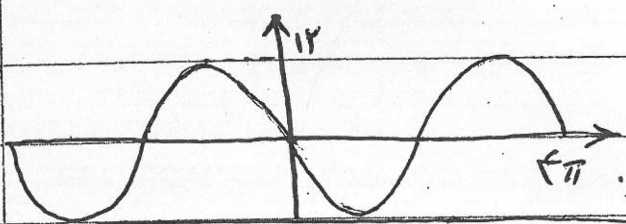
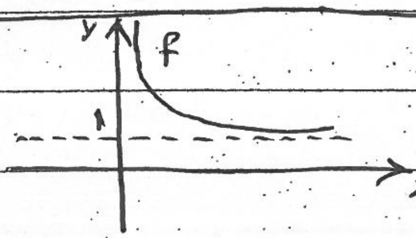
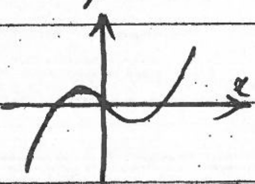
نوبت برگزاری: اول نام درس: ریاضی ۳ نام دبیر: لطفی نژاد تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱ مدت پاسخگوئی: ۱۰۰ دقیقه ماشین حساب نیاز دارد ☐ ندارد ☑	مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان اداره آموزش و پرورش شهرستان سمنان مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی سمنان (دوره دوم)	نام ونام خانوادگی: نام پدر: پایه: دوازدهم رشته: تجربی شماره دانش آموزی: تعداد سوالات: ۱۳ تعداد صفحه: ۲ پاسخ نامه نیاز دارد ☑ ندارد ☐

ردیف	نمره با عدد: نمره با حروف: امضاء	بارم
۱	اگر $f(x)=x^2-3x+8$ و $g(x)=1-2x$ باشند و بدانیم α و β ریشه‌های معادله $(fog)(x)=12$ هستند، مقدار $\lvert\alpha-\beta\rvert$ را بیابید.	۲
۲	نمودار تابع با ضابطه $g(x)=x^3+3x^2+3x$ با انتقال بر نمودار تابع $f(x)=x^3$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطه‌ به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار g قرار می‌گیرد؟	۱٫۵
۳	به ازای چند عدد صحیح x، تابع $f=\{(x^2 , 9) , (x^2 , 0) , (-2 , 4x-3)\}$ صعودی است؟	۱٫۵
۴	تابع با ضابطه $f(x)=x-\lvert x-2\rvert+1$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه وارون آن در بازه مذکور را بدست آورید.	۲
۵	شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\cos(\frac{\pi}{2}-ax)$ است. کمترین مقدار $a+b$ را بدست آورید.  	۱
۶	حداکثر مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi x}{4})$ در بازه‌ی $(2 , a)$ اکیداً صعودی باشد.	۱
۷	اگر دوره‌ی تناوب تابع $f(x)=2-3a\cos(\frac{\pi}{a}x+1)$ بصورت $T=4$ باشد، بیشترین مقدار تابع (Max) چقدر است؟	۱
۸	مجموع جوابهای معادله‌ی مثلثاتی $2\cos x(\cos x-\sin x)=1$ در بازه‌ی $(0 , 2\pi)$ را بیابید	۲
۹	حاصل حدهای زیر را بیابید: الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}$ ج) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$	۲٫۵

«ادامه سوالات در صفحه دوم»

صفحهٔ دوم ۱۴۰۲

ردیف	سؤال	بارم
۱۰	اگر $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^3+2x+5}{7-bx^3}$ برابر است با ...	۲
۱۱	شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ را به دست آورید. 	۱
۱۲	معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید.	۱/۵
۱۳	با توجه به نمودار مقابل مطلوب است:  الف) نقطهٔ A را روی نمودار طوری بیابید که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی باشد. ب) نقاط B و C را طوری بیابید که مقدار تابع در آن قرینه و مشتق مساوی داشته باشد.	۱

جمع کل: ۲۰ نمره

موفق و پیروز باشید

بنام خدا

پاسخ از: نریمان فتح اللهی

۱	اگر $f(x)=x^2-3x+8$ و $g(x)=1-2x$ باشند و بدانیم α و β ریشه‌های معادله $(f\circ g)(x)=12$ هستند، مقدار $\lvert\alpha-\beta\rvert$ را بیابید

روش اول:

$$f(g(x))=12=g^2-3g+8 \rightarrow g^2-3g-4=0$$

$$(g-4)(g+1)=0 \begin{cases} g=-1=1-2x \rightarrow x=1=\alpha \\ g=4=1-2x \rightarrow x=-\frac{3}{2}=\beta \end{cases}$$

$$|\alpha-\beta|=\left|1+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

روش دوم:

$$f(g(x))=(1-2x)^2-3(1-2x)+8=1-4x+4x^2-3+6x+8$$

$$(f\circ g)(x)=4x^2+2x+6=12 \rightarrow 4x^2+2x-6=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \quad x_1=1 \,,\; x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow |\alpha-\beta|=\left|1+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

۲	نمودار تابع با ضابطهٔ $g(x)=x^3+3x^2+3x$ با انتقال بر نمودار تابع $f(x)=x^3$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطهٔ به طول ۲ واقع بر نمودار f به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار g قرار می‌گیرد؟

$f(x)=x^3$ $\qquad A(2,8)$

$g(x)=x^3+3x^2+3x=x^3+3x^2+3x+1-1$

$g(x)=(x+1)^3-1$

$f(x)$	x^3	$(x+1)^3$	$(x+1)^3-1$
A	$(2,8)$	$(1,8)$	$(1,7)$

$(1,7) \longrightarrow 7$ نقطه‌ای به عرض

۳	به ازای چند عدد صحیح x، تابع $f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$ صعودی است؟

$f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$

$x\neq 0$

صعودی : $x_2 \geq x_1 \longrightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

$x^2 \geq 4x-3 \longrightarrow x^2-4x+3\geq 0 \longrightarrow x\leq 1 \cup x\geq 3$ $\quad A$

$9\geq x^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x|\leq 3 \longrightarrow -3\leq x\leq 3$ $\quad B$

$A\cap B : [-3,1]\cup\{3\}-\{0\} \longrightarrow$ اعداد صحیح : $\{-3,-2,-1,1,3\}$

شامل ۵ عدد صحیح

۴ تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-|x-2|+1$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطهٔ وارون آن در بازهٔ مذکور را بدست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} 3 & ; \quad x>2 \\ \boxed{2x-1 \quad ; \quad x\leq 2} \end{cases}$$

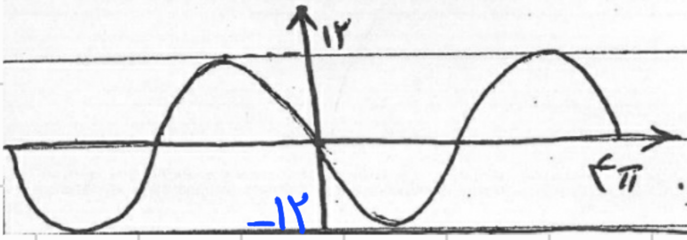
$x>2 \longrightarrow$ وارون ناپذیر چون یک به یک نیست

$$x\leq 2 \rightarrow 2x\leq 4 \rightarrow 2x-1\leq 3 \rightarrow y\leq 3 \rightarrow D_{f^{-1}(x)}=(-\infty,3]$$

$$y=2x-1 \longrightarrow y+1=2x \longrightarrow x=\frac{1}{2}(y+1)$$

جای x و y عوض $\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1) \quad ; \quad x\in(-\infty,3]$

۵ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\cos(\frac{\pi}{2}-ax)$ است. کمترین مقدار $a+b$ را بدست آورید.



$$f(x)=b\sin ax \longrightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}=4\pi \longrightarrow |a|=\frac{1}{2}$$

$$\max(f(x))=|b|=12$$

نمودار در $x=0$ نزولی است. $\longrightarrow ab<0 \longrightarrow \boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-12}$ یا $\boxed{a=-\frac{1}{2},\ b=12}$

$$\min(a+b)=\frac{1}{2}-12=\frac{-23}{2}$$

حداکثر مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi x}{4})$ در بازهٔ $(2,a)$ اکیداً صعودی باشد	٦

دوره تناوب $T=\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$

$\cos\frac{\pi}{4}x\neq 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x\neq 4k+2 \rightarrow x\neq \dots,-2,2,6,10,\dots$

بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(2,6)$ تعریف شده و اکیداً صعودی است.

پس حداکثر مقدار a برابر 6 است.

اگر دوره تناوب تابع $f(x)=2-3a\cos(\frac{\pi}{a}x+1)$ بصورت $T=4$ باشد، بیشترین مقدار تابع (Max) چقدر است؟	٧

$T=\dfrac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=2|a|=4 \longrightarrow |a|=2$

$max(f(x))=2+|-3a|=2+3|a|=2+3(2)=8$

مجموع جوابهای معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x-\sin x)=1$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ را بیابید	٨

$2\cos^2x-2\sin x\cos x=1 \rightarrow 2\cos^2x-1=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x) \rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-2x)$

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

$\xrightarrow{x\in(0,2\pi)} \boxed{x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}}$

روش دوم: $\cos 2x=\sin 2x \rightarrow \tan 2x=1 \rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

۹	حاصل حدهای زیر را بیابید :

الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}$

$$\star\quad \frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\frac{1-(-1)}{0^-}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(3x-2)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{3x-2}{x-2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

ج) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\dfrac{0}{0}$ مبهم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-\sqrt{2x-1})(x+\sqrt{2x-1})}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1=(x-1)^2}{x(x-1)(x+\sqrt{2x-1})}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+\sqrt{2x-1})}=0$$

۱۰ اگر $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b} = +\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{ax^3+2x+5}{7-bx^3}$ کدام است؟

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+4}+2}{x^2+2ax+b} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

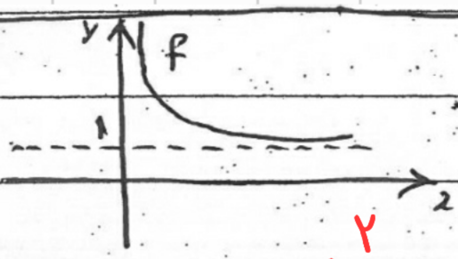
مخرج باید ریشه مضاعف ۳- داشته باشد.

$$(x+3)^2 = x^2+6x+9 = x^2+2ax+b$$

$$2a=6 \longrightarrow a=3 \quad , \quad b=9$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3+2x+5}{7-9x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3}{-9x^3} = -\frac{1}{3}$$

۱۱ شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{1-f(x)}$ را بدست آورید.



$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\left(f(x)-\sqrt{f(x)}\right)\left(f(x)+\sqrt{f(x)}\right)}^{f^2(x)-f(x)}}{\left(1-f(x)\right)\left(f(x)+\sqrt{f(x)}\right)} =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)\left(\cancel{f(x)-1}\right)}{-\left(\cancel{f(x)-1}\right)\left(f(x)+\sqrt{f(x)}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-f(x)}{f(x)+\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

۱۲	معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید

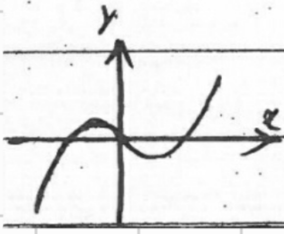
$$A(2,2)$$

$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

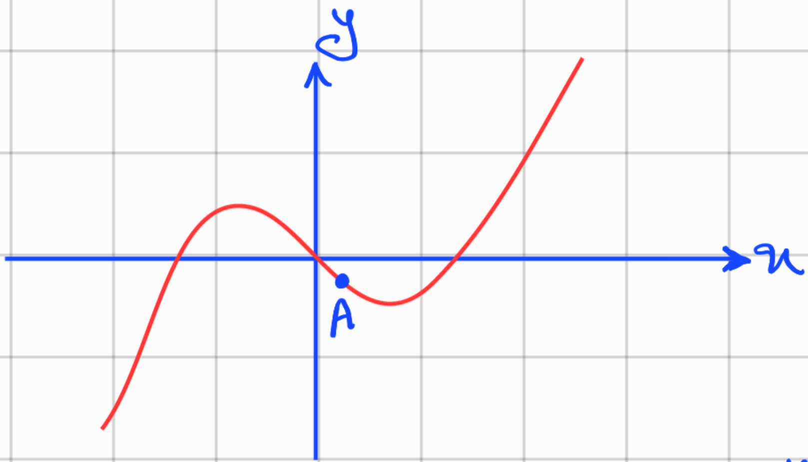
$$f'(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1 \xrightarrow{A} y-2=f'(2)(x-2)$$

$$y-2=-(x-2)\rightarrow y=-x+4$$

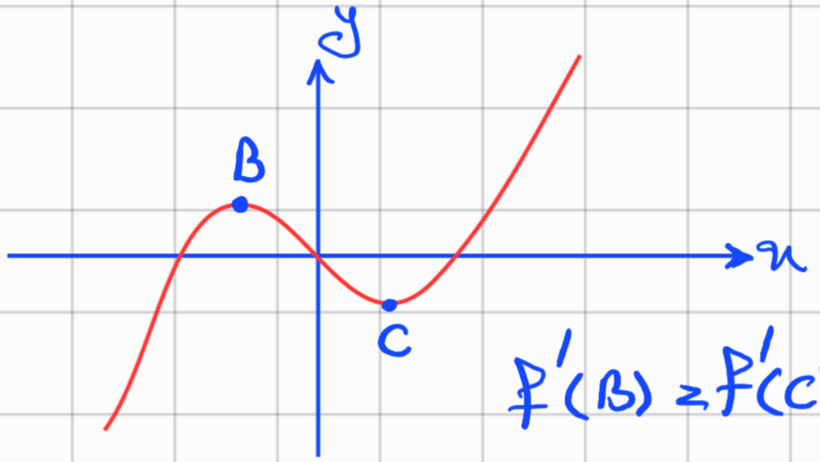
معادله خط مماس

۱۳	با توجه به نمودار مقابل مطلوب است:	
الف)	نقطهٔ A را روی نمودار طوری بیابید که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن منفی باشند	
ب)	نقاط B و C را طوری بیابید که مقدار تابع در آن‌ها قرینه و مشتق صفر داشته باشند	

الف)



ب)



$$f'(B)=f'(C)=0$$