

	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.	۱
۰/۵	اگر برای ماتریس‌های متمایز A ، B و C داشته باشیم، $AB = AC$ ، آنگاه لزوماً $B = C$ است. پاسخ: نادرست	
۰/۵	مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویه بین آن دو خط می‌باشد. پاسخ: درست	
۰/۵	مکان هندسی مرکز همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ در صفحه این دایره مماس خارج‌اند، دایره $C'(O, 2r)$ است. درست	
۰/۵	رابطه $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 10 = 0$ معادله یک دایره است. پاسخ: نادرست	
	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.	۲
۰/۵	ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس می‌نامیم. پاسخ: ماتریس اسکالر	
۰/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $ A $ برابر است با پاسخ: -30	
	مکان هندسی را تعریف کنید.	۳
۱	مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که همه آنها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو آن مجموعه است.	
۱/۵	اگر درایه‌های ماتریس $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} i \cdot j & i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $2A - 3I$ را به دست آورید.	۴
	$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ $2A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$	
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x + y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $A = B$ ، در این صورت حاصل $(x + y + z)$ را بیابید.	۵
	$2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ $2x + y = 5 \rightarrow y = 2 \rightarrow x + y + z = \frac{3}{2}$ $z = -2$	

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که حاصل ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۱/۵

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & -8+2a \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -8+2a=0 \rightarrow a=4 \\ b-3=0 \rightarrow b=3 \end{cases}$$

۶

اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A| = -2$ ، حاصل $|A| \cdot A$ را بیابید.

۱

$$||A| \cdot A| = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times (-2) = 16$$

۷

وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

۱

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

۸

دستگاه $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۲

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, |A| = 2 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 3, y = 2$$

۹

نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

پاسخ: مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است این خط را d' می‌نامیم.

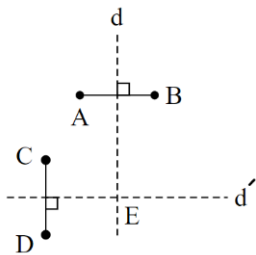
بنابراین نقطه برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطه E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد.

۱/۵



۱۰

معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2, 3)$ مرکز آن و $M(1, -1)$ یک نقطه از آن باشد.

۱/۵

$$r = OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$\text{معادله دایره: } (x - x_O)^2 + (y - y_O)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

۱۱

۱/۵	<p>معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.</p> $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ <p>$d : 4x + 3y + 5 = 0, O(2, -1) \rightarrow r = \frac{ 4(2) + 3(-1) + 5 }{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{10}{5} = 2$</p> <p>مرکز دایره $O(2, -1)$ و شعاع آن برابر $r = 2$ است. معادله دایره برابر با $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ است.</p>	۱۲
۱/۵	<p>وضعیت خط $3x + y = 0$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ مشخص کنید.</p> $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \rightarrow O(2, 2), r = 1$ $d = \frac{ 3(2) + 2 }{\sqrt{10}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \rightarrow d > r$ <p>خط، دایره را قطع نمی‌کند.</p>	۱۳
۱/۵	<p>دایره‌های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟</p> $C: x^2 + y^2 = 4, C': x^2 + y^2 - 2x = 4$ $O(0, 0), O'(1, 0) \quad r = 2, r' = \sqrt{5}$ $OO' = \sqrt{1^2 + 0} = 1 \Rightarrow r - r' = \sqrt{5} - 2 < OO' < r + r' = \sqrt{5} + 2 \Rightarrow$ <p>دو دایره متقاطع می‌باشند.</p>	۱۴
۲۰	موفق باشید	