

پاسخنامه تشریحی

۱

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

$$\text{الف) } t_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = \frac{100}{10} \rightarrow \boxed{t_{\max} = 10} \text{ ثانیه}$$

$$\text{ب) ارتفاع اوج } h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 \rightarrow \boxed{h_{\max} = 500} \text{ متر}$$

$$\text{پ) } h(t) = 0 \rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(20 - t) = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{زمان شروع پرتاب} \\ t = 20 \rightarrow \text{زمان بازگشت به زمین} \end{cases} \quad \boxed{t = 20} \text{ ثانیه}$$

۲

$$\text{زمان ویرایش رضا} = x \quad \text{زمان ویرایش دو نفر} = 1\frac{20}{60} = 1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \text{سرعت ویرایش دو نفر} = \text{سرعت ویرایش رضا} + \text{سرعت ویرایش علی}$$

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow \boxed{x = 4} \text{ ساعت}$$

۳

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} +$$

$$12a = -2 \rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{6}}, \quad \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$$

۴

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{x_A - 3}{2} \rightarrow -8 = x_A - 3 \rightarrow \boxed{x_A = -5} \rightarrow \boxed{A(-5, 0)}$$

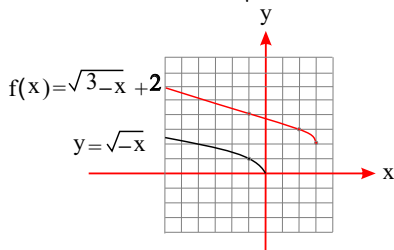
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{y_A + 2}{2} \rightarrow 2 = y_A + 2 \rightarrow \boxed{y_A = 0}$$

۵

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \times AH \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} AB \times AC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

$$y = \sqrt{-x} \text{ تابع نمودار تابع } y = \sqrt{-x} \text{ را رسم کنیم و آن را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.} \quad \boxed{f(x) = \sqrt{-(x-3)} + 2}$$

۶



۷

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

۸

$$y = (x+1)^{\sqrt{3}} - 4 \rightarrow y+4 = (x+1)^{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} = x+1 \rightarrow x = \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} - 1$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[\sqrt{3}]{x+4} - 1 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt[\sqrt{3}]{x+4} - 1 \end{cases}$$

۹

$$\frac{5a+2b}{5a+4b} = \frac{2}{3} \rightarrow 3(5a+2b) = 2(5a+4b) \rightarrow 15a+6b = 10a+8b$$

$$\rightarrow 15a-10a = 8b-6b \rightarrow 5a = 2b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{5}}$$

۱۰

$$\frac{x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - 2 = u \rightarrow u^{\sqrt{3}} - \sqrt{3}u + 6 = 0 \rightarrow (u-6)(u-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 6 \\ u = 1 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow \frac{x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 8 \rightarrow x^{\sqrt{3}} = 24 \rightarrow x = \pm \sqrt[3]{24} \rightarrow \boxed{\pm 2\sqrt{6}}$$

$$u = 1 \rightarrow \frac{x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = 3 \rightarrow x^{\sqrt{3}} = 9 \rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

الف - ۱۱

$$L: 2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m_L = \frac{3}{2}$$

$$T: y = mx + 5 \rightarrow m_T = m \rightarrow y = mx + 5 \rightarrow m_T = m$$

$$\text{موازی دو خط} \rightarrow m_L = m_T \rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

ب -

$$\text{عمود دو خط} \rightarrow m_L \cdot m_T = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \times m = -1 \rightarrow \boxed{m = -\frac{2}{3}}$$

۱۲

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{18}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{20}$$

مشاهده می شود که: $OA^2 + OB^2 = AB^2$ یعنی $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{20})^2$
 پس $AB =$ قطر مستطیل و OA و $OB =$ ضلع مستطیل \leftarrow

$$S = OA \times OB = \sqrt{18} \times \sqrt{2} \rightarrow S = \sqrt{36} \rightarrow \boxed{S = 6}$$

۱۳

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۱۴

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0
		ζ	ζ	ζ	ζ

$$\rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

۱۵

$\triangle ACE$ قائم الزاویه

$$\rightarrow AD \cdot DE = DC^2 \rightarrow 1 \times x = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 4}$$



نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۴۵ دقیقه

نام آزمون: ریاضی

نام مدرسه: مدرسه حضرت مریم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱

پایه: متوسطه ۲



زهرا دارابی

۱ راکتی که به طور عمودی روبه بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله آن به صورت مقابل است.

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

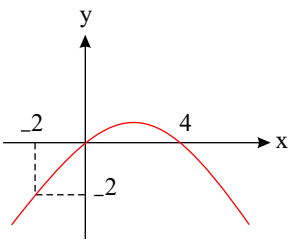
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، راکت به زمین بازمی‌گردد؟

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای

ویرایش ادبی جمله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود یک ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به

تنهایی کار ویرایش یک شماره از جمله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

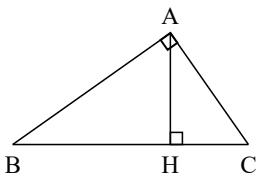
۳ در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ رسم شده است. ضرایب a و b و c را بدست آورید.



۴ نقطه $M(-4, 1)$ وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و $B(-3, 2)$ است. مختصات نقطه A را بیابید.

۵ در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت بدست آمده برای مساحت مثلث یک تناسب

بدست آورید.



۶ نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3-x} + 2$ را رسم کنید.

۷ وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ را بدست آورید.

۸ ضابطه وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x+1)^3 - 4 \end{cases}$$

۹ اگر $\frac{5a+2b}{5a+4b} = \frac{2}{3}$ باشد نسبت $\frac{a}{b}$ را بدست آورید.

۱۰ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$



۱۱ خط L به معادله $y - 3x = 1$ و خط T به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف - m را طوری بدست آورید که دو خط موازی باشند.

ب - m را طوری بدست آورید که دو خط بر یکدیگر عمود باشند.

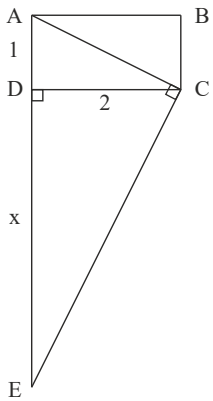
۱۲ نقاط $A(3, 3)$ ، $B(-1, 1)$ و $O(0, 0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل چقدر است؟

۱۳ وارون تابع $f = \{(2, 3), (-2, 1), (-1, 2)\}$ را بدست آورید.

۱۴ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$$

۱۵ در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک مستطیل را در نقطه‌ی E قطع کند.



مقدار x را بدست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$$

الف) $t_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-5)} = \frac{100}{10} \rightarrow t_{\max} = 10$ ثانیه

ب) ارتفاع اوج $h(10) = 100(10) - 5(10)^2 = 1000 - 500 \rightarrow h_{\max} = 500$ متر

پ) $h(t) = 0 \rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \rightarrow 5t(20 - t) = 0$

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow \text{زمان شروع پرتاب} \\ t = 20 \rightarrow \text{زمان بازگشت به زمین} \end{cases} \quad t = 20 \text{ ثانیه}$$

۲

رضایان ویرایش دو نفر، زمان ویرایش دو نفر، $x = 1 \frac{20}{60} = 1 \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

سرعت ویرایش دو نفر = سرعت ویرایش رضا + سرعت ویرایش علی

$$\frac{16}{2} + \frac{16}{x} = \frac{16}{\frac{4}{3}} \rightarrow 8 + \frac{16}{x} = 12 \rightarrow \frac{16}{x} = 4 \rightarrow x = 4 \text{ ساعت}$$

۳

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-2) = -2 \\ f(4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a - 2b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$12a = -2 \rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x$$

۴

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow -4 = \frac{x_A - 3}{2} \rightarrow -8 = x_A - 3 \rightarrow x_A = -5$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{y_A + 2}{2} \rightarrow 2 = y_A + 2 \rightarrow y_A = 0$$

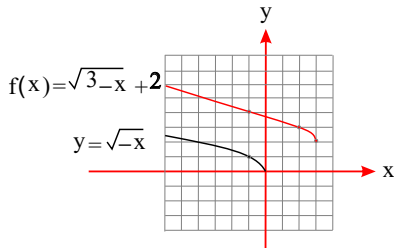
$\rightarrow A(-5, 0)$

۵

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \times AH \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \end{aligned} \right\} \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} AB \times AC \rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{AC}$$

۶

$f(x) = \sqrt{-(x-3)} + 2$ پس ابتدا باید نمودار تابع $y = \sqrt{-x}$ را رسم کنیم و آن را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم.



۷

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

۸

$$y = (x+1)^{\sqrt{3}} - 4 \rightarrow y+4 = (x+1)^{\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} = x+1 \rightarrow x = \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} - 1$$

$$\rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt[\sqrt{3}]{y+4} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[\sqrt{3}]{x+4} - 1 \rightarrow \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt[\sqrt{3}]{x+4} - 1 \end{cases}$$

۹

$$\frac{5a+2b}{5a+4b} = \frac{2}{3} \rightarrow 3(5a+2b) = 2(5a+4b) \rightarrow 15a+6b = 10a+8b$$

$$\rightarrow 15a-10a = 8b-6b \rightarrow 5a = 2b \rightarrow \boxed{\frac{a}{b} = \frac{2}{5}}$$

۱۰

$$\frac{x^2}{3} - 2 = u \rightarrow u^2 - 7u + 6 = 0 \rightarrow (u-6)(u-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} u = 6 \\ u = 1 \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm\sqrt{24} \rightarrow \boxed{\pm 2\sqrt{6}}$$

$$u = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

الف - ۱۱

$$L: 2y - 3x = 1 \rightarrow 2y = 3x + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \rightarrow m_L = \frac{3}{2}$$

$$T: y = mx + 5 \rightarrow m_T = m \rightarrow y = mx + 5 \rightarrow m_T = m$$

$$\text{موازی دو خط} \rightarrow m_L = m_T \rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

ب -

$$\text{عمود دو خط} \rightarrow m_L \cdot m_T = -1 \rightarrow \frac{3}{2} \times m = -1 \rightarrow \boxed{m = -\frac{2}{3}}$$

۱۲

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow OA = \sqrt{18}$$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow OB = \sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1-3)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{20}$$

مشاهده می شود که: $OA^2 + OB^2 = AB^2$ یعنی $(\sqrt{18})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{20})^2$
 پس AB قطر مستطیل و OA و OB ضلع مستطیل ←

$$S = OA \times OB = \sqrt{18} \times \sqrt{2} \rightarrow S = \sqrt{36} \rightarrow \boxed{S = 6}$$

۱۳

$$f^{-1} = \{(3, 2), (1, -2), (2, -1)\}$$

۱۴

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8} \rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0 \rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$x^2 - 6x + 8$		$+$	0	$-$	0
		ζ	ζ	ζ	ζ

$$\rightarrow D_f = (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$$

۱۵

$\triangle ACE$ قائم الزاویه

$$\rightarrow AD \cdot DE = DC^2 \rightarrow 1 \times x = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 4}$$