هندسه ۱

سال دهم – متوسطه دوره دوم

رشته ریاضی و فیزیک

تألیف: دپارتمان هندسه خوان آموز

گروه آموزشی خوان آموز

مبتکر اولین کتاب های هوشمند ایران

فهرست مطالب

فصل ۱.   ترسیم های هندسی و استدلال

واژه هندسه (Geometry) از دو واژه‌ی Geo به معنای زمین و Metrein به معنای اندازه‌گیری آمده است. مصری‌ها اولین کسانی بودند که از هندسه برای کشاورزی و ساختن منابع و ابزارها استفاده می‌کرده‌اند. در این بین ترسیم اشکال هندسی یکی از مهمترین قسمت‌های هندسه بوده است.

اقلیدس پسر نوقطرس بن برنیقس، ریاضی دان، منجم و هندسه دان بزرگ تاریخ است که در سال ۳۲۳ ق.م متولد شد.

اقلیدس ریاضیدان یونانی ۲۳۰۰ سال قبل در شهر اسکندریه مصر که بخشی از یونان آن زمان بود زندگی می کرد.

او کتاب معروفش در زمینه هندسه را در این شهر بزرگ آموزشی نوشت.

اصول هندسه کتاب درسی اقلیدس بود که بیش از ۲۰۰۰ سال مورد استفاده مداوم قرار گرفت.

زندگینامه کامل اقلیدس

این فصل به دو بخش **ترسیم های هندسی** و **استدلال** تقسیم می شود.

الف) ترسیم های هندسی

در این بخش قرارمون اینِ که مطالب زیر رو با هم مرور کنیم و مطالب جدید رو یاد بگیریم:

۱) مقدمات رسم
۲) برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن
۳) برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن
۴) رسم خط عمود و خط موازی

درس صفر: مقدمات رسم

معنای ترسیم در هندسه:

در ترسیم شما فقط از ابزارهای پرگار و خط کش نا مدرج استفاده میکنید. در این فرآیند شما مجاز به استفاده از نقاله برای انداز گیری زاویه یا خط کش مدرج برای اندازه گیری طول پاره خط ها نیستید.

چرا ما ترسیم ها را یاد میگیریم؟

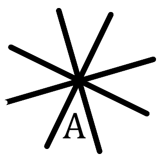
یونانیان با ستان قسمت مهمی از چیزی را که امروز ما به نام هند سه می شنا سیم را بیش از ۲۰۰۰ سال پیش فرمول بندی کردند. به ویژه، ریا ضیدان یونانی اقلیدس تمام این فرمول ها را در کتاب ۱۳ جلدی خود به نام "ا صول" که هنوز هم یکی از بهترین منابع هند سه به شمار می رود جمع آوری کرده ا ست. در این مجموعه اقلیدس از روش ترسیم به شکل گسترده ای استفاده کرده است و به همین خاطر ترسیم تبدیل به یکی از زمینه های مهم در مطالعه هندســه شــده اســت. آن ها همینطور در دیدن مفاهیم هندســی به ما کمک می کنند و وقتی وســایل اندازه گیری نامناسب هستند ابزاری به ما می دهند تا اشکال را رسم کنیم.

چرا اقلیدس از ترسیم ها کمک گرفت؟

چرا اقلیدس براحتی از خط کش مدرج برای اندازه گیری طول ها ا ستفاده نکرد؟ برای مثال، یکی از تر سیم های بسیار اولیه تقسیم یک پاره خط به دو قسمت مساوی است. چرا او از خط کش مدرج برای تقسیم طول به دو قسمت استفاده نکرد؟

یک نظریه این ا ست که یونانی ها نمی توا ستند براحتی محا سبات عددی ر انجام دهند. آن ها تنها اعدا طبیعی را می شناختند یعنی صفر و بقیه اعداد صحیح برای آن ها بی معنی بود. مثلا آن ها نمی توا ستند ۵ را بر ۲ تق سیم کنند چون ۲,۵ را نمی شناختند. همینطور آن ها اعداد را مثل امروزه به صورت د سته بندی شده ندا شتند یعنی ده تایی یا صدتایی یا ... نداشتند و اعداد را به صورتی که ما امروزه به آن ها اعداد یونانی می گوییم میشناختند که برای نوشتن و محاسبه بسیار نامناسب بود. مثلا عدد ۳۰ در اعداد یونانی به صورت XXX نوشته می شود. این مشکل آن ها را برآن داشت تا از ترسیم ها برای حل مسائل هندسی استفاده کنند یعنی تنها از خط کش نامدرج و پرگار.

مثال: نقطه‌ای مثل A داده شده ا ست. چند خط می‌توان ر سم کرد که از نقطه A می‌گذرند. اگر خط کش را در جهت مختلف طوری که نقطه A در امتداد آن باشـــد قرار دهیم و خط رســـم کنیم به راحتی می‌توان دید که **بینهایت** خط از نقطه A می‌گذرند.



حالا فرض کنید نقطه‌ی متمایزی مثل B داده شده است. چند خط می‌توان رسم کرد که هم از A و هم از B می‌گذرد؟

اگر خط‌کش را در امتداد B, A قرار دهیم، خواهیم دید که تنها می‌توان یک خط رسم کرد.

بنابراین با داشتن دو نقطه از یک خط معین می‌توان آن خط را رسم کرد.

پس **خط کش (نامدرج)** تنها ابزاری برای وصل کردن نقاط به یکدیگر و ساختن خط است.

وسیله دیگری که از آن استفاده می کنیم پرگار است.

برای رسم کردن تمام نقاطی که از یک نقطه فاصله‌ی یکسانی دارند از **پرگار** استفاده می‌کنیم.

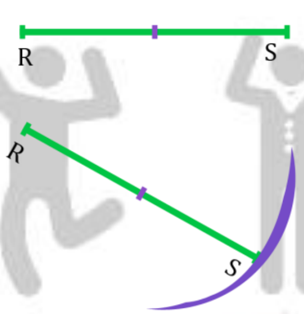
اما فاصله چیست؟

ما کوتاه ترین م سیر بین دو نقطه یا دو شکل را فا صله بین آن دو می گوییم. در هند سه این کوتاه ترین م سیر همان پاره خط واصل بین دو نقطه است.

در واقع تر سیم با پرگار، اولین جایی ا ست که ما از مفهوم فا صله ا ستفاده میکنیم. یعنی به کمک پرگار می توان فاصله های از قبل داده شده را رسم کرد.

ترسم پاره خطی برابر با پاره خطی مفروض (کپی پاره خط)

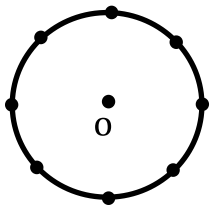
فرض کنید یک پاره خط به شما داده اند (طول آن را نمیدانید) و از شما بخواهند آن را دوباره ر سم کنید. دقت کنید که شما خط کش مدرجی برای اندازه گیری ندارید. برای ان کار شما دهانه پرگار را به اندازه طول پاره خط باز میکنید و دایره به اندازه آن شعاع ر سم می کنید، حالا اگر مرکز دایره را به یکی از نقاط روی دایره و صل کنید انگاه شما پاره خطی به اندازه پاره خط قبلی دارید.



کپی‌پاره‌خط

تمرین پای تخته: مجموعه نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه برابر با ۲ باشد.

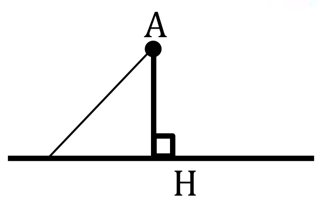
پاسخ: نقطه‌ی O را در نظر بگیرید. بینهایت نقطه در جهات مختلف نقطه‌ی O وجود دارند که فاصله‌ی آن‌ها تا O برابر با ۲ است. کافیست دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کنیم و دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز O رسم کنیم.



فاصله‌ی یک نقطه از یک خط چیست؟

در واقع باید کوتاه‌ترین مســـیر بین دو نقطه و خط را بیابیم. برای این‌کار باید پاره‌خط عمود بر خط و گذرنده از نقطه‌ی مفروض را اندازه بگیریم.

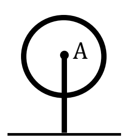
چون بنابر **قضیه‌فیثاغورث** هر نقطه‌ی دیگری روی خط فاصله‌اش تا نقطه مفروض بیشتر از طول پاره‌خط عمود بر خط است.



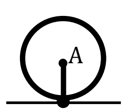
چه رابطه ای بین خط و دایره است؟

مثال: فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط L برابر با ۲ سانتی‌متر است.

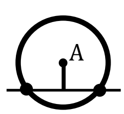
اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع کمتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط نقطه‌ی مشترک ندارند.



اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها یک نقطه‌ی مشترک دارند.



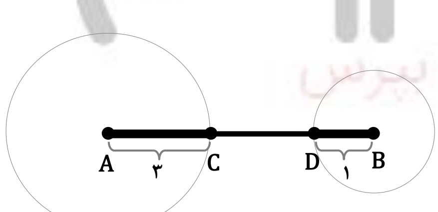
اگر دایره‌ای به مرکز A و شعاع بیشتر از ۲ رسم کنیم، دایره و خط تنها ۲ نقطه مشترک دارند.



رابطه‌ی خط و دایره

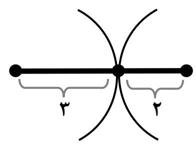
چه رابطه ای بین دو دایره وجود دارد؟

مثال: دو نقطه‌ی A , B و به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر از یکدیگر قرار دارند. ابتدا دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۳ و سپس دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱ رسم می‌کنیم.

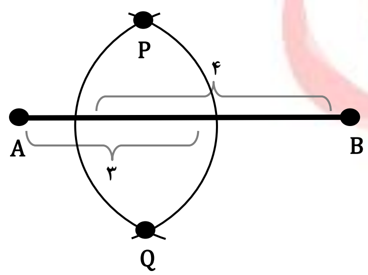


اگر نقاط برخورد دایره‌ها با پاره‌خط AB را D,C بنامیم می‌بینیم که $CD=1$ و دایره‌ها نقطه‌ی مشترک ندارند.

حالا فرض کنید یکبار دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ و بار دیگر دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ رسم کنیم. چون مجموع دو شعاع دایره برابر با $5=3+2$ است بنابراین دو دایره تنها یک نقطه مشترک دارند.



این‌بار فرض کنید شعاع دایره‌ها را ۳ و ۴ قرار دهیم. مجموع شعاع‌ها $3+4=1$ بیشتر از طول پاره‌خط AB است. بنابراین دایره‌ها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. این دو نقطه را Q,P می‌نامیم. فاصله‌ی P,Q از نقطه A ،۳ سانتی‌متر و از نقطه‌ی B ،۴ سانتی‌متر است.



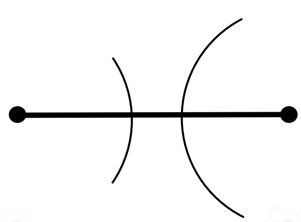
تمرین پای تخته ۲: با توجه به مثال های بالا آیا می توانید تمام روابط بین دو دایره را ترسیم کنید؟!

روابط بین دودایره

مثال: آیا می‌توان مثلثی به ابعاد ۶، ۲و ۳ ترسیم کرد؟

پاره‌خطی به طول ۶ رسم می‌کنیم.

از دوسر پاره‌خط دایره‌هایی به شعاع ۲ و ۳ رسم می‌کنیم.

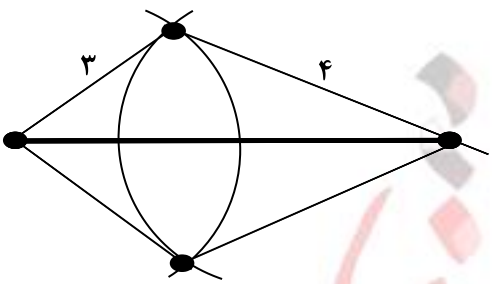


چون مجموع شعاع‌ها $5=3+2$ کمتر از ۶ است بنابراین نمی‌توان مثلثی با این ابعاد رسم کرد. توجه کنید که ما اینجا داریم از نامساوی مثلثی به صورت شهودی استفاده می‌کنیم.

بنابر نامساوی مثلثی، مجموع دو ضلع همواره از ضلع سوم بزرگتر است.

مثال: آیا می‌توان مثلثی به ابعاد ۶ و ۳ و ۴ رسم کرد؟

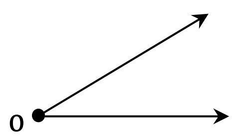
با تکرار مراحل بالا و توجه به این نکته که $۷ = ۴ + ۳$ بزرگ‌تر از ۶ است، به راحتی مثلث مورد نظر را رسم کردیم. توجه کنید که ما دو مثلث با این ابعاد توانستیم رسم کنیم.



رسم مثلث با اضلاع مشخص

درس اول: برخی از خواص نیمساز زاویه و ترسیم آن

تعریف زاویه:



دو نیم‌خط با ابتدای مشترک تشکیل یک زاویه می‌دهند.

پس برای رسم یک زاویه کافیست با استفاده از خط‌کش دو نیم خط متقاطع رسم کنیم.

ترسیم یک زاویه برابر با زاویه ای مفروض (کپی زاویه)

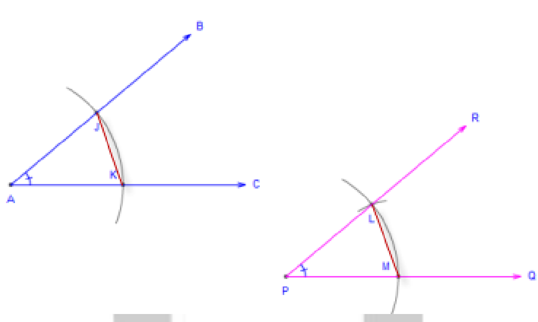
۱) ابتدا یک نیم خط دلخواه مثل $\overrightarrow{PQ}$ رسم می کنیم.

۲) دایره‌ای به مرکز A و شعاع دلخواه رسم می‌کنیم نقاط برخورد دایره با اضلاع را J, K می‌نامیم.

۳) حال دایره‌ای به مرکز P و همان شعاع قبلی می‌زنیم محل برخورد را M می‌نامیم.

۴) سپس دهانه ی پرگار را به اندازه ی $\overline{KJ}$ باز می کنیم و از نقطه ی M دایره ای رسم می کنیم تا دایره قبلی را در نقطه ای مثل L قطع کند. حال L را به P وصل می کنیم.

چون $\overline{AK} = \overline{AJ} = \overline{PM} = \overline{PL}$, $\overline{JK} = \overline{LM}$ پس $A\hat{J}K \cong A\hat{B}C$ پس $\hat{A} = \hat{P}$.

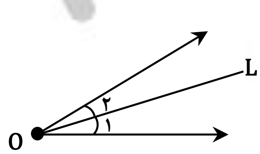


کپی زاویه

تعریف نیمساز زاویه:

نیمساز زاویه خطی است که یک زاویه رابه دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

$O_1 = O_2$, L نیمساز زاویه است.



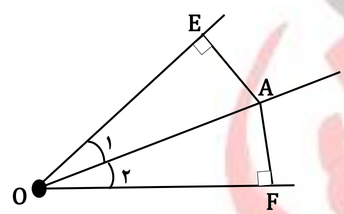
تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله‌اند.

تمرین پای تخته ۳: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: زاویه O و نقطه‌ی A روی نیمساز O را در نظر بگیرید.

دیدیم که فاصله‌ی یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خط عمود بر آن خط.

بنابراین از نقطه A به اضلاع زاویه O عمود می‌کنیم و نقاط تقاطع را F, E می‌نامیم.



$$\begin{cases} \overline{OA} = \overline{OA} & \text{(ضلع مشترک)} \\ AEO = AFO = 90^\circ \\ O_1 = O_2 & \text{(نقطه A روی نیمساز است.)} \end{cases}$$

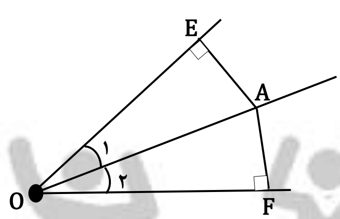
بنابر حالت وتر و یک زاویه دو مثلث قائم‌الزاویه AFO , AEO همنهشت هستند که با $A\overset{\triangle}{E}O \cong A\overset{\triangle}{F}O$ نشان می‌دهیم. پس $\overline{AE} = \overline{AF}$ یعنی فاصله‌ی تمام نقاط روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه‌اند.

پاسخ تشریحی

اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد آن‌گاه حتماً روی نیمساز زاویه قرار دارد.

تمرین پای تخته ۴: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: نقطه A را داخل زاویه O طوری در نظر بگیرید که فاصله‌اش تا دو ضلع زاویه مقداری یکسان باشد. A را به O وصل می‌کنیم.



$$\begin{cases} \overline{AE} = \overline{AF} & \text{(طبق فرض)} \\ \overline{AO} = \overline{AO} & \text{(ضلع مشترک)} \\ A\hat{E}O = A\hat{F}O = 90^\circ \end{cases}$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $AEO \cong AFO$ پس $O_1 = O_2$. یعنی نقطه‌ی A روی نیمساز زاویه O قرار دارد.

پاسخ تشریحی

ترسیم نیمساز یک زاویه:

زاویه XOY را در نظر بگیرید.

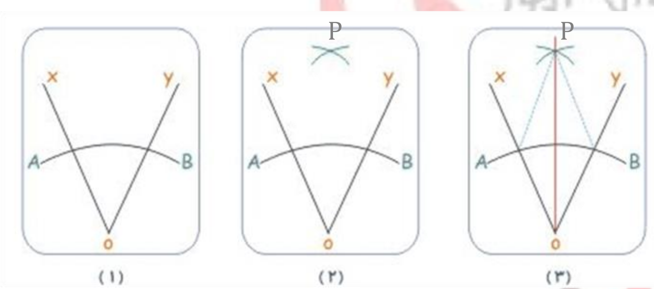
۱) دایره‌ای به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم کنید، نقاط برخورد را A, B می‌نامیم.

۲) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف فاصله‌ی A تا B باز می‌کنیم و دو دایره به مرکز A , B با شعاع یکسان رسم می‌کنیم. نقطه‌ی مشترک را P می‌نامیم.

توجه کنید که چون مجموع دو شعاع بیشتر از طول پاره‌خط $\overline{AB}$ است دو دایره حتماً یکدیگر را قطع می‌کنند.

۳) خط گذرنده از P, O را رسم کنیم.

اگر نقطه‌ی P را به B, A وصل کنیم آن‌گاه $\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OP} = \overline{OP}$, $\overline{AP} = \overline{BP}$ بنابراین بنابر حالت (ض‌ض‌ض) $A\overset{\Delta}{O}P \cong B\overset{\Delta}{O}P$ و در نتیجه $AOP \cong BOP$ یعنی P روی نیمساز O قرار دارد.



ترسیم نیمساز یک زاویه

درس دوم: برخی از خواص عمودمنصف و ترسیم آن

تعریف عمود منصف یک پاره‌خط:

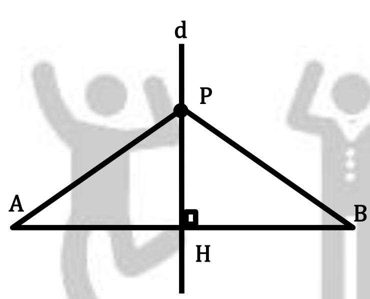
همانطور که از اسم عمود منصف پیداست، خطی است که بر پاره‌خط عمود است و آن را نصف می‌کند.

اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد، فاصله‌اش از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

تمرین پای تخته ۵: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره‌خط $\overline{AB}$ و عمود منصف d و نقطه‌ی P روی آن را در نظر بگیرید.

نقطه P را به A , B وصل می‌کنیم. $\overline{PH} = \overline{PH}$, $\overline{AH} = \overline{BH}$, $PHA = PHB = ۹۰^\circ$ پس $A\overset{\Delta}{H}P \cong B\overset{\Delta}{H}P$ در نتیجه $\overline{AP} = \overline{BP}$.

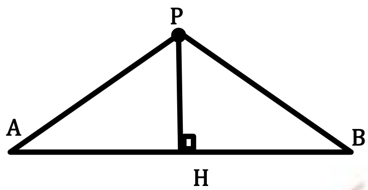


پاسخ تشریحی

اگر نقطه‌ای فاصله‌اش تا دو سر یک پاره‌خط به یک اندازه باشد آن‌گاه آن نقطه روی عمود منصف پاره‌خط است.

تمرین پای تخته ۶: نشان دهید نکته ی بالا همواره برقرار است.

پاسخ: پاره‌خط $\overline{AB}$ و نقطه P را طوری در نظر بگیرید که فا صله‌ی P تا دو سر پاره‌خط به یک اندازه با شد. یعنی $\overline{AP} = \overline{BP}$.



حالا از P به $\overline{AB}$ عمود می‌کنیم پای عمود را H می‌نامیم.

$\overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{PH} = \overline{PH}$, $A\hat{H}P = B\hat{H}P = 90^\circ$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $A\overset{\Delta}{H}P \cong B\overset{\Delta}{H}P$ در نتیجه $\overline{AH} = \overline{BH}$ پس P روی عمودمنصف $\overline{AB}$ قرار دارد.

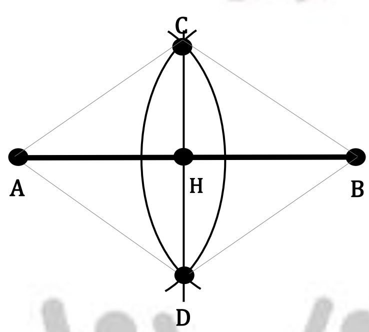
پاسخ‌تشریحی

ترسیم عمود منصف یک پاره‌خط:

پاره‌خط $\overline{AB}$ در نظر بگیرید.

۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از نصف طول $\overline{AB}$ باز کنید و یک بار دایره‌ای به مرکز A و یک‌بار دایره‌ای به مرکز B و شعاع یکسان رسم کنید. نقاط برخورد را D,C می‌نامیم.

۲) خط واصل D,C را رسم می‌کنیم.



اگر C را به A,B و صل کنیم آن‌گاه $\overline{AC} = \overline{BC}$ بنابراین C روی عمود منصف $\overline{AB}$ است و به همین ترتیب D نیز روی عمود منصف $\overline{AB}$ است پس خط واصل D,C عمود منصف $\overline{AB}$ است.

ترسیم‌عمودمنصف

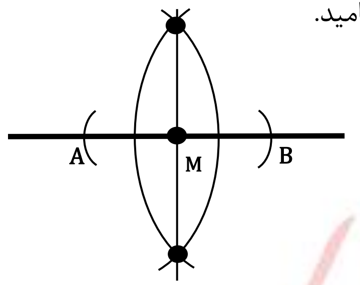
درس سوم: رسم خط عمود و خط موازی

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی روی آن:

خط d و نقطه‌ی M را روی آن در نظر بگیرید.

۱) دایره‌ای به مرکز M و شعاع دلخواه رسم کنید. نقاط برخورد را A , B بنامید.

۲) عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ را رسم کنید.



در این صورت خطی عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که از نقطه M می‌گذرد.

روش رسم

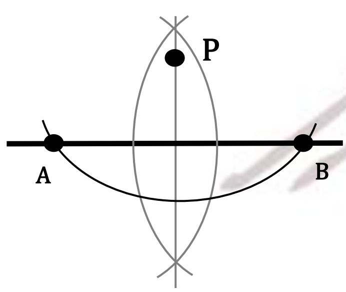
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ی غیرواقع بر آن:

خط d و نقطه خارج آن را در نظر بگیرید.

۱) دهانه‌ی پرگار را بیشتر از فاصله P تا خط d باز کرده و یک دایره رسم می‌کنیم. نقاط برخورد را A , B می‌نامیم.

۲) عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ را رسم می‌کنیم.

نقطه‌ی P از نقاط A , B به یک فاصله است پس P روی عمود منصف پاره‌خط $\overline{AB}$ و در نتیجه روی خط عمود بر خط d قرار دارد.



روش رسم

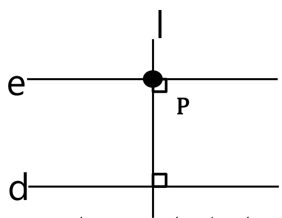
رسم خط عمود بر ابتدای یک نیم خط:

روش رسم

رسم یک مثلث قائم الزاویه با داشتن اندازه دو ضلع زاویه راست:

روش رسم

رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ی غیر واقع بر آن:



خط d و نقطه P خارج از آن را در نظر بگیرید.

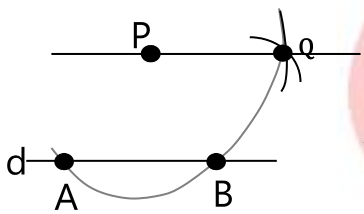
۱) خط عمود بر d و گذرنده از نقطه‌ی P را رسم کنید، آن را l می‌نامیم.

۲) خط عمود بر l و گذرنده از نقطه P را رسم کنید، آن را e می‌نامیم.

خط l را به عنوان خط مورب گذرنده از e,d دو خط در نظر می‌گیریم. چون تمام زوایای حا صل با هم م ساوی و برابر با 90° هستند بنابراین خط e با خط d موازی است.

راه‌حل دوم:

۱) دهانه‌ی پرگار را بیش از فاصـله‌ی P تا خط d باز کرده و دایره‌ای به مرکز P رســم می‌کنیم. نقاط برخورد را A , B می‌نامیم.



۲) دایره‌ای به مرکز B و شعاع $\overline{AP}$ رسم می‌کنیم.

۳) دایره‌ای به مرکز P و شعاع $\overline{AB}$ رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد را Q می‌نامیم.

۴) خط گذرنده از Q,P را رسم می‌کنیم.

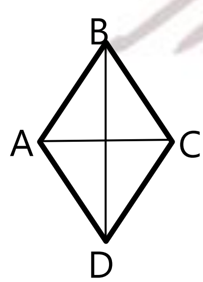
چون $\overline{AP}=\overline{BQ}$, $\overline{AB}=\overline{PQ}$ ا ست بنابراین چهار ضلعی ABPQ یک متوازی‌الا ضلاع ا ست. در نتیجه خط گذرنده از $\overline{PQ}$ با خط d موازی است.

روش رسم

ترسیم لوزی:

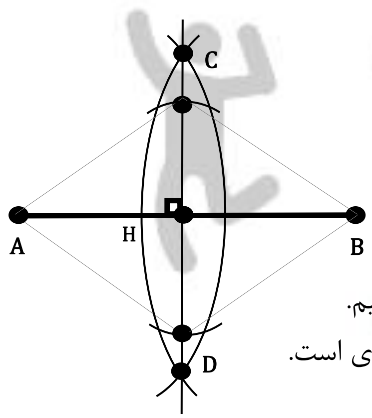
قبل از روش ترسیم، خواص لوزی را یادآوری می کنیم:

- ضلع های روبرو موازی اند.
- تمام اضلاع برابرند.
- زوایای روبرو دو به دو برابرند.
- قطرها عمود منصف یکدیگرند.
- زوایای مجاور مکمل اند.
- دارای ۲ محور تقارن است.
- قطرها نیمساز زاویه ها هستند.



تمرین پای تخته ۷: لوزی با قطرهایی به طول ۶ و ۴ رسم کنید.

پاسخ:



۱) پاره‌خط $\overline{AB}$ به طول ۶ رسم می‌کنیم.

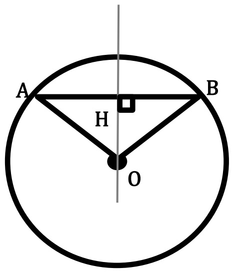
۲) عمودمنصف $\overline{AB}$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی برخورد با $\overline{AB}$ را H می‌نامیم.

۳) دهانه‌ی پرگار را به اندازه ۲ باز کرده و دایره‌ای به مرکز H و شعاع ۲ می‌زنیم،

۴) نقاط برخورد با عمودمنصف را D,C می‌نامیم و D,C را به B,A وصل می‌کنیم.

چون قطرها برهم عمود و منصف یکدیگر هستند پس چهارضلعی ABCD یک لوزی است.

یافتن مرکز دایره:



می‌دانیم که عمودمنصف وتر یک دایره از مرکز آن می‌گذرد.

دایره‌ای به مرکز O و وتر $\overline{AB}$ در آن در نظر بگیرید.

از O به $\overline{AB}$ عمود می‌کنیم و نقطه‌ی برخورد H را می‌نامیم.

$$\overline{OH} = \overline{OH}\ ,\ \overline{OA} = \overline{OB}\ ,\ H_1 = H_2 = 90^\circ$$

بنابر حالت وتر و یک ضلع $\overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH}$ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$ در نتیجه عمودمنصف وتر $\overline{AB}$ از O می‌گذرد.

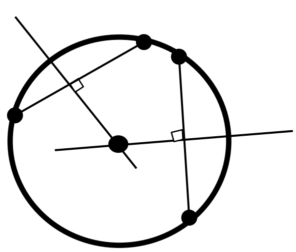
پس برای یافتن مرکز یک دایره کافیست:

۱) دو وتر از دایره را که با هم موازی نیستند رسم می‌کنیم.

۲) عمودمنصف‌های آن‌ها را رسم می‌کنیم. چون عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند،

بنابراین:

محل برخورد عمود منصف های دو وتر غیرموازی در دایره، مرکز دایره است.



روش رسم

قضیه تالس و تشابه

فصل دوم

مدرس: سیدابوذر حسینی

* نسبت و تناسب

تعریف: نسبت عدد a به عدد $b \neq 0$ عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$

تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ یک **تناسب** نامیده می‌شود: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

☑ مثال: در تناسب‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.

الف) $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین - وسطین}} 4x=3x+6 \to x=6$

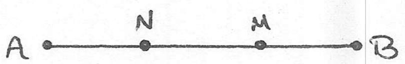
ب) $\frac{3}{y}=\frac{y}{27} \xrightarrow{\text{''}} y^2=3\times 27=81 \to y=\pm 9$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ، عدد b، **میانگین هندسی** دو عدد a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^2=ac$ به‌دست می‌آید.

☑ مثال: میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را بیابید.

$b^2=4\times 25=100 \to b=\pm 10$

☑ تست: روی پاره‌خط $AB=12$ ، دو نقطه‌ی M و N را چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=2$ ، در این صورت طول پاره‌خط MN کدام است؟



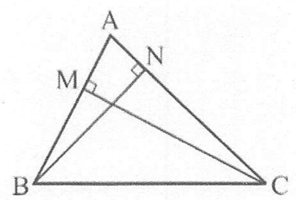
$\frac{AM}{MB}=2 \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{\underset{12}{AB}}=\frac{2}{3} \to AM=8$

$\frac{BN}{AN}=2 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{\overset{12}{AB}}{AN}=3 \to AN=4$

$MN=AM-AN=4$

۱) ۳ ‏ ۲) ۶ ‏ ۳) ۴ ✓ ‏ ۴) ۸

☑ مثال: با توجه به شکل مقابل، جاهای خالی را پر کنید.



الف) اگر AB را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CM$

ب) اگر AC را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

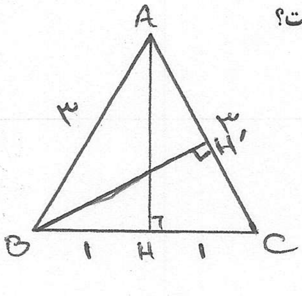
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BN$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$AB\times CM=AC\times BN \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BN}{CM}$

نتیجه: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

☑ تست: اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟



ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABH}: AH^2+1^2=3^2 \to AH^2=8 \to AH=\sqrt{8}$

حال اگر ارتفاع BH' را رسم کنیم، طبق نتیجه فوق داریم:

$AH\times BC=BH'\times AC$

$\sqrt{8}\times 2=BH'\times 3 \to BH'=\frac{2\sqrt{8}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۱) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ✓

۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $\sqrt{3}$

ویژگی‌های تناسب:

۱) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ با عمل طرفین-وسطین تساوی $ad=bc$ را خواهیم داشت.

۲) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ را به‌دست آورد.

۳) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله‌ی میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ را به‌دست آورد.

۴) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{ترکیب در صورت} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} & \text{ترکیب در مخرج} \end{cases}$

۵) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{تفضیل در صورت} \\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d} & \text{تفضیل در مخرج} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \\ \frac{c}{d}=\frac{e}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

۷) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{b+d}=k \\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=k \end{cases}$

☑ تست: اگر $\frac{x-y}{2x+y}=\frac{2}{5}$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۷ ✓ ۲) $\frac{7}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

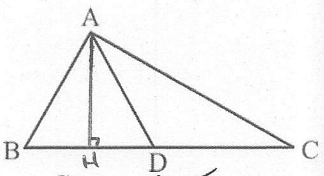
$$\frac{x-y}{2x+y}=\frac{2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}} 5x-5y=4x+2y$$

$$\longrightarrow 5x-4x=5y+2y \longrightarrow x=7y \longrightarrow \frac{x}{y}=7$$

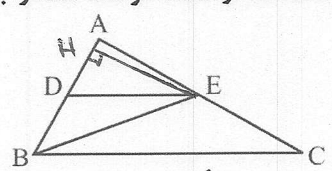
☑ مثال: اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=5$ باشد، مقدار $\frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}$ را بیابید.

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \xrightarrow{\text{ضرب}} \frac{2a}{2a'}=\frac{3b}{3b'}=\frac{-4c}{-4c'}=5 \xrightarrow{\text{ویژگی ۷ تناسب}} \frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}=5$$

☑ مثال: در شکل‌های زیر، نسبت مساحت دو مثلث خواسته شده را بنویسید.



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AH}\times BD}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AH}\times CD}=\frac{BD}{CD}$$

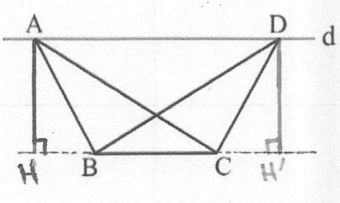


$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{EH}\times AD}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{EH}\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

✍ **نتیجه‌ی ۱:** هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت **مساحت‌های** آن‌ها برابر است با نسبت **قاعده‌های** نظیر آن ارتفاع‌ها.

✍ **نتیجه‌ی ۲:** اگر دو مثلث یک رأس مشترک داشته باشند و قاعده‌ی مقابل به این رأس در دو مثلث روی یک خط راست قرار داشته باشد، نسبت **مساحت‌های** آن‌ها برابر است با نسبت **قاعده‌های** آن‌ها.

☑ مثال: در شکل مقابل، $d \parallel BC$ است. نشان دهید: $S_{ABC}=S_{DBC}$.



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AH$$
$$S_{DBC}=\frac{1}{2}BC\times DH'$$
$$\xrightarrow[AH=DH']{\text{فاصله دو خط موازی برابر}} S_{ABC}=S_{DBC}$$

✍ **نتیجه:** اگر دو مثلث، قاعده‌ی مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده‌ی مشترک، روی یک خط موازی این قاعده باشند، مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

تمرین (صفحه ۳۳ کتاب):

۱- اگر $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۶}=\frac{۳}{۵}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5}\xrightarrow{\text{ویژگی ۷ تناسب}}\frac{x+y+z}{\underbrace{2+3+6}_{11}}=\frac{3}{5}\to x+y+z=\frac{3\times 11}{5}=\boxed{\frac{33}{5}}$$

۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$b^2=8\times 10=80\to b=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۲}$ سانتی متر است .طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

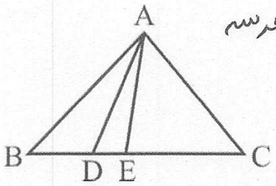
بلندترین ارتفاع بر کوتاه‌ترین ضلع وارد می‌شود:

$$\boxed{h_2=\sqrt{15}}$$

$$S=\cancel{\tfrac{1}{2}}\times 4\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=\cancel{\tfrac{1}{2}}\times 6\times h_2=\cancel{\tfrac{1}{2}}\times 8\times h_3$$

$$h_3=\frac{6\sqrt{15}}{8}=\boxed{\frac{3\sqrt{15}}{4}}$$

۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



قاعده‌های هرسه مثلث روی یک خط بوده و رأس A در هر سه مشترک است، پس نسبت مساحت‌ها، برابر نسبت قاعده‌ها است.

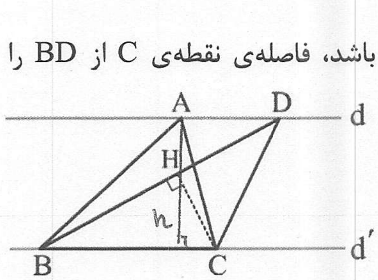
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=3\to\frac{EC}{DE}=3\to DE=\frac{1}{3}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=2\to\frac{EC}{BD}=2\to BD=\frac{1}{2}EC$$

$$\to\frac{DE}{BD}=\frac{\frac{1}{3}\cancel{EC}}{\frac{1}{2}\cancel{EC}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+EC}{DE}=\frac{\frac{1}{2}EC+\frac{1}{3}EC+EC}{\frac{1}{3}EC}=\frac{\frac{11}{6}\cancel{EC}}{\frac{1}{3}\cancel{EC}}=\boxed{\frac{11}{2}}$$

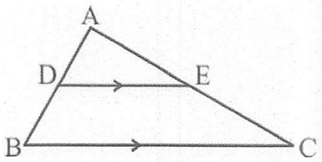
۵- در شکل مقابل، $d\|d'$ و مساحت مثلث ABC برابر $8cm^2$ است. اگر $BD=6cm$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



$$\underbrace{S_{ABC}}_{8}=S_{DBC}=\frac{1}{2}BC\times h\to S_{DBC}=8$$

$$\to\frac{1}{2}\underbrace{BD}_{6}\times CH=8\to 3CH=8\to\boxed{CH=\frac{8}{3}}$$

* قضیه‌ی تالس

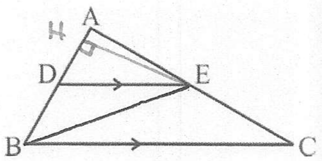


قضیه: در مثلث ABC شکل مقابل، اگر پاره‌خط DE موازی BC رسم شود، آنگاه پاره‌خط‌های ایجاد شده روی AB و AC با یکدیگر متناسب‌اند:

فرض : $DE \parallel BC$

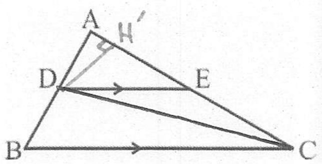
حکم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \longrightarrow$ جزء به جزء

اثبات: مرحله اول : از E به B وصل می‌کنیم :



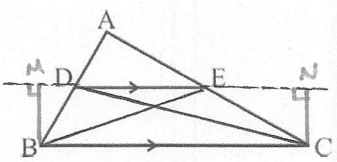
$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}EH}\times AD}{\cancel{\frac{1}{2}EH}\times DB}=\frac{AD}{DB} \quad (۱)$$

مرحله دوم : از D به C وصل می‌کنیم :



$$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}DH'}\times AE}{\cancel{\frac{1}{2}DH'}\times EC}=\frac{AE}{EC} \quad (۲)$$

مرحله سوم : حال باید نشان دهیم : $S_{BDE}=S_{CDE}$



$$S_{BDE}=\frac{1}{2}DE\times BM$$

$$S_{CDE}=\frac{1}{2}DE\times CN$$

$$\xrightarrow[\text{فاصله دو خط موازی برابر}]{BM=CN} S_{BDE}=S_{CDE} \quad (۳)$$

$$(۱),(۲) \text{ و } (۳) \Longrightarrow \begin{cases} \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{\boxed{S_{CDE}}}=\frac{AE}{EC} \\ \quad S_{BDE} \end{cases} \longrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

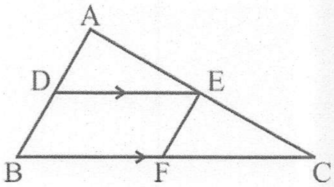
جزء به جزء

نتیجه‌ی ۱:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \to \boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}}$$

جزء به کل از بالا

نتیجه‌ی ۲ (تعمیم قضیه‌ی تالس):



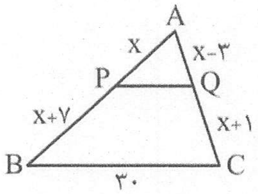
$$\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$$

برهان: مطابق شکل، از نقطه‌ی E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} DE \parallel BF \\ DB \parallel EF \end{cases} \xrightarrow{} \text{متوازی‌الاضلاع } DEFB \to DE=BF$$

$$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از پایین}} \frac{\overset{DE}{\boxed{BF}}}{BC}=\frac{AE}{AC} \to \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$$

☑ مثال: در شکل مقابل، PQ||BC است؛



الف) مقدار x را بیابید.

$$PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \to \frac{x}{x+۷}=\frac{x-۳}{x+۱}$$

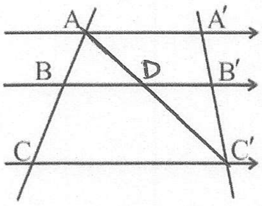
$$\to x(x+۱)=(x-۳)(x+۷) \to \cancel{x^۲}+x=\cancel{x^۲}+۴x-۲۱$$

$$\to x-۴x=-۲۱ \to -۳x=-۲۱ \to x=۷$$

ب) طول PQ را بیابید.

$$\text{جزء به کل}: \frac{PQ}{\underset{۳۰}{BC}}=\frac{\overset{۷}{AP}}{\underset{۷+۱۴}{AB}} \to \frac{PQ}{۳۰}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۷}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۱}}} \to PQ=۱۰$$

☑ تست: در شکل مقابل می‌دانیم AB=۱۶ و BC=۲۴ و A'C'=۳۰، طول A'B' چقدر است؟



۱) ۱۲ ✓
۲) ۲۰
۳) ۱۶
۴) ۱۰

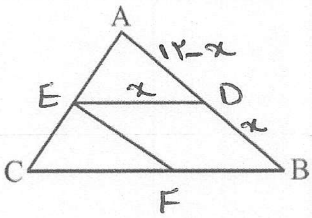
برهان: از A به C' وصل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{ACC'}: \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC'}$$

$$\overset{\Delta}{AA'C'}: \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AD}{DC'}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۴}}}=\frac{A'B'}{\underset{۳۰-A'B'}{B'C'}} \to ۶۰-۲A'B'=۳A'B' \to ۵A'B'=۶۰ \to A'B'=۱۲$$

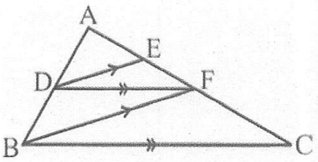
☑ تست: در شکل مقابل، یک لوزی در مثلث ABC محاط شده است به طوری که B، رأس لوزی و دو ضلع مجاور آن روی AB و BC قرار دارد. اگر AB=۱۲ و BC=۱۸ و AC=۹ باشد، طول ضلع لوزی کدام است؟



۱) ۷
۲) ۶
۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ✓
۴) $\frac{۳۴}{۵}$

ضلع لوزی را x می‌گیریم:

$$\text{جزء به کل}: \frac{\overset{x}{DE}}{\underset{\underset{۳}{\cancel{۱۸}}}{BC}}=\frac{\overset{۱۲-x}{AD}}{\underset{\underset{۲}{\cancel{۱۲}}}{AB}} \to ۲x=۳۶-۳x \to ۵x=۳۶ \to x=\frac{۳۶}{۵}$$



☑ مثال مهم: در شکل مقابل، $DE \parallel BF$ و $DF \parallel BC$ است؛

الف) ثابت کنید: $\frac{AE}{EF}=\frac{AF}{FC}$

$$\overset{\triangle}{ABF}: DE \parallel BF \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: DF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}$$

$$\to \frac{AE}{EF}=\frac{AF}{FC}$$

ب) ثابت کنید: $AF^2 = AE \times AC$. (AF میانگین هندسی AE و AC است)

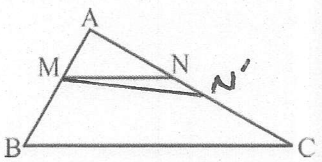
جزء به کل

$$\overset{\triangle}{ABF}: \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AF}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$$

$$\to \frac{AE}{AF}=\frac{AF}{AC} \to AF^2 = AE \times AC$$

عکس قضیه‌ی تالس:

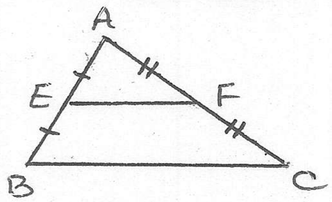


در مثلث ABC، اگر نقاط M و N روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب شوند که تناسب $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ برقرار باشد، آنگاه $MN \parallel BC$ است. اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم MN موازی BC نیست. پس پاره‌خطی مانند MN' موازی BC وجود دارد:

$$MN' \parallel BC \to \frac{AM}{AB}=\frac{AN'}{AC} \xrightarrow{\text{فرض: } \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}} AN'=AN$$ غیرممکن

پس فرض خلف (نقیض حکم) نادرست بوده و درستی حکم یعنی موازی بودن MN با BC ثابت می‌شود.

☑ مثال مهم (قضیه‌ی میان خط مثلث): ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، **موازی** و **نصف** ضلع سوم است.



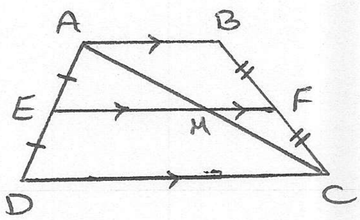
ف: $\begin{cases} AE=EB \\ AF=FC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} EF \parallel BC \\ EF=\frac{BC}{2} \end{cases}$

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=1 \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} EF \parallel BC$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2} \to \frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$$

$$\to EF=\frac{BC}{2}$$

☑ مثال مهم (قضیه‌ی میان خط ذوزنقه): ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، **موازی** و **نصف** مجموع دو قاعده است.



ف: $\begin{cases} AE=ED \\ BF=FC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} EF \parallel AB , CD \\ EF=\frac{AB+CD}{2} \end{cases}$

با فرض اثبات قسمت اول حکم، قسمت دوم را فقط اثبات می‌کنیم:

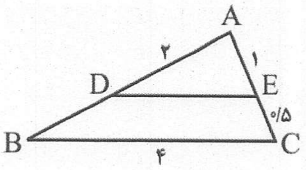
$$\overset{\triangle}{ADC}: EM \parallel DC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{EM}{DC}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{2} \to EM=\frac{DC}{2}$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: MF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{MF}{AB}=\frac{CF}{CB}=\frac{1}{2} \to MF=\frac{AB}{2}$$

$$EF=EM+MF=\frac{DC}{2}+\frac{AB}{2} \to EF=\frac{AB+CD}{2}$$

تمرین (صفحه ۳۶ کتاب):

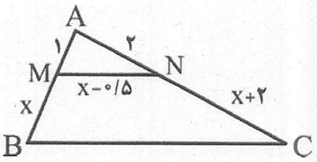
۱- در شکل مقابل DE||BC است. با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌ها طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



جزء به کل: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{1}{1.5} = \frac{2}{AB} = \frac{DE}{4} \rightarrow DE = \frac{4}{1.5}$

$\boxed{AB = 3}$ $\qquad \rightarrow \boxed{DE = \frac{8}{3}}$

۲- در شکل مقابل، اگر MN||BC باشد، مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

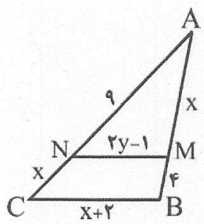


جزء به جزء: $\frac{1}{x} = \frac{2}{x+2} \rightarrow 2x = x+2 \rightarrow \boxed{x = 2}$

جزء به کل: $\frac{x-0.5}{BC} = \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1.5}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow BC = 3 \times 1.5$

$\rightarrow \boxed{BC = 4.5}$

۳- در شکل مقابل MN||BC است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.

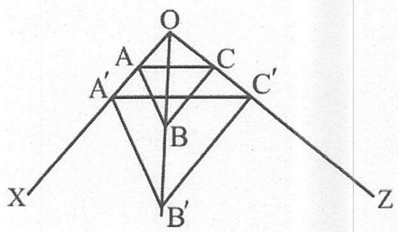


جزء به جزء: $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{MB} \rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \rightarrow x^2 = 36 \rightarrow \boxed{x = 6}$

جزء به کل: $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \rightarrow \frac{2y-1}{x+2} = \frac{x}{x+4} \rightarrow \frac{2y-1}{8} = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{10}_{\,5}}$

$\rightarrow 10y - 5 = 24 \rightarrow 10y = 29 \rightarrow \boxed{y = \frac{29}{10}}$

۴- در شکل مقابل می‌دانیم AB||A'B' و BC||B'C' است. با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید: AC||A'C'



$\overset{\triangle}{OA'B'}: AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$

$\overset{\triangle}{OB'C'}: BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OC}{CC'} = \frac{OB}{BB'}$

$\Rightarrow \frac{OA}{AA'} = \frac{OC}{CC'}$

$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} \overset{\triangle}{OA'C'}: \boxed{AC \parallel A'C'}$

۵- در متن جزوه حل شد.

۶- در کتاب حل شود.

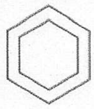
۷- در متن جزوه حل شد.

۸- در کتاب حل شود.

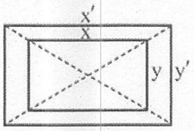
* تشابه

تعریف: دو چندضلعی را متشابه گوییم هرگاه زوایای نظیرشان با هم برابر بوده و اضلاع نظیرشان با هم متناسب باشند.

نتیجه‌ی ۱: دو nضلعی منتظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

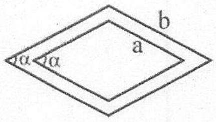


نتیجه‌ی ۲: دو مستطیل زاویه‌هایشان همواره برابر است، لذا اگر نسبت طول به عرضشان نیز برابر باشد، متشابه‌اند.



$$\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'} \Rightarrow \text{دو مستطیل متشابه‌اند}$$

نتیجه‌ی ۳: دو لوزی اضلاعشان همواره متناسب است، پس اگر یک زاویه‌ی برابر داشته باشند، متشابه‌اند.

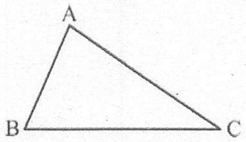


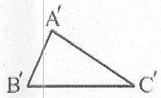
☑ تست: **کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟**

۱) دو مستطیل همواره متشابه‌اند.
۲) دو مثلث قائم‌الزاویه همواره متشابه‌اند.
۳) ✓ دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه‌اند.
۴) دو لوزی همواره متشابه‌اند.

مثلث‌های متشابه:

هرگاه زوایای دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر و اضلاع نظیر، متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.



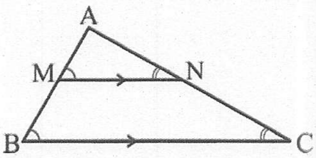


$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases},\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

k را **نسبت تشابه** دو مثلث می‌نامیم.

قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{ABC}$$

اثبات:

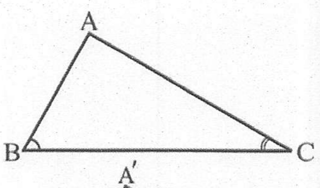
$$MN\parallel BC \begin{cases} \xrightarrow{\text{مورب } AB} \hat{M}=\hat{B} \quad (1)\\ \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{N}=\hat{C} \quad (2)\end{cases}$$

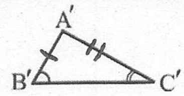
$$MN\parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \quad (3)$$

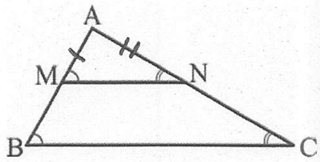
$$(1),(2),(3) \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{ABC}$$

حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها، سه حالت مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم. راهبرد اصلی ما برای اثبات این سه قضیه این است که روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا کرده و ثابت می‌کنیم که MN موازی BC است.

حالات تشابه دو مثلث







۱ــ هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

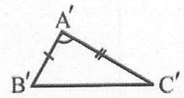
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180\\ \hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180\end{cases}\xrightarrow[C=C']{B=B'}\boxed{\hat{A}=\hat{A}'}\ (1)$$

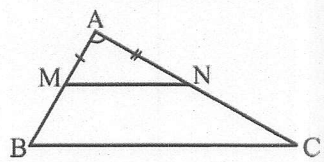
$$\begin{cases}AM=A'B' & \text{طبق برهان}\\ \hat{A}=\hat{A}' & \text{طبق } (1)\\ AN=A'C' & \text{طبق برهان}\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\overset{\Delta}{AMN}\cong \overset{\Delta}{A'B'C'}\ (2)\rightarrow\begin{cases}\hat{M}=\hat{B}'\\ \hat{N}=\hat{C}'\\ MN=B'C'\end{cases}(3)$$

$$\begin{cases}\text{طبق فرض}: \hat{B}=\hat{B}'\\ \text{طبق } (3): \hat{M}=\hat{B}'\end{cases}\rightarrow \hat{M}=\hat{B}\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}} MN\parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}}\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\overset{(2)}{\Longrightarrow}\boxed{\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}}$$

۲ــ هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.





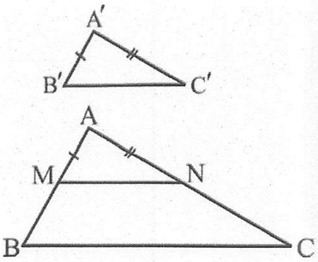
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}AM=A'B'\\ \hat{A}=\hat{A}'\\ AN=A'C'\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض ز ض})}\overset{\Delta}{AMN}\cong \overset{\Delta}{A'B'C'}\ (1)$$

$$\text{طبق فرض داریم}: \dfrac{\overset{AM}{A'B'}}{AB}=\dfrac{\overset{AN}{A'C'}}{AC}\longrightarrow \dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}\xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN\parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}}\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\overset{(1)}{\Longrightarrow}\boxed{\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}}$$



۳– هرگاه اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی A'B' و A'C' جدا می‌کنیم:

طبق فرض داریم: $\frac{\overset{AM}{A'B'}}{AB}=\frac{\overset{AN}{A'C'}}{AC} \longrightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

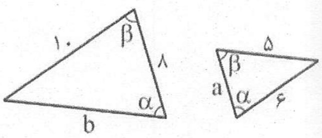
$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (1)

$\overset{\Delta}{ABC}: MN\parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \xrightarrow[\text{فرض}: \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}]{}$

$MN=B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN=B'C' \\ AM=A'B' \\ AN=A'C' \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$

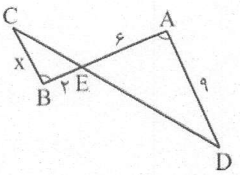
نکته: در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناسب، روبه‌رو به زاویه‌های برابرند.



☑ تست: **دو مثلث مقابل متشابه‌اند. $a+b$ کدام است؟**

$\frac{8}{a}=\frac{10}{5}=\frac{b}{6} \longrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=12 \end{cases} \longrightarrow a+b=16$

۱) ۱۶ ✓ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

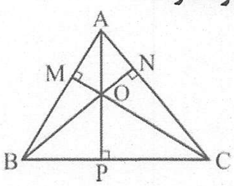


☑ تست: **در شکل مقابل، $\hat{A}=\hat{B}$ است. اندازه‌ی پاره‌خط BC کدام است؟**

$\begin{cases} \hat{A}=\hat{B} \\ \hat{E}_1=\hat{E}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{AED}\sim\overset{\Delta}{BEC} \longrightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BC}$

$\longrightarrow \frac{6}{2}=\frac{9}{x} \longrightarrow x=3$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴



☑ تست: **در شکل مقابل، M و N و P پای ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشند. چند مثلث متشابه با مثلث AOM وجود دارد؟**

$\overset{\Delta}{AOM}\sim\overset{\Delta}{OPC}\sim\overset{\Delta}{ABP}\sim\overset{\Delta}{CBM}$

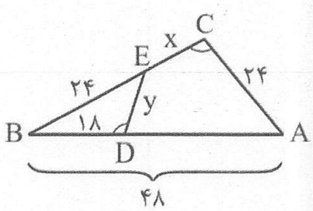
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۵

☑ تست: **طول اضلاع یک مثلث ۳ و ۴ و ۶ می‌باشد. این مثلث با مثلثی با کدام طول اضلاع متشابه است؟**

۱) ۸ و ۶ و ۶ ۲) ۱۹ و ۸ و ۱۸ ۳) ۴/۵ و ۹ و ۶ ✓ ۴) ۷/۵ و ۱۰ و ۱۲

$\frac{3}{4.5}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$

☑ مثال: **در شکل مقابل، $\hat{C}=\hat{D}$ می‌باشد. x و y را بیابید.**

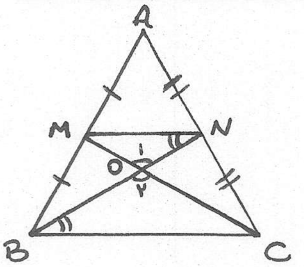


$\begin{cases} \hat{C}=\hat{D} \\ \hat{B}=\hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\Delta}{BDE}\sim\overset{\Delta}{ABC} \longrightarrow \frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{AC}$

$\longrightarrow \frac{\cancel{24}^{\,1}}{\cancel{48}_{\,2}}=\frac{18}{x+24}=\frac{y}{24}$

$\frac{18}{x+24}=\frac{1}{2} \longrightarrow x=12$

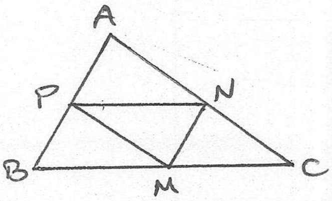
$\frac{y}{24}=\frac{1}{2} \longrightarrow y=12$



☑ مثال: در شکل مقابل، BN و CM دو میانه‌ی مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\overset{\Delta}{OMN} \sim \overset{\Delta}{OBC}$

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \xrightarrow{BN \text{ مورب}} \hat{N} = \hat{B}$

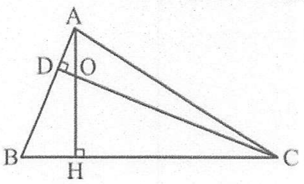
$\begin{cases} \hat{N} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{OMN} \sim \overset{\Delta}{OBC}$



☑ مثال: وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M و N و P می‌نامیم. نشان دهید: $\overset{\Delta}{MNP} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

MN، MP و NP میان خط‌های مثلث ABC می‌باشند لذا داریم:

$\begin{cases} MN = \frac{1}{2}AB \\ MP = \frac{1}{2}AC \\ NP = \frac{1}{2}BC \end{cases} \rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{ضضض}]{\text{تناسب}} \overset{\Delta}{MNP} \sim \overset{\Delta}{ABC}$



☑ تست: در شکل مقابل، AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $12 = \frac{1}{3}OH = AD = 5DO$ ، طول HC کدام است؟

۱) ۱۶۵

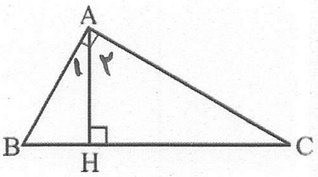
۲) ۱۷۰

۳) ۱۷۵

۴) ۱۸۰ ✓

$\begin{cases} O_1 = O_2 \\ H = D = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AOD} \sim \overset{\Delta}{COH} \rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AD^{12}}{CH} = \frac{OD^{12/5}}{OH_{36}}$

$\rightarrow \frac{12}{HC} = \frac{\frac{12}{5}}{36} \rightarrow \frac{1}{HC} = \frac{1}{5 \times 36} \rightarrow HC = 180$



☑ مثال مهم (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه): در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC شکل مقابل،

الف) ثابت کنید دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AB^2 = BH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$

$AB^2 = BH \times BC$

ب) ثابت کنید دو مثلث ACH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AC^2 = CH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90 \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC} \rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}$

$AC^2 = CH \times BC$

پ) با استفاده از دو قسمت (الف) و (ب) قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \xrightarrow{+} AB^2 + AC^2 = \underbrace{BH \times BC + CH \times BC}_{BC \times (\underbrace{BH + CH}_{BC})} = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

ت) ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AH^2 = BH \times CH$. (AH واسطه هندسی بین BH و CH است)

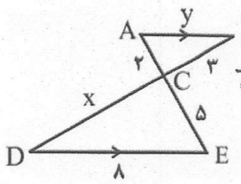
$\overset{\Delta}{ABH}: \hat{A}_1 + \hat{B} = 90 \xrightarrow{A_1 + A_2 = 90} \hat{A}_2 = \hat{B}$

$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$

$AH^2 = BH \times CH$

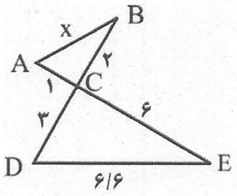
تمرین (صفحه ۴۲ کتاب):

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید.



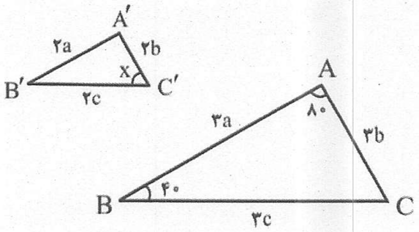
$\hat{C}_1=\hat{C}_2$ ، $\hat{B}=\hat{D}$ (موازی و مورب) $\xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE} \rightarrow \underbrace{\frac{2}{5}=\frac{3}{x}}=\frac{y}{8} \rightarrow 5y=16 \rightarrow y=\frac{16}{5}$

$x=\frac{15}{2}$



$\hat{C}_1=\hat{C}_2$ ، $\hat{A}=\hat{D}$ $\xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE} \rightarrow \frac{1}{3}=\underbrace{\frac{2}{6}=\frac{x}{6{,}6}}$

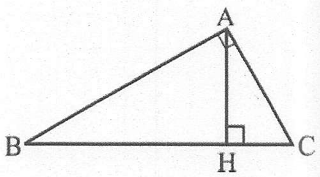
$x=2{,}2$



$\frac{2a}{3a}=\frac{2b}{3b}=\frac{2c}{3c} \xRightarrow{\text{تناسب سه ضلع}} \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \hat{C'}=\hat{C}$

$40+80+\hat{C}=180 \rightarrow \hat{C}=60^\circ \rightarrow x=60$

۲- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، به کمک روابط طولی، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

$AH^2=BH\times CH=9\times 4=36 \rightarrow AH=6$

$AB^2=BH\times BC=9\times(9+4)=9\times 13 \rightarrow AB=3\sqrt{13}$

$AC^2=CH\times BC=4\times 13 \rightarrow AC=2\sqrt{13}$

۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=?

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow 10^2+AC^2=12^2 \rightarrow AC^2=144-100=44 \rightarrow AC=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$AC^2=CH\times BC \rightarrow 44=CH\times 12 \rightarrow CH=\frac{44}{12}=\frac{11}{3}$

$AH^2+CH^2=AC^2 \rightarrow AH^2+\left(\frac{11}{3}\right)^2=44 \Rightarrow AH=\frac{5\sqrt{11}}{3}$

۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow 8^2+6^2=BC^2 \rightarrow BC=10$

$AB^2=BH\times BC \rightarrow 8^2=BH\times 10 \rightarrow BH=\frac{64}{10}$

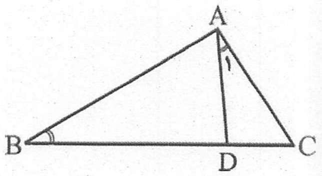
$AC^2=CH\times BC \rightarrow 6^2=CH\times 10 \rightarrow CH=\frac{36}{10}$

۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=?

$\overset{\triangle}{ABH}: AH^2+BH^2=AB^2 \rightarrow 4^2+BH^2=8^2 \rightarrow BH^2=48 \rightarrow BH=4\sqrt{3}$

$AB^2=BH\times BC \rightarrow 8^2=4\sqrt{3}\times BC \rightarrow BC=\frac{64}{4\sqrt{3}}=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow 8^2+AC^2=\frac{16^2}{3} \Rightarrow AC=\frac{8\sqrt{3}}{3}$



۳- در شکل مقابل $\hat{A}_1=\hat{B}$ و $AC=۴$ و $BD=۶$ است. طول BC را به‌دست آورید.

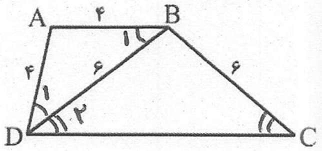
$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACD} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \frac{\overset{4}{AC}}{BC}=\frac{\overset{BC-BD}{DC}}{\underset{4}{AC}}=\frac{AD}{AB}$$

$$\rightarrow \frac{4}{BC}=\frac{BC-6}{4} \rightarrow 16=BC^2-6BC$$

$$\rightarrow BC^2-6BC-16=0 \rightarrow (BC-8)(BC+2)=0$$

$BC=8$

$BC=-2$ غ ق ق



۴- در شکل مقابل، ABCD ذوزنقه است. طول قاعده‌ی CD را به دست آورید.

$BC=BD \rightarrow \hat{D}_2=\hat{C}$

$AB=AD \rightarrow \hat{B}_1=\hat{D}_1$

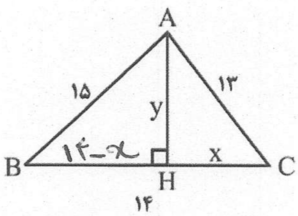
$AB \parallel DC$ و مورب $BD \rightarrow B_1=D_2$

$$\rightarrow \hat{B}_1=\hat{C}=\hat{D}_1=\hat{D}_2$$

پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ به حالت دو زاویه متشابه اند:

$$\rightarrow \frac{\overset{4}{AB}}{\underset{6}{BD}}=\frac{\overset{4}{AD}}{\underset{6}{BC}}=\frac{\overset{6}{BD}}{DC} \rightarrow 4DC=36 \rightarrow DC=9$$

۵- در شکل مقابل، مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



$\overset{\triangle}{ACH}: x^2+\cancel{y^2}=13^2$

$\overset{\triangle}{ABH}: (14-x)^2+\cancel{y^2}=15^2$

$$\xrightarrow{\ominus} x^2-(14-x)^2=13^2-15^2$$

$$\rightarrow \cancel{x^2}-196-\cancel{x^2}+28x=169-225$$

$$\rightarrow 28x=196+169-225=140 \rightarrow x=5$$

$$\rightarrow 5^2+y^2=13^2 \rightarrow y^2=169-25=144 \rightarrow y=12$$

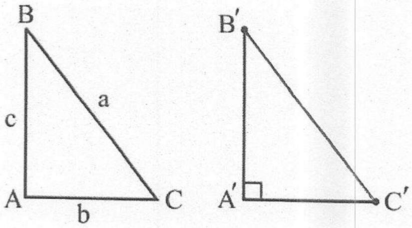
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}\times 12\times 14=84$$

۶- در کتاب حل شود.

۷- در کتاب حل شود.

۸- با قضیه‌ی فیثاغورس آشنا هستید. این قضیه می‌گوید: اگر در مثلث ABC، زاویه‌ی A قائمه باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$

الف) عکس این قضیه را بنویسید.



اگر در مثلث ABC، $a^2=b^2+c^2$ باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است ($\hat{A}=90^\circ$).

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه‌ی فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه‌ی $a^2=b^2+c^2$ بین اندازه‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}'=90^\circ$ و $A'C'=AC$ و $A'B'=AB$

۳) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه‌ی پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C'=BC$

$$\overset{\triangle}{A'B'C'}:\ \underbrace{A'B'^2}_{AB^2}+\underbrace{A'C'^2}_{AC^2}=B'C'^2 \longrightarrow \underbrace{c^2+b^2}_{a^2}=B'C'^2 \longrightarrow B'C'=a \longrightarrow B'C'=BC=a$$

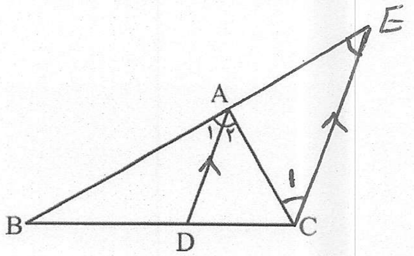
۴) توضیح دهید چرا $\overset{\triangle}{ABC}\cong\overset{\triangle}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A}=90^\circ$

$$\begin{cases} A'B'=AB=c \\ A'C'=AC=b \\ B'C'=BC=a \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{A'B'C'}\cong\overset{\triangle}{ABC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{A}=\underbrace{\hat{A}'}_{90} \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$$

ج) قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان نمایید.

یک مثلث قائم الزاویه است، اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگتر، برابر مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد

* کاربردهای تشابه



۱- قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی: در هر مثلث، نیمساز داخلی هر زاویه، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند:

ح: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

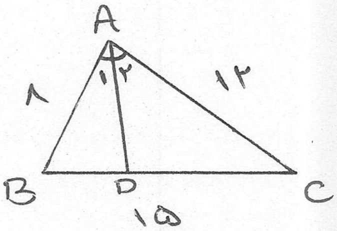
برهان: از C خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند:

$$AD \parallel CE \begin{cases} \xrightarrow{\text{مورب } BE} \hat{A}_1=\hat{E} \\ \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2=\hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{C}_1=\hat{E} \rightarrow AC=AE \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{BCE}: AD\parallel CE \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{\underset{\overset{(1)}{AC}}{\boxed{AE}}} \Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$$

☑ مثال: سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را بیابید.

ح: BD و CD = ?



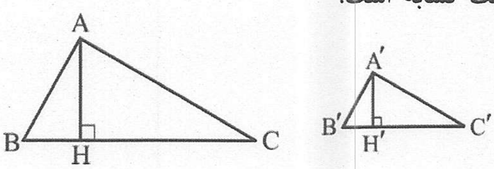
نیمساز زاویه‌ی بزرگ‌تر، روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر یعنی AD را رسم می‌کنیم:

$$\text{قضیه نیمساز}: \frac{BD}{\underset{15-BD}{CD}}=\frac{\overset{2K}{AB}}{\underset{3K}{AC}} \rightarrow \frac{BD}{15-BD}=\frac{2}{3} \rightarrow 3BD=30-2BD$$

$$\rightarrow 5BD=30 \rightarrow BD=6$$

$$BD+CD=15 \rightarrow 6+CD=15 \rightarrow CD=9$$

۲- نسبت ارتفاع‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

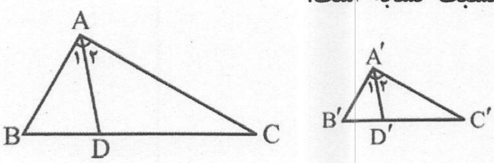


ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AH}{A'H'}=K$

$$\begin{cases} \hat{H}=\hat{H}'=90 \\ \hat{C}=\hat{C}' \quad \text{ط.ف} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{A'C'H'} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\overset{K}{\frac{AC}{A'C'}}=\frac{CH}{C'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=K$$

۳- نسبت نیمسازها: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.



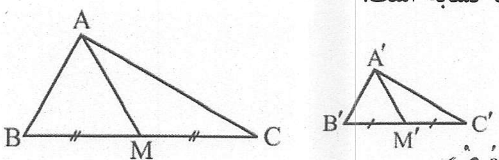
ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AD}{A'D'}=K$

طبق فرض: $\hat{A}=\hat{A}' \rightarrow \hat{A}_2=\hat{A}'_2 \quad (1)$

$$\begin{cases} \hat{A}_2=\hat{A}'_2 \quad (1) \\ \hat{C}=\hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACD} \sim \overset{\triangle}{A'C'D'} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\overset{K}{\frac{AC}{A'C'}}=\frac{CD}{C'D'} \rightarrow \frac{AD}{A'D'}=K$$

۴- نسبت میانه‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.



ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AM}{A'M'} = k$

طبق فرض: $\frac{BC}{B'C'} = k \rightarrow \frac{CM}{C'M'} = k$ ①

$$\begin{cases} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CM}{C'M'} \overset{①}{=} k \\ \hat{C} = \hat{C'} \end{cases} \xrightarrow[\text{و تساوی زاویه بین}]{\text{تناسب دو ضلع}} \overset{\triangle}{ACM} \sim \overset{\triangle}{A'C'M'} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \overbrace{\frac{AC}{A'C'}}^{k} = \frac{CM}{C'M'} \Rightarrow \boxed{\frac{AM}{A'M'} = k}$$

۵- نسبت محیط‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{P}{P'} = k$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \xrightarrow{\text{ویژگی ۷ تناسب}} \frac{\overbrace{AB+AC+BC}^{P}}{\underbrace{A'B'+A'C'+B'C'}_{P'}} = k \Rightarrow \boxed{\frac{P}{P'} = k}$$

۶- نسبت مساحت‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{S}{S'} = k^2$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}a.h}{\cancel{\frac{1}{2}}a'.h'} = \overbrace{\frac{a}{a'}}^{k} \times \overbrace{\frac{h}{h'}}^{k} = k^2 \rightarrow \boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

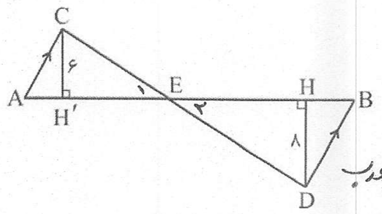
نکته: روابط فوق را به صورت مقابل در یک رابطه جمع می‌کنیم:
$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'} = \frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} = k}$$

نکته: روابطی که در بالا در مورد مثلث‌های متشابه مطرح شد را می‌توان در مورد هر دو چندضلعی متشابه نیز مطرح کرد.

☑ مثال: **مثلث‌های ABC و A′B′C′ متشابه‌اند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱ و محیط مثلث A′B′C′ برابر ۶۰ باشد، طول اضلاع مثلث A′B′C′ را به‌دست آورید.**

$$\frac{\overset{5}{a}}{a'} = \frac{\overset{8}{b}}{b'} = \frac{\overset{11}{c}}{c'} = \frac{\overset{5+8+11}{P}}{\underset{60}{P'}} \rightarrow \frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{\cancel{24}^{\,2}}{\cancel{60}_{\,5}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{5}{a'} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{a' = \frac{25}{2}} \\ \frac{8}{b'} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{b' = \frac{40}{2} = 20} \\ \frac{11}{c'} = \frac{2}{5} \rightarrow \boxed{c' = \frac{55}{2}} \end{cases}$$



☑ مثال: در شکل مقابل، $AC \| BD$ و $AB=۳۵$ می‌باشد.

الف) نسبت $\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}$ را بیابید.

$$\left\{\begin{array}{l} E_1=E_2 \\ \hat{A}=\hat{B} \end{array}\right. \text{حج موازی مورب} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACE} \sim \overset{\triangle}{BDE} \rightarrow K=\frac{CH'}{DH}=\frac{۶}{۸}=\frac{۳}{۴} \quad ①$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}=K^۲ \overset{①}{=} \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲=\frac{۹}{۱۶}$$

ب) با توجه به اندازه‌ها، S_{BDE} چقدر است؟

$$\frac{\overset{۳۵-EB}{AE}}{EB}=K=\frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{۳۵-EB}{EB}=\frac{۳}{۴} \rightarrow ۱۴۰-۴EB=۳EB \rightarrow ۷EB=۱۴۰$$

$$\rightarrow EB=۲۰$$

$$S_{BDE}=\frac{۱}{۲}DH \times EB=\frac{۱}{۲}\times ۸ \times ۲۰=۸۰$$

☑ تست: اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵۰ باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸۱

۲) ۱۶۲ ✓

۳) ۱۳۵

۴) ۷۲

$$\frac{P}{P'}=\sqrt{\frac{S}{S'}} \rightarrow \frac{\cancel{۲۵}^{۵}}{\cancel{۴۵}_{۹}}=\sqrt{\frac{۵۰}{S'}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\cancel{۲۵}^{۱}}{۸۱}=\frac{\cancel{۵۰}^{۲}}{S'}$$

$$\rightarrow S'=۲\times ۸۱=۱۶۲$$

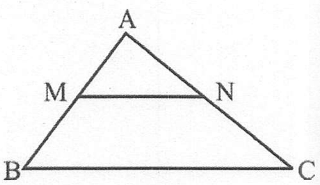
تمرین (صفحه ۴۹ کتاب):

۱- طول ضلع‌های یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

$$\frac{\overset{۱۰}{a}}{\underset{۱۵}{a'}}=\frac{P}{\underset{۱۰+۱۲+۱۵}{P'}} \rightarrow \frac{\cancel{۱۰}^{۲}}{\cancel{۱۵}_{۳}}=\frac{P}{۳۷} \rightarrow P=\frac{۷۴}{۳}$$

بزرگ‌ترین ضلع مثلث اول

۲- در شکل مقابل $BC \| MN$ است و مساحت ذوزنقه‌ی MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



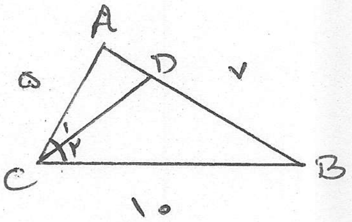
$$BC \| MN \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AMN} \rightarrow K=\frac{AB}{AM} \quad ①$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=\frac{K^۲}{۱} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{\overset{S_{MNCB}}{S_{ABC}-S_{AMN}}}{S_{AMN}}=\frac{K^۲-۱}{۱}$$

$$\rightarrow \frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}}=K^۲-۱ \rightarrow K^۲-۱=۸ \rightarrow K^۲=۹ \rightarrow K=۳ \quad ②$$

$$① , ② \rightarrow \frac{AB}{AM}=۳ \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AB-AM}{AM}=\frac{۳-۱}{۱} \rightarrow \frac{BM}{AM}=۲$$

۳- در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۵ و BC=۱۰ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

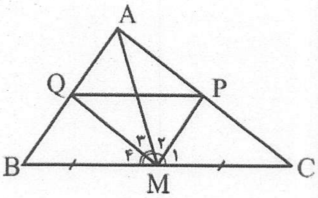


نیمساز CD $\rightarrow \dfrac{AD}{\underbrace{BD}_{7-AD}} = \dfrac{\cancel{CA}^{1}}{\cancel{CB}_{2}} \rightarrow \dfrac{AD}{7-AD} = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow 2AD = 7-AD \rightarrow 3AD = 7 \rightarrow AD = \dfrac{7}{3}$

$AD+BD=7 \rightarrow \dfrac{7}{3}+BD=7 \rightarrow BD = 7-\dfrac{7}{3} = \dfrac{14}{3}$

۴- در مثلث ABC شکل مقابل، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: PQ||BC.

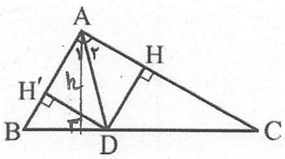


$\overset{\triangle}{ABM}$: نیمساز MQ $\rightarrow \dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{MA}{MB}$

$\overset{\triangle}{ACM}$: نیمساز MP $\rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{MA}{\boxed{MC}} = \dfrac{MA}{MB}$

$\rightarrow \dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{AP}{PC}$

$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$



۵- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه‌ی A است و عمودهای DH و DH′ نیز رسم شده‌اند.

الف) با در نظر گرفتن BD و CD به عنوان قاعده، نسبت $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}h} \times BD}{\cancel{\frac{1}{2}h} \times CD} \rightarrow \dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{BD}{CD}$ (1)

ب) نشان دهید: DH=DH′ و با استفاده از آن بار دیگر نسبت $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

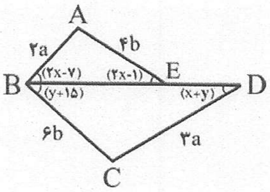
$\begin{cases} AD=AD & \text{وتر مشترک} \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{حاده}]{\text{وتر و یک زاویه}} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{ADH'} \xrightarrow{\text{اجزا نظیر}} DH=DH'$

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}DH'} \times AB}{\cancel{\frac{1}{2}DH} \times AC} \rightarrow \dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \dfrac{AB}{AC}$ (2)

ج) از مقایسه‌ی دو قسمت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(1) و (2) $\Rightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} \rightarrow$ اثباتی دیگر برای قضیه نیمسازها

۶- در شکل مقابل می‌دانیم $BE=۲DE$ است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت مثلث ABE را بیابید.



$$\frac{BE}{DE}=۲ \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BE}{BC}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲}{۳}$$

$$\frac{AE}{BC}=\frac{۴b}{۶b}=\frac{۲}{۳}$$

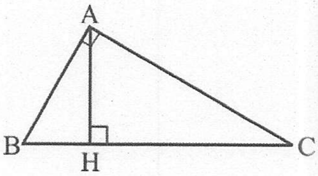
$$\xrightarrow[\text{سه ضلع}]{\text{تناسب}} \overset{\Delta}{ABE}\sim\overset{\Delta}{BCD}$$

پس زاویه‌های متناظر برابرند:

$$\begin{cases}۲x-۱=y+۱۵\\ ۲x-۷=x+y\end{cases} \longrightarrow x=۹ \ , \ y=۲$$

$$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}}=\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲=\frac{۹}{۴}$$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ است. با توجه به این موضوع،



الف) ثابت کنید: $\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ , \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$

$$\overset{\Delta}{ABH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\longrightarrow\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=k^۲=\left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{ABC}\longrightarrow\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=k'^۲=\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲ \quad (۲)$$

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$$(۱)+(۲)\longrightarrow\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^۲+\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$$

$$\longrightarrow\frac{\overbrace{S_{ABH}+S_{ACH}}^{S_{ABC}}}{S_{ABC}}=\frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲}\longrightarrow ۱=\frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲}$$

$$\longrightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲$$

۸- در کتاب حل شود.

هندسه ۱

فصل ۳

چندضلعی ها

مدرس: سیدابوذر حسینی

* از «خَم ساده» تا «چندضلعی»

در این قسمت، یک سری تعاریف برای رسیدن به تعریف **چندضلعی** ارائه می‌دهیم:

خم مسطح: مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کنیم.

☑ مثال: **خم‌های و و مسطح‌اند، ولی خم مسطح نیست.**

خم ساده: خم مسطحی است که خودش را قطع نمی‌کند، مگر در حالتی که نقاط انتهایی به هم می‌رسند.

☑ مثال: **خم‌های و و ساده‌اند ولی خم ساده نیست.**

خم بسته: اگر نقاط انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم، بسته نامیده می‌شود. خم بسته می‌تواند ساده باشد یا نباشد.

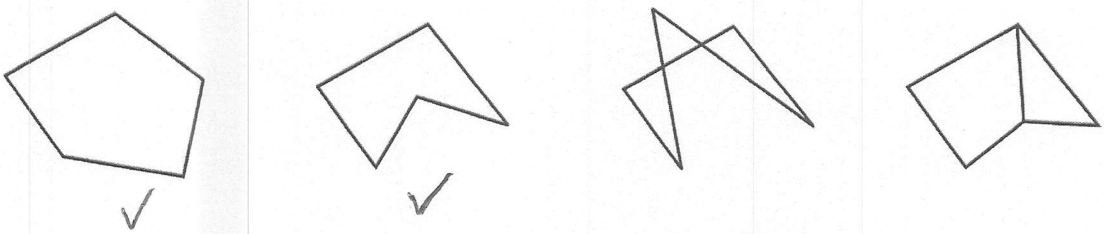
☑ مثال: **خم ساده‌ی بسته است. خم ساده است ولی بسته نیست. خم بسته است ولی ساده نیست.**

تعریف: چندضلعی، شکلی است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که:

۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

۲) هر دو پاره خط متوالی که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند.

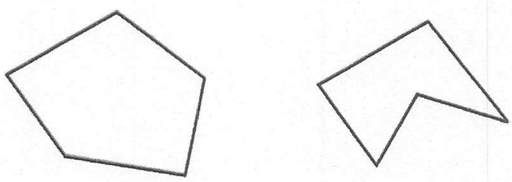
☑ مثال: **کدام یک از شکل‌های زیر چندضلعی است؟**



تعریف: چندضلعی را **محدّب** گوییم هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند. (به بیان ساده‌تر، زاویه‌ی بزرگ‌تر از 180° در چندضلعی وجود نداشته باشد.)

- هر چندضلعی را که محدب نباشد، **مقعر** می‌نامند.

☑ مثال: **کدام‌یک از چندضلعی‌های زیر محدب و کدام‌یک مقعر است؟**

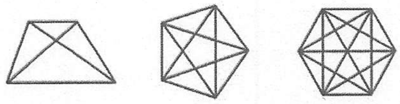


مقعر   محدب

* قطر در چندضلعی‌ها

تعریف: در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، **قطر** می‌نامیم.

از هر رأس یک n ضلعی محدب، قطر می‌توان رسم کرد (خود رأس و دو رأس کناری آن که با ضلع به هم متصل‌اند، کم می‌شوند). لذا تعداد کل قطرهای هر n ضلعی محدب از رابطه‌ی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ محاسبه می‌شود.



نکته: اگر به تعداد اضلاع یک n ضلعی محدب، یک ضلع اضافه شود، به تعداد اقطار، $(n-۱)$ قطر اضافه می‌شود.

یادآوری:

- مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ و مجموع زوایای خارجی هر n ضلعی محدب برابر ۳۶۰° است.

- اگر n ضلعی، منتظم باشد، هر زاویه‌ی داخلی برابر $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ درجه و هر زاویه‌ی خارجی برابر $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه است.

☑ تست: **تعداد قطرهای یک nضلعی محدب، سه برابر تعداد اضلاع آن است. تعداد اضلاع کدام است؟**

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۹ ✓

$\frac{\cancel{n}(n-۳)}{۲} = ۳\cancel{n} \to \frac{n-۳}{۲} = ۳ \to n-۳=۶$

$\to n=۹$

☑ تست: **اگر مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب برابر ۱۰۸۰° باشد، از هر رأس آن چند قطر قابل رسم است؟**

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵ ✓

$(n-۲)\times ۱۸۰ = ۱۰۸۰ \to n-۲ = \frac{۱۰۸۰}{۱۸۰} = ۶$

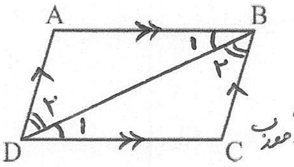
$\to n = ۸$

از هر رأس $n-۳$ قطر یعنی $۸-۳$ قطر می‌گذرد

* چهارضلعی‌ها

۱- متوازی‌الاضلاع

تعریف: متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که اضلاع روبه‌روی آن دوبه‌دو موازی‌اند.

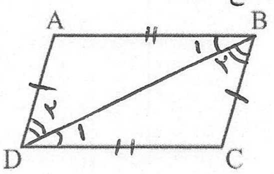


قضیه ۱: در هر متوازی‌الاضلاع، اضلاع روبه‌رو با هم برابرند. ف: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$

برهان: قطر BD را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 & \text{موازی مورب} \\ BD = BD \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 & \text{موازی مورب} \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$$

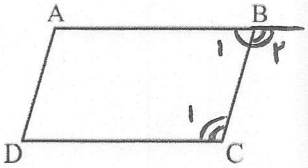
عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، اضلاع روبه‌رو با هم برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



ف: $\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC \end{cases}$

برهان: قطر BD را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} AB = DC \\ AD = BC \\ BD = BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \to \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \xrightarrow{\text{عکس خطوط موازی و مورب}} AB \parallel DC \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \xrightarrow{\text{مشابه}} AD \parallel BC \end{cases}$$



قضیه ۲: در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مجاور مکمل‌اند. ح: $A+B = B+C = C+D = A+D = 180$

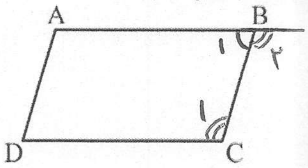
$AB \parallel CD$ و BC مورب $\to \hat{C} = \hat{B}_2$

$\hat{B}$ نیم صفحه $\to B_1 + B_2 = 180$

$\to \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180$

مابقی تساوی‌ها نیز به همین ترتیب ثابت می‌شوند.

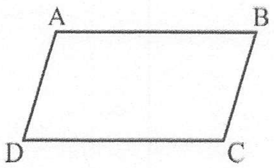
عکس قضیه ۲: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه‌ی مجاور مکمل باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



$$\begin{rcases} \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180 \\ \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180 \end{rcases} \to \hat{B}_2 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\text{مشابه}} AB \parallel CD$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود $AD \parallel BC$

قضیه ۳: در هر متوازی‌الاضلاع، زوایای مقابل برابرند. ح: $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{cases}$

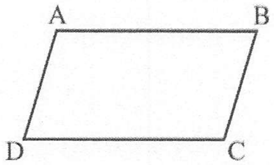


از همنهشتی قضیه ۱ داریم:

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \end{cases} \xrightarrow{+} \hat{B} = \hat{D}$$

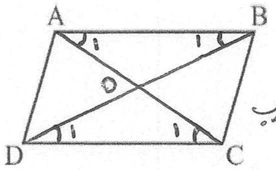
اجزای متناظر: $\hat{A} = \hat{C}$

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی، هر دو زاویه‌ی مقابل برابر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



$$\underbrace{\hat{A}}_{C} + \hat{B} + \hat{C} + \underbrace{\hat{D}}_{B} = 360 \to 2\hat{B} + 2\hat{C} = 360$$

$$\to \hat{B} + \hat{C} = 180 \xrightarrow{\text{طبق عکس قضیه ۲}} \text{متوازی الاضلاع } ABCD$$

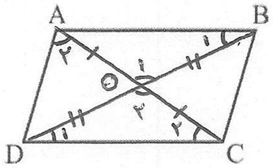


قضیه ۴: در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها منصف یکدیگرند.

ح: $\begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$

موازی و مورب $\begin{cases} \hat{B}_1=\hat{D}_1 \\ AB=CD \\ \hat{A}_1=\hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \begin{cases} OA=OC \\ OB=OD \end{cases}$

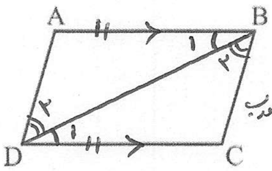
عکس قضیه ۴: اگر در یک چهارضلعی، قطرها منصف یکدیگر باشند، آنگاه چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است.



$\begin{cases} OA=OC \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \\ OB=OD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} A\overset{\triangle}{O}B \cong C\overset{\triangle}{O}D \xrightarrow{\text{اجزاء نظیر}} B_1=D_1 \xrightarrow{\text{۳۲۴ع}} AB \parallel DC$

به همین ترتیب: $A\overset{\triangle}{O}D \cong B\overset{\triangle}{O}C \rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_2 \xrightarrow{\text{۳۲۴ع}} AD \parallel BC$

☑ **مثال: ثابت کنید هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن موازی و مساوی باشد، متوازی‌الاضلاع است.**

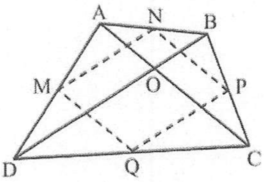


ف: $AB \overset{\parallel}{=} CD$ ح: متوازی‌الاضلاع $ABCD \rightarrow AD \parallel BC$

موازی و مورب $\begin{cases} AB=CD \\ \hat{B}_1=\hat{D}_1 \\ BD=BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} A\overset{\triangle}{B}D \cong B\overset{\triangle}{C}D \xrightarrow{\text{اجزاء نظیر}} \hat{B}_2=\hat{D}_2 \xrightarrow{\text{۳۲۴ع}}$

$\rightarrow AD \parallel BC \rightarrow$ متوازی‌الاضلاع ABCD

☑ **مثال: الف) ثابت کنید اگر وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی محدب را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.**



ف: $AN=NB$ و $BP=PC$ و $CQ=QD$ و $AM=MD$ ح: متوازی‌الاضلاع ABCD

برهان: قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ABD}: \dfrac{AN}{NB}=\dfrac{AM}{MD}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BD$

به همین ترتیب: $\overset{\triangle}{BCD}: PQ \parallel BD$ $\rightarrow MN \parallel PQ$

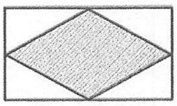
$\overset{\triangle}{ABC}: \dfrac{BN}{NA}=\dfrac{BP}{PC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} NP \parallel AC$

به همین ترتیب: $\overset{\triangle}{ADC}: MQ \parallel AC$ $\rightarrow NP \parallel MQ$

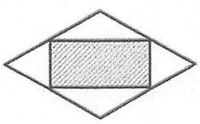
$\rightarrow$ MNPQ متوازی‌الاضلاع

ب) رابطه‌ای برای محیط متوازی‌الاضلاع به دست آورید.

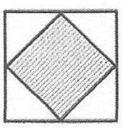
$\begin{cases} MN=PQ=\frac{1}{2}BD \\ NP=MQ=\frac{1}{2}AC \end{cases} \rightarrow P_{MNPQ}=AC+BD$



پ) اگر شکل اولیه مستطیل یا ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین باشد، شکل حاصل چیست؟ لوزی - چون در مستطیل دو قطر باهم برابر بوده لذا هر چهارضلع متوازی الاضلاع حاصل باهم برابر می‌شوند.

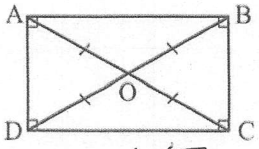


ت) اگر شکل اولیه لوزی باشد، شکل حاصل چیست؟ مستطیل - زاویه متوازی الاضلاع همان زاویه بین دو قطر است و چون در لوزی دو قطر برهم عمود شده لذا متوازی الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود.



ث) اگر شکل اولیه مربع باشد، شکل حاصل چیست؟ مربع - ترکیب دو حالت (پ) و (ت)

۲- مستطیل



تعریف: مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه‌ی ۹۰ درجه دارد.

قضیه ۵: در هر مستطیل، دو قطر با هم برابر و منصف یکدیگرند.

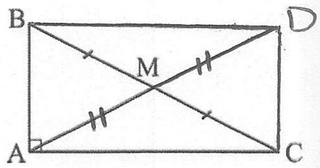
قضیه ۶: متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است.

ف: $\begin{cases} ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع} \\ AC=BD \end{cases}$ ح: ABCD مستطیل

$$\begin{cases} DC=DC \\ AD=BC \\ AC=BD \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BDC} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{D}=\hat{C} \xrightarrow{D+C=180} \hat{D}=\hat{C}=90$$

→ ABCD مستطیل

ویژگی‌های مهمی در مثلث قائم‌الزاویه



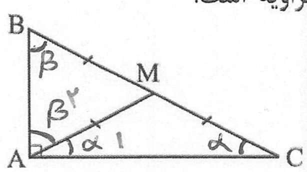
قضیه ۷: در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است.

برهان: میانه AM را به اندازه خودش تا D امتداد داده و از D به B و C وصل می‌کنیم:

$$\begin{cases} AM=DM \\ BM=CM \end{cases} \longrightarrow ABDC \text{ متوازی‌الاضلاع} \xrightarrow{\hat{A}=90} ABDC \text{ مستطیل}$$

$$\longrightarrow \underbrace{AD}_{2AM}=BC \Rightarrow 2AM=BC \longrightarrow AM=\frac{BC}{2}$$

عکس قضیه ۷: اگر در مثلثی، میانه‌ی وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.



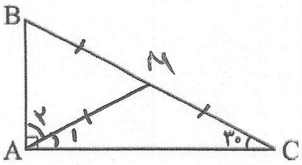
قرار می‌دهیم: $\begin{cases} \hat{C}=\alpha \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=\hat{C}=\alpha \\ \hat{B}=\beta \xrightarrow{MA=MB} \hat{A}_2=\hat{B}=\beta \end{cases}$

$$\overset{\triangle}{ABC}: \underbrace{\hat{A}}_{\alpha+\beta}+\underbrace{\hat{B}}_{\beta}+\underbrace{\hat{C}}_{\alpha}=180 \longrightarrow 2\alpha+2\beta=180$$

$$\longrightarrow \alpha+\beta=90$$

$$\longrightarrow \hat{A}=\alpha+\beta=90$$

قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه ۳۰ درجه باشد، آنگاه ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰ درجه نصف وتر است.



برهان: میانه AM را رسم می‌کنیم: $ح: AB=\frac{BC}{2}$ $ف: \hat{C}=30$

$\hat{C}=30^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=30 \Rightarrow \hat{A}_2=90-\hat{A}_1=90-30=60^\circ$

$\longrightarrow \hat{B}=90-\hat{C}=90-30=60^\circ$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABM}: \begin{cases}\hat{B}=60\\ \hat{A}_2=60\end{cases} \longrightarrow \hat{M}=60 \longrightarrow$ $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الاضلاع

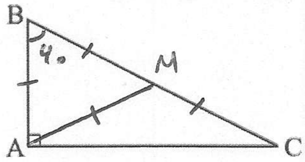
$\longrightarrow AB=BM=\frac{BC}{2}$

نکته: در قضیه‌ی فوق ضلع مجاور زاویه‌ی ۳۰ درجه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است.

$\underset{(\frac{BC}{2})^2}{AB^2}+AC^2=BC^2 \longrightarrow \frac{BC^2}{4}+AC^2=BC^2 \longrightarrow AC^2=BC^2-\frac{BC^2}{4}=\frac{3BC^2}{4}$

$\longrightarrow AC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$

عکس قضیه ۸: در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک ضلع نصف وتر باشد، آنگاه زاویه‌ی روبه‌رو به این ضلع ۳۰ درجه است.



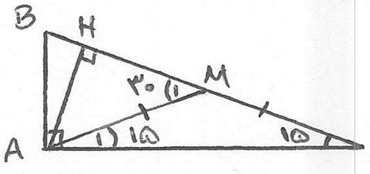
$ف: AB=\frac{BC}{2}$ $ح: \hat{C}=30^\circ$

برهان: میانه AM را رسم می‌کنیم:

$AB=AM=BM=\frac{BC}{2} \longrightarrow$ $\overset{\triangle}{ABM}$ متساوی‌الاضلاع $\longrightarrow \hat{B}=60^\circ$

$\longrightarrow \hat{C}=30^\circ$

☑ **مثال:** در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{C}=15^\circ$, $\hat{A}=90^\circ$)، ارتفاع AH و میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم. اگر BC=4 باشد، طول HM را بیابید.

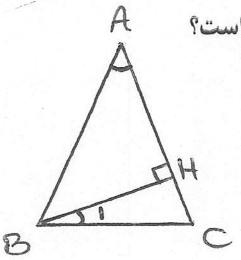


$\hat{C}=15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=15^\circ$

$\overset{\triangle}{AMC}$ زاویه خارجی $\hat{M}_1=\hat{A}_1+\hat{C}=15+15=30^\circ$

$\longrightarrow \overset{\triangle}{AHM}: \begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{M}_1=30\end{cases} \longrightarrow \underset{\text{ضلع مجاور زاویه } 30^\circ}{HM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\underset{\frac{BC}{2}}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{4}{2}=\sqrt{3}$

☑ **تست:** در مثلث متساوی‌الساقینی، ارتفاع وارد بر ساق، نصف ساق است. زاویه‌ی بین این ارتفاع و قاعده کدام است؟



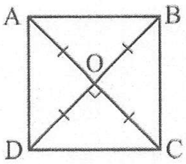
۱) 15° ✓
۲) 30°
۳) 45°
۴) 60°

$ف: \begin{cases}AB=AC\\ BH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB\end{cases}$ $ح: \hat{B}_1=?$

$\overset{\triangle}{ABH}: \begin{cases}\hat{H}=90\\ BH=\frac{AB}{2}\end{cases} \xrightarrow{\text{عکس قضیه } 8} \hat{A}=30^\circ \longrightarrow \hat{B}=\hat{C}=75^\circ$

$\longrightarrow \overset{\triangle}{BCH}: \begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{C}=75\end{cases} \longrightarrow \hat{B}_1=15^\circ$

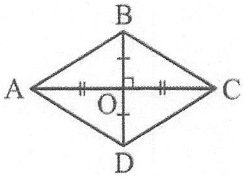
۳- مربع



تعریف: مربع، مستطیلی است که طول و عرض برابر دارد. (یا مستطیلی است که قطرهایش بر هم عمودند)

قضیه ۹: قطرهای مربع، نیمساز زوایای مربع می‌باشند و مربع را به چهار مثلث هم‌نهشت تقسیم می‌کنند.

۴- لوزی

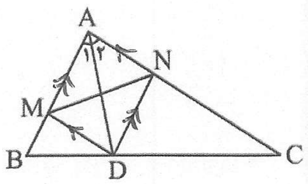


تعریف: لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که طول و عرض برابر دارد.

قضیه ۱۰: در لوزی قطرها عمودمنصف یکدیگرند و برعکس.

قضیه ۱۱: در لوزی قطرها نیمساز زوایای لوزی می‌باشند و برعکس.

☑ مثال: **در مثلث ABC، از نقطه‌ی D محل تلاقی نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC خطوطی موازی دو ضلع دیگر رسم می‌کنیم تا آن‌ها را در M و N قطع کند. AD و MN نسبت به هم چه وضعی دارند؟**



$\begin{cases} DM \parallel AN \\ DN \parallel AM \end{cases} \longrightarrow$ متوازی الاضلاع AMDN

۱) **فقط عمود بر هم**

۲) **فقط منصف هم**

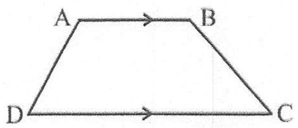
۳) **زاویه‌ی بین آن‌ها مکمل زاویه‌ی A**

$\xrightarrow[\text{قطر نیمساز است}]{\hat{A}_1=\hat{A}_2}$ لوزی AMDN $\longrightarrow$ AD و MN عمودمنصف هم

۴) ✓ **عمودمنصف هم**

۵- ذوزنقه

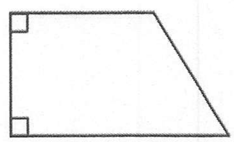
تعریف: ذوزنقه، چهارضلعی است که فقط دو ضلع آن با هم موازی‌اند.



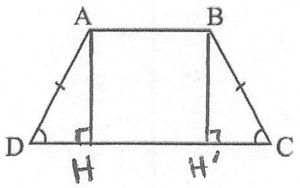
$$AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}+\hat{D}=180^\circ \\ \hat{B}+\hat{C}=180^\circ \end{cases}$$

ضلع‌های غیر موازی AD و BC **ساق‌های** ذوزنقه و AB و CD **قاعده‌های** ذوزنقه نامیده می‌شوند.

نکته: هرگاه در یک ذوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر دیگری نیز عمود است و در این صورت ذوزنقه را **قائم‌الزاویه** می‌نامیم.



نکته: اگر $AD = BC$ باشد، ذوزنقه، **متساوی‌الساقین** نامیده می‌شود.



قضیه ۲: در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، زاویه‌های مجاور به یک قاعده برابرند.

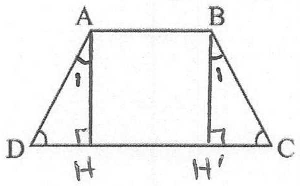
ف: $AD = BC$ ح: $\hat{C} = \hat{D}$

فاصله دو خط موازی همواره برابر

$$\begin{cases} AD = BC \\ AH = BH \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای تقلید}} \hat{C} = \hat{D}$$

عکس قضیه ۲: اگر در یک ذوزنقه، دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده برابر باشند، آنگاه ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

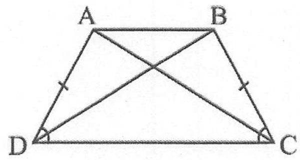


ف: $\hat{C} = \hat{D}$ ح: $AD = BC$

$$\overset{\triangle}{BCH'} \text{ و } \overset{\triangle}{ADH} : \begin{cases} \hat{H} = \hat{H'} = 90 \\ \hat{C} = \hat{D} \end{cases} \xrightarrow{\text{مجموع زوایا ۱۸۰}} \hat{A}_1 = \hat{B}_1$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ AH = BH' \\ \hat{H} = \hat{H'} = 90 \end{cases} \xrightarrow{(\text{ز ض ز})} \overset{\triangle}{ADH} \cong \overset{\triangle}{BCH'} \xrightarrow{\text{اجزای تقلید}} AD = BC$$

قضیه ۳: در هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، اقطار با یکدیگر برابرند و برعکس.



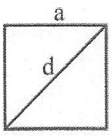
ف: $AD = BC$ ح: $AC = BD$

$$\begin{cases} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \\ DC = DC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \xrightarrow{\text{اجزای تقلید}} AC = BD$$

* مساحت و کاربردهای آن

- یادآوری:

۱- مربع



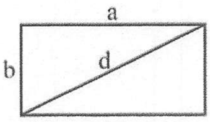
$$\begin{cases} S = a^{۲} \rightarrow \text{یک ضلع به توان ۲} \\ P = ۴a \\ d = a\sqrt{۲} \end{cases}$$

☑ مثال: مساحت یک مربع با محیط آن برابر است. طول قطر مربع را بیابید.

$S = P \rightarrow a^{\cancel{۲}} = ۴\cancel{a} \rightarrow a = ۴$

$\rightarrow d = a\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$

۲- مستطیل



$$\begin{cases} S = ab \rightarrow \text{طول * عرض} \\ P = ۲(a+b) \\ d = \sqrt{a^{۲}+b^{۲}} \end{cases}$$

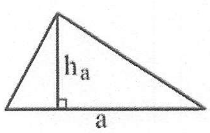
☑ تست: مستطیلی به طول ۴ و عرض b مفروض است. اگر نسبت قطر مستطیل به مساحت آن برابر $\frac{۵}{۱۲}$ باشد، b کدام است؟

$\frac{d}{S} = \frac{\sqrt{۴^{۲}+b^{۲}}}{۴b} = \frac{۵}{\cancel{۱۲}_{۳}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{۱۶+b^{۲}}{b^{۲}} = \frac{۲۵}{۹} \rightarrow ۹\times۱۶+۹b^{۲} = ۲۵b^{۲}$

$\rightarrow ۹\times\cancel{۱۶} = ۲۵b^{۲} - ۹b^{۲} = \cancel{۱۶}b^{۲} \rightarrow b = ۳$

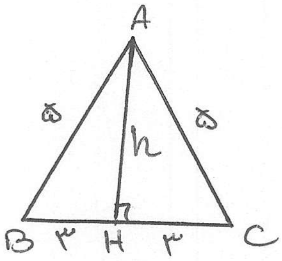
۱) ۲
۲) ۳ ✓
۳) ۴
۴) ۵

۳- مثلث



$$\begin{cases} S = \frac{a \times h_a}{۲} \rightarrow \frac{\text{قاعده * ارتفاع}}{۲} \\ P = \text{مجموع طول سه ضلع} \end{cases}$$

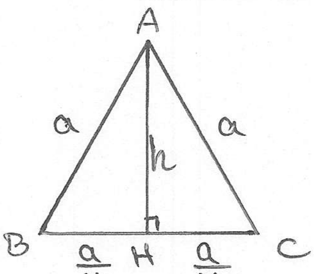
☑ مثال: در مثلث متساوی‌الساقین ABC، AB=AC=۵ و BC=۶ است. مساحت مثلث را بیابید.



$\overset{\triangle}{ABH}: ۳^{۲}+h^{۲} = ۵^{۲} \rightarrow h^{۲} = ۲۵-۹ = ۱۶ \rightarrow h = ۴$

$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲}\times۴\times۶ = ۱۲$

☑ مثال: در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اگر طول هر ضلع برابر a باشد، فرمولی برای ارتفاع و مساحت مثلث بر حسب a بیابید.

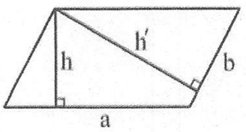


$\overset{\triangle}{ABH}: h^{۲}+(\frac{a}{۲})^{۲} = a^{۲} \rightarrow h^{۲}+\frac{a^{۲}}{۴} = a^{۲} \rightarrow h^{۲} = a^{۲}-\frac{a^{۲}}{۴} = \frac{۳a^{۲}}{۴}$

$\rightarrow h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

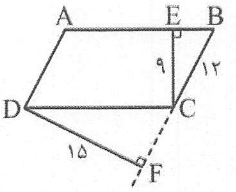
$S = \frac{۱}{۲}h\times a = \frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a \rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$

۴- متوازی‌الاضلاع



$$\begin{cases} S = a \times h = b \times h' \rightarrow \text{ارتفاع * قاعده} \\ P = ۲(a+b) \end{cases}$$

☑ تست: در شکل مقابل، **ABCD** متوازی‌الاضلاع است. با توجه به اندازه‌ها، طول **AB** کدام است؟

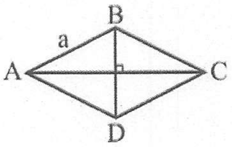


$$S = AB \times \underbrace{CE}_{۹} = \underbrace{DF}_{۱۵} \times \underbrace{BC}_{۱۲} \rightarrow AB = \frac{۱۵ \times ۱۲}{۹}$$

$$\rightarrow \boxed{AB = ۲۰}$$

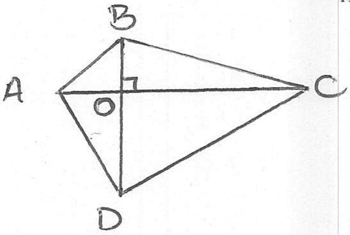
۱) ۱۵
۲) ۱۸
۳) ۲۰ ✓
۴) ۲۱

۵- لوزی



$$\begin{cases} S = \dfrac{AC \times BD}{۲} \rightarrow \text{نصف حاصل‌ضرب دو قطر} \\ P = ۴a \end{cases}$$

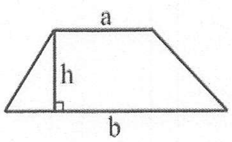
☑ مثال: در چهارضلعی **ABCD**، دو قطر **AC** و **BD** بر هم عمودند. ثابت کنید: $S_{ABCD} = \frac{۱}{۲} AC \times BD$



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{۲} AC \times BO + \frac{1}{۲} AC \times DO$$

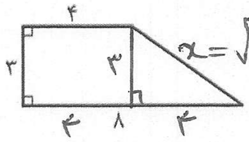
$$= \frac{1}{۲} AC(\underbrace{BO + DO}_{BD}) \rightarrow \boxed{S_{ABCD} = \frac{1}{۲} AC \times BD}$$

۶- ذوزنقه



$$\begin{cases} S = \dfrac{(a+b) \times h}{۲} \rightarrow \text{نصف مجموع دو قاعده * ارتفاع} \\ P = \text{مجموع طول چهار ضلع} \end{cases}$$

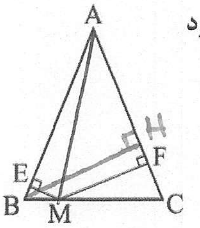
☑ تست: مساحت شکل مقابل، چند برابر محیط آن است؟



$$x = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵$$

$$\frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{۲}(۴+۸) \times ۳}{۳+۴+۵+۸} = \frac{۱۸}{۲۰} = \frac{۹}{۱۰}$$

۱) $\frac{۱۰}{۹}$
۲) $\frac{۹}{۱۰}$ ✓
۳) $\frac{۲۳}{۱۸}$
۴) $\frac{۱۸}{۲۳}$



☑ **مثال مهم:** در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB=AC$ است، از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی BC دو عمود ME و MF را بر دو ساق رسم کرده‌ایم. نشان دهید: $ME+MF=BH$

برهان: از M به A وصل می‌کنیم:

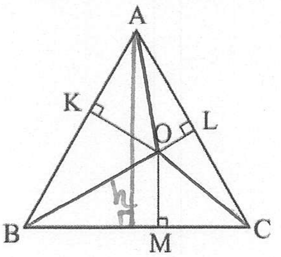
$$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}BH\times AC=\frac{1}{2}ME\times \underbrace{AB}_{AC}+\frac{1}{2}MF\times AC$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}BH\times \cancel{AC}=\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AC}(ME+MF)\rightarrow ME+MF=BH$$

✍ **نتیجه:** در هر مثلث متساوی‌الساقین، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده از دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

☑ **مثال مهم:** در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a، از نقطه‌ی دلخواه O درون مثلث سه عمود OK، OL و OM را بر سه ضلع رسم می‌کنیم. نشان دهید: $OK+OL+OM=h$



برهان: از O به A و B و C وصل می‌کنیم:

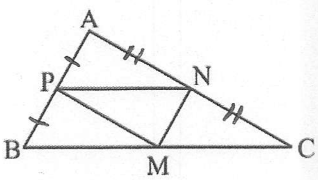
$$S_{ABC}=S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}$$

$$\rightarrow \cancel{\frac{1}{2}a}\times h=\cancel{\frac{1}{2}a}\times OK+\cancel{\frac{1}{2}a}\times OL+\cancel{\frac{1}{2}a}\times OM$$

$$\rightarrow h=OK+OL+OM$$

✍ **نتیجه:** در هر مثلث متساوی‌الاضلاع، مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.

☑ **مثال:** M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\overset{\Delta}{APN}\cong\overset{\Delta}{MNP}\cong\overset{\Delta}{BMP}\cong\overset{\Delta}{CMN}$



$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}=1\xrightarrow{\text{عکس تالس}}PN\parallel BC$$

به همین ترتیب: $PM\parallel AC$ → PNCM متوازی‌الاضلاع

$$\xrightarrow[\text{متوازی‌الاضلاع}]{\text{قطر } MN}\overset{\Delta}{PMN}\cong\overset{\Delta}{CMN}$$

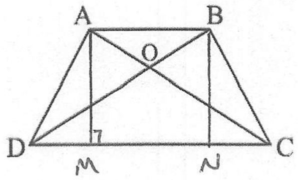
متوازی‌الاضلاع $APMN\rightarrow \overset{\Delta}{PMN}\cong\overset{\Delta}{APN}$

" " $BMNP\rightarrow \overset{\Delta}{PMN}\cong\overset{\Delta}{BMP}$

$$\rightarrow \overset{\Delta}{APN}\cong\overset{\Delta}{MNP}\cong\overset{\Delta}{BMP}\cong\overset{\Delta}{CMN}$$

✍ **نتیجه:** اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه هم‌مساحت به وجود می‌آید.

☑ مثال (قضیه شبه پروانه): در ذوزنقه‌ی **ABCD**، دو قطر **AC** و **BD** در **O** متقاطع‌اند. ثابت کنید: $S_{OAD} = S_{OBC}$

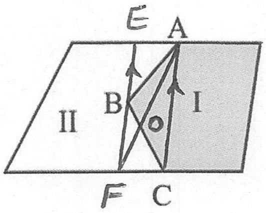


$S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \times AM$

$S_{BDC} = \frac{1}{2} DC \times BN$ $\xrightarrow[\text{فاصله دو خط موازی}]{AM=BN}$ $S_{ADC} = S_{BDC}$

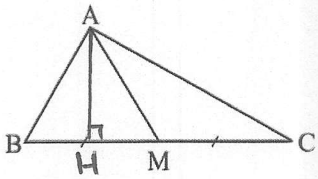
$\longrightarrow S_{AOD} + \cancel{S_{DOC}} = S_{BOC} + \cancel{S_{DOC}} \longrightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$

کاربردی از مثال قبل: در شکل دو مزرعه **I** و **II** متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک **ABC** بین زمین‌های خود را به یک پاره‌خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آن‌ها تغییر نکند. چگونه باید این کار را انجام دهند؟



از A به C وصل کرده و از B به موازات AC رسم می‌کنیم تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. حال اگر از A به F وصل کنیم، AF می‌تواند مرز جدید باشد (EC نیز می‌تواند باشد)، زیرا طبق قضیه شبه پروانه $S_{AOB} = S_{COF}$ است.

☑ مثال مهم: الف) نشان دهید در هر مثلث، هر میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند.

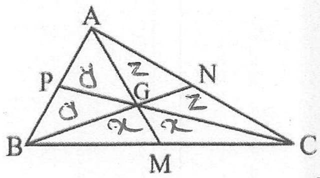


ف: $BM = CM$ ح: $S_{ABM} = S_{ACM}$

$S_{ABM} = \frac{1}{2} AH \times BM$

$S_{ACM} = \frac{1}{2} AH \times CM$ $\xrightarrow{BM=CM}$ $S_{ABM} = S_{ACM}$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید سه میانه‌ی مثلث، آن را به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند.



$\overset{\triangle}{GBC}$: میانه GM $\longrightarrow S_{GBM} = S_{GCM} = x$

به همین ترتیب:

$\overset{\triangle}{GAB}$: 〃 GP $\longrightarrow S_{GAP} = S_{GBP} = y$

$\overset{\triangle}{GAC}$: 〃 GN $\longrightarrow S_{GAN} = S_{GCN} = z$

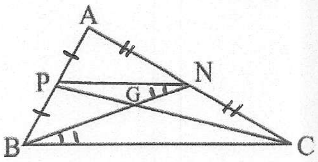
$\overset{\triangle}{ABC}$:

میانه AM $\longrightarrow 2y + \cancel{x} = 2z + \cancel{x} \longrightarrow y = z$

〃 BN $\longrightarrow 2y + \cancel{z} = 2x + \cancel{z} \longrightarrow y = x$

$\longrightarrow x = y = z$

قضیه مهم: سه میانه هر مثلث همرس‌اند و نقطه‌ی همرسی، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کند.



برهان: از P به N وصل می‌کنیم:

$$\frac{AP}{PB}=\frac{AN}{NC}=1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}}$$

$$\frac{PN}{BC}=\left(\frac{AP}{AB}\right)^{1/2} \longrightarrow \frac{PN}{BC}=\frac{1}{2}$$

موازی مورب $\left\{\begin{array}{l}\hat{N}_1=\hat{B}_1\\ \hat{G}_1=\hat{G}_2\end{array}\right. \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{PNG} \sim \overset{\triangle}{GBC} \xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}$

$$\frac{GN}{GB}=\frac{GP}{GC}=\frac{PN}{BC}=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{GB}{GN}=\frac{GC}{GP}=\frac{2}{1}$$

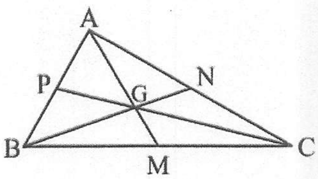
چون دو میانه‌ی BN و CP دلخواه بودند، پس این رابطه در مورد هر دو میانه‌ی دیگر نیز برقرار است، در نتیجه هر ۳ میانه‌ی مثلث هم‌رس اند.

نتیجه: میانه‌های هر مثلث همرس‌اند.

نکته‌ی ۱: محل همرسی میانه‌های هر مثلث دلخواه، همواره داخل مثلث قرار دارد.

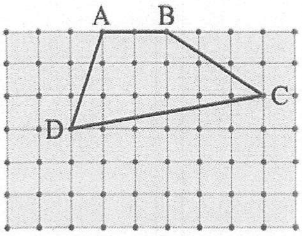
نکته‌ی ۲: محل همرسی میانه‌های مثلث، مثلث نامیده می‌شود و معمولاً با حرف G نام‌گذاری می‌شود. **مرکز ثقل**

نکته‌ی ۳: مرکز ثقل مثلث، هر میانه را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{AG}{GM}=\frac{BG}{GN}=\frac{CG}{GP}=2$$

* نقاط شبکه‌ای و مساحت



در شکل مقابل، نقاطی عمودی و افقی در کنار هم وجود دارند به طوری که فاصله‌ی هر دو نقطه‌ی متوالی روی یک خط عمودی (یا افقی) از هم برابر یک واحد است. به این نقاط، **نقاط شبکه‌ای** و به چندضلعی ABCD، یک **چندضلعی شبکه‌ای** می‌گوییم.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را **نقاط مرزی** و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را **نقاط درونی شبکه‌ای** می‌نامیم.

به طور مثال چهارضلعی ABCD دارای ۵ نقطه‌ی مرزی و ۹ نقطه‌ی درونی شبکه‌ای است.

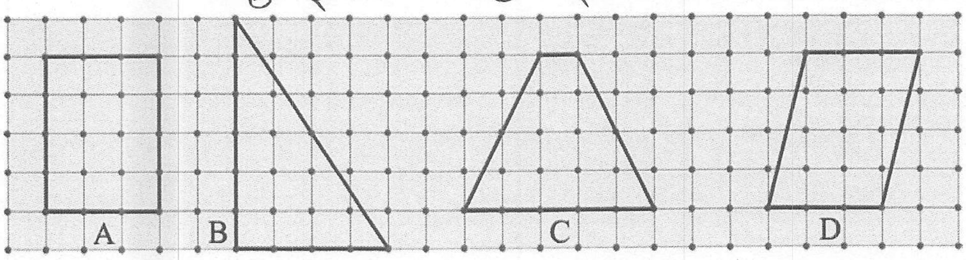
فرمول پیک: اگر تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان دهیم، مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با: $\boxed{S=\frac{b}{۲}-۱+i}$

به کمک فرمول پیک می‌توان مساحت شکل‌های نامنظم هندسی را به طور تقریبی محاسبه کرد.

☑ **مثال: در شکل‌های زیر، مساحت چندضلعی‌های داده شده را ابتدا به روش معمول محاسبه کنید. سپس با تعیین نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و درستی فرمول پیک را تحقیق کنید.**

$S_B=\frac{۴\times۶}{۲}=۱۲$ $S_C=\frac{(۱+۵)\times۴}{۲}=۱۲$

$S_A=۳\times۴=۱۲$



$S_D=$

چندضلعی	A	B	C	D
تعداد نقاط مرزی b	۱۴	۱۲	۱۰	۸
تعداد نقاط درونی i	۶	۷	۸	۹
مساحت	$\frac{۱۴}{۲}-۱+۶$ ۱۲	$\frac{۱۲}{۲}-۱+۷$ ۱۲	$\frac{۱۰}{۲}-۱+۸$ ۱۲	$\frac{۸}{۲}-۱+۹$ ۱۲

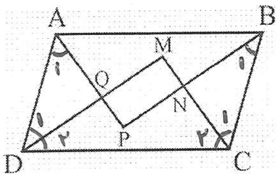
خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرها و ضلع‌ها برابر است؟ (تمرین ۱ صفحه ۶۳)

$$\frac{n(n-3)}{2}=n \to \frac{n-3}{2}=1 \to n-3=2 \to n=5$$

۲- ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل پدید می‌آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)



$$\hat{A}+\hat{D}=180 \to \hat{A}_1+\hat{D}_1=\frac{180}{2}=90 \to \hat{Q}=90$$

$$\hat{B}+\hat{C}=180 \to \hat{B}_1+\hat{C}_1=\frac{180}{2}=90 \to \hat{N}=90$$

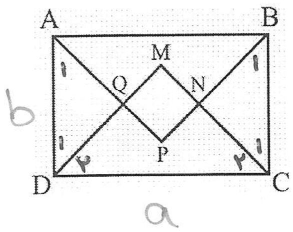
$$\hat{C}+\hat{D}=180 \to \hat{C}_2+\hat{D}_2=\frac{180}{2}=90 \to \hat{M}=90$$

$$\Rightarrow \hat{P}=90$$

$\leftarrow$ MNPQ مستطیل است.

۳- الف) ثابت کنید از تقاطع نیمسازهای داخلی هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. (تمرین ۳ صفحه ۶۳)

همانند سؤال قبل ۹۰ درجه بودن چهار زاویه‌ی MNPQ را به راحتی می‌توان ثابت کرد:



$$\hat{A}_1=\hat{D}_1=45 \to \hat{Q}=90$$

$$\hat{B}_1=\hat{C}_1=45 \to \hat{N}=90$$

$\hat{C}_2=\hat{D}_2=45 \to \hat{M}=90 \Rightarrow \hat{P}=90 \to$ تا اینجا MNPQ مستطیل است

$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{B}_1=45\\ AD=BC\\ \hat{D}_1=\hat{C}_1=45\end{cases} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} A\overset{\triangle}{Q}D \cong B\overset{\triangle}{N}C \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} QD=NC \quad (1)$$

$$\hat{C}_2=\hat{D}_2=45 \to M\overset{\triangle}{D}C:\ MD=MC \quad (2)$$

(۱) و (۲) $\to \underbrace{MD-QD}_{MQ}=\underbrace{MC-NC}_{MN} \to MQ=MN \to$ MNPQ مربع است

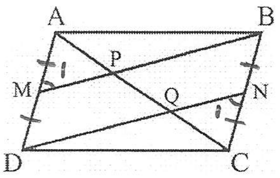
ب) اگر طول و عرض مستطیل برابر a و b باشند، اندازه‌ی ضلع مربع را برحسب a و b بیابید. (تمرین ۴ صفحه ۶۴)

$$M\overset{\triangle}{D}C:\ MD^2+\underbrace{MC^2}_{MD}=a^2 \to 2MD^2=a^2 \to MD^2=\frac{a^2}{2} \to MD=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$A\overset{\triangle}{Q}D:\ \underbrace{AQ^2}_{QD}+QD^2=b^2 \to 2QD^2=b^2 \to QD^2=\frac{b^2}{2} \to QD=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

ضلع مربع $MD=\underbrace{MD}_{\frac{a}{\sqrt{2}}}-\underbrace{QD}_{\frac{b}{\sqrt{2}}}=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}} \to MD=\frac{a-b}{\sqrt{2}}$

۴- در متوازی‌الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط‌های اضلاع AD و BC می‌باشند، (تمرین ۷ صفحه ۶۴)



الف) ثابت کنید MB موازی DN است.

$AD=BC \to \frac{AD}{2}=\frac{BC}{2} \to AM=CN$

$\begin{cases} AB=CD \\ \hat{A}=\hat{C} \\ AM=CN \end{cases} \xrightarrow{(ض\,ز\,ض)} \overset{\triangle}{ABM} \cong \overset{\triangle}{CDN} \xrightarrow{اجزاء\ نظیر} \hat{M}_1=\hat{N}_1$

$AD \parallel BC$ و DN مورب $\longrightarrow \hat{D}_1=\hat{N}_1$

$\hat{M}_1=\hat{D}_1 \xrightarrow{عکس} MB \parallel DN$

ب) ثابت کنید: $AP=PQ=QC$

$\overset{\triangle}{ADQ}: MP \parallel DQ \xrightarrow{جزء\ به\ جزء} \frac{AM}{MD}=\frac{AP}{PQ} \to AP=PQ$

$\overset{\triangle}{CBP}: QN \parallel PB \xrightarrow{جزء\ به\ جزء} \frac{CN}{NB}=\frac{CQ}{QP} \to CQ=QP$

$\to AP=PQ=QC$

سؤالات تستی:

۱- در کدام چندضلعی، تعداد قطرها، سه واحد بیشتر از تعداد ضلع‌ها است؟

۱) ۵ضلعی ۲) ۶ضلعی ✓

۳) ۸ضلعی ۴) ۱۰ضلعی

۲- شکل حاصل از به هم وصل کردن اوساط اضلاع یک ....، یک .... است.

۱) ذوزنقه ـ لوزی ۲) لوزی ـ مستطیل ✓ ۳) مستطیل ـ مربع ۴) مربع ـ لوزی

۳- شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی ....، یک .... است.

۱) متوازی‌الاضلاع ـ مربع ۲) لوزی ـ مربع ۳) مربع ـ مستطیل ۴) مستطیل ـ مربع ✓

۴- از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیلی به ابعاد ۱۲ و ۱۶، یک مربع پدید می‌آید که مساحتش برابر است با:

$x=\frac{a-b}{\sqrt{2}}=\frac{16-12}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$S=x^2=\frac{16}{2}=8$

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) 4

۳) 8 ✓ ۴) $8\sqrt{2}$

۵- در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین به قاعده‌های ۴ و ۱۲، طول ارتفاع وارد بر قاعده ۴ است. اوساط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم، محیط چهارضلعی حاصل چقدر است؟

۱) $4\sqrt{5}$

۲) $8\sqrt{5}$ ✓

۳) $4\sqrt{10}$

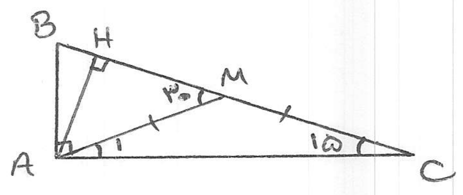
۴) $8\sqrt{10}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث قائم‌الزاویه، اگر یک زاویه ۱۵ درجه باشد، آنگاه ثابت کنید ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است. (تمرین ۶ صفحه ۶۴)

$C: AH=\frac{1}{4}BC$



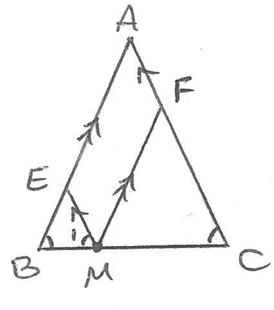
برهان: میانه وارد بر وتر AM را رسم می‌کنیم:

$\hat{C}=15^\circ \xrightarrow{MA=MC} \hat{A}_1=\hat{C}=15^\circ$

$\overset{\triangle}{AMC}$ زاویه خارجی $\hat{M}=\hat{A}_1+\hat{C}=15+15=30^\circ$

$\overset{\triangle}{AHM}: \begin{cases}\hat{H}=90\\ \hat{M}=30\end{cases} \to AH=\frac{1}{2}AM \xrightarrow{\frac{1}{2}BC} AH=\frac{1}{4}BC$

۲- از نقطه‌ی دلخواه M روی قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین $ABC\ (AB=AC)$، دو خط به موازات دو ساق رسم می‌کنیم تا آنها را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $ME+MF=AB=AC$



$\begin{cases}AF\parallel ME\\ AE\parallel MF\end{cases} \to$ متوازی‌الاضلاع $AEMF \to MF=AE$ (۱)

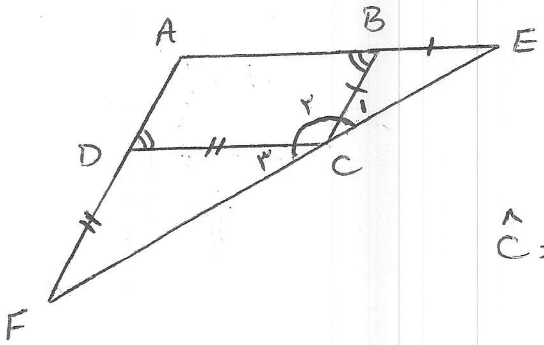
$AB=AC \to \hat{B}=\hat{C}$

$EM\parallel AC$ و BC مورب $\to \hat{M}_1=\hat{C}$

$\to \hat{B}=\hat{M}_1 \to ME=EB$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow ME+MF=\underbrace{AE+EB}_{AB}$

۳- در متوازی‌الاضلاع ABCD، روی امتداد AB به اندازه‌ی $BE=BC$ و روی امتداد AD به اندازه‌ی $DF=DC$ جدا می‌کنیم. ثابت کنید نقاط E، C و F بر یک امتدادند.



$\overset{\triangle}{BCE}: BC=BE \to \hat{C}_1=\hat{E} \xrightarrow{\text{زاویه خارجی}} \hat{B}=2\hat{C}_1 \to C_1=\frac{\hat{B}}{2}$

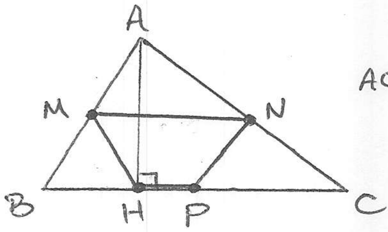
$\overset{\triangle}{CDF}: DF=DC \to \hat{C}_3=\hat{F} \xrightarrow{\text{زاویه خارجی}} \hat{D}=2\hat{C}_3 \to C_3=\frac{\hat{D}}{2}$

$\hat{C}=\hat{C}_1+\hat{C}_2+\hat{C}_3=\frac{\hat{B}}{2}+C_2+\frac{\hat{D}}{2}=\hat{D}+\hat{C}_2=180$

$B=D$

E و C و F بر یک امتدادند.

۴- در یک مثلث غیرمشخص، وسط‌های سه ضلع و پای یک ارتفاع را به هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید چهارضلعی حاصل ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین است.



AC و AB وسط‌ها M و N $\rightarrow$ $MN \parallel HP$ $\rightarrow$ تا اینجا ذوزنقه

$NP \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB$ میان خط $\rightarrow$ $NP=HM$ $\rightarrow$ ذوزنقه متساوی الساقین

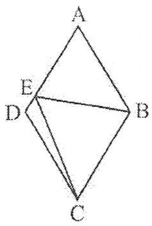
$\triangle ABH: HM=\frac{1}{2}AB$

میانه وارد بر وتر

سؤالات تستی:

۱- کدام‌یک از تعاریف زیر، تعریف لوزی است؟

۱) متوازی‌الاضلاعی که اضلاعش با هم برابرند. ✓
۲) چهارضلعی که اقطارش بر هم عمودند.
۳) متوازی‌الاضلاعی که اقطارش منصف یکدیگرند.
۴) مربعی که اقطارش بر هم عمودند.

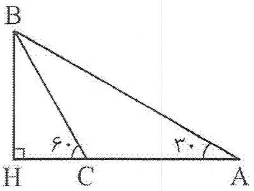


۲- در لوزی ABCD شکل مقابل، $AB=BE$ می‌باشد. اگر $B\hat{E}C=۵۵^\circ$ باشد، زاویه‌ی DEC چند درجه است؟

۱) ۳۵
۲) ۵۵ ✓
۳) ۴۵
۴) ۶۰

۳- در یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، قاعده‌ی کوچک برابر هر ساق و قاعده‌ی بزرگ دو برابر قاعده‌ی کوچک است. اندازه‌ی زاویه‌ی حاده‌ی ذوزنقه چقدر است؟

۱) ۷۵°
۲) ۶۰° ✓
۳) ۴۵°
۴) ۷۲°



۴- در شکل مقابل، اگر طول AC برابر ۵۰ متر باشد، طول AH چند متر است؟

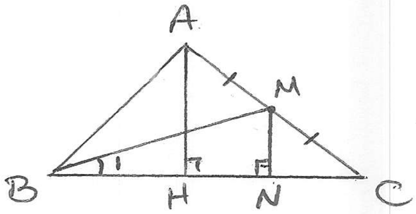
۱) ۷۵ ✓
۲) ۸۰
۳) ۸۵
۴) ۹۰

۵- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، ارتفاع AH را رسم کرده و از H به نقاط E و F اوساط اضلاع AB و AC وصل می‌کنیم. زاویه‌ی EHF برابر است با:

۱) ۷۵°
۲) ۸۰°
۳) ۹۰° ✓
۴) ۱۰۵°

سؤالات تشریحی:

۱- در مثلث ABC، ارتفاع AH با میانه‌ی BM برابر است. اندازه‌ی زاویه‌ی $C\hat{B}M$ را بیابید. (راهنمایی: از M بر BC عمود کنید)

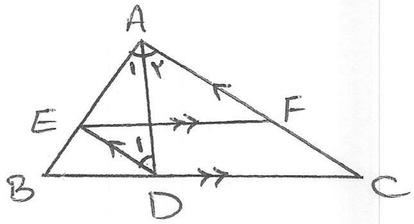


ف: $AH=BM$ ح: $\hat{B}_1=?$

$MN\perp BC$ ، $AH\perp BC$ $\rightarrow MN\parallel AH \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{MN}{AH}=\frac{CM}{CA}=\frac{1}{2} \rightarrow MN=\frac{1}{2}AH$

$\xrightarrow{AH=BM} MN=\frac{1}{2}BM \rightarrow \overset{\triangle}{BMN}: \hat{B}_1=30^\circ$

۲- نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و از نقطه‌ی D خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. سپس از E خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. ثابت کنید: $AE=FC$



ف: $\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ DE\parallel AC\\ EF\parallel BC\end{cases}$

$EF\parallel DC$ ، $ED\parallel FC$ $\rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $EFCD \rightarrow FC=ED$ (۱)

$ED\parallel AF$ و مورب $AD \rightarrow \hat{A}_2=\hat{D}_1 \xrightarrow{A_1=A_2} \hat{A}_1=\hat{D}_1 \rightarrow AE=ED$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow AE=FC$

سؤالات تستی:

۱- مجموع تعداد ضلع‌ها و قطرهای رسم شده از هر رأس یک nضلعی، کدام است؟

۱) $n-2$ ۲) $n-1$ ✓ ۳) n ۴) $n-3$

۲- اگر در یک nضلعی، نسبت تعداد اقطار به تعداد اضلاع ۱۰ باشد، تعداد رئوس این چندضلعی برابر است با:

۱) ۲۰ ۲) ۲۱ ۳) ۲۲ ۴) ۲۳ ✓

$\frac{\frac{n(n-3)}{2}}{n}=10 \rightarrow \frac{n-3}{2}=10 \rightarrow n=23$

۳- قطرهای کدام چهارضلعی منصف یکدیگر نمی‌باشند؟

۱) متوازی‌الاضلاع ۲) مستطیل ۳) مربع ۴) ذوزنقه ✓

۴- کدام‌یک از تعاریف زیر، تعریف مربع نیست؟

۱) مستطیلی که دو ضلع مجاورش برابرند.
۲) لوزی که قطرهایش برابرند.
۳) لوزی که دو ضلع مجاورش بر هم عمودند.
۴) مستطیلی که قطرهایش برابرند. ✓

۵- در چهارضلعی ABCD داریم: $AB \parallel CD$ و $AD=BC=CD$. اگر زاویه‌ی $\hat{BAC}=30^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{CAD}$ چقدر است؟

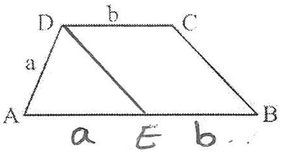
۱) 20°

۲) 30° ✓

۳) 40°

۴) 15°

۶- در ذوزنقه‌ی ABCD شکل مقابل داریم: $\hat{D}=2\hat{B}$ ، با توجه به اندازه‌ها، طول AB کدام است؟



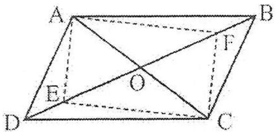
۱) $a+b$ ✓

۲) $2(a+b)$

۳) $b-a$

۴) $2(b-a)$

۷- در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل، نقاط E و F را روی قطر BD طوری انتخاب می‌کنیم که $OE=OF=AO$ باشد. نوع چهارضلعی AECF کدام است؟



۱) متوازی‌الاضلاع

۲) ذوزنقه

۳) مربع

۴) مستطیل ✓

۸- از برخورد نیمسازهای داخلی شکل A، شکل B و از برخورد نیمسازهای داخلی شکل B، یک مربع ایجاد شده است. شکل A کدام بوده است؟

۱) مستطیل   ۲) مربع

۳) لوزی   ۴) متوازی‌الاضلاع ✓

۹- اگر a و b اضلاع یک مستطیل باشند، آنگاه مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی این مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{a^2+b^2}{2}$ ۲) $\frac{a^2-b^2}{2}$

۳) $\frac{(a-b)^2}{2}$ ✓   ۴) $\frac{(a+b)^2}{2}$

۱۰- اگر اقطار یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع   ۲) مستطیل ✓

۳) لوزی   ۴) مربع

۱۱- اگر اقطار یک چهارضلعی با هم مساوی باشند، آنگاه اوساط اضلاع آن رئوس کدام چهارضلعی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع   ۲) مستطیل

۳) لوزی ✓   ۴) مربع

۱۲- اگر اوساط اضلاع یک مستطیل به طول ۴ و عرض ۳ را به هم وصل کنیم، محیط شکل حاصل چقدر است؟

۱) ۵ ✓۲) ۱۰

۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۱۳- در تست قبل، مساحت شکل حاصل چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸

✓۳) ۶ ۴) ۱۶

۱۴- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، زاویه‌ی قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند. اگر اندازه‌ی ارتفاع وارد بر وتر $\sqrt{۳}$ باشد، اندازه‌ی وتر کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۳}$

✓۲) ۴

۳) ۳

۴) $۳\sqrt{۳}$

۱۵- در یک مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، دو برابر ارتفاع وارد بر وتر است. تفاضل دو زاویه‌ی حاده‌ی مثلث کدام است؟

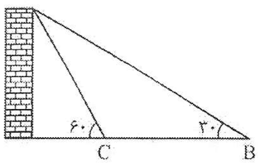
۱) ۱۵°

۲) ۷۵°

۳) ۳۰°

✓۴) ۶۰°

۱۶- در شکل مقابل، $\hat{B}=۳۰^\circ$، $\hat{C}=۶۰^\circ$ و $BC=۱۱۲$ متر است. ارتفاع دیوار چند متر است؟



✓۱) $۵۶\sqrt{۳}$

۲) $۵۶\sqrt{۲}$

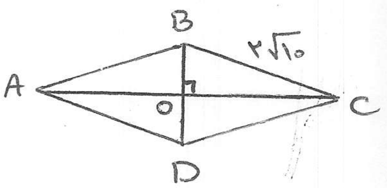
۳) $۶۰\sqrt{۳}$

۴) $۶۰\sqrt{۲}$

خلاصه نویسی:

سؤالات تشریحی:

۱- در یک لوزی اندازه‌ی هر ضلع $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{۱}{۳}$ است. مساحت لوزی را بیابید. (تمرین ۱ صفحه ۷۲)



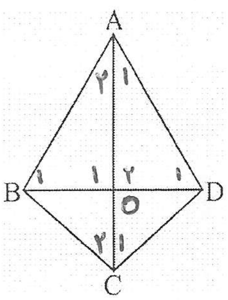
$\frac{BD}{AC}=\frac{1}{3} \to \frac{BO}{OC}=\frac{1}{3}$

$\overset{\triangle}{BOC}: BO^2+\underbrace{OC^2}_{(3BO)^2}=2\sqrt{10} \to 10BO^2=40 \to BO=2 \to BD=4$

$\to OC=3BO=6 \to AC=12$

$\to S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$

۲- در چهارضلعی ABCD شکل مقابل، $AB=AD$ و $BC=CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی بر هم عمودند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی **کایت** نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمودمنصف قطر دیگر است. (تمرین ۲ صفحه ۷۲)



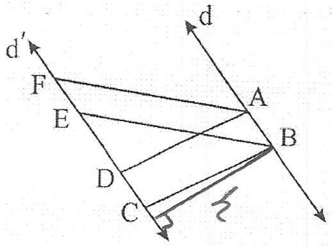
$\begin{cases} AB=AD \\ BC=DC \\ AC=AC \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ADC} \to \begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \end{cases} \to$ AC نیمساز $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است

$\begin{cases} AB=AD \\ \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AO=AO \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \overset{\triangle}{AOB} \cong \overset{\triangle}{AOD} \to \begin{cases} OB=OD \quad (1) \\ \hat{O}_1=\hat{O}_2 \xrightarrow{O_1+O_2=180^\circ} \hat{O}_1=\hat{O}_2=90^\circ \quad (2) \end{cases}$

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ BD عمودمنصف AC

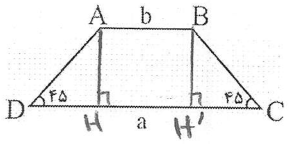
$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$

۳- در شکل دو خط d و d′ موازی‌اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی‌الاضلاع‌اند. اگر مساحت یکی از این متوازی‌الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S کدام است. (تمرین ۳ صفحه ۷۲)



$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB\times h$$
$$S_{ABEF}=\frac{1}{2}AB\times h$$
$$\rightarrow S_{ABCD}=S_{ABEF}=S$$

۴- در ذوزنقه‌ی شکل مقابل، اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه‌ی مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت ذوزنقه را برحسب a و b محاسبه کنید. (تمرین ۴ صفحه ۷۲)

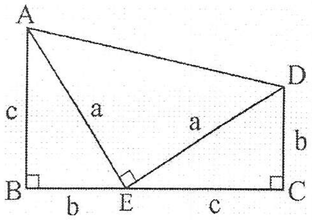


مثلث های ADH و BCH′ قائم الزاویه‌ی متساوی الساقین اند:

$$AH=BH'=DH=CH'=\frac{a-b}{2}$$

$$S=\frac{(CD+AB)\times AH}{2}=\frac{(a+b)\left(\frac{a-b}{2}\right)}{2}=\frac{1}{4}(a^2-b^2)$$

۵- مساحت ذوزنقه‌ی مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آن‌ها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟



$$1:\ S=\frac{(AB+CD)\times BC}{2}=\frac{(b+c)\times(b+c)}{2}=\frac{(b+c)^2}{2}$$

$$2:\ S=S_{ABE}+S_{CDE}+S_{ADE}=\frac{bc}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{a^2}{2}$$

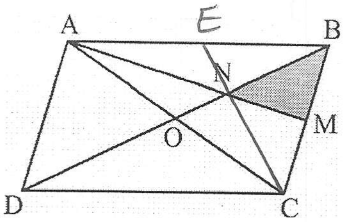
$$\rightarrow 1=2\rightarrow\frac{(b+c)^2}{\cancel{2}}=\frac{2bc+a^2}{\cancel{2}}\rightarrow b^2+c^2+\cancel{2bc}=\cancel{2bc}+a^2$$

$$\rightarrow b^2+c^2=a^2$$

اثبات قضیه‌ی فیثاغورس

سؤالات تشریحی:

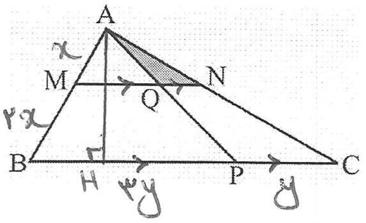
۱- در متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطه‌ی M وسط ضلع BC است و پاره‌خط AM، قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید: $S_{BMN}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$ (تمرین ۶ صفحه ۷۲)



از راس C به N وصل کرده، امتداد میدهیم تا AB را در E قطع کند، N محل همرسی میانه‌ها است، پس:

$$S_{BMN}=\frac{1}{6}\underbrace{S_{ABC}}_{\frac{1}{2}S_{ABCD}}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$$

۲- در مثلث ABC، خط MN موازی ضلع BC و $\frac{AM}{MB}=\frac{1}{2}$ است. همچنین $\frac{PC}{PB}=\frac{1}{3}$ است. S_{AQN} و S_{MQPB} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟ (تمرین ۷ صفحه ۷۳)



موازی مورب $\left\{\begin{array}{l}\hat{N}=\hat{C}\\ \hat{A}=\hat{A}\end{array}\right.\xrightarrow{\text{ز ز}}\triangle AQN\sim\triangle APC\to$ نسبت تشابه $k=\frac{AN}{AC}\overset{\text{تالس}}{=}\frac{AM}{AB}=\frac{1}{3}$

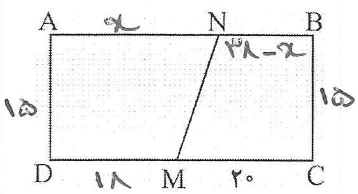
$$\to\frac{S_{AQN}}{S_{APC}}=k^2=\frac{1}{9}\to S_{AQN}=\frac{1}{9}S_{APC}\to S_{AQN}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}S_{ABC}\right)$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times \overset{y}{PC}}{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times \underset{4y}{BC}}=\frac{1}{4}\to S_{APC}=\frac{1}{4}S_{ABC}\to S_{AQN}=\frac{1}{36}S_{ABC}$$

$$S_{MQPB}=S_{ABC}-\underbrace{S_{AMQ}}_{(S_{AMN}-S_{AQN})}-S_{APC}=S_{ABC}-S_{AMN}+S_{AQN}-S_{APC}$$

$$=S-\frac{1}{9}S+\frac{1}{36}S-\frac{1}{4}S=\frac{2}{3}S$$

۳- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه‌ی M که MC=۲۰ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه‌ی با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود. (تمرین ۸ صفحه ۷۳)

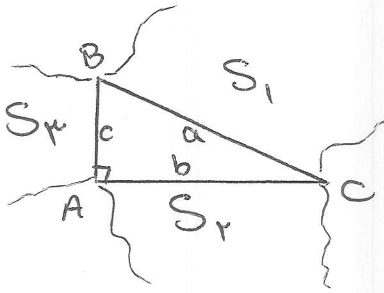


$$S_{ANMD}=S_{NBCM}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}(18+x)\times\cancel{15}=\cancel{\frac{1}{2}}\times(38-x+20)\times\cancel{15}\to 18+x=58-x$$

$$\to 2x=40\to x=20$$

۴- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت‌های ساخته شده روی ضلع های زاویه‌ی قائمه است. (تمرین ۹ صفحه ۷۳)



رابطه فیثاغورس: $a^2=b^2+c^2$

نسبت مساحت‌های دو چندضلعی متشابه برابر k^2 (مجذور نسبت تشابه) است:

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{b^2}{a^2}$$

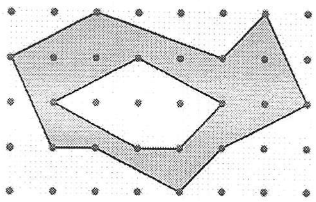
$$\frac{S_3}{S_1}=\frac{c^2}{a^2}$$

$$\xrightarrow{+} \frac{S_2}{S_1}+\frac{S_3}{S_1}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2} \longrightarrow \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{\overbrace{b^2+c^2}^{a^2}}{a^2}$$

$$\longrightarrow \frac{S_2+S_3}{S_1}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

$$\longrightarrow S_2+S_3=S_1$$

۵- با توجه به مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای، مساحت قسمت سایه‌زده را محاسبه کنید. (تمرین ۱۰ صفحه‌ی ۷۳)



چندضلعی بزرگ‌تر: $S_1=\frac{b_1}{2}-1+i_1=\frac{9}{2}-1+13=\frac{33}{2}$

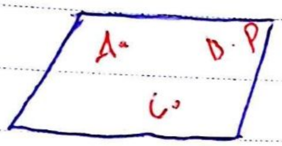
" کوچک‌تر: $S_2=\frac{b_2}{2}-1+i_2=\frac{5}{2}-1+3=\frac{9}{2}$

$$\longrightarrow S_{\text{هاشور}}=S_1-S_2=\frac{33}{2}-\frac{9}{2}=12$$

Subject:
Date

۱. فصل ۴ ، تجسم فضایی (هندسه فضایی)

خط و صفحه :



نمایش صفحه ۳ نقطه نیاز است   نمایش خط ← ۲ نقطه نیاز است

نکته: از یک خط بیشمار صفحه تولید می شود. روی هر خط بینهایت نقطه و روی هر صفحه بینهایت خط وجود دارد.

وضعیت دو خط در فضا :

1. موازی: به دو خط که در یک صفحه باشند و هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، دو خط موازی گوییم.

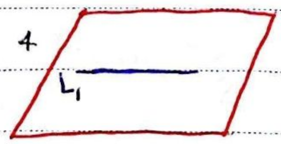
2. منطبق: به دو خط که در یک صفحه باشند و در بیشمار نقطه مشترک هستند را دو خط منطبق گویند.

3. متقاطع: به دو خط که در یک صفحه و در یک نقطه با هم مشترک اند را دو خط متقاطع گویند.

4. متنافر: به دو خط که در یک صفحه قرار نداشته باشند دو خط متنافر گوییم.

$L_1 \parallel L_2$ $L_1 - L_2$ $L_1 \nparallel L_2$

L_2



L_2 = روی دیوار مقابل است

P = اسم صفحه

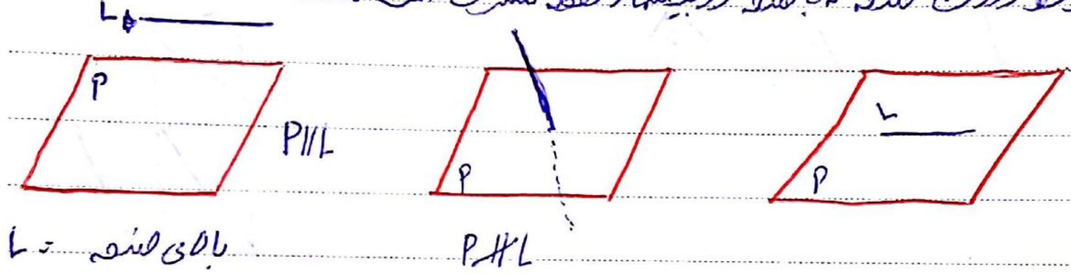
Subject:
Date

وضعیت خط و صفحه در فضا:

1. موازی: به خطی که با صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشد.

2. متقاطع: به خط و صفحه ای که در یک نقطه مشترک اند. خط و صفحه متقاطع می‌شوند.

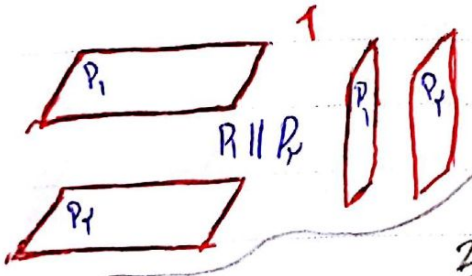
3. منطبق: به هر خط درون صفحه که با صفحه در بیشمار نقطه مشترک است.



وضعیت دو صفحه در فضا:

موازی: به دو صفحه که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند، دو صفحه موازی می‌گوییم.

2. متقاطع: به دو صفحه که در یک خط با هم مشترک اند. و به آن خط، فصل مشترک دو صفحه گفته می‌شود.



3. منطبق: به دو صفحه که در بیشمار نقطه مشترک اند.