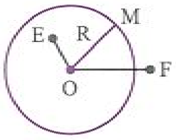
دایره

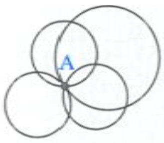
مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه مقدار معلومی باشد **دایره** نامیده می‌شود. دایره را با حرف بزرگ نمایش می‌دهند مثلاً شکل مقابل دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است که با نماد $C(O,R)$ نشان داده می‌شود.



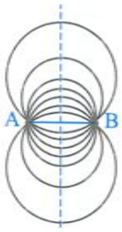
داخل دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره کم‌تر است، داخل دایره نامیده می‌شود $(OE < R)$.

برون دایره: مکان هندسی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز دایره از شعاع دایره بیش‌تر است، برون دایره نامیده می‌شود $(OF > R)$.

چند نکته‌ی ساده:



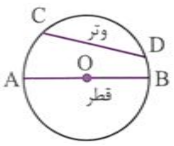
۱) بر هر نقطه‌ی صفحه **بی‌نهایت** دایره می‌گذرد.



۲) از دو نقطه‌ی متمایز نیز **بی‌نهایت** دایره می‌گذرد و مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خطی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

تمرین: بنظر شما از سه نقطه ی غیر واقع بر یک خط چند دایره می گذرد؟

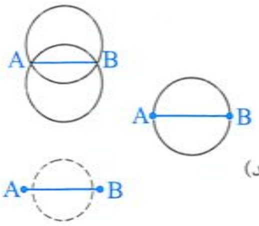
تمرین: درباره ی تعداد دایره هایی که از سه نقطه ی واقع بر یک خط می گذرند، بحث کنید.



وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند وتر دایره نامیده می‌شود. وتری که از مرکز دایره بگذرد قطر دایره نامیده می‌شود. هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که نیم‌دایره نامیده می‌شوند.

مثال: از دو نقطه‌ی A و B که به فاصله‌ی ۵ واحد از هم هستند، چند دایره به شعاع ۳ می‌گذرد؟

حل: از دو نقطه همان‌طور که گفتیم بی‌نهایت دایره (البته با شعاع‌های مختلف) می‌گذرد، ولی اگر فاصله‌ی دو نقطه و شعاع دایره اعداد معلومی باشند، جواب حداکثر ۲ خواهد بود به‌طوری که:

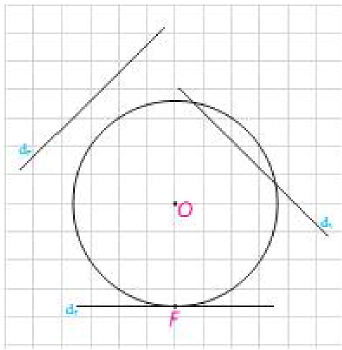


۱) اگر قطر بزرگ‌تر از AB باشد، آن‌گاه **دو** دایره از A و B می‌گذرد. (AB وتری از دایره است)

۲) اگر قطر مساوی AB باشد، آن‌گاه **یک** دایره از A و B می‌گذرد. (AB قطر دایره است)

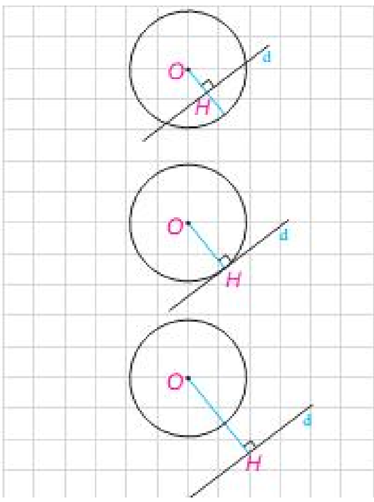
۳) اگر قطر کوچک‌تر از AB باشد، آن‌گاه **هیچ** دایره‌ای از A و B نمی‌گذرد. (AB نمی‌تواند وتر یا قطر دایره باشد)

اکنون قطر دایره $2R = 6$ می‌باشد و $AB < 6$ است، پس دو دایره از A و B می‌گذرد که شعاع آن‌ها ۳ باشد.



اوضاع نسبی خط و دایره

در پایه‌های قبل با اوضاع نسبی خط و دایره تا حدودی آشنا شدید و دیدید که یک خط و یک دایره می‌توانند یک یا دو نقطهٔ اشتراک داشته، و یا هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند.
در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر **دایره مماس** است و در حالتی که خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره **قاطع** می‌نامیم.



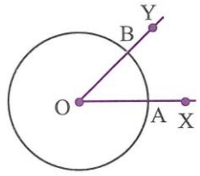
اگر d یک خط و $C(O,r)$ یک دایره و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از نقطهٔ O به خط d رسم می‌شود، موارد زیر را کامل کنید.

الف) اگر فاصلهٔ خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد $(OH < r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند

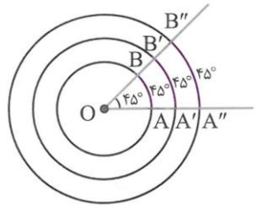
ب) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد $(OH = r)$، خط و دایره .... نقطهٔ اشتراک دارند؛ یعنی ....

پ) اگر فاصلهٔ خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد $(OH > r)$، خط و دایره ....

زاویه‌ی مرکزی

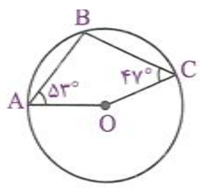


زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره باشد. در شکل مقابل $X\hat{O}Y$ یک زاویه‌ی مرکزی است. اگر A و B دو سر یک قطر نباشند زاویه‌ی مرکزی دایره را به دو کمان کوچک و بزرگ $\overset{\frown}{AB}$ تقسیم می‌کند.



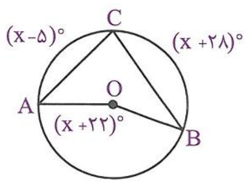
اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی: اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی برابر است با اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن برحسب درجه و به بزرگی و کوچکی دایره بستگی ندارد. در شکل مقابل همه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{A''B''}$ به اندازه‌ی ۴۵° می‌باشند.

مثال:



در شکل روبه‌رو، O مرکز دایره، $\hat{C} = ۴۷^\circ$ و $\hat{A} = ۵۳^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی AOC چند درجه است؟

مثال:



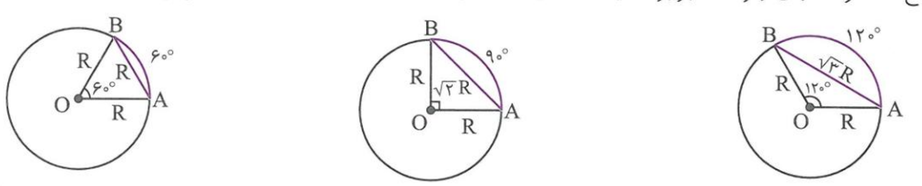
اگر در شکل روبه‌رو O مرکز دایره باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ چند درجه است؟

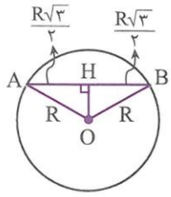
۱) ۱۳۵ ۲) ۱۲۱

۳) ۱۰۸ ۴) ۱۲۷

وترهای خاص در دایره

در دایره به شعاع R اگر اندازه‌ی وتر AB برابر R یا $R\sqrt{۲}$ یا $R\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر ۶۰° یا ۹۰° یا ۱۲۰° است و بالعکس.





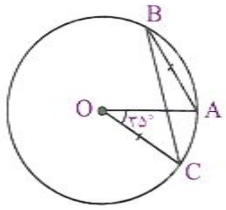
اثبات: مثلاً برای $AB = R\sqrt{۳}$، ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین AOB را رسم می‌کنیم:

$$OH^۲ = OB^۲ - BH^۲ = R^۲ - (\frac{R\sqrt{۳}}{۲})^۲ = R^۲ - \frac{۳R^۲}{۴} = \frac{R^۲}{۴} \Rightarrow OH = \frac{R}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۳۰^\circ$$

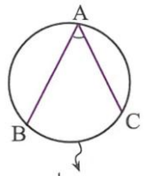
$$\Rightarrow A\hat{O}B = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

مثال:

در شکل مقابل، O مرکز دایره و $AB = OC$ و $A\hat{O}C = ۳۵^\circ$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی BCO کدام است؟



زاویه‌ی محاطی

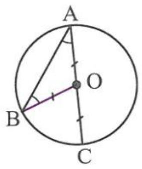


کمان روبه‌رو به زاویه‌ی محاطی

زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ای که رأسش روی دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند، زاویه‌ی محاطی نامیده می‌شود.

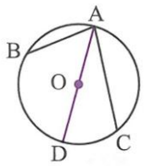
ویژگی زاویه‌ی محاطی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف اندازه‌ی کمان مقابل به آن است.

اثبات: آ) فرض کنیم یک ضلع زاویه قطر دایره باشد.



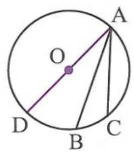
$$\left.\begin{array}{l} OB = OA \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \text{زاویه‌ی خارجی } B\hat{O}C = \hat{A} + \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{O}C = ۲\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{B\hat{O}C}{۲}$$

اما $B\hat{O}C$ زاویه‌ی مرکزی است پس با کمان $\overset{\frown}{BC}$ برابر است لذا $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



ب) فرض کنیم مرکز دایره بین دو ضلع زاویه‌ی محاطی باشد، قطر AD را رسم می‌کنیم، بنابه قسمت (آ) داریم:

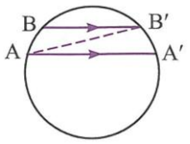
$$B\hat{A}C = B\hat{A}D + D\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



پ) فرض کنیم دو ضلع زاویه‌ی محاطی یک طرف مرکز دایره باشند، قطر AD را رسم می‌کنیم طبق قسمت (آ) داریم:

$$B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

رابطه‌ی کمان‌های محصور بین دو وتر موازی



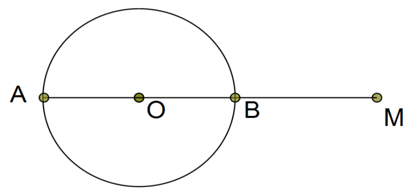
در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.

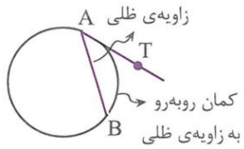
اثبات:

عکس قضیه فوق نیز صادق است. یعنی اگر کمان های محصور بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر برابرند.

اثبات:

بیشترین و کمترین فاصله ی یک نقطه خارج دایره از نقاط دایره: مطابق شکل اگر نقطه M خارج از دایره C باشد، آنگاه بیشترین فاصله ی M از نقاط دایره برابر MA و کمترین فاصله آن برابر MB است.





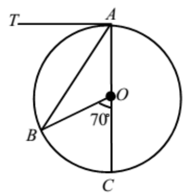
زاویه‌ی ظلی

زاویه‌ای که رأسش روی دایره بوده و یک ضلعش دایره را قطع می‌کند و ضلع دیگرش بر دایـره ممـاس است، زاویه‌ی ظلی نامیده می‌شود.

ویژگی زاویه‌ی ظلی: اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر است با نصف اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن. (نهایی- شهریور ۹۲- خرداد ۹۰)

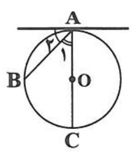
اثبات:

تمرین : زاویه ی $T\hat{A}B$ چند درجه است ؟



تست:

در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی A_2 برابر 50° است. اندازه‌ی کمان $\widehat{BC}$ بر حسب درجه کدام است؟

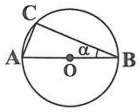


۱) 70° ۲) 75° ۳) 80° ۴) 85°

مثلث ABC در یک دایره محاط است و اندازه‌ی کمان‌های AB و BC و AC به ترتیب $x + 75^\circ$ و $2x + 7^\circ$ و $3x - 22^\circ$ است. اندازه‌ی یکی از زاویه‌های داخلی مثلث بر حسب درجه کدام است؟

۱) $57/7^\circ$ ۲) 59° ۳) 60° ۴) 64°

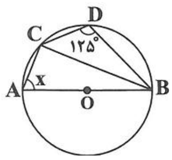
در شکل روبه‌رو $\widehat{BC} = ۵\widehat{AC}$ می‌باشد و O مرکز دایره است. زاویه‌ی α کدام است؟



۱) $۲۲/۵^\circ$ ۲) ۱۸°

۳) ۱۵° ۴) ۲۰°

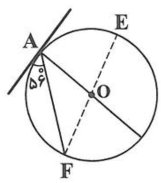
در شکل مقابل O مرکز دایره است، زاویه‌ی x کدام است؟



۱) ۶۵° ۲) ۴۵°

۳) ۵۵° ۴) ۷۵°

- در شکل مقابل، O مرکز دایره و زاویه‌ی A برابر ۵۶° است. کمان $\widehat{AE}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۱)



۱) ۶۸° ۲) ۶۶°

۳) ۶۴° ۴) ۶۲°

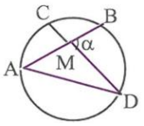
مرکز دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و دایره از دو رأس دیگر مثلث می‌گذرد، امتداد ضلع AC ، دایره را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}B$ کدام است؟

۱) ۱۵° ۲) ۳۰° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

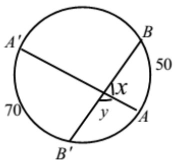
زاویه‌ی بین مماس‌ها و وترها در دایره

آ) زاویه‌ی بین دو وتر متقاطع در یک دایره: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازه‌ی دو کمانی از دایره است که به ضلع‌ها و امتداد ضلع‌های آن زاویه محدودند. (نهایی- شهریور ۹۳ و ۹۰- خرداد ۹۱- دی ۸۹)

اثبات:



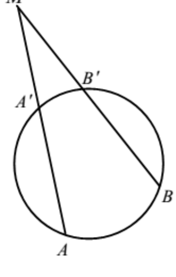
تمرین : y, x را بیابید .



ب) زاویه‌ی بین امتداد دو وتر: اندازه‌ی زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

اثبات:

تمرین : اندازه ی زاویه ی M را در هریک از حالات زیر به دست آورید .



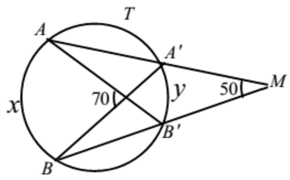
الف) $\overset{\frown}{A'B'} = 80^\circ ,\ \overset{\frown}{AB} = 120^\circ$

ب) $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'} = 30^\circ$

ج) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} + 60^\circ$

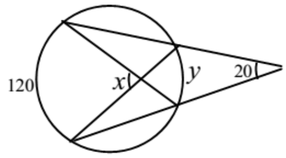
د) $\overset{\frown}{A'B'} = \dfrac{\overset{\frown}{BB'}}{4} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{3} = \dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{2}$

تمرین : $y\,,x$ را به دست آورید .

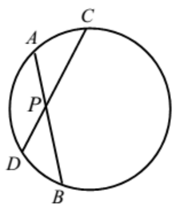


تمرین

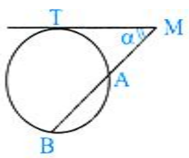
– در شکل زیر مقدار $x+y$ چقدر است ؟



· در شکل زیر $AC=2x^\circ$, $BD=3x^\circ$, $C\hat{P}B=5x^\circ$ است . x را به دست آورید .



توجه: در حالت خاص، اگر یکی از وترها تبدیل به مماس شود، باز هم قضیه‌ی فوق برقرار است:



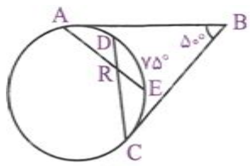
$$\alpha=\frac{|\widehat{TB}-\widehat{TA}|}{۲}$$

اثبات:

ت) اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس: اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس بر دایره، برابر قدرمطلق نصف تفاضل اندازه‌ی کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند.

اثبات:

مثال : در شکل مقابل، AB و BC بر دایره مماس‌اند و $\hat{B} = 50^\circ$ و $\widehat{DE} = 75^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{R}C$ کدام است؟



۱) ۱۵۵°　　۲) ۱۵۰°

۳) ۱۵۷/۵°　　۴) ۱۵۲/۵°

نکته‌ی کلیدی: اگر اندازه‌ی زاویه‌ی بین دو مماس مرسوم از یک نقطه خارج دایره بر دایره برابر α باشد، آن‌گاه اندازه‌ی کمان‌های ایجاد شده روی دایره به‌ترتیب $180^\circ - \alpha$ و $180^\circ + \alpha$ است.

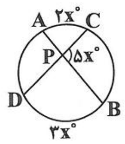
اثبات:

مثال ۱ از نقطه‌ی M دو مماس MA و MB بر یک دایره رسم شده است. اگر C نقطه‌ای روی کمان کوچک $\widehat{AB}$ باشد به طوری‌که $A\hat{C}B = 3\hat{M}$، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{M}$ چند درجه است؟

۱) ۳۰　　۲) ۳۶　　۳) ۳۴　　۴) ۳۲

تست:

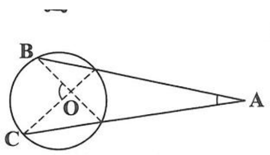
در شکل مقابل $\widehat{AC} = 2x^\circ$ و $\widehat{BD} = 3x^\circ$ و $C\hat{P}B = 5x^\circ$، مقدار x چند درجه است؟



۱) ۲۰°　　۲) ۲۴°

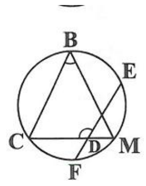
۳) ۳۲°　　۴) ۳۶°

در شکل مقابل $\hat{A} = 27^\circ$ و $\hat{O} = 71^\circ$، کمان $\widehat{BC}$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۸۶)



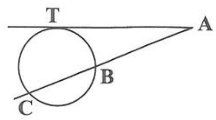
۱) ۹۸°　　۲) ۱۰۰°

۳) ۱۰۲°　　۴) ۱۰۴°



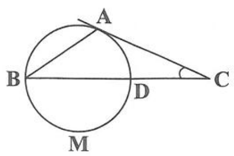
در شکل مقابل M وسط کمان EF است و $BC = 50^\circ$، اندازه‌ی $B + D$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) 160°
۲) 175°
۳) 180°
۴) 230°



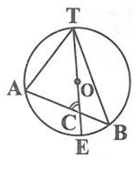
در شکل، AT مماس و $\widehat{BC} = \widehat{CT} = 2\widehat{BT}$، زاویه‌ی A چند درجه است؟ (آزاد ریاضی ۸۶)

۱) 18°
۲) 72°
۳) 36°
۴) 144°



در شکل مقابل مماس AC بر دایره، با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه‌ی C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) ۲۱
۲) ۲۲
۳) ۲۳
۴) ۲۴



در شکل مقابل O مرکز دایره و $\widehat{A} = 65^\circ$ و $\widehat{B} = 35^\circ$، زاویه‌ی C چند درجه است؟ (سراسری ریاضی ۸۱)

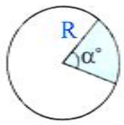
۱) 60°
۲) 61°
۳) 62°
۴) 63°

محیط و مساحت در دایره

۱) مساحت دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$S = \pi R^{2}$$

۲) مساحت قطاع α° از دایره به شعاع R برابر است با:

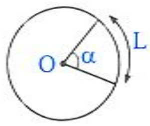


$$S = \frac{\alpha}{360}(\pi R^{2})$$

۳) محیط دایره‌ای به شعاع R برابر است با:

$$P = 2\pi R$$

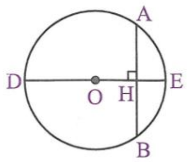
۴) طول کمان α° از دایره‌ای به شعاع R برابر است با:



$$L = \frac{\alpha}{360}(2\pi R)$$

رابطه‌ی قطر عمود بر وتر در دایره

قضیه: در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



$$DE \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$$

اثبات:

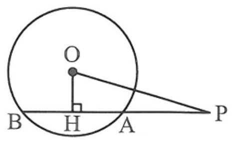
تمرین: روش رسم دایره ای که سه نقطه ی متمایز A ، B و C از آن را در اختیار داریم، شرح دهید.

مثال:

از نقطه‌ی M واقع در خارج دایره‌ای به شعاع ۴ واحد، دو مماس MA و MB بر دایره رسم شده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین نقاط دایره $۴(\sqrt{۲}-۱)$ باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۸)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۲

مثال:

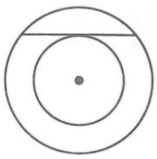


در شکل مقابل، $AB=۶$ و $OH=۱$ و $O\widehat{H}A=۹۰^\circ$، شعاع دایره چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی- ۷۶)

۱) $\sqrt{۱۳}$ ۲) $\sqrt{۱۲}$

۳) $\sqrt{۱۱}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

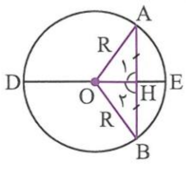
مثال:



شعاع‌های دو دایره‌ی هم‌مرکز ۶ و ۱۰ سانتی‌متر هستند. اندازه‌ی وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر را که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است، پیدا کنید. (نهایی- شهریور ۹۱)

عکس قضیه‌ی فوق درست است و دو حالت دارد:

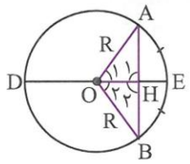
۱) در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره که از مرکز دایره نگذشته باشد، وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.



اثبات:

۲) در هر دایره خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن دایره وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

اثبات:

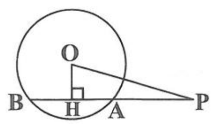


مثال:

در شکل مقابل $AB = 6$ و $OH = 1$ و $O\widehat{H}A = 90^\circ$ شعاع دایره چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی ۷۶)

۱) $\sqrt{13}$　　　۲) $\sqrt{12}$

۳) $\sqrt{11}$　　　۴) $\sqrt{10}$



در دایره‌ی با شعاع ۱۲، طول وتری که عمود منصف شعاعی از دایره باشد، چه‌قدر است؟

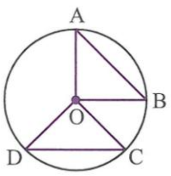
۱) $3\sqrt{13}$　　　۲) ۲۷　　　۳) $6\sqrt{3}$　　　۴) $12\sqrt{3}$

در یک دایره، نقطه‌ی C روی وتر AB آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۲ و ۱۴ سانتی‌متر تقسیم کرده است. اگر فاصله‌ی این نقطه تا مرکز دایره ۱۰ سانتی‌متر باشد، مساحت دایره کدام است؟

۱) 72π　　　۲) 128π　　　۳) 64π　　　۴) 108π

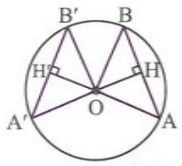
خواص وترهای مساوی در دایره

۱) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.



اثبات:

۲) در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) وترهای متساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس. (نهایی- شهریور ۸۵)



اثبات:

مثال : **اندازه‌ی دو وتر در یک دایره $4x+4$ و $3x+9$ سانتی‌متر است. اگر کمان‌های نظیر دو وتر برابر باشد در صورتی‌که فاصله‌ی مرکز دایــره تــا وسط یکی از وترها برابر ۵ باشد آن‌گاه طول شعاع دایره کدام است؟**

۱) ۱۰   ۲) ۱۲   ۳) ۱۳   ۴) ۱۴

خواص وترهای نامساوی در دایره

۱) در یک دایره، از دو وتر نابرابر آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس. (نهایی- دی ۹۰- خرداد ۸۹، ۸۶ و ۸۴)

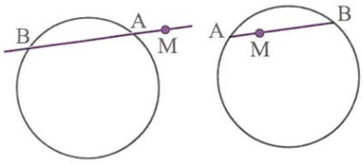
اثبات:

۲) کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

اثبات:

مثال: اگر M نقطه ای داخل دایره $C(O,10)$ باشد و $OM=5$ باشد، طول کوتاهترین و بزرگترین وتری که از M می گذرد چند است؟

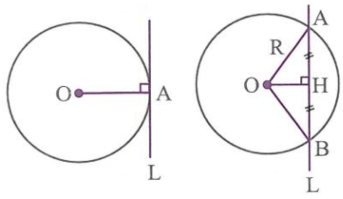
خط‌های قاطع و مماس نسبت به دایره



خط قاطع: هر خط که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع نامیده می‌شود. اگر از نقطه‌ی M واقع در صفحه‌ی یک دایره، خطی رسم شده و دایره را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند پاره‌خط‌های MA و MB دو قطعه‌ی قاطع نامیده می‌شوند.

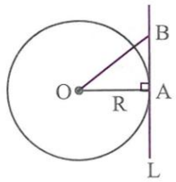
خط مماس: خطی که دایره را در یک نقطه قطع کند، خط مماس نامیده می‌شود و خواص آن به شرح زیر است:

آ) خط مماس بر دایره همواره در نقطه‌ی تماس بر شعاع دایره عمود است.



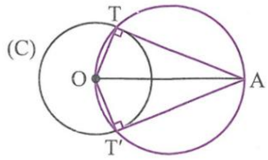
اثبات: فرض کنیم خط L در نقطه‌ی A بر دایره‌ی $C(O,R)$ مماس است. فرض کنیم خط L بر OA عمود نباشد در این‌صورت عمود OH را بر L رسم می‌کنیم و پاره‌خط BH را روی L به‌اندازه‌ی AH رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH و BOH به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند پس $OB = OA = R$. یعنی B روی دایره قرار دارد. در این صورت L دایره را به جای یک نقطه در دو نقطه قطع می‌کند که با فرض مماس بودن آن تناقض دارد. پس $OA \perp L$

ب) خطی که در انتهای یک شعاع بر آن عمود باشد، بر دایره مماس است.



اثبات: فرض کنیم خط L در انتهای شعاع OA بر آن عمود باشد، B را نقطه‌ای دیگر از خط L در نظر می‌گیریم در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOB داریم $OB > OA$ یا $OB > R$ و این یعنی B خارج دایره قرار دارد و خط L فقط در نقطه‌ی A دایره را قطع می‌کند پس L بر دایره مماس است.

رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن

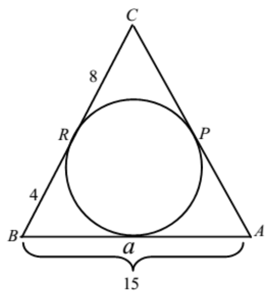


نقطه‌ی A را خارج دایره‌ی $C(O,R)$ در نظر می‌گیریم، O را به A وصل می‌کنیم. دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره‌ی (C) را T و T′ می‌نامیم. زوایای OTA و OT′A روبه‌رو به قطرند پس قائمه‌اند. در نتیجه AT و AT′ در نقاط T و T′ بر دایره‌ی (C) مماس‌اند و با فرض $OA > R$ مسأله همواره دو جواب دارد.

پ) از هر نقطه خارج دایره دو مماس بر دایره می‌توان رسم کرد که هم‌اندازه‌اند. (نهایی- شهریور ۹۳ و ۸۷- خرداد ۹۱)

اثبات:

تمرین: در شکل زیر اضلاع مثلث بر دایره مماسند. طول ضلع AC را بیابید.



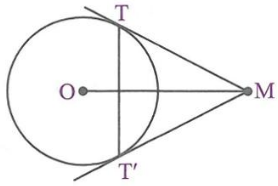
مثال:

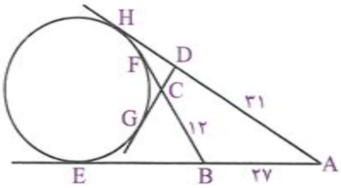
دایره‌ی $C(O,4)$ و نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۸ سانتی‌متر از مرکز این دایره را در نظر بگیرید، خط‌های MT و MT' بر این دایره مماس‌اند (T و T' نقطه‌های تماس‌اند). (نهایی- شهریور ۸۸)

آ) طول مماس‌های MT و MT' را به‌دست آورید.

ب) طول وتر TT' را به‌دست آورید.

پ) اندازه‌ی زاویه‌ی TMT' و نوع مثلث MTT' را تعیین کنید.





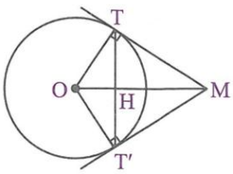
مثال در شکل مقابل، AH ، AE ، BF و DG بر دایره مماس‌اند و $AB = ۲۷$ ، $BC = ۱۲$ و $AD = ۳۱$ است. اندازه‌ی CD کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۷

۳) ۸   ۴) ۹

خواص دو مماس رسم شده بر یک دایره‌ی معلوم از یک نقطه خارج آن

در شکل مقابل، MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایره‌ی $C(O،R)$ مماس‌اند و H نقطه‌ی برخورد وتر TT' با OM است. ثابت کنید:



آ) OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

ب) OM عمودمنصف پاره‌خط TT' است.

پ) $OH.OM = R^۲$

ت) $TT'^۲ = ۴OH.HM$

ث) $TT'.OM = ۲R.MT$

اثبات آ)

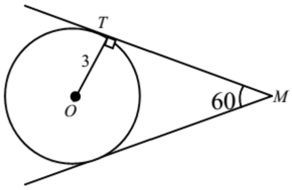
اثبات ب)

اثبات پ)

اثبات ت)

اثبات ث)

مثال: در شکل زیر طول مماس MT چقدر است ؟



مثال:

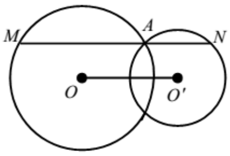
دو دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۸ و ۱۲ مفروض‌اند. وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر مماس بر دایره‌ی کوچک‌تر است. اگر دو مماس مرسوم از دو سر این وتر بر دایره‌ی بزرگ‌تر در نقطه‌ی M متقاطع باشند، آن‌گاه فاصله‌ی M تا مرکز دایره‌ها کدام است؟

۱) ۱۸		۲) ۱۶

۳) ۱۷		۴) ۱۹

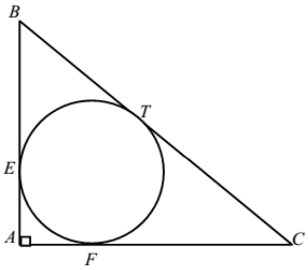
تکلیف:

۱ـ دودایره $C\left(o,4\right)$, $C'\left(o',3\right)$ مفروضند .اگر $oo'=5$ باشدوازنقطه ی تقاطع دو دایره خطی موازی oo' رسم کنیم تاآنهارادر M , N قطع کند MN را بدست آورید :

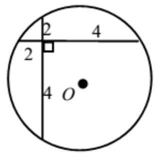


۲ـ اگر فاصله ی وتر AB ازمرکز دایره ی $C\left(\circ,26\right)$ برابر ۱۰ باشد ،طول وتر AB ر ابدست آورید .

۳ـ در مثلث قانم الزاویه زیر $AB=3$, $AC=4$ است . طول CT چقدر است ؟



٤ ـ در شکل روبرو شعاع دایره را بدست آورید .



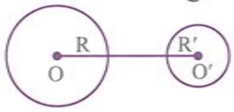
۵ ـ دودایره ی هم مرکز اند وشعاع انها $r_1=4$, $r_2=5$ است. طول قاطعی که دو دایره را قطع می کند در دایره بزرگ تر ۸ است طول بخشی ازآن که در دایره ی کوچکتر قراردارد چقدر است؟

٦ ـ نقطه M به فاصله ۲ از مرکز دایره $C\left(\circ,4\right)$ قرار گرفته است . طول کوتاهترین وتر گذرنده از M چقدر است؟

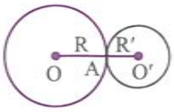
وضع دو دایره نسبت به هم

دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند:

۱) دو دایره‌ی برون هم (دو دایره‌ی متخارج) $\Leftrightarrow d > R + R'$

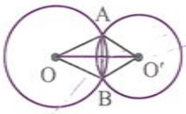


۲) دو دایره‌ی مماس برون (مماس خارج) $\Leftrightarrow d = R + R'$



نکته: لازم به ذکر است که نقاط O، A و O' روی یک امتدادند، زیرا OA و $O'A$ بر خط مماس بر دو دایره در نقطه‌ی A عمودند.

۳) دو دایره‌ی متقاطع $\Leftrightarrow R - R' < d < R + R'$



نکته: در دو دایره‌ی متقاطع، خط‌المرکزین دو دایره همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌هاست. زیرا مطابق شکل هر یک از نقاط O و O' از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند.

۴) دو دایره‌ی مماس درون $\Leftrightarrow d = R - R'$

۵) دو دایره‌ی متداخل $\Leftrightarrow d < R - R'$

۶) دایره‌های هم‌مرکز $\Leftrightarrow d = ۰$

نتیجه:

اگر R و r طول شعاع‌های دو دایره باشد (که $R \geq r$) و d طول خط‌المرکزین باشد، آن‌گاه:

وضعیت	$d < R - r$	$d = R - r$	$R - r < d < R + r$	$d = R + r$	$d > R + r$
تعداد مماس مشترک	صفر	۱	۲	۳	۴
	متداخل	مماس داخل	متقاطع	مماس خارج	متخارج

مثال : وضعیت دایره ها را در هر قسمت مشخص کنید .

۱) $oo' = 2 \ , \ R' = 4 \ , \ R = 8$

۲) $oo' = 3 \ , \ R' = 3 \ , \ R = 6$

۳) $oo' = 10 \ , \ R' = 2 \ , \ R = 7$

٤) $oo' = 16 \ , \ R' = 6 \ , \ R = 10$

٥) $oo' = 5 \ , \ R' = 3 \ , \ R = 6$

تمرین

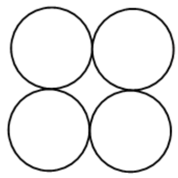
۱ – سه دایره $C_1(o,5)$, $C_2(o',1)$, $C_3(o'',2)$ در یک امتداد مفروض اند . اگر $oo''=6$, $oo'=3$ باشد ، دو دایره C_3,C_2 چه وضعی نسبت به هم دارند ؟

۲ – در دو دایره به شعاع های $R_1=4$, $R_2=3$ و طول خط المرکزین $d=\sqrt{2}-1$ مفروض است . وضعیت دو دایره نسبت به هم چگونه است ؟

۳ – دو دایره به مرکزهای o,o' و شعاع های ۱ و ۳ مماس داخل اند . مساحت مربعی به قطر oo' چقدر است ؟

٤ – دو دایره به شعاع های ۹ و ۱۲ مماس دورنی اند . اندازه ی بزرگ ترین قطعه مماس که یک سر آن بر روی دایره بزرگ تر و سر دیگر آن بر دایره کوچک تر مماس باشد ، چقدر است ؟

۵ – چهار دایره مساوی به شعاع r مطابق شکل برهم مماسند . شعاع دایره ای که با این چهار دایره مماس داخل است را به دست آورید .



تست:

- تعداد مماس مشترک‌های دو دایره‌ی مساوی واقع در یک صفحه، کدام عدد <u>نمی‌تواند</u> باشد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هر سه می‌تواند باشد

- دو دایره به شعاع‌های $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۲}$ و به‌طول خط‌المرکزین $d = ۱$، چه وضعیتی دارند؟ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) متقاطع　　۲) متداخل

۳) متخارج　　۴) مماس خارج

- دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع‌های $r_۱ = \frac{۱}{۲}$، $r_۲ = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = \frac{۱}{۲}$ هستند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟ (آزاد ریاضی صبح ۸۸)

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۳

- دو دایره‌ی $C_۱$ و $C_۲$ به شعاع‌های $r_۱ = \frac{۱}{۲}$، $r_۲ = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = \frac{۱}{۲}$ هستند. چند دایره به شعاع واحد وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟ (آزاد ریاضی صبح ۸۸)

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) صفر　　۴) ۳

- در دو دایره به شعاع‌های $r_۱ = ۲$، $r_۲ = ۳$ و $d = \sqrt{۲}$ (طول خط‌المرکزین)، چند مماس مشترک وجود دارد؟ (آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) ۲　　۲) ۳　　۳) ۱　　۴) ۴

- دو دایره C و C' به مرکزهای O و O' به شعاع‌های ۳ و ۵ به فاصله‌ی $OO' = ۱۱$ مفروض‌اند، چند خط می‌توان رسم کرد که از O و O' به ترتیب به فاصله‌های ۳ و ۵ باشد؟

۱) ۴　　۲) ۳　　۳) ۲　　۴) ۱

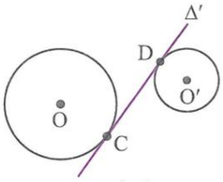
- در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، طول خط‌المرکزین $\sqrt{۵}$ است. چند خط می‌توان رسم کرد که به هر دو دایره مماس باشد؟

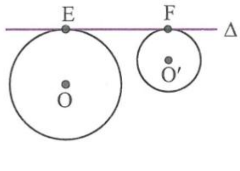
۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۴　　(آزاد ریاضی خارج از کشور ۸۶)

مماس مشترک‌های دو دایره

آ) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره یک طرف خط مماس باشند آن‌گاه آن خط را مماس مشترک خارجی دو دایره گویند. (خط Δ)

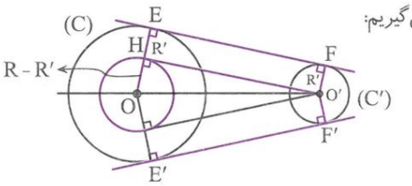
ب) اگر خطی بر دو دایره مماس باشد و دو دایره، دو طرف خط مماس باشند آن خط را مماس مشترک داخلی دو دایره گویند (خط Δ')





بنابه قرارداد اندازه‌ی EF را طول مماس مشترک خارجی و اندازه‌ی CD را طول مماس مشترک داخلی دو دایره می‌نامند.

رسم مماس مشترک‌های دو دایره



آ) رسم مماس مشترک خارجی دو دایره: دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ $(R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R-R'$ رسم می‌کنیم.

۲) از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

۳) O را به H وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی (C) را در نقطه‌ی E قطع کند.

۴) مطابق شکل از نقطه‌ی O' خطی موازی OE رسم می‌کنیم تا دایره‌ی C' را در نقطه‌ی F قطع کند. EF مماس مشترک خارجی دو دایره است.

زیرا چهارضلعی $EFO'H$ مستطیل است ($EH \overset{\parallel}{=} O'F = R'$ و $\widehat{H} = 90^\circ$). اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R-R'$ باشد، مسأله همواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک خارجی دو دایره: در شکل فوق در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OHO' داریم:

$$OO'^2 = OH^2 + O'H^2 \Rightarrow OO'^2 = (R-R')^2 + EF^2 \Rightarrow EF = \sqrt{OO'^2 - (R-R')^2}$$

با فرض این‌که طول خط‌المرکزین دو دایره $OO' = d$ باشد، داریم:

$$EF = \sqrt{d^2 - (R-R')^2}$$

طول خط‌المرکزین در دو دایره‌ی متقاطع به شعاع ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۹۰)

تست:

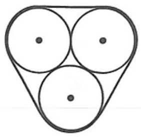
- اندازه‌ی مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟

۱) $12\sqrt{2}$ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) $7\sqrt{6}$ (سراسری ریاضی ۹۱)

- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ بر هم مماس خارج‌اند. طول مماس مشترک خارجی آن‌ها چه‌قدر است؟

۱) ۳   ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲}$

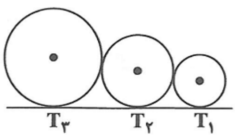
- در شکل مقابل، سه دایره به شعاع‌های R، دو به‌دو بر هم مماسند، طول تسمه‌ای که دور آن‌ها پیچیده شده چه‌قدر است؟



۱) $R(\pi+۳)$ ۲) $۲R(\pi+۳)$

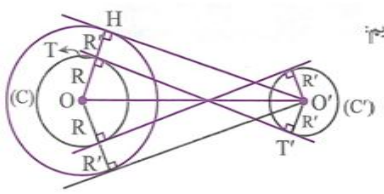
۳) $۲R(\pi+۲)$ ۴) $۲R(\pi+۶)$

- سه دایره مطابق شکل بر هم مماس‌اند و مراکز آن‌ها روی یک خط راست است، اگر $r_۱ = ۱$ و $r_۲ = ۲$ باشد، شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر چه‌قدر است؟



۱) ۳   ۲) ۴

۳) ۶   ۴) $\frac{۵}{۲}$



ب) رسم مماس مشترک داخلی دو دایره: دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')\ (R > R')$ را در نظر می‌گیریم:

۱) به مرکز O و شعاع $R+R'$ یک دایره رسم می‌کنیم.

۲) از نقطه‌ی O' مماس $O'H$ را بر دایره‌ی فوق رسم می‌کنیم.

۳) OH را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن را با دایره‌ی (C) نقطه‌ی T می‌نامیم.

۴) از نقطه‌ی O' خطی موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره‌ی (C') را در نقطه‌ی T' قطع کند. خط TT' مماس مشترک داخلی دو دایره است زیرا $\widehat{T} = \widehat{T'} = ۹۰^\circ$ (چهارضلعی $O'T'TH$ مستطیل است چون $O'T' = R' \overset{\parallel}{=} TH$ و $\widehat{H} = ۹۰^\circ$). اگر O' خارج دایره‌ی به مرکز O و شعاع $R+R'$ باشد مسأله همواره دو جواب دارد.

محاسبه‌ی طول مماس مشترک داخلی دو دایره: با توجه به شکل فوق و با فرض $OO' = d$ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $OO'H$ داریم:

$$OO'^۲ = OH^۲ + O'H^۲ \Rightarrow d^۲ = (R+R')^۲ + TT'^۲ \Rightarrow TT' = \sqrt{d^۲ - (R+R')^۲}$$

تست:

- دو دایره مساوی به شعاع ۵ متخارجند. اگر طول مماس مشترک داخلی آن‌ها برابر $۴\sqrt{۶}$ باشد، اندازه خط‌المرکزین کدام است؟

۱) ۱۲　　۲) ۱۴　　۳) ۱۶　　۴) ۱۵　　(آزاد ریاضی صبح ۹۱)

- دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۵ واحد مماس داخلی هستند. چند وتر به طول $۴\sqrt{۶}$ در دایره‌ی بزرگتر می‌توان رسم کرد که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۰)

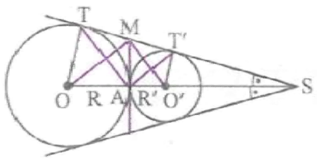
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

- دو دایره به شعاع‌های $r_1 = ۴$ ، $r_2 = ۶$ و طول خط‌المرکزین ۱۲ مفروضند. طول مماس مشترک داخلی آن‌ها چه‌قدر است؟ (آزاد ریاضی صبح ۹۰)

۱) $۲\sqrt{۳۱}$　　۲) $\sqrt{۱۱}$　　۳) $\sqrt{۶۱}$　　۴) $۲\sqrt{۱۱}$

- در دو دایره به شعاع‌های $r_1 = ۱$ و $r_2 = ۳$ و طول خط‌المرکزین $d = ۶$، محل تلاقی مماس مشترک‌های داخلی چه فاصله‌ای از مرکز دایره‌ی کوچک‌تر دارد؟ (آزاد ریاضی عصر ۹۱)

۱) $\frac{۵}{۲}$　　۲) $\frac{۷}{۲}$　　۳) $\frac{۹}{۲}$　　۴) $\frac{۳}{۲}$



خواص دو دایره‌ی مماس خارج

فرض کنیم دو دایره‌ی $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس خارج باشند یعنی $d = R + R'$

۱) مماس مشترک داخلی، طول مماس مشترک خارجی را نصف می‌کند.

اثبات:

۲) نقاط تماس مماس مشترک خارجی و نقطه‌ی تماس دو دایره رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند $(T\hat{A}T' = 90^\circ)$

اثبات:

۳) وسط مماس مشترک خارجی و مراکز دو دایره، رأس‌های یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. $(O\hat{M}O' = 90^\circ)$

اثبات:

۴) طول مماس مشترک خارجی دو دایره واسطه‌ی هندسی دو قطر دایره است یعنی $TT'^2 = 2R \times 2R'$

اثبات:

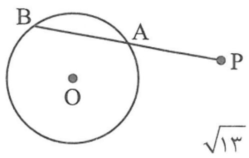
مثال: دو دایره به شعاع های ۷ و ۱۳ مماس خارج اند. فاصله ی نقطه ی تماس دو دایره را از مماس مشترک خارجی دو دایره بیابید.

رابطه‌ی طولی در دایره

آ) وترهای متقاطع: اگر دو وتر در یک دایره متقاطع باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابرند.

اثبات:

مثال:



فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه، قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است، اگر کمان AB برابر ۶۰ درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور- ۹۰)

۱) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۱}-۱)$ ۲) $\frac{۱}{۲}(\sqrt{۱۳}-۱)$ ۳) $\sqrt{۱۱}-۲$ ۴) $\sqrt{۱۳}-۲$

مثال:

نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه‌ترین وتر از دایره، گذرنده از نقطه‌ی C کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۸۲)

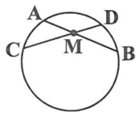
۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

مثال:

دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ واحد، مماس درونی‌اند، اندازه‌ی بزرگ‌ترین قطعه‌ی مماس که یک سر آن بر روی دایره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد، برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی- ۷۸)

۱) ۹ ۲) $۸\sqrt{۲}$ ۳) ۱۲ ۴) $۸\sqrt{۳}$

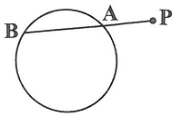
مثال:



- در شکل مقابل $MA = ۶$ و $MB = ۳$ و $MD = ۲/۵$، طول MC کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۶)

۱) ۱۷/۱ ۲) ۶/۹

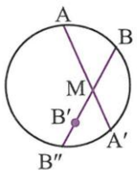
۳) ۷ ۴) ۷/۲



در شکل مقابل $PA = ۵$ و $AB = ۳$ و شعاع دایره برابر ۴ واحد است، فاصله‌ی نقطه‌ی P تا مرکز دایره کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

۱) $۲\sqrt{۲۱}$ ۲) $۲\sqrt{۱۴}$ ۳) $۴\sqrt{۷}$ ۴) $۳\sqrt{۷}$

عکس قضیه‌ی وترهای متقاطع: اگر دو پاره‌خط متقاطع باشند به‌طوری که حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی یکی با حاصل‌ضرب پاره‌خط‌های روی دیگری برابر باشند آن‌گاه از انتهای این پاره‌خط‌ها یک دایره می‌گذرد.

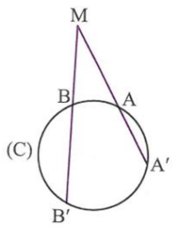


اثبات (روش کتاب درسی): بر سه نقطه‌ی A، B و A' یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABA'). اگر این دایره از نقطه‌ی B' بگذرد حکم ثابت است در غیر این‌صورت این دایره، خط شامل MB را در نقطه‌ای دیگر مانند B'' قطع خواهد کرد، در این‌صورت خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{r} MA.MA' = MB.MB'' \\ \text{(فرض)}\ MA.MA' = MB.MB' \end{array}\right\} \Rightarrow MB.MB'' = MB.MB' \Rightarrow MB'' = MB'$$

چون نقاط B' و B'' یک طرف نقطه‌ی Mاند از تساوی اخیر نتیجه می‌شود B'' بر B' منطبق است که تناقض می‌باشد پس دایره‌ی مذکور از نقطه‌ی B' هم می‌گذرد یعنی چهار نقطه‌ی A، B، A' و B' روی یک دایره‌اند.

رابطه‌ی طولی برای وترهایی با امتدادهای متقاطع



۱) مطابق شکل، اگر امتداد وترهای AA' و BB' از دایره‌ی (C) یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند آن‌گاه: (نهایی- دی ۹۰- شهریور ۸۹)

$$MA.MA' = MB.MB'$$

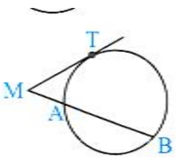
اثبات:

۲) عکس (۱) هم درست است یعنی اگر امتداد دو پاره‌خط AA' و BB' یکدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند به‌طوری که $MA.MA' = MB.MB'$، آن‌گاه نقاط A، B، A' و B' روی یک دایره قرار دارند.

اثبات: از شکل فوق استفاده می‌کنیم. بنابه فرض $MA.MA' = MB.MB'$ پس $\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'}$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \\ \widehat{M} = \widehat{M}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حالت دوم تشابه}} \overset{\Delta}{MAB'} \sim \overset{\Delta}{MBA'} \Rightarrow \widehat{A'} = \widehat{B'}$$

بنابراین نقطه‌ی B' روی کمان درخور زاویه‌ی $\widehat{A'}$ روبه‌رو به پاره‌خط AB قرار دارد پس چهار نقطه‌ی A، B، B' و A' روی یک دایره‌اند.



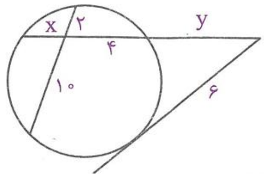
اگر از نقطه‌ی M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به یک دایره رسم کنیم، مطابق شکل داریم:

$$MT^2 = MA \cdot MB$$

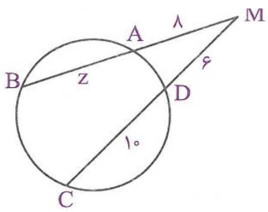
اثبات:

مثال:

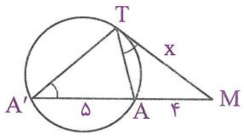
در شکل زیر مقدارهای x و y را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۳)



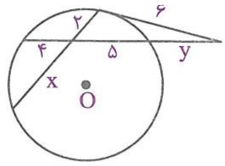
با توجه به شکل، مقدار z را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۲)



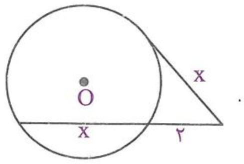
مقدار x را در شکل زیر به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



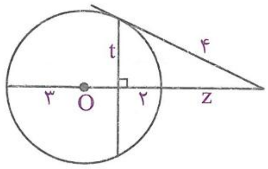
با توجه به شکل، مقدار x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۸۹)



در شکل مقابل مقدار x را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۸۸)



در شکل مقابل مقدار z و t را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۸۵)

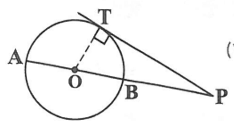


تست:

در شکل مقابل نقطه‌ی O مرکز دایره و $PA = ۱۸$ و $PB = ۲$ است، مساحت مثلث OPT چه‌قدر است؟ (آزاد ریاضی ۷۸)

۱) ۱۲ ۲) ۳۶

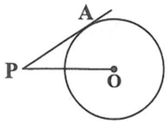
۳) ۲۴ ۴) ۲۰



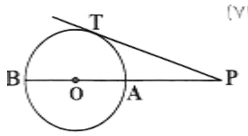
در شکل مقابل $OP = ۵$ و شعاع دایره واحد است، طول PA کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۶)

۱) $۶\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$

۳) $۲\sqrt{۵}$ ۴) $۲\sqrt{۶}$



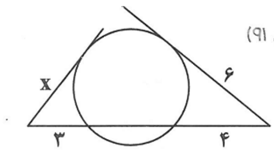
در شکل مقابل شعاع دایره ۶ و AB قطر و $PA = ۴$ می‌باشد، طول مماس PT کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۴)



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۵\sqrt{۲}$

۳) ۱۴ ۴) ۸

در شکل مقابل اندازه‌ی x چند واحد است؟ (سراسری ریاضی ۹۱)



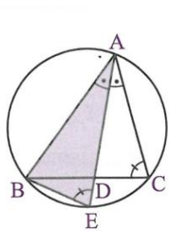
۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۵

۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$

نقطه‌ی C بر روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره‌ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است، طول کوتاه‌ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه‌ی C کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۲)

۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

محاسبه‌ی طول نیمساز به کمک وترهای متقاطع



مطابق شکل نیمساز زاویه‌ی $\widehat{A}$ را امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در نقطه‌ی E قطع کند.

آ) مثلث ADC با مثلث ABE متشابه است.

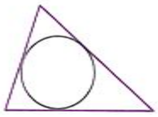
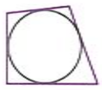
ب) $AB.AC = AD.AE$

پ) $AD^2 = AB.AC - BD.CD$

اثبات:

چندضلعی‌های محیطی

هرگاه همه‌ی ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را محیطی یا محیط بر دایره می‌نامند.

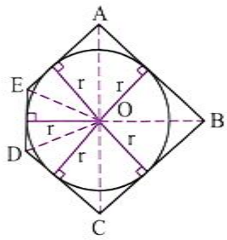




شکل‌های فوق سه چندضلعی محیطی را نشان می‌دهند. مثلث همواره یک چندضلعی محیطی است زیرا نیمساز زوایای داخلی آن همرسند و دایره‌ی مماس بر اضلاع آن، دایره‌ی محاطی داخلی مثلث نامیده می‌شود.
چندضلعی‌های منتظم مانند مربع محیطی‌اند اما سایر چندضلعی‌ها ممکن است محیطی باشند یا نباشند.

ویژگی مشترک چندضلعی‌های محیطی

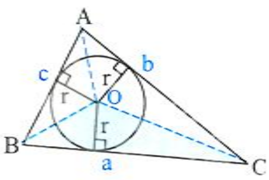
۱) یک چندضلعی محیطی است اگر و تنها اگر نیمسازهای زاویه‌های آن همرس باشند.

اثبات:



نتیجه: چون نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس اند، پس هر مثلث محیطی است.

تمرین: با توجه به شکل زیر شعاع دایره محاطی مثلث را بر حسب محیط و مساحت مثلث بیان کنید.



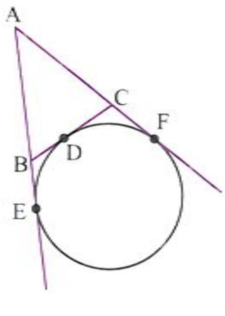
۲) مساحت هر چندضلعی محیطی برابر است با نصف محیط آن در شعاع دایره‌ی محاطی آن.

اثبات:از شکل قسمت (۱) استفاده می کنیم:

مثال: اندازه ی اضلاع مثلثی ۱۱،۱۴و۱۵ است.اندازه ی پاره خط هایی را که دایره محاطی مثلث بر روی اضلاع مثلث ایجاد می کند، بیابید.

مثال: در یک مثلث قایم الزاویه، دایره ی محاطی داخلی، وتر را به دو پاره خط به طول های ۴و۶ تقسیم کرده است. مساحت این مثلث را بیابید.

دایره ی محاطی خارجی مثلث: به دایره ای گفته می شود که بر یک ضلع از مثلث و امتداد دو ضلع دیگر آن مماس باشد.



مثال:

در مثلثی به طول اضلاع ۷، ۵ و ۳ واحد، دایره‌ی محاطی خارجی بر ضلع متوسط و امتداد دو ضلع دیگر مماس است. نقطه‌ی تماس ضلع متوسط را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟ (سراسری ریاضی- ۸۳)

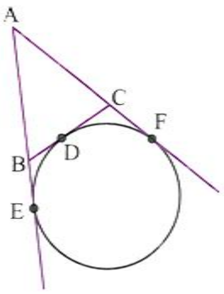
۱) $\frac{۱}{۹}$　　۲) $\frac{۱}{۶}$　　۳) $\frac{۱}{۵}$　　۴) $\frac{۲}{۹}$

تمرین: شعاع دایره محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۳ را حساب کنید.

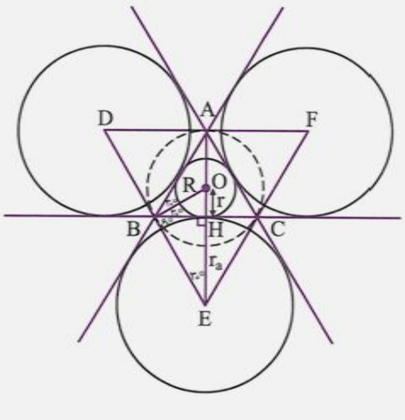
تمرین: طول خط المرکزین دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به اندازه ی ضلع ۵ را حساب کنید.

تمرین:

: مثلث ABC مفروض است. دایره‌ای بر ضلع BC در نقطه‌ی D و بر امتداد اضـلاع AB و AC به‌ترتیب در نقاط E و F مماس است (دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC). ثابت کنید محـیط مثلـث برابر است با $۲AE$



رابطه‌ی شعاع‌های دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث متساوی‌الاضلاع



در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل $OB = R$ شـعاع دایـره‌ی محیطـی، $OH = r$ شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و $HE = r_a$ شعاع دایره‌ی محاطی خارجی نظیـر ضـلع $BC = a$ است.

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\Delta}{OBH}(۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ) \Rightarrow OH = \frac{OB}{۲} \Rightarrow R = ۲r \\ &\overset{\Delta}{OBE}(۹۰^\circ - ۶۰^\circ - ۳۰^\circ) \Rightarrow OB = \frac{OE}{۲} \Rightarrow R = \frac{r + r_a}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow r_a = \frac{۳R}{۲}$$

$$\Rightarrow r_a = r_b = r_c = ۳r = \frac{۳R}{۲} = h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

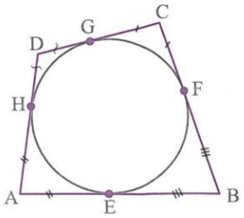
و می‌توان نوشت $r = \frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ ، $R = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ و $r_a = r_b = r_c = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$

مثال: طول خط المرکزین دایره ی محیطی و دایره ی محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{3}$ را بیابید.

مثال : مساحت مثلث متساوی الاضلاعی که راس های آن مرکز دایره های محاطی خارجی مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۳ است را بیابید.

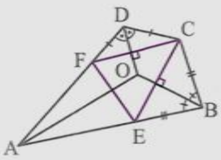
خواص چهارضلعی‌های محیطی

۱) در هر چهارضلعی محیطی، مجموع اضلاع مقابل آن، دو به دو برابرند.



اثبات:

۲) اگر مجموع اضلاع مقابل یک چهارضلعی برابر باشد. آن چهارضلعی محیطی است (عکس شماره‌ی ۱).



اثبات: در چهارضلعی ABCD داریم $AB+CD=AD+BC$، مطابق شکل BE را برابر BC و DF را برابر CD جدا می‌کنیم. در مثلث‌های متساوی‌الساقین EBC و CDF نیمسازهای زوایای B و D عمودمنصف‌های اضلاع CF و CE هستند، پس نقطه‌ی تلاقی آن‌ها O، نقطه‌ی همرسی عمودمنصف‌های مثلث EFC است از طرفی داریم:

(فرض) $AB+CD=AD+BC \Rightarrow AE+\cancel{BE}+\cancel{CD}=AF+\cancel{DF}+\cancel{BC} \Rightarrow AE=AF \Rightarrow \overset{\Delta}{AEF}$ متساوی‌الساقین است.

بنابراین عمودمنصف EF از نقطه‌ی O می‌گذرد و نیمساز زاویه‌ی A است اما می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از اضلاع آن زاویه به یک فاصله است، پس نقطه‌ی O از اضلاع چهارضلعی ABCD به یک فاصله است. در نتیجه دایره‌ای وجود دارد که بر اضلاع چهارضلعی ABCD مماس است لذا این چهارضلعی محیطی است.

مثال:

در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، $AB+CD=8$ است . محیط چهارضلعی را حساب کنید .

مثال:

- سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی از یک نقطه می گذرند و اندازه سه ضلع متوالی آن به ترتیب ۷۲ و ۱۰۷ و ۹۱ می باشد . اندازه ضلع چهارم را به دست آورید .

مثال:

- یک ذوزنقه متساوی الساقین بر دایره ای به شعاع $R = 3$ محیط است . اگر مساحت ذوزنقه ۴۵ باشد ، طول ساق آن را به دست آورید .

مثال: در یک ذوزنقه ی متساوی الساقین محیطی، اندازه ی قاعده ها ۲و ۸ است. مساحت ذوزنقه را بیابید.

تست:

- اگر $AB = a + ۱$ و $BC = ۴a - ۳$ و $CD = ۳a + ۲$ و $DA = a + ۳$ ضلع‌های متوالی یک چهارضلعی‌محیطی باشند، مقدار a کدام است؟

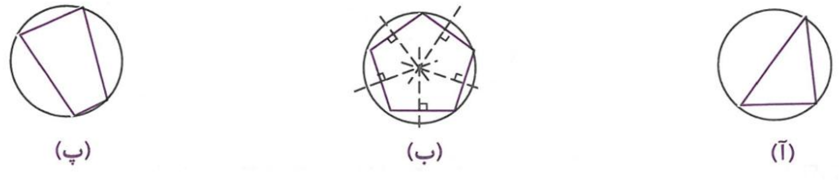
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

چهارضلعی $ABCD$ را بر دایره‌ای به مرکز O محیط کرده‌ایم، مجموع زاویه‌های $A\hat{O}B$ و $C\hat{O}D$ کدام است؟

۱) ۹۰° ۲) ۱۸۰° ۳) ۱۲۰° ۴) ۲۴۰°

چندضلعی‌های محاطی

اگر همه‌ی رأس‌های یک چندضلعی روی دایره قرار داشته باشند آن را چندضلعی محاطی می‌نامند و دایره را محیط بر چندضلعی گویند.



(آ)   (ب)   (پ)

ویژگی مشترک چندضلعی‌های محاطی

یک چندضلعی محاطی است اگر و تنها اگر عمودمنصف اضلاع آن همرس باشند.

اثبات:

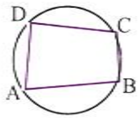
نتیجه:

مثلث همواره یک چندضلعی محاطی است زیرا عمودمنصف‌های اضلاع آن همرس‌اند، چندضلعی‌های منتظم هم همواره محاطی‌اند.

ویژگی چهارضلعی‌های محاطی

یک چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگر باشند. (نهایی- شهریور ۹۱)

اثبات:



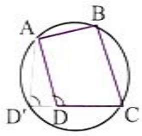
آ) اگر چهارضلعی محاطی باشد آن‌گاه زوایای مقابل آن مکمل‌اند. زیرا:

$$\widehat{A}+\widehat{C}=\frac{\widehat{BCD}}{۲}+\frac{\widehat{BAD}}{۲}=\frac{\text{کل دایره}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

$$\widehat{B}+\widehat{D}=۳۶۰^\circ-(\widehat{A}+\widehat{C})=۳۶۰^\circ-۱۸۰^\circ=۱۸۰^\circ$$

ب) اگر زوایای مقابل یک چهارضلعی مکمل باشند، چهارضلعی محاطی است.

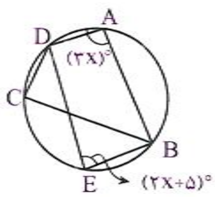
اثبات: فرض کنیم در چهارضلعی ABCD، $\widehat{B}+\widehat{D}=\widehat{A}+\widehat{C}=۱۸۰^\circ$. در این‌صورت از سه نقطه‌ی A ، B و C یک دایره می‌گذرد (دایره‌ی محیطی مثلث ABC) حال ثابت می‌کنیم این دایره از نقطه‌ی D می‌گذرد. به همین جهت از برهان خلف استفاده می‌کنیم. اگر این دایره از رأس D نگذرد نقطه‌ی برخورد خط CD با دایره را D' می‌نامیم و از D' به A وصل می‌کنیم. داریم:



$$\left.\begin{array}{r}ABCD' \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{D'}=۱۸۰^\circ \ \text{چهارضلعی محاطی}\\ \widehat{B}+\widehat{D}=۱۸۰^\circ\ \text{(فرض)}\end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{D}=\widehat{D'}$$

از طرفی $\widehat{D}$ زاویه‌ی خارجی $\overset{\Delta}{ADD'}$ است پس $\widehat{D}>\widehat{D'}$. این دو نتیجه تناقض است. بنابراین دایره از رأس D می‌گذرد.

مثال:



در دایره‌ی مقابل، $\widehat{A}=(۳x)^\circ$ ، $\widehat{E}=(۲x+۵)^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\widehat{C}B$ چند درجه است؟

مثال : **طول دو ضلع مجاور یک چهارضلعی محاطی ۴ و ۸ می‌باشد. اگر قطرهای این چهارضلعی بزرگ‌ترین مقدار خود را داشته باشند، آن‌گاه شعاع دایره‌ی محیطی آن کدام است؟**

۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) ۶ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) ۵

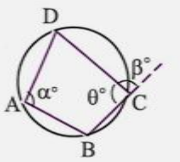
مثال:

ثابت کنید هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، یک چهارضلعی محاطی است.

تمرین: ثابت کنید شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی هر ذوزنقه ی متساوی الساقین، محاطی است.

ویژگی‌های بیش‌تر چهارضلعی محاطی

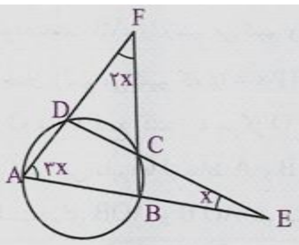
۱) در هر چهارضلعی محاطی، اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی برابر اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی مقابل به آن است.



اثبات:

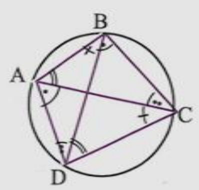
مثال:

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟

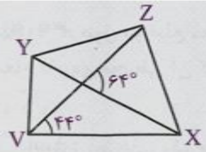


۲) در هر چهارضلعی محاطی اندازه‌ی زاویه‌ی بین یک ضلع و یک قطر برابر است با اندازه‌ی زاویه‌ی بین ضلع مقابل و قطر دیگر.

اثبات:



مثال در شکل مقابل، XZYV چهارضلعی محاطی است. اندازه‌ی زاویه‌ی برخورد امتداد اضلاع YZ و VX چند درجه است؟

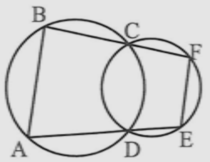


۱) ۲۶　　۲) ۲۲

۳) ۲۰　　۴) ۲۴

مثال:

مطابق شکل مقابل، از نقاط تقاطع دو دایره، دو قاطع BF و AE رسم شده‌اند. ثابت کنید $AB \parallel EF$



مثال:

در یک دایره دو وتر عمود بر هم و در انتهای این وترها مماس‌هایی بر دایره رسم کنید. از برخورد این چهار مماس یک چهارضلعی به‌دست می‌آید، ثابت کنید این چهارضلعی هم محیطی و هم محاطی است.

مثال:

ثابت کنید در یک چهارضلعی محاطی، نقطه‌ی تلاقی نیمساز داخلی یک زاویه و نیمساز خارجی زاویه‌ی مقابل، روی دایره‌ی محیطی چهارضلعی قرار دارد.

تمرین:

۱- مساحت مثاث متساوی الاضلاعی را حساب کنید که درون دایره ای به شعاع R محاط است.

۲- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره ی محیطی مثلث قطع می کنند.

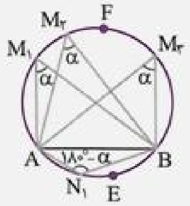
۳- یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی. ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضربدر میانگین هندسی آنها.

۴- اگر r_a ، r_b و r_c شعاع های سه دایره محاطی خارجی مثلث و r شعاع دایره محاطی داخلی مثلث باشد، نشان دهید:

الف) $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}=\dfrac{1}{r}$.

ب) همچنین نشان دهید $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$.

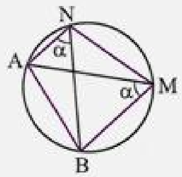
کمان درخور یک زاویه



دایره‌ی معلوم $C(O,R)$ و وتر ثابت AB را در آن در نظر می‌گیریم، همه‌ی زوایای محاطی که رأس آن‌ها روی کمان $\widehat{AFB}$ قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند $(\widehat{M}_1=\widehat{M}_2=\widehat{M}_3=\cdots=\alpha)$

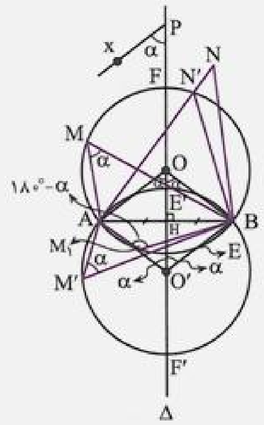
هم‌چنین همه‌ی زاویه‌های محاطی که رأس آن‌ها روی کمان $\widehat{AEB}$ قرار دارد و اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B عبور می‌کنند هم‌اندازه‌اند $(\widehat{N}_1=\widehat{N}_2=\widehat{N}_3=\cdots=180^\circ-\alpha)$

بنابه قرارداد کمان $\widehat{AFB}$ را کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB و کمان AEB را کمان درخور زاویه‌ی $180^\circ-\alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌نامند.



قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB بخشی از یک دایره‌ی منحصر به فرد است. مثلاً اگر مطابق شکل مقابل، نقاط M و N یک طرف پاره‌خط AB باشند و $A\widehat{M}B=A\widehat{N}B=\alpha$، قطعاً نتیجه می‌شود چهار نقطه‌ی A، B، M و N روی یک دایره‌اند و چهارضلعی $ABMN$ محاطی است.

قضیه: مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلع‌هایش از دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند، کمان‌هایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به وتر مشترک آن‌ها برابر 2α است.



اثبات: ابتدا طریقه‌ی رسم دو دایره را می‌یابیم، دو نقطه‌ی ثابت A و B را در نظر می‌گیریم عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. از نقطه‌ی دلخواه P واقع بر خط Δ، نیم‌خط Px را چنان رسم می‌کنیم که $H\widehat{P}x=\alpha$ باشد. از نقاط A و B خط‌هایی موازی Px رسم می‌کنیم تا Δ را در O و O' قطع کنند. به مرکز O و شعاع OA و هم‌چنین به مرکز O' و شعاع $O'A$ دو دایره رسم می‌کنیم، این دایره‌ها از نقاط A و B می‌گذرند. با توجه به خطوط موازی و مورب و متساوی‌الساقین بودن مثلث‌های AOB و $AO'B$ نتیجه می‌شود که زوایای مرکزی AOB و $AO'B$ برابر 2α و در نتیجه $\widehat{AEB}=\widehat{AE'B}=2\alpha$ است.

چون مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH، BOH، $BO'H$ و $AO'H$ به حالت یک ضلع و زاویه‌ی حاده‌ی مقابل آن همنهشت‌اند، نتیجه می‌شود چهارضلعی $AOBO'$ لوزی است و شعاع دایره‌ها برابرند.

آ) هر نقطه روی کمان‌های $\widehat{AFB}$ و $\widehat{AF'B}$ رأس زاویه‌ای به‌اندازه‌ی α است که اضلاعشان از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرند، زیرا:

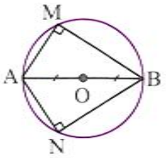
$$A\widehat{M}B=\frac{\widehat{AEB}}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$$

ب) حال ادعا می‌کنیم اگر نقطه‌ی N رأس هر زاویه در طرف کمان $\widehat{AFB}$ باشد به‌طوری که اضلاعش از دو نقطه‌ی ثابت A و B می‌گذرد و اندازه‌اش برابر α باشد، آن‌گاه N روی $\widehat{AFB}$ قرار دارد. برهان خلف: اگر این‌طور نباشد، N داخل یا خارج دایره قرار دارد. مثلاً N خارج دایره باشد، در این‌صورت زاویه‌ی $A\widehat{N'}B$ برابر α است و بنابه زاویه‌ی خارجی در مثلث BNN' نتیجه می‌شود $A\widehat{N'}B > A\widehat{N}B$ و $\alpha > \alpha$ که تناقض است اگر N داخل دایره باشد، با استدلال مشابه به همین تناقض می‌رسیم. در نتیجه نقطه‌ی N روی کمان $\widehat{AFB}$ است و مکان مطلوب کمان درخور زاویه‌ی α روبه‌رو به پاره‌خط AB است.

تذکر: عموماً مسأله‌ای از مثلث که در آن یک ضلع و زاویه‌ی روبه‌رو به آن معلوم باشد مربوط به کمان درخور است.

نتایج:

۱) کمان‌های $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دو دایره‌ی O و O'، کمان درخور زاویه‌ی $180^\circ-\alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌باشند. زیرا در چهارضلعی محاطی $AMBM_1$ داریم $\widehat{AM_1B}=180^\circ-\widehat{AMB}=180^\circ-\alpha$



۲) کمان درخور زاویه‌ی 90° روبه‌رو به پاره‌خط AB، دایره‌ای به قطر AB است.

نکته: دو نقطه‌ی A و B به کمان درخور زاویه‌ی α یا $180^\circ-\alpha$ نسبت به پاره‌خط AB تعلق ندارند و کمان درخورها نسبت به پاره‌خط AB قرینه‌اند.

۳) محاسبه‌ی شعاع دایره‌ای که کمان درخور، بخشی از آن است:

با فرض $AB=a$ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH داریم: $\sin\alpha=\frac{AH}{OA}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{R}\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin\alpha}$

۴) محاسبه‌ی فاصله‌ی مرکز دایره از پاره‌خط AB: $\overset{\Delta}{AOH}:\cos\alpha=\frac{OH}{OA}\Rightarrow OH=R\cos\alpha \xrightarrow[\text{است } \alpha \text{ منفرجه باشد.}]{\text{به جهت این که ممکن}} OH=R\,|\cos\alpha|$

با قرار دادن $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$ در تساوی اخیر داریم: $OH=\frac{a}{2\sin\alpha}|\cos\alpha|=\frac{a}{2|\tan\alpha|}$

مثال: کمان درخور(یا کمان حاوی یا کمان شامل) زاویه ی ۳۰ درجه رو به رو به پاره خط $AB=4$ بخشی از دایره ی $C(O,R)$ است.

الف) شعاع دایره را محاسبه کنید.

ب) فاصله ی پاره خط AB از مرکز دایره را محاسبه کنید.

مثال: دو نقطه ی ثابت B و C و نقطه ی متحرک A ، سه راس یک مثلث اند. اگر $BC=6$ و $\hat{A}=60$ و نیمساز زاویه ی A همواره از نقطه ی ثابتی مانند D بگذرد، فاصله ی D از نقطه ی B را بیابید.

مثال: در مثلث ABC ، ضلع $BC=6$ و زاویه ی $\hat{A}=30$ است. فاصله ی مرکز دایره ی محیطی این مثلث از ضلع BC را حساب کنید.

آزمون جامع فصل اول:

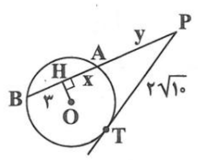
۱- اضلاع مثلثی با اندازه‌های ۸ ، ۱۱ و ۱۵ متناسب‌اند. دایره‌ی محاطی داخلی، ضلع بزرگ‌تر را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$	۲) $\frac{۳}{۵}$	۳) $\frac{۳}{۷}$	۴) $\frac{۴}{۷}$

۲- سه زاویه از یک چهارضلعی داده شده است. در کدام حالت چهارضلعی مورد نظر می‌تواند محاطی باشد؟

۱) ۹۰°، ۸۱° و ۱۰۲°	۲) ۵۶°، ۱۰۴° و ۱۲۴°

۳) ۴۵°، ۱۱۵° و ۱۲۵°	۴) ۸۳°، ۷۸° و ۱۰۰°



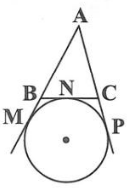
۳- در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی $x + y$ چه‌قدر است؟ (O مرکز دایره است.)

۱) ۶	۲) ۷

۳) ۸	۴) ۹

۴- دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۹ مماس برون هستند. به‌ازای کدام مقدار m، اندازه‌ی مماس مشترک خارجی آن‌ها $m + ۲$ است؟

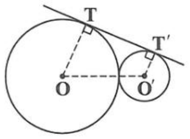
۱) ۵	۲) ۷	۳) ۹	۴) ۱۰



۵- در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O در نقطه‌ی N بر ضلع BC و در نقاط M و P بر امتداد اضلاع AB و AC مماس است. اگر $AM = ۶$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱۵	۲) ۱۲

۳) ۱۸	۴) ۲۱



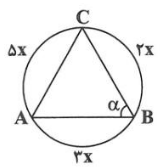
۶- در شکل مقابل اگر شعاع دایره‌ها به‌ترتیب ۲ و ۸ باشد، مساحت چهار ضلعی $OO'T'T$ کدام است؟

۱) ۳۶

۲) ۳۸

۳) ۴۰

۴) ۴۲



۷- در شکل مقابل زاویه‌ی α چند درجه است؟

۱) ۹۰°	۲) ۶۰°

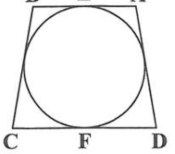
۳) ۸۰°	۴) ۷۵°

۸- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ بر هم مماس خارج‌اند. فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی دو مماس مشترک خارجی آنها تا نقطه‌ی تماس دو دایره کدام است؟

۱) ۳	۲) ۴	۳) $\frac{۵}{۲}$	۴) $\frac{۷}{۲}$

۹- ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقینی بر دایره به شعاع ۳ محیط است. اگر زاویه‌ی حاده‌ی ذوزنقه ۳۰° باشد، مساحت ذوزنقه چه‌قدر است؟

۱) ۱۲	۲) ۲۴	۳) ۳۶	۴) ۷۲

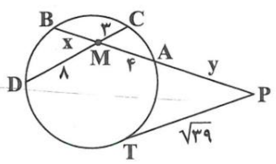


۱۰- مطابق شکل، ذوزنقه‌ی $ABCD$ بر دایره محیط است. اگر $AE = ۴$ و $DF = ۹$ باشد، شعاع دایره کدام است؟

۱) ۳	۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) ۶	۴) $۶\sqrt{۲}$

۱۱- در شکل روبه‌رو مقدار $|x - y|$ چه‌قدر است؟

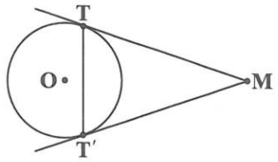


۱) ۳

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۱



۱۲- در شکل زیر دایره‌ی $C(O\ ،\ ۲\sqrt{۱۵})$ مفروض است، به‌گونه‌ای کـه $OM = ۱۶$ و دو خـط MT و MT' بر دایره مماس‌اند. اندازه‌ی وتر TT' چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۲}$
۲) $\frac{۸\sqrt{۱۵}}{۳}$
۳) $\frac{۷\sqrt{۱۵}}{۴}$
۴) $\frac{۴\sqrt{۱۵}}{۳}$

۱۳- طول اضلاع متوالی یک چهارضلعی محیطی x و $۲x+۱$ و $۳x$ و $x+۴$ است. محیط این چهارضلعی چند واحد است؟

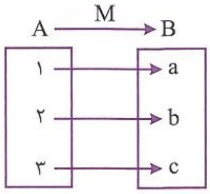
۱) ۲۰
۲) ۳۰
۳) ۴۰
۴) ۵۰

۱۴- نقطه‌ی M خارج دایره مفروض است. اگر فاصله‌ی دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌های دایره از M به‌ترتیب $۹\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲۷}$ باشند، طـول مماسی که از M نسبت به دایره رسم می‌شود، کدام است؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) $۹\sqrt{۳}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

تبدیل‌های هندسی و کاربردها

نگاشت



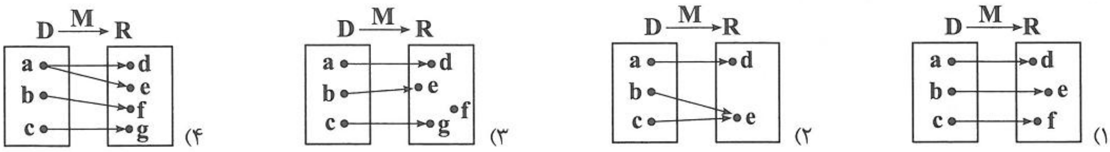
تعریف: به تناظری که به هر عضو مجموعه‌ی A یک و تنها یک عضو از مجموعه‌ی B را نظیر می‌کند، نگاشت از A به B می‌گویند. معمولاً نگاشت را با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M: A \to B$، نگاشت M از مجموعه‌ی A به B را نشان می‌دهد.

به‌طور مثال تناظر مقابل نگاشت M از A به B است و $M(۱) = a$ یعنی a تصویر عدد ۱ تحت نگاشت M است.

نگاشت از صفحه به صفحه: اگر در نگاشت M از A به B، مجموعه‌های A و B زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^۲ = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ باشند، می‌گویند M نگاشتی از صفحه به صفحه است. مثلاً $M(x,y) = (۲x^۲, -y)$ ضابطه‌ی نگاشتی از صفحه به صفحه است که نقطه‌ی (۱,۱) را به نقطه‌ی (۲,−۱) تصویر می‌کند.

مثال:

۱- در کدام‌یک از موارد زیر، تناظر M، نگاشتی از D به R نیست؟



نگاشت یک‌به‌یک: اگر در نگاشت M از D به R هر عضو مجموعه‌ی R فقط تصویر یک عضو از مجموعه‌ی D باشد، آن‌گاه نگاشت M را یک‌به‌یک گویند. مثلاً نگاشت $M(x,y) = (x-۱, ۲y)$ یک‌به‌یک است. اما نگاشت $E(x,y) = (x^۲, y)$ یک‌به‌یک نیست زیرا تصویر نقاط (۲,۱) و (−۲,۱) نقطه‌ی (۴,۱) است.

تمرین: مشخص کنید کدامیک از نگاشت های زیر یک به یک هستند.

الف) $M(x,y) = (x+1, 2y)$ 　 $M(X,$

ب) $T(x,y) = (x^2, y)$

تبدیل: نگاشت یک‌به‌یک از صفحه‌به‌صفحه را تبدیل می‌نامند. در تبدیل هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

مثال: کدام‌یک از نگاشت‌های زیر تبدیل نمی‌باشد؟

۱) $T(x,y) = (x-y, -x+y)$ 　 ۲) $F(x,y) = (-x+۱, -y+۲)$ 　 ۳) $E(x,y) = (-y+۲, -x+۳)$ 　 ۴) $G(x,y) = (-۲x, y+۱)$

تمرین۱: تصویر مثلث ABC با راس های $A(0,2)$ و $B(3,0)$ و $C(0,0)$ تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-2)$ را بدست آورید و مثلث و تصویرش را در دستگاه مختصات رسم کنید.

تمرین ۲: مشخص کنید نقطه ی $A'(20,12)$ تصویر چه نقطه ای از صفحه تحت نگاشت $D(x,y)=(4y,x-2)$ می باشد.

تبدیل ایزومتری: تبدیلی که فاصله‌ی بین نقطه‌ها را حفظ کند، ایزومتری نامیده می‌شود. در واقع اگر A و B دو نقطـه‌ی دلخـواه و A' و B' تـصویر آن‌ها تحت تبدیل T باشند آن‌گاه T ایزومتری است هرگاه $AB=A'B'$.

به‌طور مثال تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-1)$ ایزومتری است زیرا برای دو نقطه‌ی دلخواه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داریم:

$$A'B'=\sqrt{(x_2+1-x_1-1)^2+(y_2-1-y_1+1)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=AB$$

تذکر: به تبدیلی که ایزومتری باشد تبدیل طولپا نیز گفته می شود.

مثال:

نقاط $A(3,3)$ ، $B(1,-1)$ و $C(-2,2)$ رأس‌های یک مثلث هستند. (نهایی- شهریور ۹۳)

آ) مختصات تصویر این مثلث را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+2,-y)$ به‌دست آورید.

ب) آیا این تبدیل ایزومتری است؟ چرا؟ **پ) در این تبدیل شیب‌خط حفظ می‌شود یا خیر؟ چرا؟** ۷۸

نکته: تصویر اشکال هندسی تحت تبدیل ایزومتری با خود شکل همنهشت است.

تبدیل همانی: اگر تبدیل T هر نقطهٔ A از صفحهٔ P را بر خودش منطبق سازد، آن را تبدیل همانی می‌نامند.

$$T(A) = I(A) = A$$

نقطه‌ی ثابت یک تبدیل: نقطه‌ی ثابت یک تبدیل، نقطه‌ای است که تصویر آن تحت تبدیل بر خودش منطبق است. یک تبدیل ممکن است یک یا دو یا ... یا بی‌شمار نقطه‌ی ثابت داشته باشد یا ممکن است نقطه‌ی ثابت نداشته باشد. برای یافتن نقطه‌ی ثابت تبدیل T باید معادله‌ی $T(x,y) = (x,y)$ را حل کنیم.

مثال : تبدیل $F(x,y) = (۶x - ۳y + ۴, ۵x - ۲y + ۴)$ چند نقطه‌ی ثابت دارد؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) بی‌شمار

ترکیب دو نگاشت

ترکیب دو نگاشت F و G را با نماد FoG نشان می‌دهند که در آن ابتدا نگاشت G روی نقاط صفحه اثر می‌کند سپس نگاشت F نقاط حاصل را تصویر می‌کند و ضابطه‌ی آن به‌صورت $FoG(x,y) = F(G(x,y))$ است.

مثال اگر $F(x,y) = (y, x - ۱)$ و $G(x,y) = (۳x, ۲y - ۱)$، آن‌گاه تصویر نقطه‌ی $A(۱,۲)$ تحت تبدیل FoG روی کدام خط قرار می‌گیرد؟

۱) $x + y = ۷$ ۲) $-x + y = ۵$ ۳) $-x + y = ۷$ ۴) $x + y = ۵$

نوشتن معادله‌ی تصویر یک خط یا منحنی تحت یک نگاشت

به‌طور کلی برای یافتن تصویر یک خط یا منحنی تحت یک نگاشت، ضابطه‌ی نگاشت را برابر (x', y') قرار می‌دهیم و x و y را برحسب x' و y' به‌دست آورده و در معادله‌ی خط یا منحنی قرار می‌دهیم.

اما اگر تبدیل خطی باشد یعنی $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$، جهت یافتن معادله‌ی تصویر خط، علاوه بر روش فوق می‌توان تصویر دو نقطه‌ی دلخواه از خط را به‌دست آورد و معادله‌ی خط گذرنده از این نقاط تصویر را نوشت.

مثال : خط به معادله‌ی $۲x - ۳y = ۲$ را تحت تبدیل $T(x,y) = (۲x - y, -x + y)$ تصویر می‌کنیم. خط به معادله‌ی $ax + by + ۲ = ۰$ به‌دست می‌آید. حاصل $a + b$ کدام است؟

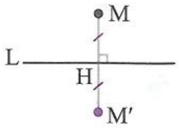
۱) ۵   ۲) -۵ ۳) ۶   ۴) -۶

بازتاب نسبت به خط و نقطه (تقارن محوری و مرکزی)

بازتاب نسبت به خط

تعریف: بازتاب نسبت به خط (تقارن محوری) تبدیلی است که با یک خط معلوم مانند L به نام محور تقارن یا محور بازتاب مشخص می‌گردد و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M در بازتاب نسبت به خط L است، هرگاه L عمودمنصف MM' باشد. معمولاً بازتاب نسبت به خط L را با نماد S_L نشان می‌دهند.

L عمودمنصف MM' است. $\Leftrightarrow S_L(M) = M'$



اگر نقطه‌ی M روی خط L باشد تصویرش خودش است.

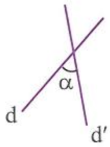
مثال ۱ تصویر نقطه‌ی $M(-۱,-۵)$ تحت بازتاب نسبت به خط به معادله‌ی $۳x + y = ۲$ را نقطه‌ی M' می‌نامیم. قدرمطلق تفاضل طول و عرض نقطه‌ی M' کدام است؟

۱) ۷		۲) ۸		۳) ۹		۴) ۱۰

مثال ۲ تصویر نقطه‌ی $A(۳,۱)$ نسبت به خط $y - x - ۶ = ۰$ نقطه‌ی $A'(a,b)$ است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۱) -۵		۲) ۸		۳) ۴		۴) -۶

روش یافتن معادله‌ی تصویر یک خط تحت بازتاب نسبت به خط



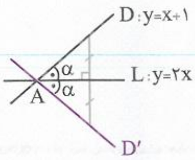
یادآوری: اگر m شیب‌خط d و m' شیب‌خط d' باشد به‌طوری که $mm' \neq -1$، آن‌گاه با فرض این‌که α زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط d و d' باشد، داریم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$

مثال : تصویر خط $D: y = x+1$ تحت بازتاب نسبت به خط $L: y = 2x$، خط به معادله‌ی $ax+by-5=0$ است. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۲−　　۳) ۳　　۴) ۴−

پاسخ : ابتدا نقطه‌ی تلاقی خط D و محور بازتاب یعنی خط L را می‌یابیم:



$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x=1, y=2 \Rightarrow A=(1,2)$$

شیب خط D' را m می‌نامیم. طبق دستور محاسبه‌ی زاویه‌ی بین دو خط، داریم:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-2}{1+2m}\right| = \left|\frac{2-1}{1+2}\right| \Rightarrow |3m-6| = |1+2m| \Rightarrow 3m-6 = 1+2m \text{ یا } 3m-6 = -1-2m \Rightarrow m=7 \text{ یا } m=1$$

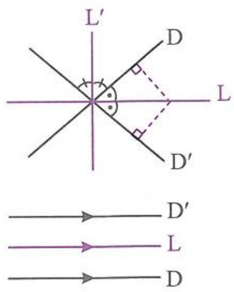
$m=1$ همان شیب خط D است. پس شیب خط D' برابر $m=7$ است و معادله‌ی خط D' برابر است با:

$$y-2 = 7(x-1) \Rightarrow y = 7x-5 \Rightarrow 7x-y-5=0 \Rightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=-1 \end{cases} \xrightarrow{+} a+b=6 \Rightarrow$$ گزینه‌ی (۱) صحیح است.

مثال : تصویر خط $x-2y=1$ تحت بازتاب نسبت به خط $y=-x+3$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(1,2)$　　۲) $(0,-4)$　　۳) $(2,1)$　　۴) $(0,4)$

تعیین محور تقارن دو خط متقاطع و دو خط موازی



هر دو خط متقاطع دارای دو محور تقارن می‌باشند که نیمسازهای زوایای بین دو خط می‌باشند. از طرفی هر نقطه روی این نیمسازها از دو خط مفروض به یک فاصله‌اند.

با فرض $D: ax+by+c=0$ و $D': a'x+b'y+c'=0$، معادلات نیمسازهای دو خط

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

است که همان محور تقارن‌ها می‌باشند.

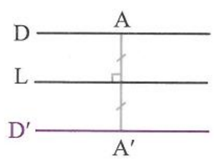
اگر دو خط موازی باشند آنگاه برای یافتن معادله ی محور تقارن دو خط، کافیست......

مثال: عرض از مبدأ محور بازتابی که خط $2x - 5y + 4 = 0$ را به خط $6x - 15y + 17 = 0$ تصویر می‌کند، کدام است؟

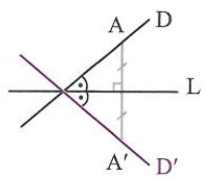
۱) $-\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{29}{30}$ ۳) $\frac{1}{30}$ ۴) $-\frac{29}{30}$

خواص بازتاب نسبت به خط

۱) بازتاب خط D خط D' است، هرگاه محور بازتاب، یکی از دو نیمساز زاویه‌ی تقاطع دو خط باشد (شکل آ). در حالتی که خط D با محور بازتاب موازی باشد، خط D' هم با محور بازتاب موازی است. (شکل ب)

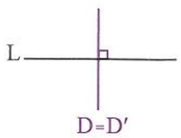


(ب)

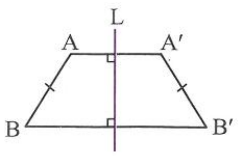


(آ)

نتیجه: بازتاب نسبت به خط شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که خط و محور بازتاب موازی باشند یا این‌که خط بر محور بازتاب عمود باشد.

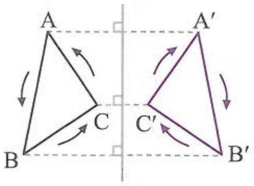


۲) بازتاب نسبت به خط، یک تبدیل ایزومتری است. یعنی اندازه‌ی پاره‌خط‌ها را تغییر نمی‌دهد و شکل و تصویرش همنهشت‌اند.



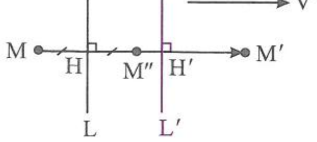
نتیجه: هر ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، دارای یک محور تقارن است. (خطی که وسط‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند.)

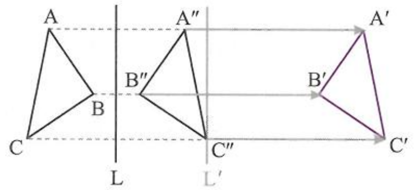
۳) بازتاب نسبت به خط، اندازه‌ی زاویه را تغییر نمی‌دهد، اما جهت زاویه و شکل را تغییر می‌دهد.



۴) بازتاب نسبت به خط دارای بی‌شمار نقطه‌ی ثابت است که همگی روی محور بازتاب قرار دارند.

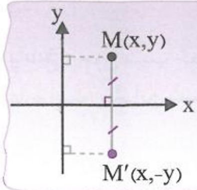
۵) ترکیب بازتابی با محور L و انتقالی با بردار $\vec{V}$ که $\vec{V} \perp L$، بازتابی است به محور L' که خط L' از انتقال خط L با بردار $\frac{\vec{V}}{2}$ به‌دست می‌آید.





حالت‌های خاص بازتاب نسبت به خط

۱) بازتاب نسبت به محور x ها: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(x,-y)$ است.

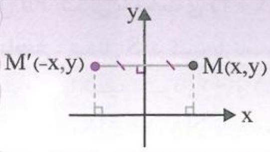


نکات مهم:

آ) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط در بازتاب نسبت به محور x ها، در معادله‌ی خط، y را به $-y$ تبدیل می‌کنیم.

ب) در بازتاب نسبت به محور x ها اگر شیب خط مفروض m باشد، آن‌گاه شیب خط تصویر $-m$ است.

۲) بازتاب نسبت به محور y ها: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(-x,y)$ است.

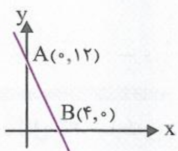


نکات مهم:

آ) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط در بازتاب نسبت به محور y ها، در معادله‌ی خط، x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم.

ب) دربازتاب نسبت به محور y ها، اگر شیب خط مفروض m باشد، آن‌گاه شیب خط تصویر $-m$ است.

مثال ۲۲: تصویر خط روبه‌رو تحت بازتاب نسبت به محور y ها کدام است؟



۱) $۲x+y-۱۲=۰$ ۲) $۴x+۳y-۳۶=۰$

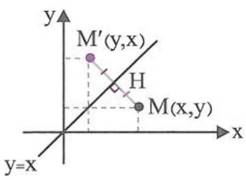
۳) $۲x+y-۹=۰$ ۴) $۳x-y+۱۲=۰$

پاسخ: ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از نقاط A و B را به‌دست می‌آوریم:

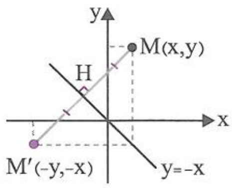
$$y-۰=\frac{۱۲-۰}{۰-۴}(x-۴)\Rightarrow y=-۳(x-۴)=-۳x+۱۲$$

حال x را به $-x$ تغییر می‌دهیم $y=۳x+۱۲$ یا $۳x-y+۱۲=۰$. بنابراین گزینه‌ی (۴) صحیح است.

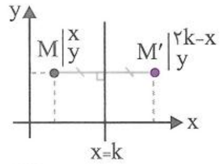
۳) بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(y,x)$ می‌باشد.



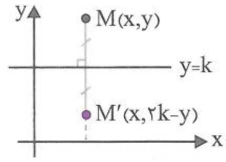
۴) بازتاب نسبت به نیمسازهای ربع دوم و چهارم $(y=-x)$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(-y,-x)$ است.



تمرین: معادله ی بازتاب خط $2x+3y-1=0$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بنویسید.



۵) بازتاب نسبت به خط $x=k$: مطابق شکل، ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(2k-x,y)$ است. این بازتاب ترکیب بازتاب نسبت به محور yها و انتقال با بردار $\vec{V}(2k,0)$ است.



۶) بازتاب نسبت به خط $y=k$: ضابطه‌ی تحلیلی آن به‌صورت $S(x,y)=(x,2k-y)$ است. این بازتاب ترکیب بازتاب نسبت به محور xها و انتقال با بردار $\vec{V}(0,2k)$ است.

مثال : **خط $2x-y+3=0$ را تحت بازتاب نسبت به خط $x=-1$ تصویر می‌کنیم. معادله‌ی تصویر کدام است؟**

۱) $2x+y+1=0$ ۲) $x-2y+3=0$ ۳) $2x+y=0$ ۴) $4x+y+3=0$

پاسخ : روش اول: ابتدا نقطه‌ی تلاقی خط $2x-y+3=0$ و محور بازتاب $x=-1$ را می‌یابیم:

$x=-1, 2x-y+3=0 \Rightarrow -2-y+3=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$ نقطه‌ی تلاقی $=(-1,1)$

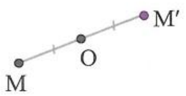
اما بازتاب نسبت به خط $x=-1$ (خط موازی محور yها) شیب را قرینه می‌کند، پس شیب تصویر -2 است بنابراین معادله‌ی تصویر برابر $y-1=-2(x+1)$ یا $2x+y+1=0$ است.

روش دوم: کافی است در معادله‌ی خط $2x-y+3=0$، x را به $2k-x=-2-x$ تغییر دهیم تا معادله‌ی تصویر به‌دست آید:

$2(-2-x)-y+3=0 \Rightarrow -4-2x-y+3=0 \Rightarrow 2x+y+1=0$

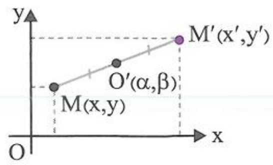
بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

بازتاب نسبت به نقطه (تقارن مرکزی)



بازتاب نسبت به نقطه یا تقارن مرکزی تبدیلی است که با یک نقطه‌ی معلوم به نام مرکز بازتاب (مرکز تقارن) مشخص می‌شود و M' تصویر نقطه‌ی M در بازتاب به مرکز O است، هرگاه O وسط MM' باشد تقارن مرکزی را با نماد S_O نشان می‌دهند. $S_O(M)=M' \Leftrightarrow$ O وسط MM' است.

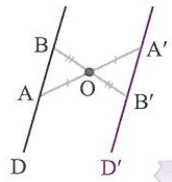
ضابطه‌ی تحلیلی بازتاب نسبت به نقطه‌ی $O'(\alpha,\beta)$:



$$\begin{cases}\dfrac{x+x'}{2}=\alpha\\[2mm]\dfrac{y+y'}{2}=\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x'=2\alpha-x\\ y'=2\beta-y\end{cases} \Rightarrow S(x,y)=(2\alpha-x,2\beta-y)$$

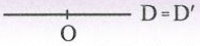
حالت خاص: ضابطه‌ی تحلیلی بازتاب نسبت به مبدأ مختصات $O(0,0)$ برابر است با $S(x,y)=(-x,-y)$

خواص بازتاب نسبت به نقطه



۱) تصویر هر خط در بازتاب نسبت به نقطه، خطی است موازی با آن. بنابراین بازتاب نسبت به نقطه شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

نکته: اگر مرکز بازتاب روی خط مفروض باشد تصویر خط بر خودش منطبق است.

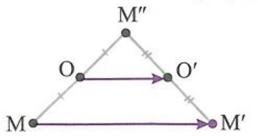


۲) بازتاب نسبت به نقطه، ایزومتری است، مطابق شکل فوق $AB = A'B'$

۳) بازتاب نسبت به نقطه، اندازه‌ی زاویه و جهت آن را تغییر نمی‌دهد و به‌طور کلی جهت شکل را عوض نمی‌کند.

۴) مرکز بازتاب یا همان مرکز تقارن، نقطه‌ی ثابت آن است و تنها نقطه‌ای است که تحت یک بازتاب نسبت به نقطه تغییر نمی‌کند.

۵) ترکیب دو بازتاب نسبت به نقطه، یک انتقال است.

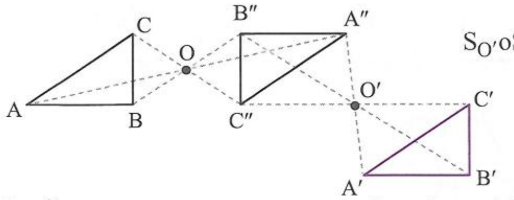


اثبات: مطابق شکل نقطه M'' تصویر نقطه‌ی M تحت بازتاب بـه مرکـز O و M' تـصویر M'' تحت بازتاب به مرکز O' است. بنابه قضیه‌ی تالس داریم: $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{OO'}$

یعنی M' تصویر نقطه‌ی M تحت انتقال با بردار ثابت $2\overrightarrow{OO'}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$S_{O'} o S_O(M) = T_{2\overrightarrow{OO'}}(M) = M'$$

مثلاً مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $2\overrightarrow{OO'}$ است.



۶) برای یافتن معادله‌ی تصویر یک خط مفروض تحت بازتاب به مرکز $O'(\alpha,\beta)$، در معادله‌ی خط به جای x و y به‌ترتیب $2\alpha - x$ و $2\beta - y$ را قرار می‌دهیم.

۷) ترکیب یک بازتاب نسبت به نقطه و یک انتقال همواره بازتاب نسبت به نقطه است.

۳۹- کدام گزینه درباره‌ی بازتاب نسبت به یک نقطه صحیح نیست؟

۱) ایزومتری است. ۲) شیب خط را حفظ نمی‌کند. ۳) جهت شکل را حفظ می‌کند. ۴) زاویه‌ی بین دو خط را حفظ می‌کند.

- قرینه‌ی خط $y = -3x + 5$ نسبت به نقطه‌ی $A(1,3)$ از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(2,3)$ ۲) $(3,2)$ ۳) $(2,4)$ ۴) $(1,4)$

- بازتاب خط $x - 2y = 4$ نسبت به نقطه‌ی $(2,a)$، خط $x - 2y + 6 = 0$ است. a کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۸)

۱) ۱ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{5}{2}$

معادله‌ی تصویر خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $A(8,1)$ و $B(-2,5)$ تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی $(-1,3)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۸۵)

۱) $5y+2x=5$　　۲) $5y+2x=9$　　۳) $5y-2x=10$　　۴) $2y+5x=7$

کدام خط می‌تواند، قرینه‌ی خط $2x+y=3$ نسبت به یک نقطه باشد؟

۱) $y=2x+3$　　۲) $y=\frac{1}{2}x+3$　　۳) $y=-2x+1$　　۴) $y=-\frac{1}{2}x+3$

معادله‌ی قرینه‌ی خط $2y-3x=6$ نسبت به محور x ها به کدام صورت است؟ (آزمایشی سنجش ریاضی ۸۲)

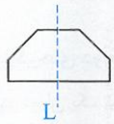
۱) $2y+3x=6$　　۲) $2y-3x=6$　　۳) $2y-3x=-6$　　۴) $2y+3x=-6$

تبدیل یافته‌ی منحنی $ay+2x=3$ تحت دو بازتاب متوالی، ابتدا نسبت به محور oy و سپس نسبت به نیمساز ربع ۱ و ۳ از نقطه‌ی $A(2,-1)$ عبور می‌کند، مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$　　۲) 2　　۳) $-\frac{1}{2}$　　۴) -2

محور تقارن و مرکز تقارن

محور تقارن



تعریف: شکل F دارای خط تقارن است، اگر خطی مانند L وجود داشته باشد به‌طوری‌که تصویر F تحت بازتاب نسبت به خط L بر خود شکل منطبق باشد. در این صورت خط L محور تقارن شکل F است. (یعنی هر نقطه‌ی شکل را نسبت به آن خط قرینه کنیم نقطه‌ای روی همان شکل باشد.)

مرکز تقارن

تعریف: شکل F دارای مرکز تقارن است، اگر نقطه‌ای مانند O وجود داشته باشد، به‌طوری که تصویر F تحت بازتاب نسبت به نقطه‌ی O بر خود شکل منطبق باشد. در این صورت نقطه‌ی O مرکز تقارن شکل F است. (یعنی هر نقطه‌ی شکل را نسبت به O قرینه کنیم نقطه‌ای روی خود شکل باشد.)

– کدام‌یک از شکل‌های زیر، فقط یک محور تقارن دارد؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) ربع دایره ۳) متوازی‌الاضلاع ۴) لوزی

– در بین چندضلعی‌های زیر، کدام فقط یک محور تقارن دارد؟ (آزاد ریاضی ۷۲)

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) متوازی‌الاضلاع ۳) ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ۴) مستطیل

– دو دایره‌ی متقاطع که شعاع‌های آن‌ها مساوی است، چند محور تقارن دارند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

– هر دو خط متقاطع در صفحه .... (سراسری تجربی ۷۴)

۱) یک محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.
۲) دو محور تقارن و یک مرکز تقارن دارد.
۳) فقط یک مرکز تقارن دارد.
۴) فقط چهار محور تقارن دارد.

– کدام شکل مرکز تقارن ندارد؟ (سراسری ریاضی ۷۰)

۱) مستطیل ۲) لوزی
۳) مثلث متساوی‌الاضلاع ۴) شش‌ضلعی منتظم

☆ **– هفت‌ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟** (سراسری تجربی ۷۱)

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۱

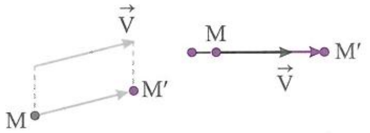
– کدام شکل هندسی یک مرکز تقارن و بیش از چهار محور تقارن دارد؟

۱) پنج‌ضلعی منتظم ۲) شش‌ضلعی منتظم ۳) لوزی ۴) مربع

– کدام‌یک از اشکال زیر مرکز تقارن ندارد؟ (آزاد ریاضی ۷۰)

۱) لوزی ۲) مستطیل ۳) پانزده‌ضلعی منتظم ۴) چهارده‌ضلعی منتظم

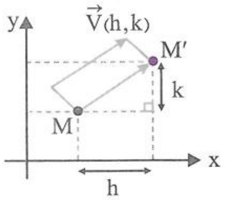
انتقال



انتقال تبدیلی است که با یک بردار معلوم غیرصفر مانند $\vec{V}$ مشخص می‌شود و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ است هرگاه $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$. به همین جهت اگر M روی امتداد بردار $\vec{V}$ نباشد M' با رسم متوازی‌الاضلاع برداری به‌دست می‌آید.

انتقال با بردار $\vec{V}$ را با نماد $T_{\vec{V}}$ نشان می‌دهیم و M' تصویر نقطه‌ی M در انتقال با بردار $\vec{V}$ را به‌صورت $T_{\vec{V}}(M) = M'$ می‌نویسیم.

ضابطه‌ی تحلیلی انتقال



انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $M'(x',y')$ تصویر نقطه‌ی $M(x,y)$ در این انتقال باشد، داریم:

$$\begin{cases} x'-x=h \\ y'-y=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ برابر $T(x,y)=(x+h,y+k)$ است.

مثال: اگر $T(x,y)=(-ax-3b,by+4a)$ ضابطه‌ی یک انتقال باشد، تصویر نقطه‌ی $(1,1)$ تحت این انتقال کدام است؟

۱) $(-4,5)$ ۲) $(-2,-3)$ ۳) $(3,4)$ ۴) $(-4,3)$

پاسخ: $T(x,y)=(-ax-3b,by+4a)$ وقتی ضابطه‌ی یک انتقال است که ضرایب x و y برابر یک باشند، در نتیجه $a=-1$ و $b=1$ می‌شود و داریم:

$$T(x,y)=(x-3,y-4) \Rightarrow T(1,1)=(1-3,1-4)=(-2,-3)$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال: آیا $E(x,y)=(x+3,2y)$، ضابطه‌ی یک انتقال است؟ توضیح دهید.

پاسخ: خیر، برای این‌که E انتقال باشد باید اعداد ثابت h و k وجود داشته باشند که:

$$E(x,y)=(x+h,y+k) \Rightarrow (x+3,2y)=(x+h,y+k) \Rightarrow \begin{cases} h=3 \\ k=y \end{cases}$$

چون مقدار k متغیر شد پس E نمی‌تواند انتقال باشد.

مثال: آیا $F(x,y)=(\frac{3x-2}{3},\frac{4y+1}{4})$ ضابطه‌ی یک انتقال است؟ توضیح دهید.

پاسخ: بله، زیرا:

$$F(x,y)=(x-\frac{2}{3},y+\frac{1}{4}) \Rightarrow$$ F انتقال با بردار $\vec{V}(-\frac{2}{3},\frac{1}{4})$ است.

تمرین: خط $y=2x-1$ را با بردار $\vec{v}=(2,3)$ انتقال می دهیم. تصویر نقطه ی $A(3,5)$ را تحت این انتقال بیابید.

تعیین معادله‌ی تصویر یک خط تحت یک انتقال

اگر از دستور کلی برای مشخص کردن معادله‌ی تصویر یک خط تحت یک انتقال با بردار $\vec{V}(h,k)$ استفاده کنیم، نتیجه می‌شود:

$$T(x,y)=(x',y')\Rightarrow(x+h,y+k)=(x',y')\Rightarrow\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$$

یعنی در معادله‌ی خط باید x و y را به $x'-h$ و $y'-k$ تغییر دهیم یا به عبارتی جهت تعیین معادله‌ی تصویر کافی است، در معادلـه‌ی خـط، x را به $x-h$ و y را به $y-k$ تغییر دهیم.

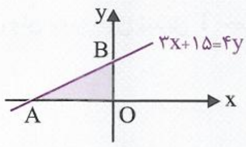
مثال : خط $۳x=۴y$ را تحت بردار $\vec{V}(-۱,۳)$ انتقال می‌دهیم. مساحت ناحیه‌ی محدود به خط تصویر و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{۷۱}{۸}$ ۲) $\frac{۷۳}{۸}$ ۳) $\frac{۷۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷۷}{۸}$

پاسخ : با توجه به مطلب فوق، جهت یافتن تصویر خط $۳x=۴y$ در انتقال با بردار $\vec{V}(-۱,۳)$، کافی است در معادله‌ی خط x را بـه $x+۱$ و y را به $y-۳$ تغییر دهیم:

$$۳(x+۱)=۴(y-۳)\Rightarrow۳x+۳=۴y-۱۲\Rightarrow۳x+۱۵=۴y$$

حال مختصات نقطه‌ی برخورد خط اخیر را با محورهای مختصات می‌یابیم:

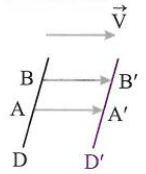


$$x=\circ\Rightarrow y=\frac{۱۵}{۴}\quad,\quad y=\circ\Rightarrow x=\frac{-۱۵}{۳}=-۵$$

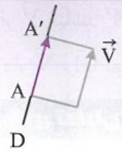
$$S(AOB)=\frac{۱}{۲}|OA|\times|OB|=\frac{۱}{۲}\times۵\times\frac{۱۵}{۴}=\frac{۷۵}{۸}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

خواص انتقال



۱) تصویر یک خط تحت یک انتقال با آن خط موازی است. یعنی انتقال شیب خط را تغییر نمی‌دهد، زیرا با توجه به شکل روبه‌رو، چهارضلعی $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است، پس $D \parallel D'$



نکته: اگر بردار انتقال با خط مفروض موازی باشد آن‌گاه تصویر خط بر خودش منطبق است.

مثال : اگر تصویر خط به معادله‌ی $(a-۳)x-۲y+۶=۰$ تحت انتقالی که بردارش موازی این خط است، خط به معادله‌ی $۶x+۴y+b+۱=۰$ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) -۱۳ ۲) -۱۲ ۳) ۳   ۴) ۵

پاسخ: تصویر هر خط تحت انتقالی که بردارش با خط موازی است خودش می‌شود. پس دو خط $(a-۳)x-۲y+۶=۰$ و $۶x+۴y+b+۱=۰$ باید بر هم منطبق باشند و این وقتی ممکن است که:

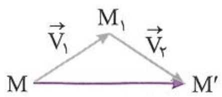
$$\frac{a-۳}{۶}=\frac{-۲}{۴}=\frac{۶}{b+۱}\Rightarrow\begin{cases}a-۳=-۳\\ b+۱=-۱۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۰\\ b=-۱۳\end{cases}\Rightarrow a+b=-۱۳$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲) انتقال یک تبدیل ایزومتری است، در نتیجه انتقال‌یافته‌ی هر شکل با خودش همنهشت است.

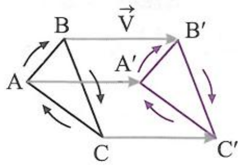
۳) بردارهایی که هر نقطه را به نقطه‌ی تصویرش تحت یک انتقال نظیر می‌سازند دارای طول‌های مساوی و جهت‌های یکسان هستند.

۴) انتقال نقطه‌ی ثابت ندارد یعنی با فرض $\vec{V}\neq\vec{O}$ تصویر هیچ نقطه‌ای بر خودش منطبق نیست.



۵) نتیجه‌ی ترکیب چند انتقال، انتقالی است که بردار آن مساوی مجموع بردارهای آن انتقال‌ها است.

$$T_{\vec{V}_۲}oT_{\vec{V}_۱}(M)=T_{\vec{V}_۱}oT_{\vec{V}_۲}(M)=T_{\vec{V}_۱+\vec{V}_۲}(M)=M'$$



۶) انتقال اندازه‌ی زاویه و جهت آن را تغییر نمی‌دهد، هم‌چنین جهت شکل را حفظ می‌کند.

مثال : خط $۲x-y+۱=۰$ را ابتدا تحت بردار $\vec{V}(k,۱+k)$ تصویر می‌کنیم و سپس تصویر آن را تحت بردار $\vec{U}(۱-k,-k)$ انتقال می‌دهیم تا خط d به‌دست آید. معادله‌ی خط d کدام است؟

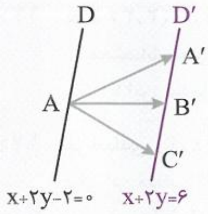
۱) $۲x-y+۱=۰$ ۲) $۲x-y=۰$ ۳) $۲x+y=۰$ ۴) $۲x+y-۱=۰$

پاسخ: با توجه به خواص انتقال کافی است خط $۲x-y+۱=۰$ را تحت بردار $\vec{V}+\vec{U}=(k+۱-k,۱+k-k)=(۱,۱)$ انتقال دهیم. به همین جهت به جای x و y در معادله‌ی خط به‌ترتیب $x-۱$ و $y-۱$ را قرار می‌دهیم:

$$۲(x-۱)-(y-۱)+۱=۰\Rightarrow ۲x-۲-y+۱+۱=۰\Rightarrow ۲x-y=۰$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال : همه‌ی بردارهای انتقال‌هایی را به‌دست آورید که خط $x+2y-2=0$ را به خط $x+2y=6$ تصویر می‌کنند.



پاسخ : دو خط داده شده موازی‌اند. نقطه‌ی ثابت A را روی خط D در نظر می‌گیریم، تمام بردارهایی که ابتدای آن‌ها A و انتهایشان روی D′ است خط D را به خط D′ تصویر می‌کنند.

$$A(0,1) \quad , \quad A'(t,\frac{6-t}{2})$$

$$\overrightarrow{AA'}=(t-0,\frac{6-t}{2}-1) \Rightarrow \overrightarrow{AA'}=(t,\frac{4-t}{2})$$

t عددی حقیقی است که با تغییر آن همه‌ی بردارهای انتقال به‌دست می‌آیند.

مثال **خط به معادله‌ی $3x-4y=3$ را تحت تبدیل $T(x,y)=(x+1,y-3)$ تصویر می‌کنیم. فاصله‌ی خط و تصویرش کدام است؟**

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

تمرین:

دو معادله‌ی خط $L_1: 3x-2y-6=0$ و $L_2: 3x-2y-12=0$ مفروض‌اند. ضابطه‌ی دو انتقال متفاوت که تحت آن‌ها L_2 تصویر L_1 باشد را بنویسید.

(نهایی- دی ۸۵)

تمرین:

خط $x+2y-6=0$ مفروض است. معادله‌ی خط تصویر را تحت انتقال $T(x,y)=(x-3,y+1)$ به‌دست آورید. (نهایی- خرداد ۸۸)

تست:

اگر نگاشت $T(x,y)=(ax-2, by+c)$ نگاشت انتقال در امتداد بردار $\vec{v}(k,2)$ باشد، $a+k+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۴ ۴) ۵

تست ۲:

- تصویر خط $y = x$ تحت انتقال $T(x, y) = (x + ۳ , y + ۲)$ کدام است؟ (آزاد ریاضی ۷۸)

۱) $y = x - ۱$　　۲) $y = x + ۱$　　۳) $y = x$　　۴) $۲y = ۳x$

تست ۳:

- بردار انتقالی که خط $x + ۲y = ۳$ را بر خط $x + ۲y = ۷$ تصویر می‌کند، کدام است؟

۱) $\left(۵, \frac{۱}{۲}\right)$　　۲) $\left(۳, \frac{۱}{۲}\right)$　　۳) $\left(۴, -\frac{۱}{۲}\right)$　　۴) $\left(۳, -\frac{۱}{۲}\right)$

تست ۴:

- اگر نقطه‌ی $(۴, ۳)$ تصویر نقطه‌ی $(۱, -۱)$ تحت انتقال T باشد، معادله‌ی تصویر خط D به معادله‌ی $۲x - ۴y + ۱ = ۰$ تحت این انتقال کدام است؟

۱) $۲x - ۴y + ۱۱ = ۰$　　۲) $۲x - ۴y + ۹ = ۰$　　۳) $۲x - ۴y - ۲۱ = ۰$　　۴) $۲x - ۴y + ۲۳ = ۰$

تست ۵:

خط $y + ۲x + ۳ = ۰$ را تحت کدام بردار انتقال دهیم، تا معادله‌ی آن تغییر <u>نکند</u>؟

۱) $(۱, -۲)$　　۲) $(۱, ۲)$　　۳) $(۲, -۱)$　　۴) $(۲, ۱)$

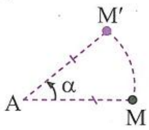
تست ۶:

- تبدیل‌یافته‌ی نقطه‌ی $M(۱, ۲)$ تحت ترکیب سه انتقال با بردارهای $\vec{a} = (۱, -۲)$ و $\vec{b} = (۳, ۲)$ و $\vec{c} = (-۴, ۵)$ کدام است؟

۱) $(-۱, -۳)$　　۲) $(۱, -۳)$　　۳) $(۲, ۵)$　　۴) $(۱, ۷)$

دوران

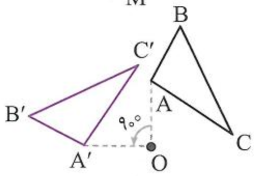
تعریف: دوران تبدیلی است که با یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز دوران و یک زاویه‌ی معلوم جهت‌دار (جهت مثبت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت) به نام زاویه‌ی دوران مشخص می‌شود و نقطه‌ی M' تصویر نقطه‌ی M در دوران به مرکز A و زاویه‌ی α است، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:



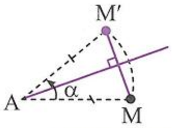
آ) $AM = AM'$ ب) $M\hat{A}M' = \alpha$

دوران به مرکز A و زاویه‌ی α را با نماد R_A^α نشان می‌دهند و داریم: $R_A^\alpha(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM' = AM \\ M\hat{A}M' = \alpha \end{cases}$

مثلاً در شکل مقابل مثلث ABC به مرکز O و زاویه‌ی 90° دوران داده شده است.



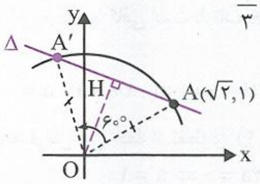
تذکر: عمودمنصف پاره‌خطی که نقطه و تصویرش را در یک دوران به هم وصل می‌کند، از مرکز دوران می‌گذرد زیرا در شکل مقابل مثلث AMM' متساوی‌الساقین است.



نکات: ۱) مرکز هر دوران نقطه‌ی ثابت آن دوران است، یعنی مرکز دوران، تنها نقطه‌ای است که تصویرش تحت یک دوران خودش است.
۲) اگر M' تصویر M در دوران به مرکز A و زاویه‌ی α باشد، آن‌گاه M تصویر M' در دوران به مرکز A و زاویه‌ی $-\alpha$ است.

مثال: نقطه‌ی $(1, \sqrt{2})$ را تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی 60° تصویر می‌کنیم. فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط گذرنده از نقطه و تصویرش کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

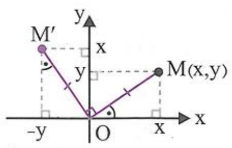


پاسخ: فاصله‌ی O تا خط Δ همان ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع OAA' است. برای محاسبه‌ی آن کافی است طول ضلع مثلث را محاسبه کنیم:

$$OA = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad , \quad H\hat{A}O = 60^\circ \Rightarrow OH = \frac{OA\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

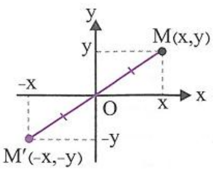
حالت‌های خاص دوران



آ) دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی 90°: مطابق شکل دو مثلث قائم‌الزاویه به حالت وتر و یک زاویه‌ی حاده همنهشت‌اند، پس مختصات نقطه‌ی M' برابر $M'(-y, x)$ است. بنابراین:

$$R(x, y) = (-y, x)$$

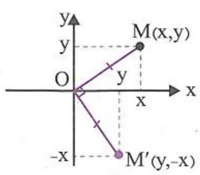
نکته: دوران به زاویه‌ی 90° (زاویه‌ی -270°)، شیب خط را عکس و قرینه می‌کند.



ب) دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی به اندازه‌ی $\pm 180^\circ$ (بازتاب نسبت به نقطه):

$$R(x, y) = (-x, -y)$$

نکته: دوران تحت زاویه‌ی $\pm 180^\circ$، همان بازتاب نسبت به نقطه است و شیب خط را حفظ می‌کند.



پ) دوران تحت مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی به اندازه‌ی 270° (زاویه‌ی -90°):

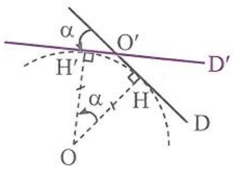
$$R(x, y) = (y, -x)$$

نکته: دوران تحت زاویه‌ی 270° (زاویه‌ی -90°)، شیب خط را عکس و قرینه می‌کند.

مثال : خط $۳x - ۲y = ۵$ را حول مبدأ مختصات و زاویه‌ی ۲۷۰° دوران می‌دهیم، معادله‌ی تصویر $y = ax + b$ می‌باشد. مقدار $a + b$ کدام است؟

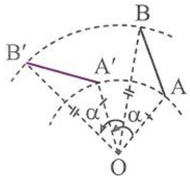
۱) ۱　　۲) ۳　　۳) $-\frac{۷}{۳}$　　۴) -۱

خواص دوران



۱) دوران یافته‌ی یک خط، خطی است که با آن خط زاویه‌ی مساوی و هم‌جهت با زاویه‌ی دوران می‌سازد. برای دوران دادن خط D می‌توان دو نقطه‌ی دلخواه از آن را دوران داد. خط گذرنده از نقاط تصویر جواب است. اما راه ساده‌تر این است که از مرکز دوران بر خط D عمود کنیم و پای عمود را به‌اندازه‌ی زاویه‌ی α دوران دهیم نقطه‌ی H' به‌دست می‌آید سپس در نقطه‌ی H' خط D' را عمود بر OH' رسم می‌کنیم.

نکته: چهارضلعی $OHO'H'$ شبه لوزی (کایت) است (مگر این‌که $\alpha = ۹۰^\circ$ باشد که مربع می‌شود) و O روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط D و D' واقع است.

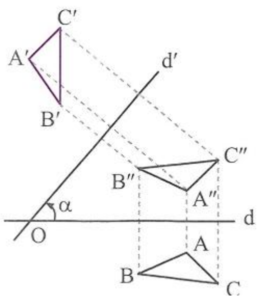


نتیجه: دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند مگر این‌که زاویه‌ی دوران $\pm۱۸۰^\circ$ باشد.

۲) دوران ایزومتری است.

مطابق شکل $A'B'$ دوران یافته‌ی پاره‌خط AB به مرکز O و زاویه‌ی α است. چون دو مثلث AOB و $A'OB'$ به حالت (ض‌زض) همنهشت‌اند پس $AB = A'B'$

۳) دوران اندازه‌ی زاویه و جهت آن را حفظ می‌کند و به‌طور کلی جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.



۴) مرکز دوران نقطه‌ی ثابت آن است.

۵) ترکیب دو دوران با مرکزهای یکسان، دورانی است با همان مرکز و زاویه‌ی مجموع زوایای دوران‌های مفروض.

۶) ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز آن محل تلاقی محورهای بازتاب‌ها و زاویه‌ی دوران دو برابر زاویه‌ی بین دو محور بازتاب است. مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC در دوران به مرکز O و زاویه‌ی ۲α می‌باشد.

مثال : خط به معادله‌ی $۳y = ۴x - ۷$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بازتاب می‌کنیم، سپس قرینه‌ی خط حاصل را نسبت به محور yها به‌دست می‌آوریم، خط به معادله‌ی $y = (m-۱)x + \frac{۷}{۴}$ ایجاد می‌شود. m کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $-\frac{۱}{۴}$　　۴) $\frac{۳}{۴}$

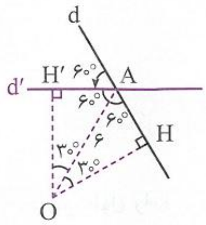
پاسخ : روش اول: ترکیب بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم و بازتاب نسبت به محور yها چون محورهایشان متقاطع و زاویه‌ی بین آن‌ها ۴۵° است، یک دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی دوران ۹۰° است، لذا شیب خط تصویر عکس و قرینه‌ی شیب خط مفروض است.

$$m - ۱ = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow m = ۱ - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

روش دوم: تصویر خط به معادله‌ی $۳y = ۴x - ۷$ در بازتاب نسبت به نیمساز ربع اول و سوم، خط به معادله‌ی $۳x = ۴y - ۷$ است. قرینه‌ی این خط نسبت به محور yها برابر $-۳x = ۴y - ۷$ یا $y = -\frac{۳}{۴}x + \frac{۷}{۴}$ می‌باشد، در نتیجه $m - ۱ = -\frac{۳}{۴}$ یا $m = \frac{۱}{۴}$ بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

مثال : در دوران به مرکز O و زاویه‌ی 60° در صفحه، خط d و تصویرش در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. اگر $OA = 6$ باشد، آن‌گاه فاصله‌ی مرکز دوران از خط تصویر کدام است؟

۱) ۳ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $3\sqrt{3}$ ۴) ۴



پاسخ : مطابق شکل خط d' تصویر خط d در دوران به مرکز O و زاویه‌ی 60° است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AOH' ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 60°، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است. پس:

$$OH' = \frac{\sqrt{3}}{2}OA \Rightarrow OH' = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست ۱:

- دوران یافته‌ی خط $y - 2x = 3$، تحت زاویه‌ی 90° به مرکز دوران $(0,0)$ خط l_1 است. معادله‌ی تصویر خط l_1، تحت انتقال $T(x,y) = (x+1, y-2)$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

۱) $2y - x + 4 = 0$ ۲) $2y + x + 6 = 0$ ۳) $y - 2x + 5 = 0$ ۴) $y + 2x + 1 = 0$

تست ۲:

- تبدیل یافته‌ی خط به معادله‌ی $2y - x = 5$، تحت دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه‌ی دوران 90° در جهت مثلثاتی، خط مفروض را با کدام مختصات قطع می‌کند؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور ۹۱)

۱) $(5,5)$ ۲) $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ۳) $(1,3)$ ۴) $(-3,1)$

تست ۳:

در دوران به مرکز O و زاویه‌ی 68° در صفحه، خط d و تبدیل یافته‌اش در P متقاطع‌اند، زاویه‌ی OP با خط d کدام است؟ $(O \notin d)$

۱) 68° ۲) 56° ۳) 48° ۴) 22° (سراسری ریاضی ۷۱)

تست۴:

- **ترکیب دو دوران با یک مرکز و به زاویه‌های ۵۰° و ۱۳۰° چه نوع تبدیلی است؟** (آزاد ریاضی ۷۵)

۱) تقارن مرکزی ۲) انتقال ۳) تجانس ۴) تقارن محوری

تست۵:

- **دوران یافته‌ی $A(۱,۲)$ حول $B(۲,۱)$ و با زاویه‌ی ۹۰° کدام است؟**

۱) $(۰,۱)$ ۲) $(۱,۰)$ ۳) $(۰,-۱)$ ۴) $(-۱,-۱)$

تست۶:

اگر خط $x = ۲$ دوران‌های متوالی ۴۵°، ۹۰°، ۱۳۵°، ...، ۳۶۰° حول مبداء داشته باشد، مساحت شکل حاصل چه‌قدر است؟

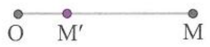
۱) $۱۶(\sqrt{۲}-۱)$ ۲) $۸(\sqrt{۲}-۱)$ ۳) $۳۲(\sqrt{۲}-۱)$ ۴) $۱۶(۲-\sqrt{۲})$ (آزاد ریاضی ۸۵)

تجانس (همسانی)

تعریف: تجانس تبدیلی است که با یک نقطه‌ی ثابت O به نام مرکز تجانس و یک عدد حقیقی k مخالف صفر به نام نسبت تجانس مشخص می‌شود و M' تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k است، هرگاه:

آ) نقاط O، M و M' روی یک امتداد باشند.

ب) $OM' = k.OM$. (فاصله‌ی نقطه‌ی تصویر از مرکز تجانس، k برابر فاصله‌ی نقطه از مرکز است.)



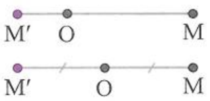
اگر $0 < k < 1$، تجانس انقباضی است.

اگر $k > 1$، تجانس انبساطی نامیده می‌شود.

اگر $k = 1$ باشد، تجانس تبدیل همانی است یعنی هر نقطه را به خودش تصویر می‌کند.

اگر $k > 0$ باشد، تجانس مستقیم و اگر $k < 0$ باشد تجانس معکوس نامیده می‌شود. مثلاً تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $k = -\frac{1}{2}$ به‌صورت روبه‌رو است.

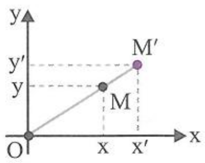
اگر $k = -1$ باشد، تجانس به مرکز O بازتاب نسبت به نقطه‌ی O است.



نکته: مرکز یک تجانس تحت یک تجانس تغییر نمی‌کند، یعنی هر تجانس یک نقطه‌ی ثابت دارد که همان مرکزش است. ضمناً تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را با نماد H_O^k نشان می‌دهند.

ضابطه‌ی تحلیلی تجانس

اگر $M'(x',y')$ تصویر نقطه‌ی $M(x,y)$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس k باشد، چون $OM' = k.OM$، نتیجه می‌شود:



$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Rightarrow H(x,y) = (kx,ky)$$

نتیجه: اگر M' تصویر M در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد آن‌گاه M تصویر M' در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{1}{k}$ است.

مثال : تصویر خط $3x - 4y = 2$ در تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس ۳ از کدام نقطه می‌گذرد؟

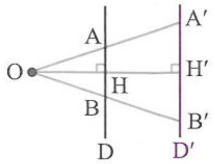
۱) $(2,3)$　　۲) $(-2,-3)$　　۳) $(3,2)$　　۴) $(-3,2)$

پاسخ :

$$H(x,y) = (3x,3y) = (x',y') \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{3} \\ y = \frac{y'}{3} \end{cases} \xrightarrow{3x-4y=2} 3(\frac{x'}{3}) - 4(\frac{y'}{3}) = 2 \Rightarrow 3x' - 4y' = 6$$

نقطه‌ی $(-2,-3)$ در معادله‌ی خط اخیر صدق می‌کند. بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

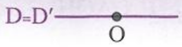
خواص تجانس

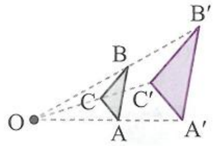


۱) تصویر یک خط در تجانس، خطی موازی با آن است. یعنی تجانس شیب خط را تغییر نمی‌دهد.

$$H_O^k(D) = D' \Rightarrow D \parallel D'$$

نکته: اگر مرکز تجانس روی خط مفروض واقع باشد، آن‌گاه تصویر آن خط بر خودش منطبق است.



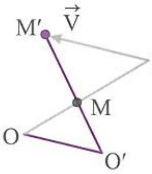


۲) تجانس طول را k برابر $(k>۰)$ و مساحت را $k^۲$ برابر می‌کند. زیرا تصویر هر شکل در یک تجانس با خود شکل متشابه است.

۳) تجانس اندازه‌ی زاویه و جهت شکل را تغییر نمی‌دهد.

۴) خط‌هایی که نقطه‌های نظیر را در یک تجانس به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس همرسند.

ترکیب تجانس و انتقال



ترکیب یک تجانس و یک انتقال همواره یک تجانس است که نسبت آن همان نسبت تجانس مفروض است.

اثبات: مطابق شکل تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k را در نظر می‌گیریم. تصویر نقطه‌ی M را تحت این تجانس M'' می‌نامیم و تصویر M'' را تحت انتقال $\vec{V}$ نقطه‌ی M' می‌نامیم.

از O موازی بردار $\vec{V}$ رسم می‌کنیم تا امتداد MM' را در نقطه‌ی O' قطع کند. بنابه تشابه دو مثلث روی شکل داریم $k = \frac{OM''}{OM} = \frac{O'M'}{O'M}$، پس $O'M' = kO'M$. یعنی M' تصویر نقطه‌ی M در تجانس به مرکز O' و نسبت k است. نقطه‌ی O' ثابت و معلوم است زیرا به کمک قضیه‌ی تالس از رابطه‌ی برداری $\overrightarrow{OO'} = \frac{\vec{V}}{k-۱}$ به‌دست می‌آید.

مثال : ثابت کنید تبدیل $D(x,y) = (۲x+۱, ۲y-۳)$ تجانس است، نسبت و مرکز آن را تعیین کنید.

پاسخ : تبدیل D ترکیب تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k=۲$ و انتقال با بردار $\vec{V}(۱,-۳)$ است. پس تبدیل D یک تجانس به نسبت ۲ می‌باشد. می‌دانیم مرکز یک تجانس نقطه‌ی ثابت آن است، یعنی تصویرش خودش می‌باشد، پس:

$$D(x,y) = (x,y) \Rightarrow (۲x+۱, ۲y-۳) = (x,y) \Rightarrow \begin{cases} ۲x+۱ = x \\ ۲y-۳ = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ y = ۳ \end{cases}$$

بنابراین تبدیل D تجانس به مرکز $O'(-۱,۳)$ و نسبت تجانس ۲ است.

مثال $\boxed{}$ ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O' = (-۲,۳)$ و نسبت تجانس $k=۳$ را بنویسید.

پاسخ : چون مرکز تجانس مبدأ مختصات نیست پس می‌توان گفت این تجانس ترکیب تجانس به مرکز مبدأ مختصات و نسبت تجانس $k=۳$ و انتقال با بردار $\vec{V}(a,b)$ است. $H(x,y) = (۳x+a, ۳y+b)$

چون $O' = (-۲,۳)$ مرکز تجانس، نقطه‌ی ثابت آن است، پس:

$$H(-۲,۳) = (-۲,۳) \Rightarrow (-۶+a, ۹+b) = (-۲,۳) \Rightarrow \begin{cases} -۶+a = -۲ \\ ۹+b = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = +۴ \\ b = -۶ \end{cases}$$

بنابراین ضابطه‌ی تجانس به مرکز $O' = (-۲,۳)$ و نسبت تجانس $k=۳$ عبارت است از:

$$H(x,y) = (۳x+۴, ۳y-۶)$$

تست ۱:

خط $y = 2x$ را یک بار تحت تبدیل $T_1(x,y) = (x+1, y+1)$ و یک بار تحت تبـدیل $T_2(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ منتقـل مـی‌کنـیم، فاصله‌ی بین این دو خط تبدیل یافته کدام است؟ (آزاد ریاضی ۸۲)

۱) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$	۲) $\sqrt{5}$	۳) $\frac{1}{5}$	۴) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

تست ۲:

-خط به معادله‌ی $2y + x = 2$ را تحت تجانس $D(x,y) = (2x, 2y)$ تبـدیل و سـپس نمـودار حاصـل را تحـت بازتـاب نسـبت بـه خط $y = -x$ تصویر می‌کنیم، معادله‌ی تصویر کدام است؟ (سراسری ریاضی ۷۹)

۱) $2x + y + 4 = 0$	۲) $2x - y - 4 = 0$	۳) $2y - x - 4 = 0$	۴) $2x + y + 1 = 0$

تست ۳:

- نقاط $(5,3)$، $(7,1)$ و $(1,-1)$ سه رأس از مثلث قائم‌الزاویه‌اند. مساحت مجانس این مثلث به مرکز تجانسِ مبداء مختصـات و نسـبت تجانس $-\frac{1}{2}$، کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

۱) ۲	۲) ۳	۳) ۴	۴) ۶

تست ۴:

مجانس نقطه‌ی $A(1,2)$ نسبت به مرکز $B(2,1)$ و با نسبت تجانس $k = 2$ کدام است؟

۱) $(0,3)$	۲) $(-1,3)$	۳) $(4,0)$	۴) $(-1,4)$

جزوه آموزشی

هندسه ۲

یازدهم ریاضی

فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

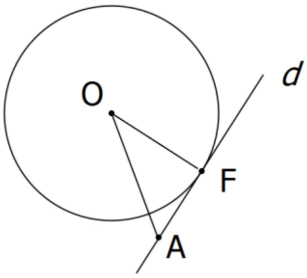
درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

با مفهوم دایره و بعضی از ویژگی هاش سال های قبل آشنا شدیم حالا می خوایم با ویژگی های دیگش آشنا بشیم و حتی این ویژگی ها رو اثبات کنیم .

قضیه : یک خط و یک دایره بر هم مماسند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن عمود باشد .

اثبات : چون قضیه دو شرطی هستش باید هر دو طرف ثابت بشه !!



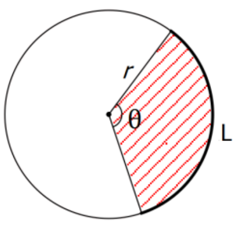
$\Leftarrow$ فرض کنید خط d بر دایره در نقطه F مماس است پس هر نقطه دیگرمانند A روی خط d خارج از دایره است پس $OA > OF$ و این یعنی OF کوتاه ترین فاصله بین نقطه O و خط d است پس خط d بر شعاع OF عمود است .

$\Rightarrow$ فرض کنید خط d بر شعاع OF عمود باشد پس برای هر نقطه دیگر مانند A روی خط $OA > OF$ (وتر بزرگ ترین ضلع مثلث قائم الزاویه است) لذا تمام نقاط روی خط d به جز F خارج از دایره است پس تنها نقطه تماس F است و خط بر دایره مماس است .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای روی آن را توضیح دهید .

طول کمان و مساحت قطاع :

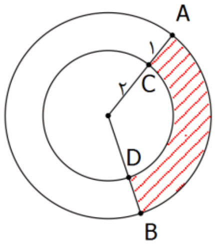
با توجه به محیط و مساحت دایره طول کمان و مساحت قطاع مربوط به زاویه مرکزی θ رادیان را می توان به کمک تناسب بدست آورد :



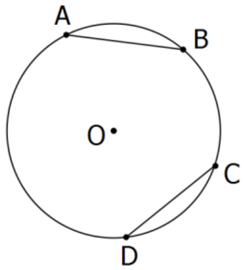
$$\frac{L}{۲\pi r} = \frac{\theta}{۲\pi} \Rightarrow L = r\theta$$

$$\frac{S}{\pi r^{۲}} = \frac{\theta}{۲\pi} \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} r^{۲}\theta$$

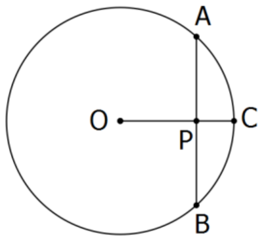
تمرین : طول کمان های AB,CD مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید .



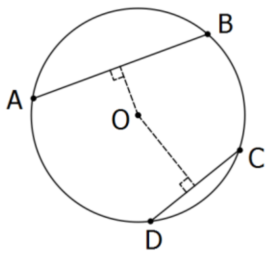
تمرین : ثابت کنید در یک دایره طول کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس .



تمرین : ثابت کنید اگر در یک دایره شعاع بر وتر عمود باشد آن وتر و کمان مقابلش را نصف می کند و برعکس .



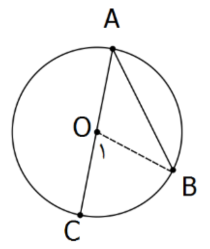
تمرین : ثابت کنید از دو وتر یک دایره آنکه به مرکز نزدیک تر است بزرگ تر است و برعکس .



قضیه : اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن .

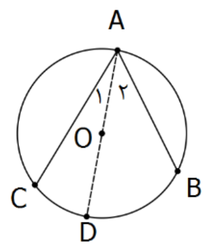
اثبات :

الف) فرض کنید یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره می گذرد . در این صورت با وصل کردن نقاط B و O داریم :



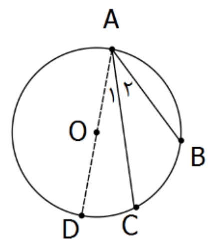
$$\left.\begin{array}{l} O_۱ = A + B \\ A = B \end{array}\right\} \Rightarrow O_۱ = ۲A \Rightarrow A = \frac{۱}{۲} O_۱ \Rightarrow A = \frac{۱}{۲} BC$$

ب) فرض کنید اضلاع زاویه اطراف مرکز دایره باشد. با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :



$$\left.\begin{array}{l} A_۱ = \frac{۱}{۲} CD \\ A_۲ = \frac{۱}{۲} BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_۱ + A_۲ = \frac{۱}{۲}(CD + BD) \Rightarrow A = \frac{۱}{۲} BC$$

ج) فرض کنید اضلاع زاویه در یک طرف مرکز باشد . با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :

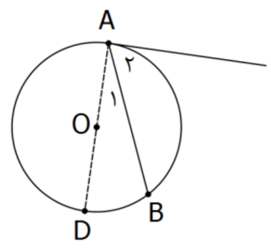


$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{۱}{۲} BD \\ A_۱ = \frac{۱}{۲} DC \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_۱ = \frac{۱}{۲}(BD - DC) \Rightarrow A_۲ = \frac{۱}{۲} BC$$

قضیه : اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن .

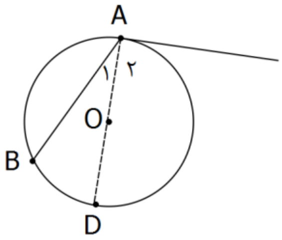
اثبات :

الف) اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :



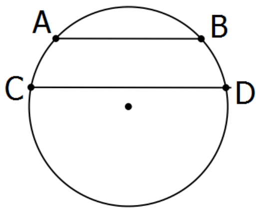
$$\left.\begin{array}{l} A = ۹۰^\circ \Rightarrow A = \frac{۱}{۲} AD \\ A_۱ = \frac{۱}{۲} BD \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_۱ = \frac{۱}{۲}(AD - BD) \Rightarrow A_۲ = \frac{۱}{۲} AB$$

ب) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :

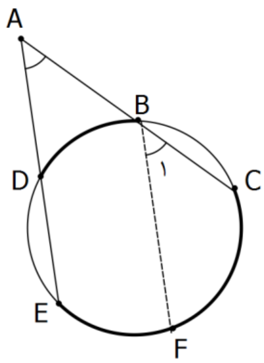


$$\left.\begin{array}{l} A_2 = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} AD \\ A_1 = \frac{1}{2} BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 + A_1 = \frac{1}{2}(AD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2} AB$$

تمرین : ثابت کنید دو وتر از دایره با هم موازیند اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند .



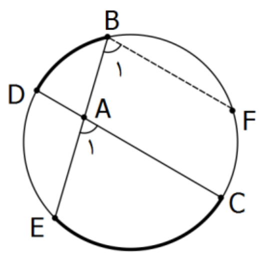
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در بیرون از دایره برابر با نصف تفاضل اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .



اثبات : از نقطه B وتری موازی DE رسم می کنیم در این صورت :

$$A = B_1 = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{2}\left(EC - EF\right) \xrightarrow{EF = BD} A = \frac{EC - BD}{2}$$

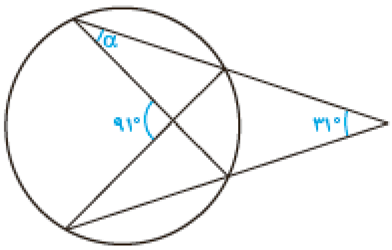
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در درون دایره برابر با نصف مجموع اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .



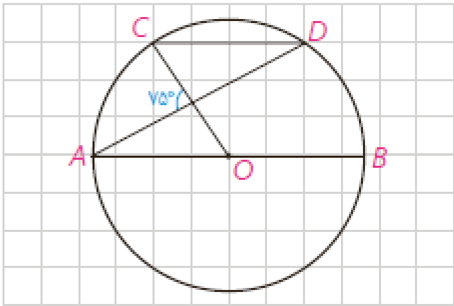
اثبات : از نقطه B وتری موازی DC رسم می کنیم در این صورت :

$$A_1 = B_1 = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2}\left(EC + FC\right) \xrightarrow{FC = BD} A = \frac{EC + BD}{2}$$

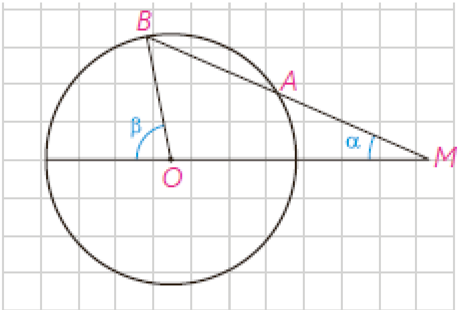
تمرین :مقدار α را حساب کنید .



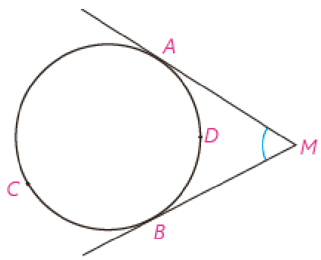
تمرین : اگر $AB \parallel CD$ باشد . اندازه کمان AC را بیابید .



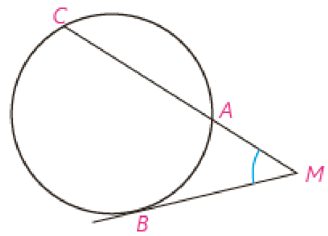
تمرین : در شکل زیر $MA = R$. نشان دهید $\beta = ۳\alpha$.



تمرین : در شکل زیر ثابت کنید . (راهنمایی : از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید)

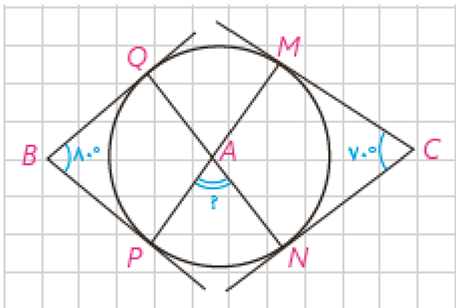


الف) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$



ب) $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

تمرین : در شکل زیر اندازه زاویه A چند درجه است ؟

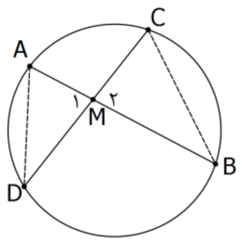


درس دوم : رابطه های طولی در دایره

قضیه : هرگاه خط هایی شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) همدیگر را قطع کنند .
آنگاه : $MA.MB = MC.MD$

الف) اگر درون دایره همدیگر را قطع کنند :

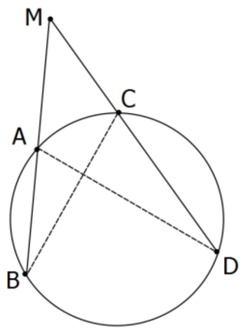
A را به D و B را به C وصل می کنیم :



$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{۲} = D \\ M_{۱} = M_{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{ز\ ز} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

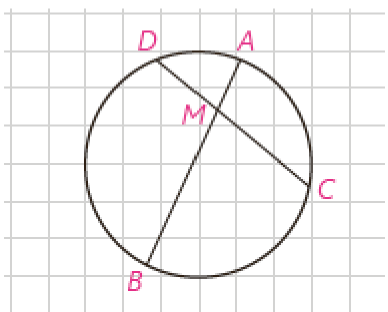
ب) اگر بیرون دایره همدیگر را قطع کنند :

A را به D و B را به C وصل می کنیم :

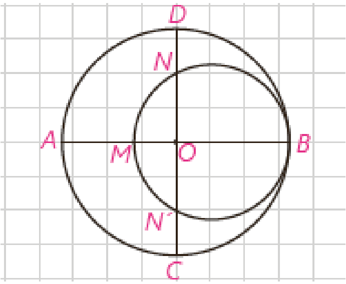


$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{۲} = D \\ M = M \end{array}\right\} \xrightarrow{ز\ ز} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

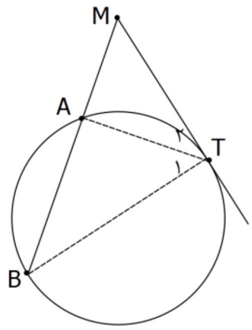
تمرین : در شکل زیر $CD = ۹$ و $AB = ۱۱$. وتر AB وتر CD را به نسبت ۱به ۲ تقسیم کرده است . وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند ؟



تمرین : در شکل دو دایره مماس هستند . و دو قطر داده شده عمودند . اگر $AM = ۱۶, ND = ۱۰$ شعاع دو دایره راپیدا کنید .

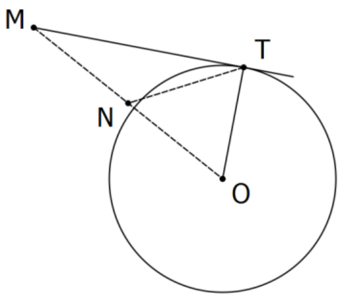


قضیه : هر گاه از نقطه ای خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود ، مربع اندازه مماس با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع برابر است . ($MT^{۲} = MA.MB$)



تمرین : از نقطه P د رخارج دایره، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ و قاطعی را بر آن رسم کرده ایم . که قاطع در نقاط B وC دایره را قطع کرده است . اگر $BC = ۲۰$ باشد طول PB و PC را بدست آورید .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و دلیل خود را برای درستی روش بیان کنید .



حل : اگر T نقطه ای باشد که خط گذرنده از M بر دایره مماس شده است

آنگاه مثلث MTO قائم الزاویه است و میانه وارد بر وتر نصف وتر است

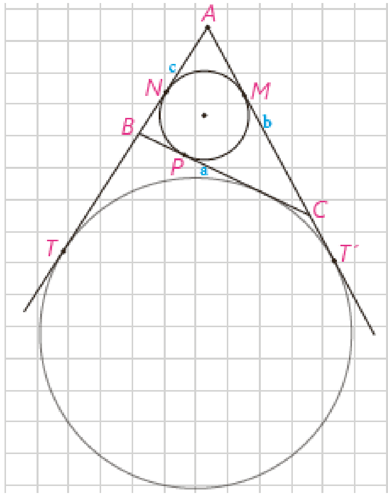
(سال قبل اثبات کردیم) یعنی $NM = NO = NT$ پس دایره ای که

به قطر MO رسم شود از T خواهد گذشت . در نتیجه برای رسم مماس

کافیست دایره ای به قطر MO رسم کنیم و نقاط برخورد دو دایره را به M وصل کنیم .

تمرین : ثابت کنید اندازه دو مماس رسم شده بر یک دایره از نقطه ای خارج آن با هم برابرند .

تمرین : در شکل زیر نشان دهید $AT = AT' = P$.



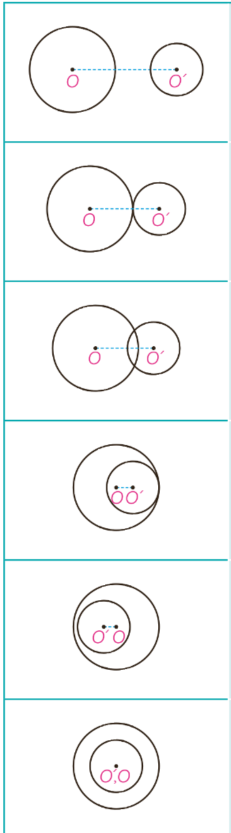
حالت های دو دایره نسبت به هم :

طبق جدول مقابل برای اینکه بدانیم دو دایره نسبت به هم چه وضعی را دارند ، بهتر است ابتدا مجموع دو شعاع و تفاضل دوشعاع را بدست آوریم و سپس اندازه فاصله دو مرکز را با دو عدد بدست آمده مقایسه کنیم .

اگر برابر با یکی از این اعداد باشد مماس درون یا بیرون است (به جدول نگاه کنید)

اگر عددی بین این ها باشد متقاطع است.

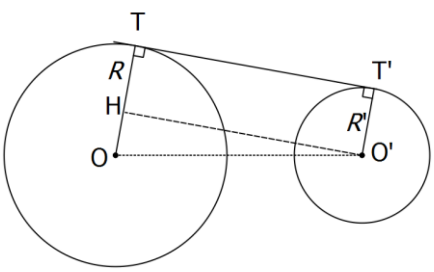
اگر عددی اطراف اینها باشد متداخل یا متخارج است (به جدول نگاه کنید)

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = 0$	

مماس مشترک خارجی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های R و R' و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT' را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O'H را موازی TT' رسم می کنیم و چون چهار ضلعی حاصل مستطیل است مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

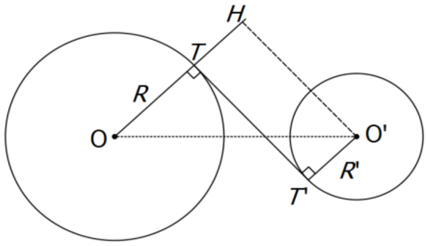


$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

مماس مشترک داخلی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های R و R′ و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT′ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O′H را موازی TT′ رسم می کنیم تا امتداد شعاع OT را قطع کند. مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :



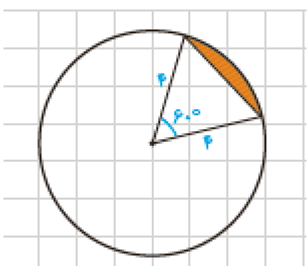
$$TT' = \sqrt{d^۲ - (R + R')^۲}$$

تمرین : دو دایر به شعاع های ۳و ۴ مماس خارجی هستند . طول مماس مشترک آنها چقدر است ؟

تمرین : طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است .

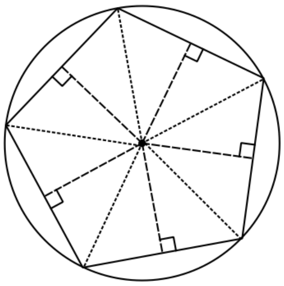
تمرین : طول خط المرکزین دو دایره مماس دورنی ۲ و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π است . طول شعاع دو دایره را بدست آورید .

تمرین : در شکل زیر مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید .



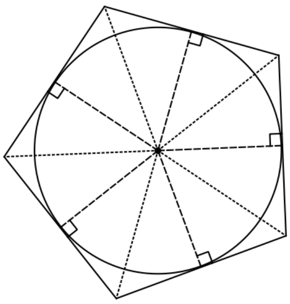
درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی محاطی : چند ضلعی که تمام رئوس آن روی یک دایره باشد . (آن دایره بر چند ضلعی محیط خواهد بود)



پس می توان گفت « **چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر همه عمود منصف های اضلاع در یک نقطه همرس باشند** » .

چند ضلعی محیطی : چند ضلعی که تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشد .(آن دایره در چند ضلعی محاط خواهد بود)

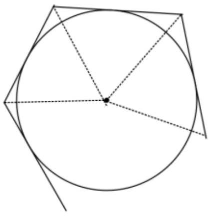


پس می توان گفت « **چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه نیم ساز های زاویه ها در یک نقطه همرس باشند** » .

نتیجه : از آنجایی که سال گذشته ثابت کردیم عمود منصف ها و نیمساز های مثلث همرسند پس مثلث هم چند ضلعی محیطی است و هم محاطی و محل همرسی عمود منصف های اضلاع، مرکز دایره محیطی و محل همرسی نیمسازها، مرکز دایره محاطی است .

تمرین : ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل آن ضلع ، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند .

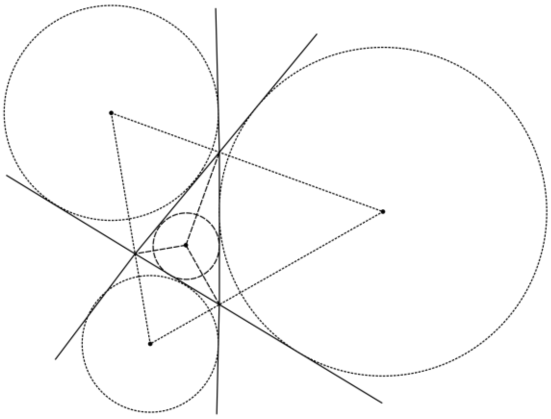
تمرین : نشان دهید یک n ضلعی محیطی با شعاع دایره محاطی r و محیط ۲P دارای مساحت $S = rp$ است ؟



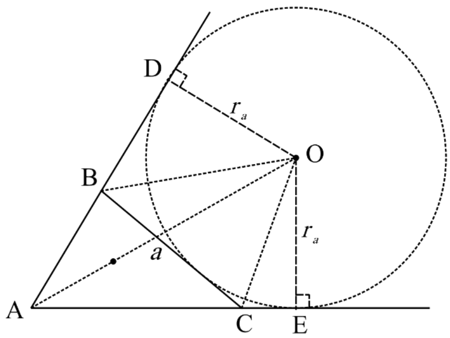
راهنمایی : مساحت n مثلث را بدست آورده (اضلاع لزوماً مساوی نیستند) و جمع کنید .

نتیجه : شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P}$ (P نصف محیط است)

دایره محاطی خارجی و شعاع آن : هر مثلث سه دایره محاطی خارجی نیز دارد که از بیرون بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس هستند و مرکز آنها محل برخورد یک نیمساز داخلی با دو نیمساز خارجی است .



تمرین : در مثلث ABC فرض کنید ضلع مقابل به زاویه A را a و شعاع دایره خارجی محاطی مقابل آن را r_a بنامیم حال داریم :



$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BCO} = \frac{۱}{۲} r_a (b + c - a)$$

از طرفی $۲p = a + b + c \Rightarrow ۲p - ۲a = b + c - a$

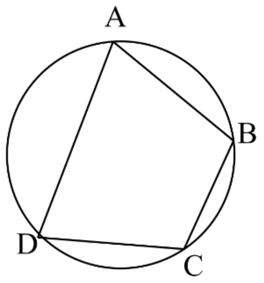
پس داریم : $S = r_a (p - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{p - a}$

در نتیجه برای دایره های محاطی خارجی دیگر نیز داریم : $r_b = \frac{S}{p - b}$ و $r_c = \frac{S}{p - c}$

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و دوایر خارجی محاطی به صورت $\frac{۱}{r}=\frac{۱}{r_c}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_a}$ است .

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و ارتفاع های مثلث به صورت $\frac{۱}{r}=\frac{۱}{h_c}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_a}$ است. ($\frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲s}$)

قضیه : چهار ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو مقابل آن مکمل باشند .

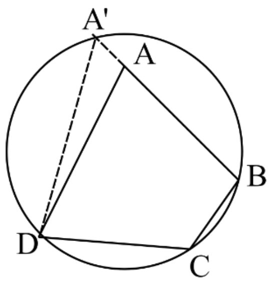


اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محاطی باشد پس :

$$A=\frac{BCD}{۲}\quad , \quad C=\frac{BAD}{۲}\quad \Rightarrow \quad A+C=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

و به همین ترتیب دو زاویه مقابل دیگر نیز مکمل هستند .

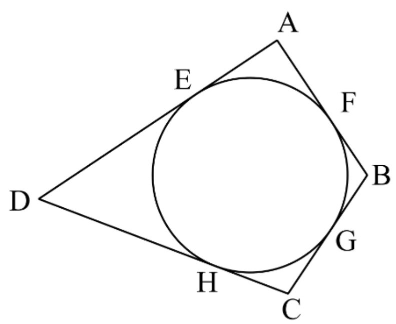
حال فرض کنید زاویه های A,C مکمل باشد نشان می دهیم دایره ای که از سه نقطه B,C,D میگذرد از نقطه A نیز خواهد گذشت و چهار ضلعی خواهد بود .



(فرض خلف) فرض کنیم اینطور نباشد و دایره خط BA را در A′ قطع کند در این صورت چهار ضلعی A′BCD محاطی است و A′,C مکمل هستند .

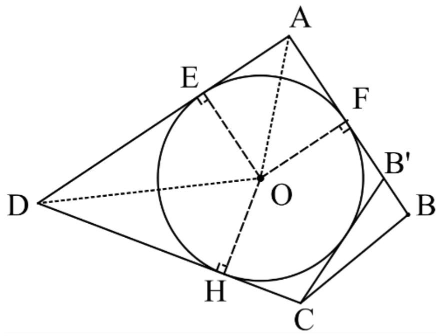
پس A و A′ هم اندازه خواهند بود که این امکان ندارد در نتیجه A′ همان A است .

قضیه : چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه دو ضلع دیگر باشد .



اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محیطی باشد پس :

$$\begin{aligned} AB+DC &= AF+BF+DH+CH \\ &= \underline{AE}+\underline{BG}+\underline{DE}+\underline{CG} \\ &= AD+BC \end{aligned}$$



حال فرض کنید $AB+CD=AD+BC$ و نیم ساز های زاویه های A و D را رسم می کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند فاصله این نقطه از سه ضلع AD,AB,AC برابر است (چرا ؟) پس دایره ای به مرکز O و شعاع OE بر این سه ضلع مماس است ثابت می کنیم بر ضلع چهارم نیز مماس است.

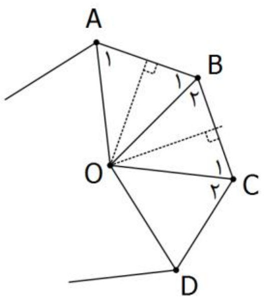
(فرض خلف) فرض کنید این دایره بر BC مماس نباشد از C مماسی بر دایره رسم می کنیم در این صورت چهار ضلعی AB'CD محیطی است و $AB'+CD=AD+B'C$ از تفاضل دو رابطه قبل داریم :

$$AB-AB'=BC-B'C \Rightarrow BB'=BC-B'C \Rightarrow BC=B'C+BB'$$

و این رابطه غیر ممکن است زیرا طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است .

تمرین : ثابت کنید یک ذوزنقه ، محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد .

تمرین : یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی . ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها .



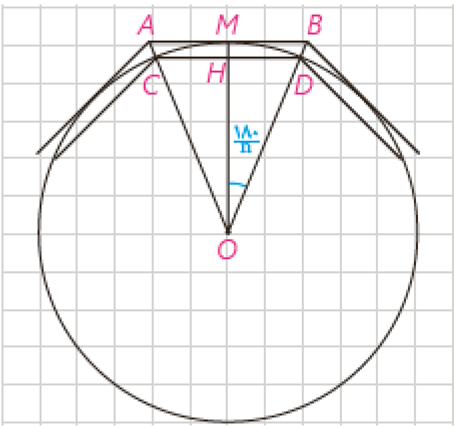
قضیه : هر چند ضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی .

عمود منصف های اضلاع AB و BC را رسم می کنیم تا در O همدیگر را قطع کنند اگر O را به A,B,C وصل کنیم $OA=OB=OC=k$ و بنا به حالت (ض ض ض) مثلث های OAB و BOC همنهشت هستند و $A_1=B_1=B_2=C_1=\alpha$ در نتیجه

$C_۲ = \alpha$. حال اگر O را به D وصل کنیم بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث OBC و OCD همنهشتند و $OD = k$.
به همین ترتیب فاصله O از بقیه رئوس نیز برابر K است و این یعنی O مرکز دایره ای است که از رئوس چند ضلعی می گذرد و از آنجایی که فاصله O از تمام ضلع ها نیز برابر است مرکز دایره ای است که بر اضلاع مماس است و این یعنی چند ضلعی منتظم هم محیطی و هم محاطی است .

تمرین : نشان دهید اندازه اضلاع یک n ضلعی منتظم محاطی و محیطی در دایره ای به شعاع R برابر است با :

$CD = ۲R \sin \frac{۱۸۰}{n}$ و $AB = ۲R \tan \frac{۱۸۰}{n}$



فصل دوم : تبدیلات هندسی

درس اول : تبدیلات هندسی

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

درس اول : تبدیلات هندسی

گاهی در اثر حرکت مجموعه نقاط یک شکل مانند F ، یک شکل دیگر مانند F' طبق قانون معین T بدست می آید . قانون T می تواند موقعیت ، اندازه و نوع شکل را تغییر دهد.

اگر قانون T دارای ویژگی خاصی باشد به آن تبدیل گفته می شود و و F' را تصویر شکل F تحت تبدیل T می گویند و می نویسند $T(F)=F'$.

تبدیل ها انواع مختلفی دارند که با برخی از آنها در این فصل آشنا خواهیم شد .

تبدیل : تبدیل T در صفحه P تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می کند و برعکس ; هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است .

$$T : P \to P$$
$$T(A)=A'$$

(تابع T یک به یک است)

تبدیل طولپا (ایزومتری) : به تبدیلی که طول پاره خط را حفظ می کند تبدیل طولپا می گویند . به عبارت دیگر تبدیل T طولپا است اگر و تنها اگر به ازای هر دو نقطه A,B از یک صفحه، $AB=A'B'$ که $T(A)=A',T(B)=B'$.

قضیه : در هر تبدیل طولپا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است .(تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می کند)

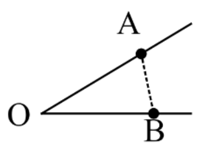
فرض کنید زاویه AOB تحت تبدیل طولپای T به زاویه $A'O'B'$ تصویر شده باشد .

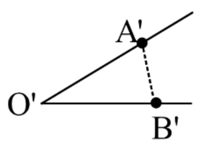
به طوری که $T(A)=A',T(O)=O',T(B)=B'$.

چون تبدیل طولپاست : $OA=O'A',OB=O'B',AB=A'B'$

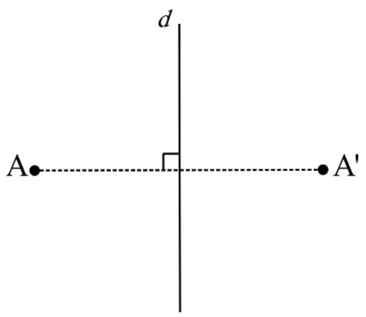
در نتیجه بنا به حالت (ض ض ض) دو مثلث $OAB,O'A'B'$

همنهشتند و $O=O'$.





نقطه ثابت تبدیل : در هر تبدیل ، نقطه ای که تبدیل یافته آن خودش باشد را نقطه ثابت آن تبدیل می نامند .



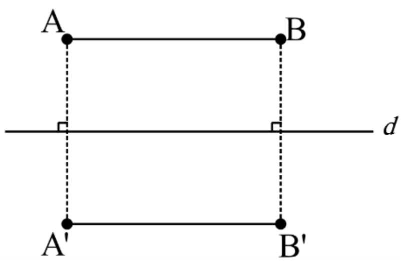
بازتاب : بازتاب نسبت به خط d تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه خارج از خط مانند A نقطه ای مانند A′ است به طوری که خط d عمود منصف AA′ است . ($S(A)=A'$)

همچنین تصویر هر نقطه روی خط d خودش است .

در این تبدیل خط d را محور بازتاب می نامند .

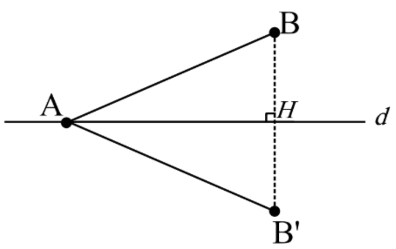
قضیه : بازتاب تبدیلی طولپا است .

ابتدا حالت هی مختلف یک پاره خط نسبت به محور بازتاب d را در نظر می گیریم و در حالت نشان می دهیم اندازه پاره خط با اندازه تصویرش برابر است .



الف) پاره خط AB موازی خط d باشد .

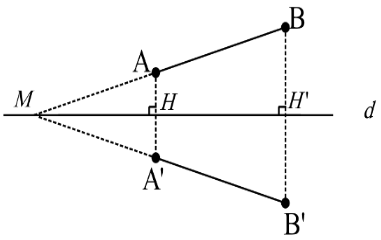
تصویر آن خط موازی d در طرف دیگر آن است و چهار ضلعی $ABB'A'$ مستطیل خواهد بود پس $AB=A'B'$.



ب) یک سر پاره خط روی خط d باشد .

(اگر هر دو سر پاره خط روی d باشد حکم بدیهی است.)

تصویر A خودش است و تصویر B، B′ است . و چون d عمود منصف BB' است پس $AB=A'B'$.



پ) پاره خط با d نه موازی و نه متقاطع است .

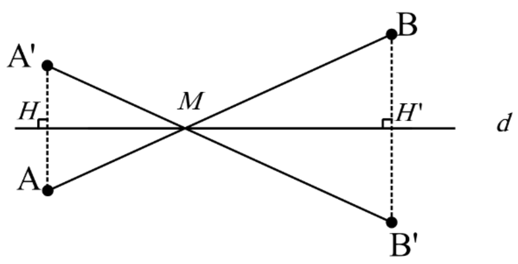
پاره خط AB را امتداد می دهیم تا d را در M قطع کند .

سپس تصویر B یعنی B′ را نیز مشخص می کنیم و پاره خط MB′ را نیز می کشیم .حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا خط MB′ را در A′ قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث

MAH ,$MA'H$ همنهشتند و $AH = A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس

$MB = MB', MA = MA'$ در نتیجه $MB - MA = MB' - MA'$ یعنی $AB = A'B'$.

ت) پاره خط و d در جایی به غیر از دو سر پاره خط متقاطع باشند .



فرض کنید پاره خط و خط d در نقطه M متقاطع باشند .

تصویرB یعنی B′ را مشخص کرده و پاره خط MB′ را

رسم می کنیم حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا

امتداد MB′ را در A′ قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث

MAH ,$MA'H$ همنهشتند و $AH = A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس

$MB = MB', MA = MA'$ در نتیجه $MB + MA = MB' + MA'$ یعنی $AB = A'B'$.

تمرین : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) اگر $S(A) = A'$ باشد آنگاه $S(A') = ...$.

ب) $S(S(A)) = ...$ به زبان ساده تر $(A')' = ...$. یعنی قرینه قرینه هر نقطه .... است .

ج) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث .... است که با مثلث اولیه .... است .

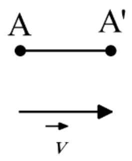
د) در حالتی که پاره خط نسبت به محور بازتاب .... یا .... باشد . شیب آن حفظ می شود .

ه) تعداد نقاط ثابت در هر بازتاب .... است .

تمرین : شیب خط به معادله $ax - y = ۱$ در بازتاب نسبت به خط $x + ۳y - ۲ = ۰$ حفظ می شود ، مقادیر مورد قبول برای a را بنویسید .

تمرین : اگر دو نقطه $A(-۱,۵), B(۱,۳)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d باشند . معادله خط d را بیابید .

انتقال : انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه، نقطه ای مانند A' از همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$.

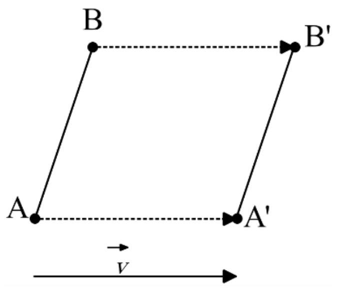


قضیه : انتقال تبدیل طولپا است .

پاره خط AB و بردار $\vec{v}$ را در نظر بگیرید . دو حالت را برای اثبات قضیه در نظر می گیریم :

الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد .

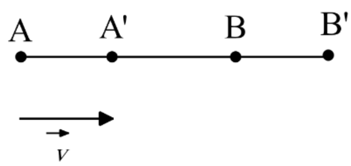
انتقال یافته AB تحت این بردار را رسم می کنیم . در چهار ضلعی AA′B′B دو ضلع AA′ و BB′ موازی و مساویند پس چهار ضلعی متوازی الاضلاع است در نتیجه AB=A′B′.



ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد .

اگر شکل ۱ حاصل شود داریم :

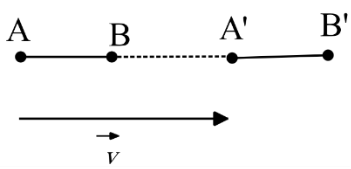
۱)



$$\left.\begin{aligned} AB &= AA'+A'B \\ A'B' &= A'B+BB' \\ \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{BB'}=\vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

اگر شکل ۲ حاصل شود داریم :

۲)

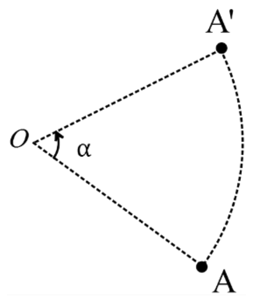


$$\left.\begin{aligned} AB &= AA'-BA' \\ A'B' &= BB'-BA' \\ \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{BB'}=\vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

تمرین : تحت انتقالی که نقطه $A(۱,-۲)$ را به نقطه $B(-۲,۵)$ منتقل می کند ، تصویر نقطه $C(-۱,-۱)$ چیست ؟

تمرین : تصویر خط $۲x-y=۲$ تحت بردار انتقال $\vec{v}=(۲,-۳)$ را بنویسید .

دوران : دوران به مرکز O و زاویه α ، تبدیلی است که هر نقطه مانند A در صفحه را به نقطه ای مانند A' از همان صفحه نظیر می کند به طوری که $OA = OA', AOA' = \alpha$.

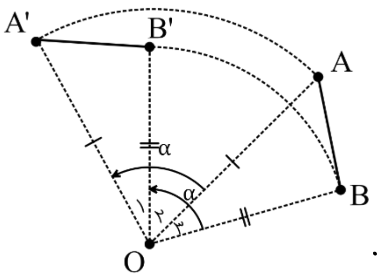


(جهت مثبت دوران در شکل نمایش داده شده است . در صورت منفی بودن زاویه ، جهت برعکس خواهد بود)

قضیه : دوران تبدیل طولپا است .

حکم را در حالت های مختلف ثابت می کنیم :

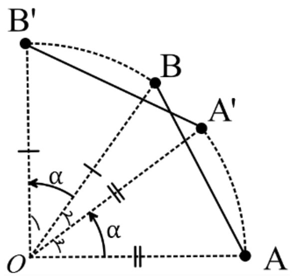
الف) مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دروان از زاویه AOB بیشتر باشد :



$$\left.\begin{array}{l} AOA' = BOB' = \alpha \\ AOB = \alpha - O_۲ \\ A'OB' = \alpha - O_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$$

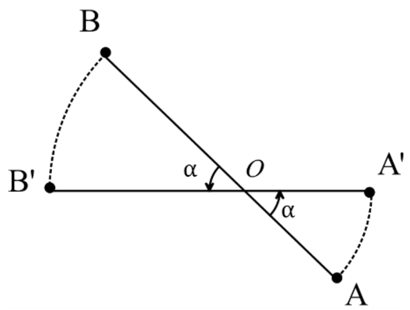
در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .

ب) مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دروان از زاویه AOB کمتر باشد :



$$\left.\begin{array}{l} AOA' = BOB' = \alpha \\ AOB = \alpha + O_۲ \\ A'OB' = \alpha + O_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$$

در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .



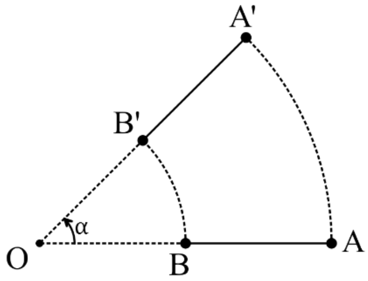
پ) مرکز دوران روی پاره خط AB باشد :

بنا به تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$ و از مجموع طرفین تساوی داریم : $OA + OB = OA' + OB'$ پس $AB = A'B'$

ت) مرکز دوران روی امتداد پاره خط AB باشد :

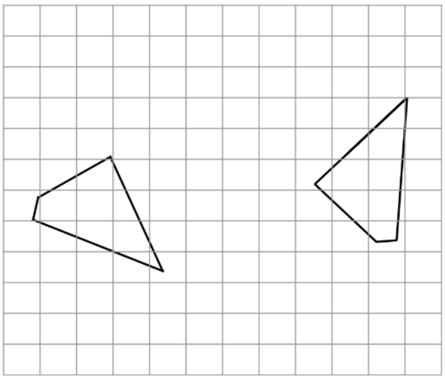
بنا به تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$ و از تفاضل

طرفین تساوی داریم : $OA - OB = OA' - OB'$ پس $AB = A'B'$



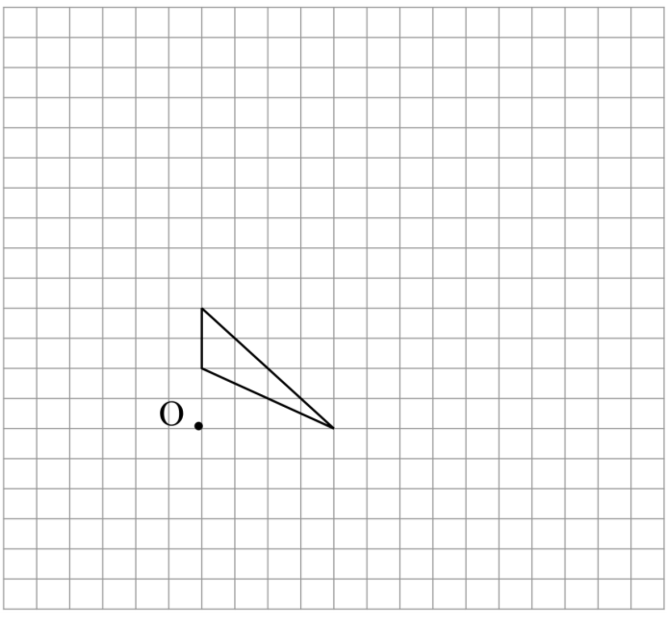
توجه : درست است که دوران لزوماً شیب خط را حفظ نمی کند ولی چون طول پا است، اندازه زوایه را حفظ می کند .

تمرین : مرکز دوران را بیابید .



تجانس : اگر $k \neq ۰$ یک عدد حقیقی و O نقطه ثابتی در صفحه باشد .نقطه A' را مجانس نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت K می گوییم هرگاه $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

تمرین : مجانس شکل زیر را نسبت به نقطه O با نسبت های $k = ۳, k = \frac{۱}{۳}, k = -\frac{۱}{۲}$ رسم کنید .



نکته : در تجانس به مرکز O و نسبت k :

الف) اگر $k>0$ تجانس را مستقیم می گوییم .

ب) اگر $k<0$ تجانس را معکوس می گوییم .

ج) اگر $|k|>1$ تجانس را انبساطی می گوییم .

د) اگر $|k|>1$ تجانس را انقباظی می گوییم .

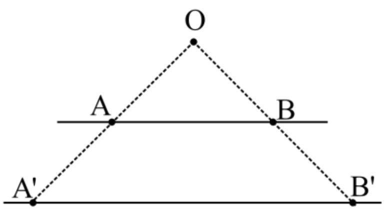
تمرین : با عبارات مناسب جاهای خالی را پر کنید .

الف) در تجانس در صورتی $|k|=1$ آنگاه تبدیل .... است .

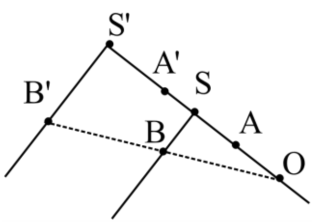
ب) کدام مورد از موارد « شیب خط، اندازه زاویه ، جهت شکل » در تجانس حفظ می شود ؟

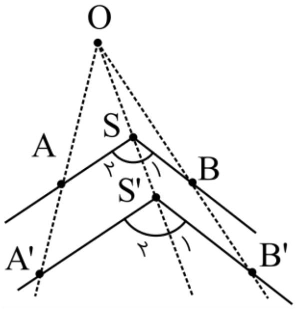
ج) در تجانس همواره خطوطی که نقاط و تصویرشان را به هم وصل می کنند .... هستند .

تمرین : ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند . (راهنمایی : دو حالت : O روی خط ، و خارج خط)



تمرین : ثابت کنید تجانس زاویه را حفظ می کند . (راهنمایی : سه حالت : O روی یک ضلع، روی راس، خارج زاویه . از نتیجه تمرین قبل بهره ببرید)



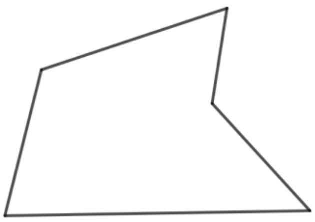


تمرین :ثابت کنید مجانس هر n ضلعی با خود آن متشابه است .(راهنمایی : نشان دهید در مورد اضلاع نسبت K برقرار است (با یک پار خط ثابت کنید) . در مورد زاویه ها چه می توان گفت ؟!)

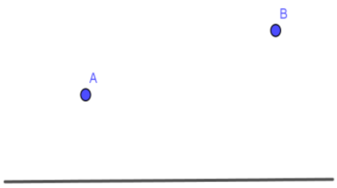
تمرین : اگر G مرکز ثقل مثلث ABC باشد و $A'B'C'$ مجانس آن نسبت به نقطه G و نسبت $K=-\frac{۱}{۲}$ باشد . جایگاه رئوس مثلث تصویر را مشخص کنید و بگویید مساحت آن چه کسری از مساحت مثلث اصلی است .

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

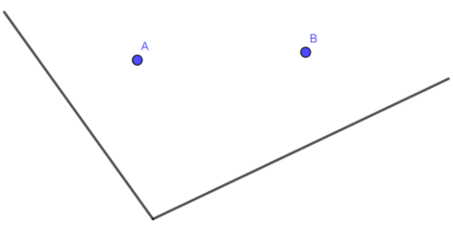
مساله (مساله هم محیطی) : شکل زیر را طوری تغییر دهید که تعداد اضلاع و محیط شکل تغییر نکند و شکل جدیدی حاصل شود .



مساله (مساله هرون) : کوتاهترین مسیری را بیابید که از نقطه A آغاز کرده و پس از برخورد با خط به نقطه B برسد . برای جواب خود دلیل بیاورید (با یک مسیر دلخواه مقایسه کنید) (در این مساله و دو مساله پایین در واقع به دنبال خط مستقیمی هستیم که تصویر یا تصویر های A را به نقطه B وصل کند ولی این کار را به کمک بازتاب انجام می دهیم تا مجموع طول خطوط شکسته ایجاد شده با طول خط مستقیم برابرشود)

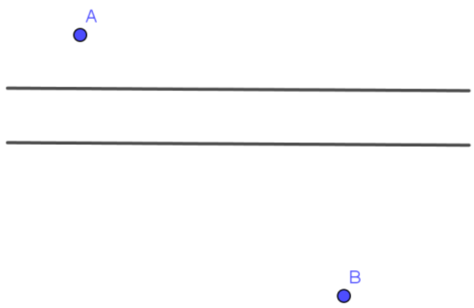


مساله : کوتاهترین مسیری را بیابید که از نقطه A آغاز کرده و پس از برخورد با دو خط به نقطه B برسد . برای جواب خود دلیل بیاورید . (با یک مسیر دلخواه مقایسه کنید)

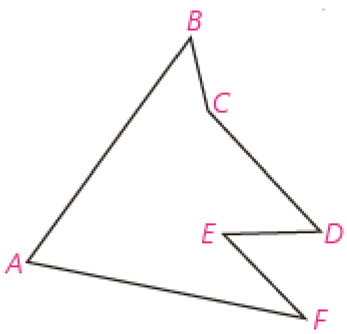


مساله : از نقطه A به B مسیری پیدا کنید که ۴ واحد آن روی خط d باشد .

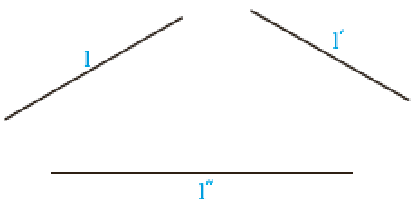
مساله : در دو طرف یک رودخانه دو شهر A و B قرار دارند می خواهیم در مکانی از رودخانه پلی عمود بر آن بزنیم مکان پل را مشخص کنید به طوری که فاصله دو سهر کمترین مقدار ممکن شود .



تمرین : بدون تغییر محیط شکل، مساحت زمین را افزایش دهید .



تمرین : پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی l,l' و موازی l'' باشد .



فصل سوم : روابط طولی در مثلث

درس اول : قضیه سینوس ها

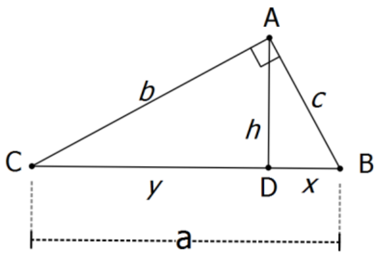
درس دوم : قضیه کسینوس ها

درس سوم : قضیه نیمساز ها

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه مساحت بدون داشتن ارتفاع)

درس اول : قضیه سینوس ها

در سال گذشته با برخی از روابط طولی در مثلث آشنا شدید . مانند : تشابه ، فیثاغورس ، تالس و قضیه زیر :



الف) $h^{۲} = x.y$

ب) $b^{۲} = y.a$

ج) $c^{۲} = x.a$

د) $b.c = h.a$

تمرین : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($A = ۹۰$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم :

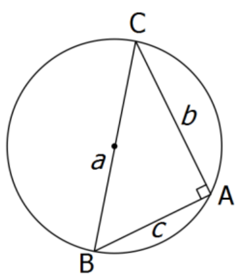
$$\frac{۱}{h_a^{۲}} = \frac{۱}{b^{۲}} + \frac{۱}{c^{۲}}$$

قضیه سینوس ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b وBC=a داریم :

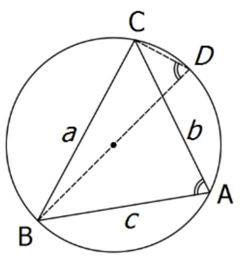
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$ R شعاع دایره محیطی

اثبات :

حالت اول : وقتی مثلث دارای زاویه قائمه باشد وتر از مرکز دایره محیطی عبورمی کند . (چرا ؟)



$$\left.\begin{array}{l} \sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a \\ \sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a \\ \sin A = ۱ \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = a = ۲R$$



حالت دوم : وقتی زاویه های مثلث حاده باشند : قطر BD را رسم می کنیم و D

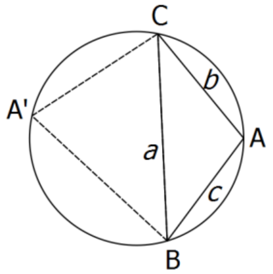
را به C وصل می کنیم زاویه A و D مقابل به یک کمان هستند پس $A = D$.

مثلث BCD در راس C قائم الزاویه است بنابر این :

$$\frac{a}{\sin D}=۲R \xrightarrow{A=D} \frac{a}{\sin A}=۲R$$

و به طور مشابه اثبات می شود : $\frac{b}{\sin B}=۲R , \frac{c}{\sin C}=۲R$.

حالت سوم : وقتی مثلث دارای یک زاویه منفرجه باشد : نقطه دلخواه A' را روی کمان BC در نظر گرفته و به B و C وصل می کنیم



برای زاویه های B وC می توان مانند مرحله قبل نشان داد رابطه مد نظر برقرار است

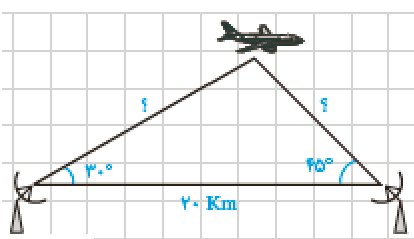
از طرفی زاویه A و A' مکمل هم هستند (چرا ؟) پس چون A منفرجه است

A' حاده خواهد بود و طبق قسمت قبل :

$$\frac{a}{\sin A'}=۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin(۱۸۰-A)}=۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=۲R$$

تمرین : در مثلث ABC، $BC=۱۰$ و $A=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های دیگر مثلث را بیابید .

تمرین : در شکل زیر فاصله هواپیما از دو رادار چقدر است ؟



درس دوم : قضیه کسینوس ها و محاسبه طول میانه

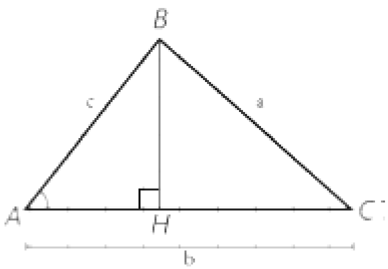
قضیه کسینوس ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b و BC=a داریم :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

اثبات : می خواهیم ثابت کنیم $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

الف) اگر $A = 90^\circ$ باشد مثلث قائم الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم $a^2 = b^2 + c^2$ که در واقع همان رابطه بیان شده است که $2bc\cos 90 = 0$

ب) اگر $A < 90^\circ$ باشد طبق شکل داریم :

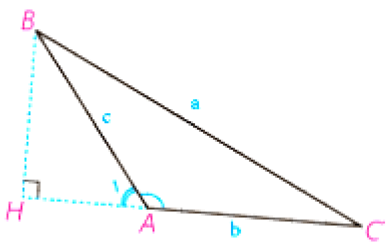


$$\left.\begin{array}{l} AH = c\times\cos A \Rightarrow \boxed{CH = b - c\times\cos A} \\ \boxed{BH = c\times\sin A} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = BH^2 + CH^2$$

$$= c^2\sin^2 A + b^2 + c^2\cos^2 A - 2bc\cos A$$

$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

ج) اگر $A > 90^\circ$ باشد طبق شکل داریم :



$$\left.\begin{array}{l} AH = c\times\cos A_1 \Rightarrow \boxed{CH = b + c\times\cos A} \\ \boxed{BH = c\times\sin A_1} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = BH^2 + CH^2$$

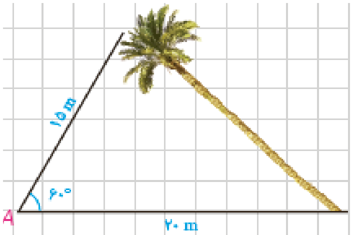
$$= c^2\sin^2 A_1 + b^2 + c^2\cos^2 A_1 + 2bc\cos A_1$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc\cos(\pi - A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

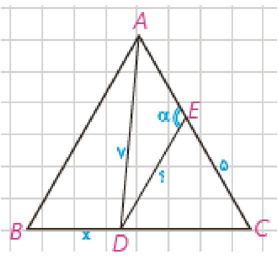
تمرین : در مثلث ABC اگر $A = 60^\circ, AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{2}$ باشد اندازه ضلع BC و زاویه C را بیابید .

تمرین : دو قایق از یک نقطه با سرعت های ۶۰ و ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت با زاویه ۱۲۰ از هم دور می شوند . نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از هم قرار دارند ؟

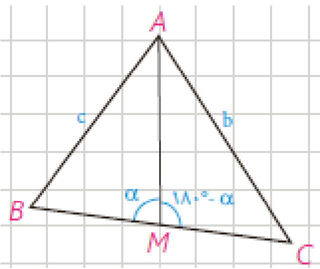
تمرین : در شکل زیر طول درخت چقدر است ؟



تمرین : در شکل زیر مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۸ است . طول BD و CD و اندازه زاویه α را بیابید .)
راهنمایی: ابتدا طول BD را از مثلث ABD بدست آورید)



قضیه میانه ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b وBC=a طول میانه AM از رابطه زیر بدست می آید :



$$۲AM^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}$$

اثبات : به کمک قضیه کسینوس ها مقدار $b^۲ , c^۲$ را می یابیم :

$$\left.\begin{array}{l} c^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - a \times AM \cos\alpha \\ b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - a \times AM \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{-\cos\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

$$\Rightarrow ۲AM^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}$$

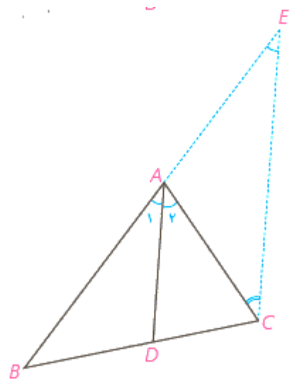
تمرین : در مثلث $AB = ۴, AC = ۶, BC = ۸$ طول میانه AM را بیابید .

درس سوم : قضیه نیمسازها ومحاسبه طول نیمساز

قضیه نیمسازها : در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی ، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند .

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$$: حکم

اثبات :



از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند

طبق قضیه تالس در مثلث BCE داریم : $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{CD}$

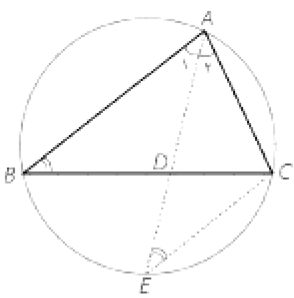
حال کافیست نشان دهیم AE=AC . بنا بر قضیه خطوط موازی $A_۱=E, C=A_۲$

در نتیجه $E=C$ و این یعنی مثلث AEC متساوی الساقین است و AE=AC .

تمرین : در مثلث ABC اگر $AB=۷, AC=۵, BC=۸$ باشد . طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز زاویه B بر بروی ضلع مقابلش را بدست آورید .

قضیه طول نیمساز : در هر مثلث ، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل خود ایجاد می کند .

اثبات :



نیمساز را امتداد می دهیم تا دایره محیطی را در E قطع کند سپس E را به C وصل می کنیم

در این صورت $B=E$. دو مثلث ABD و ACE متشابه اند و :

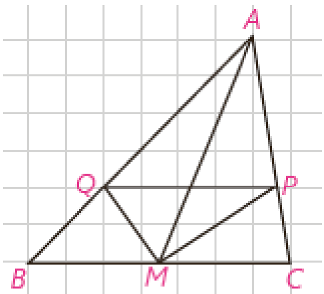
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}\Rightarrow AB.AC=AD.AE\xrightarrow{AE=AD+DE}AB.AC=AD^۲+AD.DE$$

و به خاطر برخورد دو وتر BC و AE درون دایره داریم : $AD.DE=BD.DC$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : $AB.AC=AD^۲+BD.DC\Rightarrow \boxed{AD^۲=AB.AC-BD.DC}$

تمرین : در تمرین قبل طول نیمساز مذکور را بدست آورید .

تمرین : در مثلث زیر **M** وسط **BC** و **MP** و **MQ** نیمساز هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$.

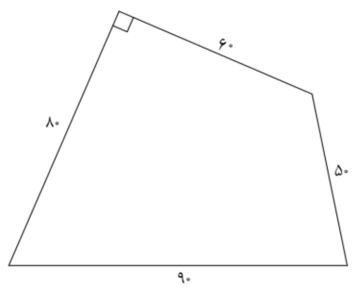


درس چهارم : قضیه هرون و محاسبه طول ارتفاع

قضیه هرون : برای هر مثلث با طول اضلاع a,b,c داریم : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (اثبات نیاز نیست) .

تمرین : مساحت مثلث با طول اضلاع ۱۳و ۱۴ و۱۵ را بیابید . و طول ارتفاع های مثلث را مشخص کنید . ($h_a=\frac{۲s}{a}$)

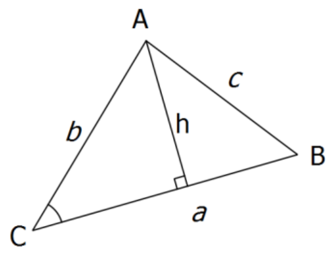
تمرین : مساحت زمین کشاورزی زیر را بدست آورید .



تمرین : مثلثی دارای اضلاع به طول ۵و۶و ۷ است . نقطه ای که از اضلاع ۵و۶ واحدی به فاصله ۲ و ۳ است از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد ؟

قضیه : مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها .

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$



اثبات :

ارتفاع وارد بر BC را رسم می کنیم در این صورت $h=b\sin C$

پس : $S=\frac{۱}{۲}ha=\frac{۱}{۲}ab\sin C$

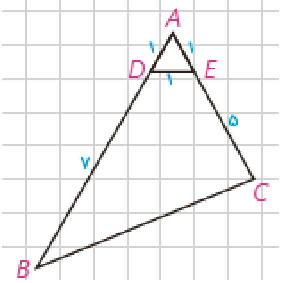
تمرین : در مثلث ABC، $A = ۶۰, AC = ۶, AB = ۱۰$.

الف) طول BC

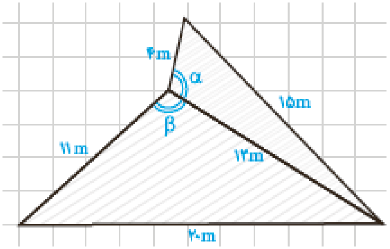
ب) مساحت مثلث

ج) مقدار $\sin B$

تمرین : در شکل زیر مساحت چهار ضلعی DECB را بدست آورید .



تمرین : نشان دهید زاویه α, β با هم برابرند .



تمرین : به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

تمرین : حاده ، قائمه و منفرجه بودن زاویه A در هر یک از مثلث های زیر را مشخص کنید .

الف) $AB=10$ ، $AC=6$ ، $BC=9$

ب) $AB=8$ ، $AC=4$ ، $BC=9$

پ) $AB=8$ ، $AC=15$ ، $BC=17$