$

ک) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan 3x}-\sqrt{1-\tan 3x}}{4x}$

ل) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\tan 2x}{x^{3}+3x^{2}}$

م) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^{2}x-\tan x}{x}$

ن) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{2-\sqrt{4-x^{2}}}$

ر) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x\sqrt{1-\cos 4x}}{x^{3}+x^{2}}$

❖ برای به دست آوردن $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]$ ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ را محاسبه می‌کنیم، فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$. اگر l عددی غیر صحیح باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]=[l]$ و اگر عددی صحیح باشد، در صورت لزوم حد چپ و راست تابع را در $x=a$ به دست می‌آوریم.

❖ اگر تابع f شامل جزء صحیح باشد ابتدا جزء صحیح را محاسبه می‌کنیم و سپس حاصل حد را در صورت وجود می‌یابیم.

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۳}{۲}}[x]$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}[x^{۲}]$ د) $\lim\limits_{x\to -۲}[۳x-۱]$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}[\sin x]$ و) $\lim\limits_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$ ح) $\lim\limits_{x\to\frac{۳\pi}{۴}}[\sqrt{۲}\cos x]$

ط) $\lim\limits_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]$ ی) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{[x]+۳+x}{[x+\frac{۱}{۲}]+[-۲x]+۴-x}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to\frac{۳}{۲}} x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \lim_{x\to\frac{۳}{۲}}[x]=[\frac{۳}{۲}]=۱$$

ب)

$$\begin{cases} x\to ۲^{-}\Rightarrow ۱<x<۲\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{-}}[x]=۱ \\ x\to ۲^{+}\Rightarrow ۲<x<۳\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۲^{+}}[x]=۲ \end{cases}$$

پس تابع $[x]$ در $x=۲$ حد ندارد.

ج)

$$x\to . \Rightarrow \ ۰<x^{۲}<۱\ \Rightarrow \lim_{x\to ۰}[x^{۲}]=۰$$

د)

$$\begin{cases} x\to -۲^{-}\Rightarrow ۳x\to -۶^{-}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{-}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{-}}[۳x-۱]=-۸ \\ x\to -۲^{+}\Rightarrow ۳x\to -۶^{+}\Rightarrow ۳x-۱\to -۷^{+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -۲^{+}}[۳x-۱]=-۷ \end{cases}$$

پس تابع $[۳x-۱]$ در $x=-۲$ حد ندارد.

هـ)

$$\begin{cases} x\to ۰^{-}\Rightarrow -۱<\sin x<۰\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{-}}[\sin x]=-۱ \\ x\to ۰^{+}\Rightarrow ۰<\sin x<۱\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰^{+}}[\sin x]=۰ \end{cases}$$

پس تابع $[\sin x]$ در $x=۰$ حد ندارد.

و)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۸}{۳}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=[\frac{۸}{۳}]=۲$$

ز)

$$\frac{۲x+۴}{x+۱}=\frac{۲x+۲+۲}{x+۱}=۲+\frac{۲}{x+۱}$$

$$x>۱\Rightarrow x+۱>۲\Rightarrow ۰<\frac{۱}{x+۱}<\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰<\frac{۲}{x+۱}<۱\Rightarrow \lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۰$$

$$۰<x<۱\Rightarrow ۱<x+۱<۲\Rightarrow \frac{۱}{۲}<\frac{۱}{x+۱}<۱\Rightarrow ۱<\frac{۲}{x+۱}<۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=\lim_{x\to ۱^+}[۲+\frac{۲}{x+۱}]$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])$$

$$=۲+\lim_{x\to ۱^+}[\frac{۲}{x+۱}]=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲x+۴}{x+۱}]=\lim_{x\to ۱^-}[۲+\frac{۲}{x+۱}]$$

$$=\lim_{x\to ۱^-}(۲+[\frac{۲}{x+۱}])$$

$$=۲+\lim_{x\to ۱^-}[\frac{۲}{x+۱}]=۳$$

لذا تابع $[\frac{۲x+۴}{x+۱}]$ در $x=۱$ حد ندارد.

ح)

$$\begin{cases} x\to \frac{۳\pi}{۴}^- \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\cos x<۰\Rightarrow -۱<\sqrt{۲}\cos x<۰\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^-}[\sqrt{۲}\cos x]=-۱ \\ x\to \frac{۳\pi}{۴}^+ \Rightarrow -۱<\cos x<-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow -\sqrt{۲}<\sqrt{۲}\cos x<-۱\Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۴}^+}[\sqrt{۲}\cos x]=-۲ \end{cases}$$

لذا تابع $[\sqrt{۲}\cos x]$ در $x=\frac{۳\pi}{۴}$ حد ندارد.

ط)

وقتی $x>۰$ می‌دانیم $\sin x<x$ پس $۰<\frac{\sin x}{x}<۱$ بنابراین $\lim_{x\to ۰^+}[\frac{\sin x}{x}]=۰$. همچنین با توجه به زوج بودن تابع $\frac{\sin x}{x}$ داریم $\lim_{x\to ۰^-}[\frac{\sin x}{x}]=۰$ و لذا $\lim_{x\to ۰}[\frac{\sin x}{x}]=۰$.

ی)

اگر $x \to ۱^-$ داریم:

$$\begin{cases} [x] = ۰ \\ ۱ < x + \frac{۱}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow [x + \frac{۱}{۲}] = ۱ \\ -۲ < -۲x < -۱ \Rightarrow [-۲x] = -۲ \end{cases}$$

پس حد چپ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x \to ۱^-} \frac{[x] + ۳ + x}{[x + \frac{۱}{۲}] + [-۲x] + ۴ - x} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{۰ + ۳ + x}{۱ - ۲ + ۴ - x} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

و اگر $x \to ۱^+$ داریم:

$$\begin{cases} [x] = ۱ \\ \frac{۳}{۲} < x + \frac{۱}{۲} < ۲ \Rightarrow [x + \frac{۱}{۲}] = ۱ \\ -۳ < -۲x < -۲ \Rightarrow [-۲x] = -۳ \end{cases}$$

پس حد راست به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\lim_{x \to ۱^+} \frac{[x] + ۳ + x}{[x + \frac{۱}{۲}] + [-۲x] + ۴ - x} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۱ + ۳ + x}{۱ - ۳ + ۴ - x} = \frac{۵}{۱} = ۵$$

و لذا تابع در $x = ۱$ حد ندارد.

تمرین:

حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۲^+} \frac{[x]^۲ - ۴}{x^۲ - ۴}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} [x]([x] - ۱)$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{[۷x^۲]}{x + ۵}$

د) $\lim\limits_{x \to ۱} [\frac{x}{۲}]$

هـ) $\lim\limits_{x \to ۲} ([x] + [-x])$

ز) $\lim\limits_{x \to \pi} ([x] + [-x])$

ح) $\lim\limits_{x \to ۶} ([۳x] + ۲[x] - [x^۲])$

ط) $\lim\limits_{x \to ۶} ([\frac{x}{۲}] + [\frac{x}{۳}])$

ی) $\lim\limits_{x \to ۱^-} (x + ۱)[\frac{۱}{x + ۱}]$

ک) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۴}} [\tan x]$

ل) $\lim\limits_{x \to \frac{۵\pi}{۴}} [\sqrt{۲} \sin x]$

م) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۲}} [\cos x]$

❖ **اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ باشد، آنگاه**

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=|l|$$

❖ **اگر تابع f شامل قدرمطلق باشد، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ در صورت لزوم حدود چپ و راست را محاسبه می‌کنیم.**

مثال: حدود زیر را محاسبه کنید؟

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}|x-۲|$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}|x-۲|$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{|x-۲|}{x-۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}$

حل: الف)

$$\lim_{x\to ۲}|x-۲|=|۲-۲|=۰$$

ب)

$$\lim_{x\to ۱}|x-۲|=|۱-۲|=۱$$

ج)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{|x-۲|}{x-۲}\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱\\[2ex] \lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x-۲}{x-۲}=۱\end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=۲$ حد ندارد

د)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{|x-۱|-۳}{|x-۳|+۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{|۱-۱|-۳}{|۱-۳|+۴}=\frac{-۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

هـ)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}}\frac{|\cos x|}{x-\frac{\pi}{۲}}\overset{\frac{\cdot}{\cdot}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^-}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)}=-۱\\[3ex] \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{-\cos x}{x-\frac{\pi}{۲}}=\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\dfrac{-\sin(\frac{\pi}{۲}-x)}{-(\frac{\pi}{۲}-x)}=۱\end{cases}\Rightarrow$$ تابع در $x=\frac{\pi}{۲}$ حد ندارد

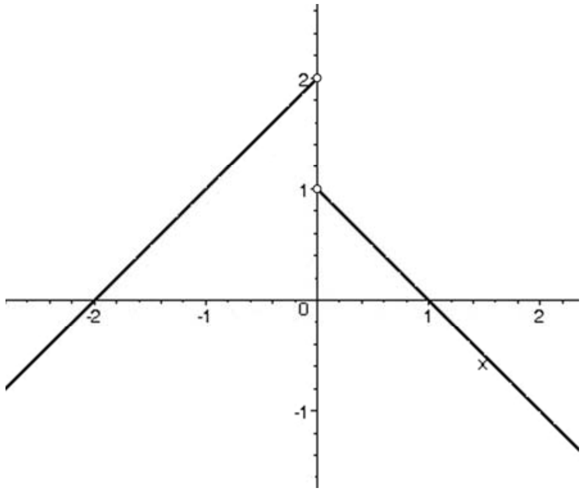
تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2-1|}{x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{|x-1|}$

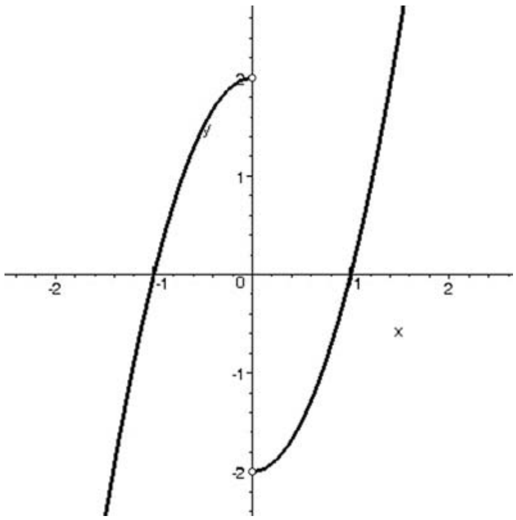
ج) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}+\frac{|x-1|}{x-1}\right)$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$

۲- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حدود زیر را محاسبه کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{|f(x)|}$

۳- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار حاصل $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|$ را محاسبه کنید



❖ **قضیه فشردگی:** اگر به ازای هر x از یک همسایگی a داشته باشیم $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

مثال: $\lim\limits_{x\to ۱}|x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$-۱\le\cos\frac{۱}{x-۱}\le ۱ \Rightarrow -|x-۱|\le|x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱}\le|x-۱|$$

$$\lim\limits_{x\to ۱}-|x-۱|=\lim\limits_{x\to ۱}|x-۱|=۰ \quad\Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}|x-۱|\cos\frac{۱}{x-۱}=۰$$

مثال: اگر به ازای هر $x\in(-۲,۲)$، داشته باشیم: $|f(x)-۲|\le(x-۱)^۲$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$|f(x)-۲|\le(x-۱)^۲ \Rightarrow -(x-۱)^۲\le f(x)-۲\le(x-۱)^۲ \Rightarrow ۲-(x-۱)^۲\le f(x)\le ۲+(x-۱)^۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۱}(۲+(x-۱)^۲)=\lim\limits_{x\to ۱}(۲-(x-۱)^۲)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین:

۱- حدود زیر را محاسبه کنید

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)\sin\frac{۱}{x-۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin^۲ x.\sin\frac{۱}{x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} x[\frac{۱}{x}]$ د) $\lim\limits_{x\to ۰} x^۲\cos\frac{\pi}{x}$

هـ) $\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲-۱)\sin\frac{۱}{\sqrt[۳]{x+۱}}$ و) $\lim\limits_{x\to ۰}(۱-\cos x)[\frac{۱}{\sin x}]$

۲- اگر به ازای هر $x\in(-۱,۱)$ داشته باشیم $۱-x^۲\le f(x)\le\cos^۲ x$، $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

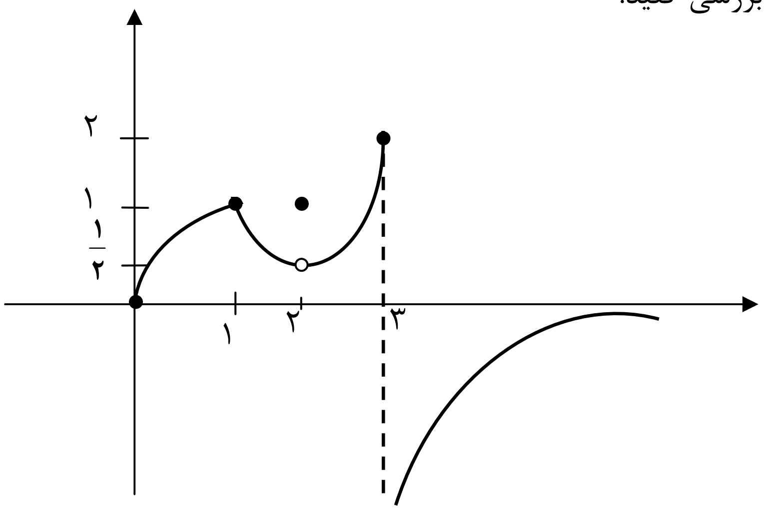
۳- اگر به ازای هر $x\in(-۱,۱)$ داشته باشیم $-x^۲\le f(x)\le ۱-\cos x$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- در یک همسایگی صفر داریم $۳-x^۲\le f(x)-۵\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)=۳$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}$ را محاسبه کنید.

۵- اگر برای هر x از یک همسایگی $x_۰=-۲$ داشته باشیم $g(x)\le f(x)\le x^۳+۲$ و $g(x)=\begin{cases}x-۴ & x\ge -۲\\ x^۵+۲۶ & x<-۲\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{x\to -۲} f(x)$ را محاسبه کنید.

❖ **اگر** $a \in D_f$ **و** $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$**، گوییم تابع** f **در** $x = a$ **پیوسته است.**

مثال: نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. با توجه به نمودار، پیوستگی تابع f را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



الف) $x = ۰$ ب) $x = ۱$ ج) $x = ۲$ د) $x = ۳$

حل: الف)

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = f(۰) = ۰$$

پس تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

توجه: در اصطلاح، با توجه به این‌که در واقع $\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = f(۰)$ می‌گویند تابع f در $x = ۰$ تنها از راست پیوسته است.

ب)

$$\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱) = ۱$$

پس تابع f در $x = ۱$ پیوسته است.

ج)

$f(۲) = ۲$ ولی $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \frac{۱}{۲}$ پس $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) \neq f(۲)$. بنابراین تابع f در $x = ۲$ پیوسته نیست.

د)

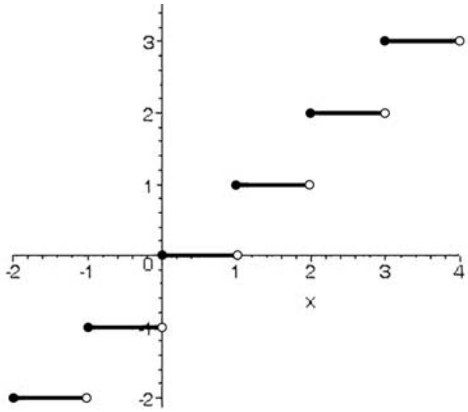
تابع f در $x = ۳$ حد ندارد، پس در این نقطه پیوسته نیست.

توجه: در اصطلاح ، می‌گویند تابع f در $x = ۳$ تنها پیوستگی چپ دارد.

مثال: تابع $y=[x]$ در چه نقاطی ناپیوسته است.

حل:

نمودار تابع $y=[x]$ به صورت زیر می‌باشد. با توجه به نمودار، تابع در Z ناپیوسته است. (البته می‌توان ثابت کرد تابع $y=[x]$ در $x_\circ \in Z$ ناپیوسته و در $x_\circ \in \Re - Z$ پیوسته است.)



مثال: پیوستگی هر یک از توابع زیر را در نقطه یا نقاط داده شده در صورت با معنی بودن، بررسی کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-1} \quad , x=0$

ب) $f(x)=x^2-3x+5 \quad , x=2$

ج) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 2 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1 \end{cases} \quad , x=1$

د) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ 3 & x=1 \\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & x>1 \end{cases} \quad , x=1$

هـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases} \quad , x=0$

و) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x<-1 \\ -3x & -1<x<1 \\ x-4 & x>1 \end{cases} \quad , x=-1, x=1$

حل: الف)

می‌دانیم $D_f=[1,+\infty)$ و $0\notin D_f$، بنابراین بحث از پیوستگی این تابع در $x=0$ بی‌معنا است.

ب)

تابع f در $x=2$ پیوسته است زیرا: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=3$.

توجه: توابع چند جمله‌ای در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته هستند.

ج)

$$\left.\begin{aligned} & f(1)=2 \\ & \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2 \\ & \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=2$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$.

د)

$$f(۱)=۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x^۲+۱)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۲$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته نیست زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\neq f(۱)$.

هـ)

$$f(۰)=۱$$

$$\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

تابع f در $x=۰$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$.

و)

$$f(-۱)=۳$$

$$\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^+}(-۳x)=۳$$

$$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱^-}(x^۲+۱)=۲$$

تابع f در $x=-۱$ حد ندارد. بنابراین تابع f در $x=-۱$ پیوسته نیست، زیرا در این نقطه حد ندارد. (همان‌گونه که بیان شد تابع f در $x=-۱$ تنها پیوستگی راست دارد).

$$f(۱)=-۳$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(-۳x)=-۳ \\ \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}(x-۴)=-۳ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۳$$

تابع f در $x=۱$ پیوسته است زیرا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$.

مثال: مقدار a را طوری بیابید تا تابع $f(x)=(x+a)[۲x-۵]$ در $x=۲$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(۲)=(۲+a)[۴-۵]=-a-۲$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+a)[۲x-۵]=\lim\limits_{x\to ۲^-}(x+a)(-۲)=-۴-۲a$$

$$\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+a)[۲x-۵]=\lim\limits_{x\to ۲^+}(x+a)(-۱)=-۲-a$$

با توجه به اینکه باید داشته باشیم $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ پس لازم است $-a-۲=-۴-۲a$ بنابراین $a=-۲$ می‌باشد.

مثال: مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲-۱} & x\neq \pm ۱\\ k & x=\pm ۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته باشد.

حل:

$$f(۱)=k$$

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+x^۲-۲}{x^۲-۱}=\lim\frac{(x^۲-۱)(x^۲+۲)}{x^۲-۱}=۳$$

بنابراین لازم است $k=۳$ باشد.

مثال: اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}} & x<۰\\ a & x=۰\\ [x]+b & x>۰\end{cases}$ در $x=۰$ پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

حل:

$$f(۰)=a$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos ۲x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۲\sin^۲ x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{\sqrt{۲}|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x}{-\sqrt{۲}\sin x}=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}([x]+b)=\lim_{x\to ۰^+}(۰+b)=b$$

برای اینکه تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد باید $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$ ، بنابراین داریم:

$$b=a=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرین:

۱- پیوستگی $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{2x^2+1} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۲- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۳- اگر تابع $f(x)=\begin{cases} (x+3)[x] & x<3 \\ ax+3 & x\geq 3 \end{cases}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار a را به دست آورید.

۴- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} [x]+3 & \lvert x\rvert<1 \\ [x]+2 & \lvert x\rvert\geq 1 \end{cases}$ را در $x=\pm 1$ بررسی کنید.

۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x+\lvert x\rvert} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x=0$ چگونه است.

۶- پیوستگی هر یک از توابع $\boldsymbol{f(x)=[x^2]}$ و $\boldsymbol{g(x)=[x^3]}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

۷- تابع $f(x)=[2\sin x]$ در نقطه‌ی $x=\dfrac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است.

۸- به ازای چه مقادیری از k تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos k\pi} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است.

۹- پیوستگی تابع $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x-[x] & ,\ [x]\in O \\ x-[x]+1 & ,\ [x]\in E \end{cases}}$ را در نقاط $x=2$ و $x=3$ بررسی کنید. ($\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{E}$ به ترتیب مجموعه‌های اعداد فرد و زوج طبیعی هستند.)

۱۰- اگر یکی از توابع $\boldsymbol{f}$ و $\boldsymbol{g}$ در $x=a$ پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد، ثابت کنید توابع $f+g$ و $f-g$ در $x=a$ ناپیوسته‌اند. درمورد توابع $\dfrac{f}{g}$ و $f.g$ چه می‌توان گفت؟

۱۱- اگر توابع f و g در $x=a$ ناپیوسته باشند، در مورد پیوستگی توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $\dfrac{f}{g}$ و $f.g$ در $x=a$ چه می‌توان گفت.

۱۲- مقادیر a و b را چنان تعیین کنید تا تابع $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} [x+2]+\frac{1}{2}a & x<0 \\ \lvert x-2\rvert+b & x=0 \\ x\cot\frac{x}{3} & x>0 \end{cases}}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۳- به ازای چه مقادیری از a و b تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+b[x] & x>۲ \\ ۲a+۳ & x=۲ \\ \left[\dfrac{x}{۲}\right] & x<۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته است.

❖ **اگر تابعی در تمام نقاط دامنه‌ی خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.**

مثال: کدام یک از توابع زیر، تابع پیوسته می‌باشند.

الف) $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ ب) $g(x)=\dfrac{x+۱}{x^۲-۴}$

ج) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$

حل: الف)

دامنه‌ی تابع f، بازه‌ی $[۰,۲]$ می‌باشد. اگر $۰<x<۲$، آن‌گاه:

دلخواه $x_۰ \in (۰,۲): \lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=\sqrt{۲x_۰-x_۰^۲}=f(x_۰)$

اگر $x=۰$، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۰=f(۰)$ و اگر $x=۲$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۰=f(۲)$. پس تابع f، تابعی پیوسته می‌باشد.

ب)

$$D_g=\Re-\{\pm ۲\}$$

دلخواه $x_۰ \in D_g : \lim\limits_{x\to x_۰} g(x)=\dfrac{x_۰+۱}{x_۰^۲-۴}=g(x_۰)$

بنابراین g تابعی پیوسته است.

ج)

$$D_h=\Re$$

$$۰\in D_h=\begin{cases} h(۰)=۲ \\ \lim\limits_{x\to ۰} h(x)=۱ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۰} h(x)\neq h(۰)$$

بنابراین h تابعی پیوسته نیست.

تمرین:

کدام یک از توابع زیر پیوسته هستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x<۲\end{cases}$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x>۲\\ \dfrac{۳}{x-۴} & x\leq ۲\end{cases}$

ج) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲}{x+۱} & x<۲\\ \dfrac{۳}{x+۴} & x\leq ۲\end{cases}$

د) $f(x)=\tan x$

هـ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-۳}{۵-x}}$

و) $f(x)=\sqrt{x^۳-۸}$

ز) $f(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{x+۱}{x-۲}}$

❖ **توابع چند جمله‌ای، $y=\sin x$، $y=\cos x$، $y=\tan^{-۱}x$ و $y=\cot^{-۱}x$ روی $\Re$ پیوسته‌اند.**

❖ **توابع $y=\tan x$، $y=\cot x$، $y=\sin^{-۱}x$ و $y=\cos^{-۱}x$ در دامنه‌ی تعریف خود که زیرمجموعه‌ای از $\Re$ می‌باشد تابعی پیوسته هستند.**

❖ **اگر تابع h از جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم چند تابع پیوسته تشکیل شده باشد روی دامنه خود تابعی پیوسته است.**

❖ **اگر f تابعی پیوسته باشد، تابع باشد، تابع $\sqrt[n]{f}$ روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته است.**

مثال: پیوستگی توابع زیر را روی دامنه‌ی تعریف بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۴}$

ب) $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$

ج) $h(x)=\tan x.\cot x$

حل: الف)

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع f روی $D_f=\Re-\{\pm ۲\}$ پیوسته است.

ب)

تابع $y=x^۲-۴$ تابع چند جمله‌ای است و در هر نقطه‌ای پیوسته، پس تابع g در دامنه تعریف خود یعنی $(-\infty\ ,\ -۲]\cup[۲\ ,\ +\infty)$ پیوسته است.

ج)

تابع $y=\tan x$ روی $D=\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\right\}$ و تابع $y=\cot x$ روی $D_f=\{x|x\neq k\pi\}$ پیوسته‌اند پس تابع h روی $D_h=\left\{x\middle|x\neq\frac{k\pi}{۲}\right\}$ پیوسته است.

مثال: فاصله‌ی پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{x-۲} & x>۳\\ \frac{x+۱}{x+۲} & x\leq ۳\end{cases}$ را تعیین کنید.

حل:

می‌دانیم $D_f=\Re-\{-۲\}$ و هر یک از ضابطه‌ها روی دامنه‌ی تعریف خود پیوسته‌اند. پس کافی است پیوستگی تابع در $x=۳$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to ۳^+}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}\frac{x+۱}{x-۲}=۴$$
$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x+۱}{x+۲}=\frac{۴}{۵}$$

تابع در $x=۳$ پیوسته نیست بنابراین تابع f روی $(-\infty\,,-۲)\cup(-۲\,,۳)\cup(۳\,,+\infty)$ پیوسته است.

مثال: حدود k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۷}{x^۲+kx+۱}$ در $\Re$ پیوسته باشد

حل:

صورت و مخرج توابع چند جمله‌ای هستند و در هر نقطه‌ای از $\Re$ پیوسته می‌باشند. پس کافی است دامنه تعریف تابع برابر $\Re$ باشد. یعنی باید معادله $\boldsymbol{x^۲+kx+۱=۰}$ فاقد ریشه باشد بنابراین لازم است:

$$\Delta<۰\Rightarrow \boldsymbol{k}^۲-۴<۰\Rightarrow|\boldsymbol{k}|<۲\Rightarrow -۲<\boldsymbol{k}<۲$$

تمرین:

۱- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}۲a-x^۲ & ۲\leq x<۳\\ [x]-۱ & ۳\leq x<۴\\ bx+۱ & ۴\leq x<۵\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۲- a و b را طوری به دست آورید تا تابع $f(x)=\begin{cases}x+a+۱ & x\leq ۰\\ [x]+۲b & ۰<x<۱\\ \frac{۳a}{x} & x\geq ۱\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۳- مقدار k را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\ge k\\ x & x<k\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

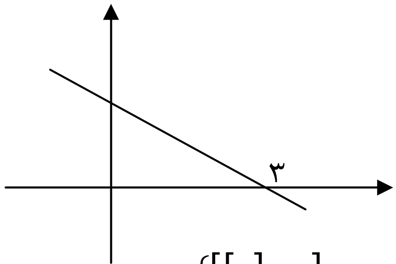
۴- مقدار m را طوری تعیین کنید تا $f(x)=\begin{cases}\dfrac{mx^2+5x}{x^2+mx+1} & x\ne 1\\ 2m & x=1\end{cases}$ ، تابعی پیوسته باشد.

۵- فاصله‌ی پیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ ب) $g(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

ج) $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ د) $k(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\ne 0\\ 0 & x=1\end{cases}$

۶- اگر $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+b}{a-x} & x\ne a\\ 1 & x=a\end{cases}$ تابعی پیوسته بوده و نمودار آن به صورت زیر باشد مقادیر a و b را به دست آورید.



۷- به ازای چه مقادیر از a تابع $f(x)=\begin{cases}[[x]-x] & x\notin Z\\ a & x\in Z\end{cases}$ تابعی پیوسته می‌باشد.

۸- به ازای چه مقادیری از a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\\ ax+a+4 & x\le 1\end{cases}$ ، تابعی پیوسته می‌باشد.

۹- تابع $f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & x<2\\ a+2\sin\dfrac{\pi}{4} & x\ge 2\end{cases}$ به ازای چه مقداری از a روی $D_f=[0\,,3]$ پیوسته است.

❖ **اگر ترکیب fog امکان‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=l$ و f تابعی پیوسته در $x_0=l$ باشد، آن‌گاه داریم:**

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

مثال:

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+3}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3)}=\sqrt{4}=2$ زیرا تابع $y=\sqrt{x}$، تابعی پیوسته است

ب) $\lim\limits_{x\to 2}[x]\neq[\lim\limits_{x\to 2}x]$ زیرا تابع $y=[x]$ در $x_0=2$ پیوسته نیست

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}[x^2]=[\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}x^2]=[\frac{1}{4}]=0$

د) $\lim\limits_{x\to 1}[\frac{2x+1}{x}]\neq[\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x+1}{x}]$ زیرا تابع $y=[\frac{2x+1}{x}]$ در $x_0=1$ پیوسته نیست

هـ) $\lim\limits_{x\to 2}[\frac{2x+1}{x}]=[\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+1}{x}]=[\frac{5}{2}]=2$

❖ **اگر تابع g در $x=a$ پیوسته و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، تابع fog در $x=a$ پیوسته است.**

مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}$ ، تابعی پیوسته است.

حل: روش اول:

تابع $y=x$ تابع چند جمله‌ای است و در $x_0\in\Re$ دلخواه پیوسته است پس تابع $g(x)=\sqrt[3]{x}$ در x_0 پیوسته است و تابع $h(x)=\sin x$ در هر نقطه‌ای از جمله $g(x_0)$ پیوسته است پس تابع

$$f(x)=h(g(x))=\sin\sqrt[3]{x}$$

در x_0 پیوسته است.

روش دوم:

$x_0\in\Re$ دلخواه

$$\left.\begin{aligned}&f(x_0)=\sin\sqrt[3]{x_0}\\&\lim_{x\to x_0}f(x)=\sin\sqrt[3]{x_0}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

بنابراین تابع f روی $D_f=\Re$ تابعی پیوسته است.

تمرین:

۱- اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=\sqrt{x}$، ثابت کنید تابع fog در $x=0$ پیوسته است.

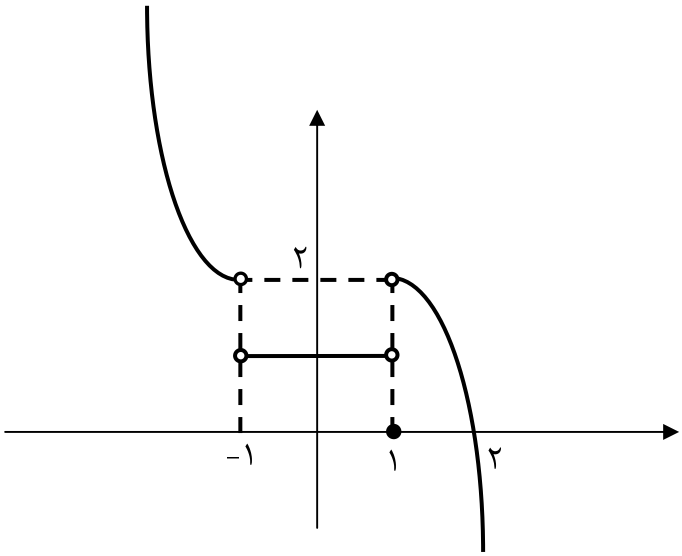
۲- اگر $f(x)=[x]$ و $g(x)=x-2$، پیوستگی توابع fog و gof را در $x=5$ بررسی کنید.

۳- اگر $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$ ثابت کنید توابع f و g در $x=0$، ناپیوسته‌اند ولی تابع fog در $x=0$ پیوسته است.

۴- اگر $f(x)=\begin{cases}3 & x\in Z\\ -3 & x\notin Z\end{cases}$ ، پیوستگی تابع fof را بررسی کنید.

تمرین‌های تکمیلی:

۱- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است با توجه به نمودار طرف دوم هر یک از تساوی‌ها را بنویسید.



$\lim\limits_{x\to -۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۴}} f(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=$

$\lim\limits_{x\to ۱^+} [f(x)]=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to -۱^-} [f(x)]=$

$f(۱)=$

۲- نمودار تابعی رسم کنید که در آن همه‌ی ویژگی‌های زیر را داشته باشد.

الف) $f(۰)=۲$ $\qquad$ ب) $f(-۲)=۰$ $\qquad$ ج) $f(۶)=۰$

د) $f(۱)=۵$ $\qquad$ هـ) $f(۲)$ تعریف نشده است $\qquad$ و) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۳$

ز) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۴$ $\qquad$ ح) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

۳- اگر $f(x-۳)=\dfrac{۲x}{۱-x}$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را محاسبه کنید.

۴- اگر $f(\dfrac{x}{x+۲})=۵x^۲-۶x$، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲} f(x-۴)$ را به دست آورید.

۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x<۱ \\ ۴x+۳b & x>۱ \end{cases}$ مفروض است، a و b را طوری به دست آورید تا اولاً تابع در $x=۱$ حد داشته باشد، ثانیاً $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)+۳\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۴$.

۶- هر یک از مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\le -۲ \\ ax+b & -۲<x<۲ \\ ۲x-۶ & x\ge ۲ \end{cases}$ در $x=۲$ و $x=-۲$ دارای حد باشد.

۷- به ازای کدام مقدار a تابع $y=a[x]+[x+۱]$ در $x=۱$ دارای حد است.

۸- حدود چپ و راست تابع $y=۲[-x]+۳[x]$ را در نقاط $x=۳$ و $x=-۳$ به دست آورید.

۹- اگر به ازای هر x از بازه‌ای شامل -۱ داشته باشیم $۲-۳(x+۱)^۲\le f(x)\le ۲+(x+۱)^۲$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به دست آورید.

۱۰- فرض کنید به ازای هر x از بازه $(-\pi\ ,\ ۰)$ داریم $-\sin x\le f(x)\le ۲+\sin x$ آنگاه $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۲}} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۱- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin ۲x}{\sqrt{۲-۲\cos ۲x}}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos(x^۲)}{x^۲\sin(x^۲)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}}\dfrac{۲+۲\cos ۴\pi x}{(۴x-۱)^۲}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\cos(\frac{\pi x}{۲})}{۱-x}$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\dfrac{۲\cos x+\sin^۲ x}{\cos x+۱}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\cos x+۴\tan x}{۲-x-۲x^۴}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan x}-۱}$

خ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}}\dfrac{\tan^۳ x-۳\tan x}{\cos(\frac{x+\pi}{۶})}$

د) $\lim\limits_{a\to \pi}\dfrac{\sin a}{۱-\frac{a^۲}{\pi^۲}}$

۱۲- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{|x-۱|}{x^۲-۱}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}}\dfrac{۹x^۲-۱}{۳x-۱}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۳+x-۱۰}{۲x^۲-x-۶}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۳x^۳+۵x^۲-۶x-۲}{x^۲-۱}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x-۲)^۲-۲(x-۲)}{x^۲-۴}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۳}-۲}{۲x^۳+۳x^۲-x-۴}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\sqrt{۱-x}}{۳x}$

ح) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x^۲-۱۶}{\sqrt[۳]{x-۳}-۱}$

خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{(x^۲-x-۲)^{۲۰}}{(x^۳-۱۲x+۱۶)^{۱۰}}$

د) $\lim\limits_{x\to -۸}\dfrac{\sqrt{۱-x}-۳}{۲+\sqrt[۳]{x}}$

ذ) $\lim\limits_{t\to -3}\sqrt{\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}}$

ر) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1+x)(\sqrt{x}+1)-4}{x-1}$

ز) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\ldots(1-\sqrt[n]{x})}{(x-1)^{n-1}}$

ژ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$

س) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

ش) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$

ص) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

۱۳- مقدار k را طوری به دست آورید تا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(1-x)\sin kx}{1-\cos x}=2$.

۱۴- به ازای چه مقداری از a تساوی $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2ax^2-x-2a}{ax^2+x(1-a)-1}=\dfrac{7}{2}$ برقرار است.

۱۵- مقدار a چقدر باشد تا $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x\sin 3x}=\dfrac{1}{6}$.

۱۶- اگر $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{ax+3a}{1-\sqrt{5x+16}}=2$ ، آنگاه a چقدراست.

۱۷- تابع $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ مفروض است $f(0)$ را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۸- $f(0)$ را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

۱۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x<0\\ a & x=0\\ [x]+b & x>0\end{cases}$ در صفر پیوسته باشد.

۲۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx+1 & |x|<2\\ \sqrt{x^2-2x+1} & |x|\geq 2\end{cases}$ در $\Re$ پیوسته باشد.

۲۱- به ازای چه مقداری از a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+x^2-2}{x^2-1} & x\neq \pm 1\\ a & x=\pm 1\end{cases}$ روی $\Re$ پیوسته است.

۲۲- به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}} & x>1\\ ax+2 & x\leq 1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است.

۲۳- پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}2[x]-\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ را بررسی کنید

۲۴- تابع f با دامنه‌ی $[۰\,,\,۳]$ و با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}(x-۱)[x] & x<۲\\ a+۲\sin\dfrac{\pi}{x} & x\geq ۲\end{cases}$ مفروض است به ازای چه مقدار a تابع f تابعی پیوسته است.

۲۵- تابع $f(x)=\dfrac{x^۲}{x^۲-۲ax+۳a-۲}$ با $D_f=\Re$ مفروض است. به ازای چه مقادیری از a ، f تابعی پیوسته است.

۲۶- پیوستگی تابع $y=[\dfrac{x}{۲}]+[\dfrac{x}{۴}]$ را در $x=۳$ بررسی کنید.

۲۷- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[x+\dfrac{۱}{۲}]+۲b & x<۰\\ ۳a+۱ & x=۰\\ \dfrac{\sqrt{۲}\sin ۴x}{۱-\cos ۲x} & x>۰\end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید تا تابع f در $x=۰$ پیوسته باشد.

۲۸- تابعی با دامنه‌ی $\Re$ مثال بزنید که تنها در یک نقطه پیوسته باشد.

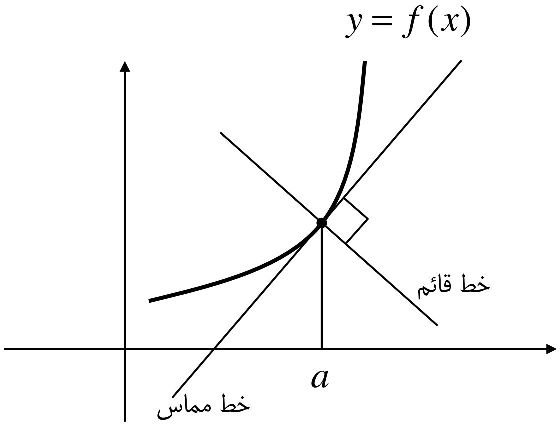
۲۹- تابع $y=[\sqrt[۳]{x}-۱]$ با دامنه‌ی $(۰\,,\,۱۰۰۰)$ مفروض است. این تابع چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد.

۳۰- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که هر دو در $x=a$ ناپیوسته بوده ولی جمع و ضرب و تقسیم آن‌ها تابعی پیوسته در $x=a$ باشد.

۳۱- دو تابع f و g را طوری مثال بزنید که f در $x=a$ ناپیوسته و g و fog در $x=a$ پیوسته باشد.

مشتق

خط مماس و خط قائم بر منحنی از یک نقطه روی منحنی



با توجه به تعبیر هندسی مشتق واضح است که مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ی a با شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر است.

$m = f'(a)$ شیب خط مماس

حال اگر تعریف کنیم که خط قائم خطی است که در نقطه ی a بر خط مماس بر منحنی در این نقطه عمود باشد. بدیهی است که اگر شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم، شیب خط قائم بدست می آید.

$m' = \dfrac{-۱}{f'(a)}$ شیب خط قائم

***

بنابراین معادله ی خط مماس و خط قائم بر منحنی در نقطه ی $M(a,b)$ واقع بر نمودار آن به شکل زیر خواهند بود.

$y = m(x-a)+b$ معادله ی خط مماس

$y = m'(x-a)+b$ معادله ی خط قائم

***

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt{x^۲ + ۳x}$ را در نقطه ی $x = ۱$ بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = ۲ + \tan x$ را در نقطه ی $x = \dfrac{\pi}{۴}$ بدست آورید.

***

تمرین: معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = x^۲ - ۲x - ۳$ در نقطه ی بر خورد نمودار تابع با محور عرضها را بنویسید.

***

تمرین: نقاطی از منحنی تابع $y = x^۳ - ۳x$ را پیدا کنید که در آن نقاط خط مماس بر منحنی موازی محور x ها باشد.

تمرین : در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y = \sin ۳x$ موازی محور طول ها است.

***

تمرین برای حل :

۱ : معادله ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = \tan^{-۱}\sqrt{x}$ را در نقطه ای به طول ۱ روی آن به دست آورید.

۲ : مقدار k را طوری بیابید که خط مماس بر منحنی $y = kx^۲ + ۲x + ۱$ در نقطه ی $x = ۱$ موازی محور طول ها باشد.

۳ : نقاطی از نمودار $y = x^۳ - ۲x - ۱$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

۴ : تابع $y = ax^۳ + bx + ۱$ داده شده است. مقدار b و a را طوری بیابید که خط $y = ۵x - ۳$ در نقطه ای به طول یک بر منحنی تابع فوق مماس شود.

***

آهنگ تغییرات

واضح است که کمیت های زیادی وجود دارند که تغییر یکی وابسته به تغییر دیگری است. مانند

الف : مساحت مربع تابعی از طول ضلع آن است.

ب : مساحت دایره تابعی از شعاع آن است.

ج : محیط دایره تابعی از شعاع آن است.

د : حجم کره تابعی از شعاع آن است.

هـ : شتاب حرکت یک متحرک تابعی از سرعت آن است.

حال اگر از بین دو کمیت یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر در دیگری می شود، یکی را به عنوان متغیر (متغیر مستقل یـا x) و دیگری را به عنوان تابعی از آن متغیر (متغیر وابسته یا y) در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$y = f(x)$$

در این صورت تغییرات y نسبت به تغییرات x را آهنگ تغییر y نسبت به تغییر x می گوییم.

آهنگ تغییر را می توان به یکی از دو صورت زیر بررسی کرد.

۱ : آهنگ تغییرات متوسط

آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x. وقتی x از $x=a$ تا $x=b$ تغییر کند. برابر است با :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تذکر : اگر قرار دهیم. $\Delta x=h=b-a$ در این صورت $b=a+h$ یعنی اگر مقدار کمیت a را به اندازه ی h واحد تغییر دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

۲ : آهنگ تغییرات آنی (لحظه ای)

حد آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x وقتی تغییر x خیلی ناچیز ($h\to ۰$) باشد، را آهنگ لحظه ای یا به اختصار آهنگ تغییر کمیت $y=f(x)$ به کمیت x در a می گویند.

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: با توجه به تعریف مشتق تابع در یک نقطه واضح است که

$$\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)$$

***

تمرین : آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی به ضلع x سانتی متر را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ تغییر می کند، بیابید.

حل :

$$v(x)=x^{۳}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{v(۵)-v(۲)}{۵-۲}=\frac{۱۲۵-۸}{۳}=۳۹$$

تمرین : آهنگ تغییر مساحت یک دایره را نسبت به تغییرات شعاع آن وقتی که $r=۵$ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

حل :

$$s(r)=\pi r^{۲} \to s'(r)=۲\pi r$$

$$s'(۵)=۲\pi(۵)=۱۰\pi$$

***

تمرین : اگر $f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری باشد. (t بر حسب ساعت)آهنگ تغییر ات متوسط افزایش جمعیت را در ۵ ساعت اول ، پس از زمان $t_{۱}=۲$ را حساب کنید.

حل :

$$f(t)=۳۰+۱۰t^{۲}$$

$$f(۲)=۳۰+۱۰(۲)^{۲}=۷۰$$

$$f(۷)=۳۰+۱۰(۷)^{۲}=۵۲۰$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(۷)-f(۲)}{۷-۲}=\frac{۵۲۰-۷۰}{۵}=۹۰$$

***

تمرین: حجم مخروطی به ارتفاع ثابت ۵ سانتی متر تابعی از شعاع قاعده ی آن است. آهنگ تغییر حجم مخروط را نسبت به شعاع قاعده ی آن وقتی $r=۳$ سانتی متر باشد، را حساب کنید.

***

تمرین : طول دو ضلع مثلثی ۱ و ۲ و طول ضلع سوم برابر متغیر l است. فرض کنید که زاویه ی مقابل به این ضلع α باشد.

الف : l را بر حسب α بنویسید.

ب : مشتق l را بر حسب α به دست آورید.

ج : آهنگ تغییرات l وقتی که $\alpha=\frac{\pi}{۴}$ را به دست آورید.

حل :

$$l^{۲}=(۱)^{۲}+(۲)^{۲}-۲(۱)(۲)\cos\alpha \to l(\alpha)=\sqrt{۵-۴\cos\alpha}$$

$$l'(\alpha)=\frac{۴\sin\alpha}{۲\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}=\frac{۲\sin\alpha}{\sqrt{۵-۴\cos\alpha}}$$

$$l'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\sin(\frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۵-۴\cos(\frac{\pi}{۴})}}=\frac{۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\sqrt{۵-۴(\frac{\sqrt{۲}}{۲})}}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۵-۲\sqrt{۲}}}$$

***

تمرین : مساحت هر دایره تابعی از محیط آن است. آهنگ تغییرات مساحت دایره را نسبت به محیط آن را بـرای دایـره ای بـه محیط ۵π حساب کنید.

حل :

$$s(r)=\pi r^{۲}\xrightarrow{p=۲\pi r\rightarrow r=\frac{p}{۲\pi}}s(p)=\pi(\frac{p}{۲\pi})^{۲}=\frac{p^{۲}}{۴\pi}$$

$$s(p)=\frac{p^{۲}}{۴\pi}\rightarrow s'(p)=\frac{۲p}{۴\pi}=\frac{p}{۲\pi}$$

$$s(۵\pi)=\frac{۵\pi}{۲\pi}=۲/۵$$

***

تمرین : مخزنی که گنجایش۶۰ لیتر آب را دارد و می تواند در مدت ۲۰۰ ثانیه کاملاً تخلیه شود، لبریز از آب بـود. در لحظـه‌ی $t=۰$ ، شیر این مخزن باز می شود. اگر حجم آب باقی مانده در مخزن پس از t ثانیـه از رابطـه ی $v=۶۰(۱-\frac{t}{۲۰۰})^{۲}$ بـه دست آید.

الف : آهنگ تغییرات متوسط تخلیه ی آب پس از یک دقیقه چقدر است؟

ب :آهنگ تغییرات تخلیه ی آب در $t=۱۰۰$ ثانیه چقدر است؟

حل : تابع تخلیه ی آب

$$v(t)=۶۰-۶۰(۱-\frac{t}{۲۰۰})^{۲}=۶۰(۱-(۱-\frac{t}{۱۰۰}+\frac{t^{۲}}{۴۰۰۰۰}))$$

$$=۶۰(\frac{t}{۱۰۰}-\frac{t^{۲}}{۴۰۰۰۰})=۶۰\times\frac{۴۰۰t-t^{۲}}{۴۰۰۰۰}=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})$$

الف :

$$v(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})$$

$$v(۰)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰(۰)-(۰)^{۲})=۰$$

$$v(۶۰)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰(۶۰)-(۶۰)^{۲})=۳۰/۶$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(۶۰)-v(۰)}{۶۰-۰}=\frac{۳۰/۶-۰}{۶۰}=۰/۵۱$$

ب :

$$v(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰t-t^{۲})\rightarrow v'(t)=\frac{۳}{۲۰۰۰}(۴۰۰-۲t)=\frac{۳}{۱۰۰۰}(۲۰۰-t)$$

$$v'(۱۰۰)=\frac{۳}{۱۰۰۰}(۲۰۰-۱۰۰)=\frac{۳}{۱۰}=۰/۳$$

***

نتیجه : می دانیم که نسبت تغییر مسافت یک متحرک نسبت به زمان را سرعت و همچنین نسبت تغییر سرعت یـک متحـرک نسبت به زمان را شتاب می نامند. بنابراین اگر $x=f(t)$ معادله ی حرکت یک متحرک باشد. داریم :

سرعت $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۲}-x_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}$

شتاب $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۲}-v_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}$

تمرین : معادله ی حرکت متحرکی به صورت $x(t)=t^{۲}-۵t+۶$ است. مطلوب است.

الف : سرعت متوسط این متحرک بین لحظات $t_{۱}=۳$ تا $t_{۲}=۵$ ثانیه

ب : سرعت لحظه ای متحرک در لحظه ی $t_{۰}=۲$

حل:

الف :

$$x(t)=t^{۲}-۵t+۶$$

$$x(۳)=(۳)^{۲}-۵(۳)+۶=۹-۱۵+۶=۰$$

$$x(۵)=(۵)^{۲}-۵(۵)+۶=۲۵-۲۵+۶=۶$$

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_{۲}-x_{۱}}{t_{۲}-t_{۱}}=\frac{۶-۰}{۵-۳}=۳\ \frac{m}{s}$$

ب :

$$x'(t)=۲t-۵ \rightarrow x'(۲)=۲(۲)-۵=-۱\ \frac{m}{s}$$

تمرین : توپی را در راستای قائم از زمین به بالا پرتاب می کنیم. اگر جهت مثبت به طرف بالا و معادلـه ی حرکـت تـوپ بـه صورت $y(t)=-۵t^{۲}+۲۰t$ باشد. (t بر حسب ثانیه و y بر حسب متر)

۱ : نمودار $y(t)$ را رسم کنید.

۲ : دامنه ی $y(t)$ را تعیین کنید.

۳ : سرعت متوسط توپ را از لحظه ی پرتاب $(t=۰)$ تا پایان ثانیه ی دوم $(t=۲)$ حساب کنید.

۴ : سرعت لحظه ای توپ را در یک ثانیه پس از پرتاب $(t=۱)$ را حساب کنید.

۵ : سرعت لحظه ای توپ هنگام برخورد با زمین چه قدر است؟

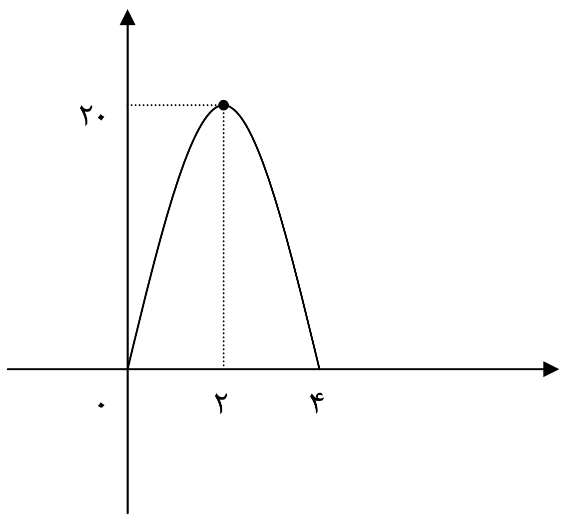
۶ : در چه زمانی توپ به بالا ترین ارتفاع خود می رسد. در این لحظه سرعت توپ چه قدر است و معنای آن چیست.

حل :

۱ : معادله داده شده یک سهمی و چون در آن $a=-۵$. پس نمودار سهمی رو به پایین بوده و دارای نقطه ی Max است.

$$x_{\circ}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۲۰}{۲(-۵)}=۲$$

x	۰	۲	۴
y	۰	۲۰	۰



۲ : چون بعد از ۴ ثانیه توپ مجدداً به زمین بر می گردد. لذا دامنه ی تابع می شود. $D=[۰,۴]$

۳ :

$$y(t)=-5t^{2}+20t$$

$$y(0)=-5(0)^{2}+20(0)=0$$

$$y(2)=-5(2)^{2}+20(2)=-20+40=20$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y(2)-y(0)}{2-0}=\frac{20+0}{2}=10$$

۴ :

$$y(t)=-5t^{2}+20t\rightarrow y'(t)=-10t+20$$

$$y'(1)=-10(1)+20=10\ \frac{m}{s}$$

۵ :

$$y'(4)=-10(4)+20=-20\ \frac{m}{s}$$

۶ : بالا ترین ارتفاع توپ زمانی است که $t=2$ باشد. لذا

$$y'(2)=-10(2)+20=0\ \frac{m}{s}$$

یعنی سرعت لحظه ای توپ در این لحظه برابر صفر است. (ایست لحظه ای)

***

بارم بندی حسابان

فصل	نوبت اول	نوبت دوم – شهریور و دی
اول	۱۰	۴
دوم	۱۰	۴
سوم	–	۳
چهارم	–	۴
پنجم	–	۵
جمع	۲۰	۲۰

ضمیمه :

جدول حروف یونانی

نام فارسی	نام لاتین	حرف کوچک	حرف بزرگ
آلفا	Alpha	α	A
بتا	Beta	β	B
گاما	Gamma	γ	Γ
دلتا	Delta	δ	Δ
اِپسیلون	Epsilon	ϵ	E
زِتا	Zeta	ζ	Z
اِتا	Eta	η	H
تتا	Theta	θ	Θ
یوتا	Iota	ι	I
کاپا	Kappa	κ	K
لاندا	Lambda	λ	Λ
مو (میو)	Mu	μ	M
نو	Nu	ν	N
زی	Xi	ξ	Ξ
اومیکرون	Omicron	o	O
پی	Pi	π	Π
رو	Rho	ρ	P
سیگما (زیگما)	Sigma	σ	Σ
تاو (تُو)	Tau	τ	T
اوپسیلون	Upsilon	υ	Υ
فی	Phi	ϕ	Φ
خی	Chi	χ	X
سای	Psi	ψ	Ψ
اُمگا	Omega	ω	Ω