


نویسندگان: ۱۴۰۱-۱۴۰۲	باسمه تعالی 	سئوالات امتحان درس: ریاضی ۳ مقطع تحصیلی: متوسطه دوره دوم پایه: دوازدهم تجربی
آموزشگاه: فرزانهان دبیر مربوطه: خانم مریم حیدری قرایی	ساعت امتحان: ۷:۳۰ صبح	نام و نام خانوادگی:
کلاس: ۳۰۲	مدت امتحان: ۱۱۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۲۲
تعداد صفحه: ۴		

بارم	سوالات صفحه اول	ردیف
۲/۵	<p>جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. (پاره حل)</p> <p>الف) اگر تابع نمایی <math>y = a^x</math> اکیداً نزولی باشد آنگاه حدود <math>a</math> به صورت ..... است.</p> <p>ب) دوره تناوب تابع <math>y =  \sin x </math> برابر ..... است.</p> <p>ج) باقی مانده چند جمله ای <math>f(x) = 2x^2 - 3x^2 + m</math> بر <math>x - 2</math> برابر ۵ است مقدار <math>m</math> برابر ..... است.</p> <p>د) اگر <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + 2x^2 + 1}{(a-1)x^2 + x - 1} = 2</math> مقدار <math>n</math> و <math>a</math> به ترتیب برابر ..... و ..... است.</p> <p>ه) اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ای موازی محور <math>x</math> ها باشد آنگاه شیب خط در آن نقطه برابر ..... است.</p>	۱
۱	<p>درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.</p> <p>الف) برای رسم تابع <math>y = \sqrt{-x+1}</math> به روش انتقال ابتدا <math>y = \sqrt{x}</math> را نسبت به محور <math>y</math> قرینه می کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت مثبت محور <math>x</math> ها انتقال می دهیم.</p> <p>ب) دامنه تابع <math>y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)</math> برابر <math>x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}</math> است.</p> <p>ج) بازه <math>(-2, 2)</math> یک همسایگی محذوف برای نقطه صفر است.</p> <p>د) مقدار <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{ x -2}{ x-2 }</math> برابر <math>+\infty</math> است.</p>	۲
۲	<p>الف) تابع <math>y = f(x)</math> را رسم کنید.</p> $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$ <p>ب) مشخص کنید تابع در چه فاصله ای اکیدا صعودی و در چه فاصله ای اکیدا نزولی است.</p> <p>پ) در فاصله ای که تابع <math>y = f(x)</math> اکیدا نزولی است وارون را بدست آورید.</p>	۳

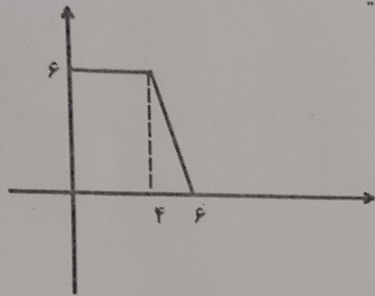
الف) دامنه  $f \circ g$  را به کمک تعریف بیابید.  
 اگر  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  و  $g(x) = x+1$  باشند

۲

۴

ب) ضابطه  $f \circ g$  را تعیین کنید.

با توجه به نمودار مربوط به  $y = f(x)$  نمودار تابع  $y = -\frac{1}{4}f(2x)$  را رسم کنید.



۰/۱۵

۵

الف) مقدار  $\sin 7/5^\circ \times \cos 7/5^\circ \times \cos 15^\circ$  را تعیین کنید.

ب) مساحت مثلثی برابر  $3\sqrt{2}$  و اندازه اضلاع آن به ترتیب برابر ۶ و ۲ باشد چند نوع مثلث با این خصوصیت داریم.

۰/۷۵

۶

الف) مقدار  $\sin 7/5^\circ \times \cos 7/5^\circ \times \cos 15^\circ$  را تعیین کنید.

۰/۱۵

۷

ب) مساحت مثلثی برابر  $3\sqrt{2}$  و اندازه اضلاع آن به ترتیب برابر ۶ و ۲ باشد چند نوع مثلث با این خصوصیت داریم.

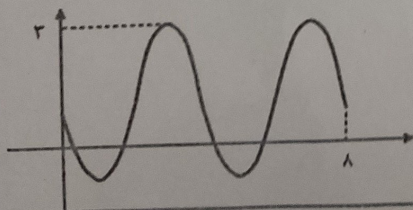
۰/۱۵

الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع  $y = -\sqrt{2} \cos 2x - 1$  را تعیین کنید.

۰/۷۵

ب) نمودار زیر قسمتی از نمودار  $y = 1 + a \sin b \pi x$  است مقدار  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.

۰/۷۵



۸

معادله زیر را حل کنید و تعداد جواب های آن را در فاصله  $[-\pi$  و  $\pi]$  را تعیین کنید.

۱  $\cos 2x - 2 \cos x + 2 = 0$

۹

حاصل حدود زیر را بدست آورید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{1 - x^2}{x - \sqrt{3x - 2}}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{1 + \cos x}$

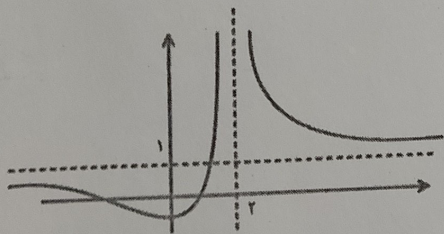
۱۰

۲/۷۵

ج)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{3x - \sqrt{x + 5}}$

د)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x^2 + 4}{x^2 - 2x - 8}$

با توجه به نمودار داده شده حاصل هر عبارت را تعیین کنید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

۰/۱۵

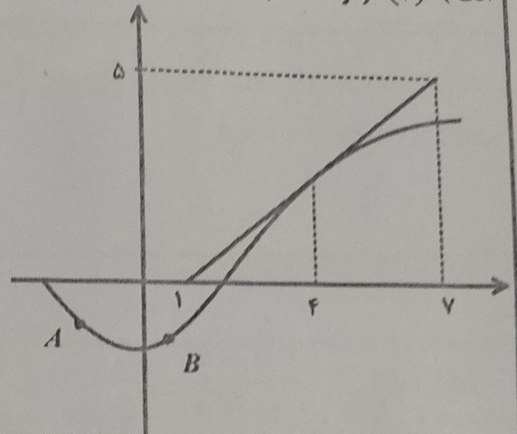
۱۱

اگر  $f(x) = x^2 + 2$  باشد به کمک تعریف مشتق شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $x = 1$  واقع بر منحنی را بیابید و سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه  $x = 1$  واقع بر منحنی بنویسید.

۱/۵

۱۲

با توجه به نمودار تابع  $y = f(x)$  زیر پاسخ دهید.  
 الف)  $f'(4)$  را محاسبه کنید.  
 ب) در کدام نقطه مقدار تابع منفی ولی مقدار مشتق مثبت است.



۱۳

الف) ضابطه‌ی تابعی به فرم  $y = a \cos bx + c$  ،  $a > 0$  را بنویسید که دوره تناوب آن  $\frac{\pi}{2}$  و مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن  $-1$  باشد.

ب) اگر  $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$  مقدار  $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$  را بیابید.

۱۴

اختیاری

$m$  و  $n$  را چنان بیابید که چند جمله‌ای  $x^4 - 3x^3 + mx + n$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد.

۰/۵

۰/۵

حد کسر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+2} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$  با شرط  $n > 3$  برابر  $-2$  است.  $m+n$  کدام است؟

ارفاقی

# بنام خدا

# پاسخ از: نریمان فتح الهی

جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. (بازاه حل)

الف) اگر تابع نمایی  $y = a^x$  اکیداً نزولی باشد آنگاه حدود  $a$  به صورت  $0 < a < 1$  است.

ب) دوره تناوب تابع  $y = |\sin x|$  برابر  $\pi$  است.

ج) باقی مانده چند جمله ای  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$  بر  $x - 2$  برابر 5 است مقدار  $m$  برابر ..... است.

د) اگر  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + 3x^2 + 1}{(a-1)x^2 + x - 1} = 2$  مقدار  $n$  و  $a$  به ترتیب برابر ..... و ..... است.

ه) اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ای موازی محور  $x$  ها باشد آنگاه شیب خط در آن نقطه برابر ..... است.

2/5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{an^n + 3n^2 + 1}{(a-1)n^2 + n - 1} = 2 \rightarrow \text{صورت و مخرج هم درجه اند}$$

اگر  $n = 2$  باشد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(a+3)n^2}{(a-1)n^2} = \frac{a+3}{a-1} = 2 \rightarrow a+3 = 2a-2 \rightarrow a = 5$$

اگر  $n < 2$  باشد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{(a-1)n^2} = \frac{3}{a-1} = 2 \rightarrow 3 = 2a-2 \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف) برای رسم تابع  $y = \sqrt{-x+1}$  به روش انتقال ابتدا  $y = \sqrt{x}$  را نسبت به محور  $y$  قرینه می کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت مثبت محور  $x$  ها انتقال می دهیم. ص

ب) دامنه تابع  $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$  برابر  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$  است. غ

ج) بازه  $(-2, 2)$  یک همسایگی محذوف برای نقطه صفر است. غ چون خود صفر جزو بازه است

د) مقدار  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x|-2}{|x-2|}$  برابر  $+\infty$  است. غ

$$\sqrt{u} \xrightarrow[\text{محور } x]{\text{قرینه نسبت به } y} \sqrt{-u} \xrightarrow[\text{یک واحد به } x]{\text{س}} \sqrt{-(u-1)} = \sqrt{-u+1} \quad (\text{الف})$$

$$y = \tan\left(2u - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(2u - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(2u - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\text{ب})$$

$$\cos\left(2u - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \rightarrow 2u - \frac{\pi}{4} \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$2u \neq k\pi + \pi \rightarrow u \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

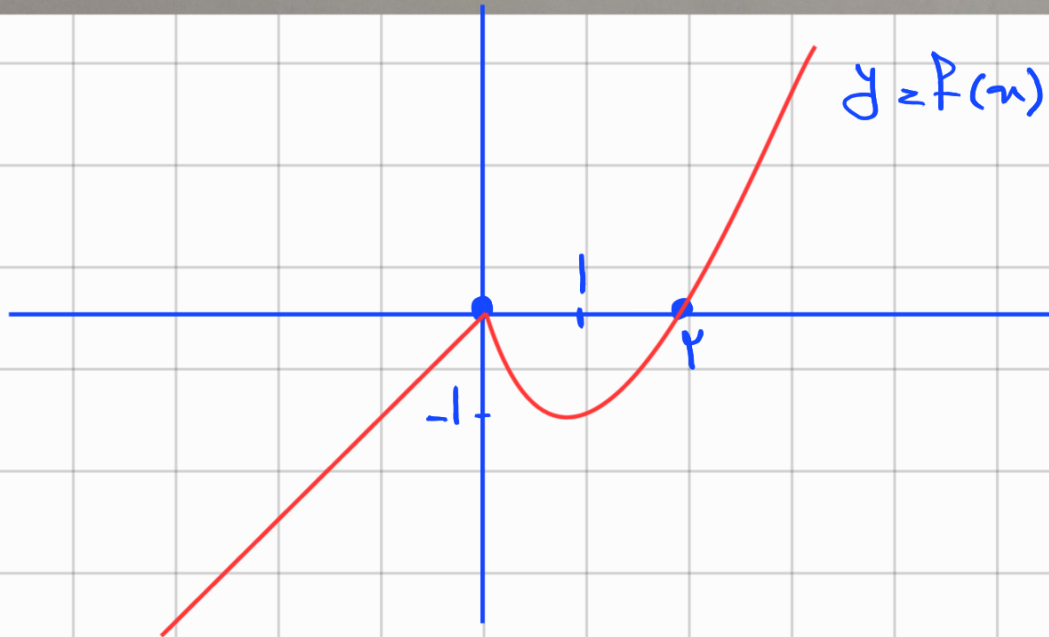
$$\lim_{u \rightarrow 2^-} \frac{[u]-2}{|u-2|} = \frac{[2^-]-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (\text{د})$$

الف) تابع  $y = f(x)$  را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

ب) مشخص کنید تابع در چه فاصله‌ای اکیدا صعودی و در چه فاصله‌ای اکیدا نزولی است.

پ) در فاصله‌ای که تابع  $y = f(x)$  اکیدا نزولی است وارون را بدست آورید.



الف)

ب) اکیدا صعودی:  $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

ب)

اکیدا نزولی:  $[0, 1]$

پ)  $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$  و  $0 \leq x \leq 1 \rightarrow$

$-1 \leq y \leq 0 \rightarrow D_{f^{-1}} = [-1, 0]$

$y+1 = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \sqrt{y+1} = |x-1|$

$0 \leq x \leq 1 \rightarrow \sqrt{y+1} = 1-x \rightarrow x = 1 - \sqrt{y+1} \rightarrow$  تابع وارون

$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1}$  و  $-1 \leq x \leq 0$

الف) دامنه  $f \circ g$  را به کمک تعریف بیابید.  
اگر  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  و  $g(x) = x+1$  باشند

ب) ضابطه  $f \circ g$  را تعیین کنید.

$$D_f : \{ -x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 2 \rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \} \quad (\text{الف})$$

$$D_g : \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \} = \{ x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x+1 \in A}_{\text{A}} \text{ و } \underbrace{-\sqrt{2} \leq x+1 \leq \sqrt{2}}_B \} = A \cap B$$

$$B : -\sqrt{2} \leq x+1 \leq \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}-1 \leq x \leq \sqrt{2}-1$$

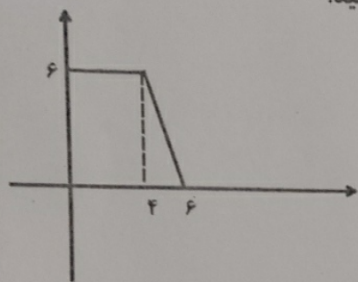
$$D_{f \circ g} = A \cap B = \mathbb{R} \cap [-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1] = [-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1]$$

$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{4-(x+1)^2} \quad (\text{ب})$$

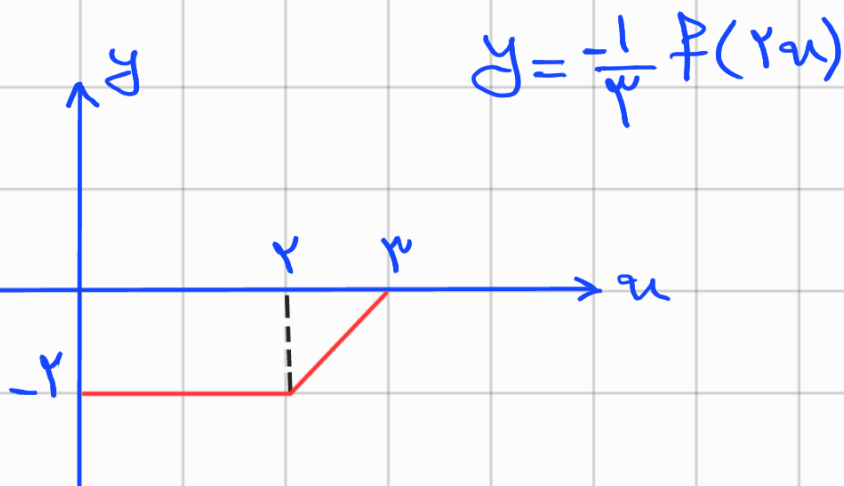
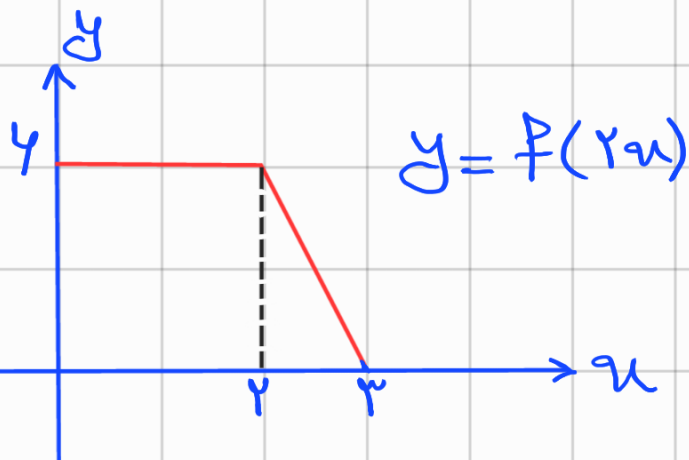
$$f \circ g = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$$



با توجه به نمودار مربوط به  $y = f(x)$  نمودار تابع  $y = -\frac{1}{\mu} f(\nu x)$  را رسم کنید.



$$y = -\frac{1}{\mu} f(\nu x)$$



اگر  $f(x) = 3x + 3g(x) = x^2 - 1$  باشد حاصل  $f^{-1} \circ g^{-1}(-24)$  را بیابید.

$$f^{-1}(-24) = a \rightarrow f(a) = -24 = 3a + 3 \rightarrow a = -9$$

$$g^{-1}(f^{-1}(-24)) = g^{-1}(a) = g^{-1}(-9) = b = -2$$

$$g^{-1}(-9) = b \rightarrow g(b) = -9 = b^2 - 1 \rightarrow b = -2$$

ب) مساحت مثلثی برابر  $3\sqrt{2}$  و اندازه اضلاع آن به ترتیب برابر ۶ و ۲ باشد چند نوع مثلث با این خصوصیت داریم.

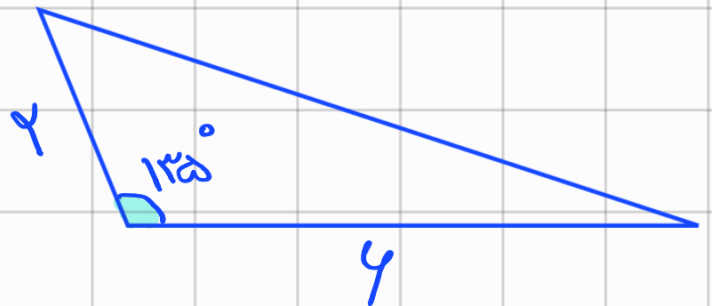
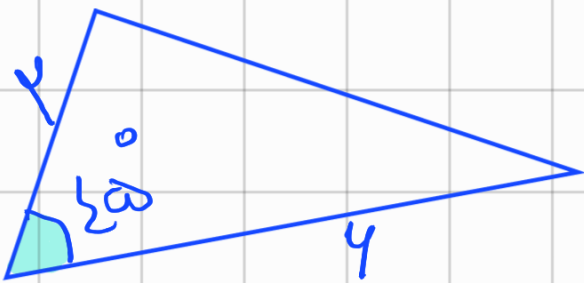
$$\sin d \cos d = \frac{1}{4} \sin 2d \quad \text{الف)}$$

$$\sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ \times \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{8}$$

$$S = \frac{1}{4} ab \sin \theta \rightarrow 3\sqrt{2} = \frac{1}{4} (2)(6) \sin \theta \quad \text{ب)}$$

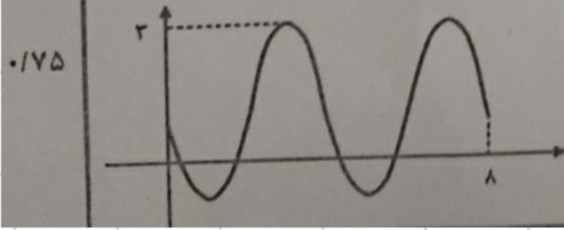
$$\rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \theta = 25^\circ, 135^\circ$$

دو مثلث با این خصوصیت داریم.



الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع  $y = -\sqrt{2} \cos 3x - 1$  را تعیین کنید.

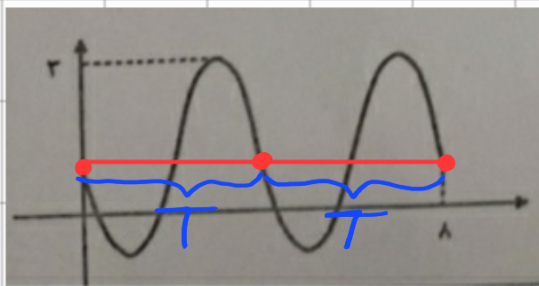
ب) نمودار زیر قسمتی از نمودار  $y = 1 + a \sin b\pi x$  است مقدار  $a$  و  $b$  را تعیین کنید.



$$y = -\sqrt{2} \cos 3x - 1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3} \text{ (الف)}$$

$$\max = |-\sqrt{2}| - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\min = -|-\sqrt{2}| - 1 = -\sqrt{2} - 1$$



$$y = 1 + a \sin b\pi x$$

$$2T = 1 \rightarrow T = \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|}$$

$$|b| = \frac{1}{2}$$

$$\max: 2 = 1 + |a| \rightarrow |a| = 1$$

در  $x=0$  نقطه  $y=1$

$$ab < 0 \rightarrow$$

$$\boxed{a=1}$$

$$\boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{a=-1}$$

$$\boxed{b=\frac{1}{2}}$$

معادله زیر را حل کنید. و تعداد جواب های آن را در فاصله  $[-\pi, \pi]$  را تعیین کنید.

$$\cos 2x - 2 \cos x + 2 = 0$$

$$2 \cos^2 u - 1 - 2 \cos u + 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 u - 2 \cos u + 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر  $\leftarrow \frac{c}{a} = 1$  ریشه

$$\rightarrow \cos u = 1 \rightarrow u = 2k\pi \quad u \in [-\pi, \pi] \rightarrow u = 0$$

$$\rightarrow \cos u = \frac{1}{2} \rightarrow u = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad u \in [-\pi, \pi] \rightarrow u = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$$

پس در این بازه ۳ جواب دارد.

حاصل حدود زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x-\sqrt{2x-2}} = \frac{0}{0} \text{ صفر}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+(-1)^+}$$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)(x+\sqrt{2x-2})}{(x-\sqrt{2x-2})(x+\sqrt{2x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)(x+\sqrt{2x-2})}{x^2 - 2x + 2 = \cancel{(x-1)}(x-2)} = \frac{(-1)(2)(2)}{(-1)} = 4$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{2x - \sqrt{x} + 5}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - |x|}}{2x - \sqrt{x}} = \frac{2x}{2x} = 1$$

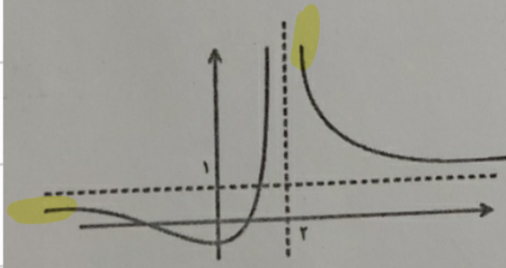
$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x^2 + 4}{x^2 - 2x - 8} = \frac{0}{0} \text{ صفر}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2 - x + 2)}{\cancel{(x+2)}(x-4)} = \frac{4 - (-2) + 2}{-2 - 4} = \frac{6}{-6} = -1$$

با توجه به نمودار داده شده حاصل هر عبارت را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots \quad \text{(الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots \quad \text{(ب)}$$



11

اگر  $f(x) = x^2 + 2$  باشد به کمک تعریف مشتق شیب خط مماس بر منحنی در نقطه  $x = 1$  واقع بر منحنی را بیابید و سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه  $x = 1$  واقع بر منحنی بنویسید.

$$f(1) = 1 + 2 = 3$$

12

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1}$$

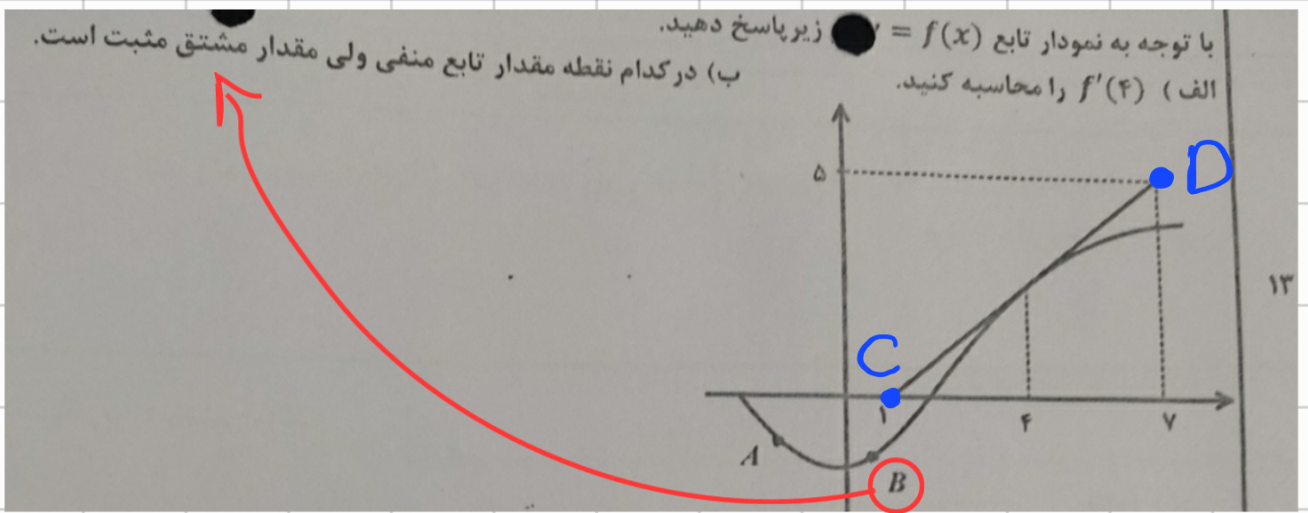
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 + 1 = 2 \rightarrow f'(1) = 2$$

معادله خط مماس در  $A(1, 3)$  :

$$y - 3 = f'(1)(x - 1) = 2(x - 1)$$

$$y = 2x + 1$$

B



$C(1, 0)$   
 $D(7, 5)$

$$\rightarrow m_{CD} = \frac{5 - 0}{7 - 1} = \frac{5}{6} = f'(4)$$

الف) ضابطه تابعی به فرم  $y = a \cos bx + c$ ,  $a > 0$  را بنویسید که دوره تناوب آن  $\frac{\pi}{2}$  و مقدار ماکزیمم آن 3 و مقدار مینیمم آن -1 باشد.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \rightarrow |b| = 4 \rightarrow b = \pm 4$$

هر دو قابل قبول

$$|a| = \frac{\max - \min}{2} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2$$

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = 1 \rightarrow c = 1$$

$$y = 2 \cos 4x + 1$$

ب) اگر  $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$  مقدار  $f(\frac{\pi}{12})$  را بیابید

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

$$f(x) = \cos 2x \rightarrow f(\frac{\pi}{12}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$m$  و  $n$  را چنان بیابید که چند جمله ای  $x^4 - 3x^3 + mx + n$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \rightarrow x = 2, 3$$

$$P(x) = x^4 - 3x^3 + mx + n$$

$$P(2) = 0 = 16 - 24 + 2m + n \rightarrow 2m + n = 8$$

$$P(3) = 0 = 81 - 81 + 3m + n \rightarrow 3m + n = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = 24 \end{cases}$$

حد کسر  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$  با شرط  $n > 3$  برابر  $-2$  است.  $m+n$  کدام است؟

پرتوان خارج  $mx^{n-2}$   $n > 3 \rightarrow n-2 > 1$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = -2 = \frac{1}{m} \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$m+3 = n-2 \rightarrow m-n = -5 \xrightarrow{m = -\frac{1}{2}} n = \frac{9}{2}$$

صورت و خارج هم درجه است.