

نمره به حروف:

نمره به عدد:

۲	<p><b>1</b> جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید: الف) حاصل <math>(72, [48, 120])</math> برابر است با..... ب) رقم یکان عدد <math>1393^{1899}</math> برابر..... است. پ) در گراف <math>G</math> با مجموعه رئوس <math>V = \{a, b, c, d, f\}</math> و مجموعه یال های <math>E = \{ac, ab, bc, bd, af, cf\}</math> مجموعه همسایه های باز رأس <math>a</math> برابر است با ..... ت) مجموع درجه های گراف <math>G</math> راسی <math>6</math> برابر <math>12</math> و مجموع درجه های گراف <math>\bar{G}</math> برابر با..... است.</p>
۲	<p><b>2</b> الف) ثابت کنید: <math>a^x + b^y + c^z \geq ab + ac + bc</math> ب) ثابت کنید اگر به حاصل ضرب دو عدد فرد متوالی یک واحد اضافه کنیم، حاصل مضرب <math>4</math> است.</p>
2/25	<p><b>3</b> گزاره های زیر را اثبات و یا با ارایه مثال نقض رد کنید: الف) حاصل ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. ب) اگر <math>p</math> عددی اول و <math>a \in \mathbb{Z}</math> و <math>a \not\equiv 1 \pmod{p}</math>، آنگاه معادله سیاله <math>ax + py = 19</math>، همواره دارای جواب است. پ) مربع هر عدد فرد به صورت <math>8q+1</math> است.</p>
۱/۵	<p><b>4</b> در یک تقسیم اگر به مقسوم <math>88</math> واحد و به مقسوم علیه <math>10</math> واحد اضافه کنیم از باقی مانده <math>2</math> واحد کم و خارج قسمت تغییری نمی کند خارج قسمت را به دست آورید.</p>
1/۵	<p><b>5</b> ثابت کنید <math>29 \mid 2^{90} + 5^{90}</math></p>

۲	۲۰ کیلوگرم شکر را می خواهیم در بسته های ۳ کیلویی و ۲ کیلویی بسته بندی کنیم تمام حالت های ممکن را مشخص کنید .	6
2/25	<p>الف) ثابت کنید <math>2^{4n} - 1</math> بر ۳ تقسیم پذیر است.</p> <p>ب) هر گاه سال نو با یکشنبه آغاز شود 22 آذر چه روزی است؟</p> <p>پ) رقم یکان عدد <math>23^{23} - 17^{17}</math> را بیابید.</p>	7
2/5	<p>در گراف <math>G(V, E)</math> داریم <math>V = \{a, b, c, d, e, f\}</math> و <math>E = \{ab, af, bd, bf, cf, df, ce\}</math></p> <p>الف) گراف را رسم کنید.</p> <p>ب) مقدار <math>\Delta</math> و <math>\delta</math> را تعیین کنید.</p> <p>پ) مجموعه <math>N_G(b)</math> را مشخص کنید.</p> <p>ت) همه دورهای بطول ۳ را در این گراف را بنویسید.</p> <p>ث) چند یال جدید به گراف اضافه کنیم تا گرافی کامل به دست آید؟</p>	8
۱/۵	گرافی از مرتبه ۱۲ و اندازه ی ۲۲ فقط رئوس از درجه ۳ و ۵ دارد، این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟	9
۰/۵	گراف ناهمبندی از مرتبه ۶ بیشترین تعداد یال ممکن را دارد نمودار این گراف را رسم کنید.	10
۲	<p>گراف ساده <math>G</math> سه منتظم است و تعداد یال هایش ۴ واحد بیشتر از تعداد راس های آن است.</p> <p>الف) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.</p> <p>ب) گرافی همبند و گرافی ناهمبند با این مشخصات رسم کنید.</p>	11

$\mathbb{N} (= \mathbb{N}_G(a) = \{b, c, f\}) \quad \forall \quad \mathbb{Z} \quad (1) - 1$

$a^r + b^r + c^r \geq ab + ac + bc \iff x^r \quad \forall a^r + r b^r + r c^r \geq r a b + r a c + r b c \quad (1) - 2$

$\iff \forall a^r + r b^r + r c^r - r a b - r a c - r b c \geq 0 \iff a^r - r a b + b^r + a^r - r a c + c^r + b^r - r b c + c^r \geq 0$

$\iff (a-b)^r + (a-c)^r + (b-c)^r \geq 0$  *حاصل می شود از نامساوی های نامعکوس*

$a = 2k-1 \quad b = 2k+1 \quad a \times b = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$   
 $a \times b + 1 = 4k^2 - 1 + 1 = 4k^2 \quad \checkmark$  (1) - 2

$a = 0 \quad b = \sqrt{2} \quad a \times b = 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$  *مساوی است* (1) - 3

$P \nmid a \implies (p, a) = 1 \mid a$  *مساوی است* (1) - 3

$a = 2k+1 \xrightarrow{r} a^r = (2k+1)^r = 4k^r + 4k^{r-1} + \dots = 4k(k+1) + 1 = 4 \times q + 1 = 4q+1$   
*حاصل می شود از فرمول*

$a = bq + r \implies bq + r + \mathbb{N} = bq + 1 \cdot q + r - r$   
 $a + \mathbb{N} = (b+1)q + r - r \implies 1 \cdot q = a \implies \boxed{q = a}$  (1) - 4

$2q \mid 2^a + \Delta^a \implies 2^r + \Delta^r \mid 2^a + \Delta^a \implies \frac{2^a}{2^r} = \frac{\Delta^a}{\Delta^r} = \mathbb{E}$  (1) - 5

*چون نسبت توان ها هم برابر است پس برابری در توان ها نیز برقرار است.*

$2m + 2j = 2 \quad (2, 2) = 1 \mid 2$  *مساوی است* (1) - 6

$2m \equiv 2 \pmod{2} \implies x \equiv 1 \pmod{2} \implies x = 2k+1 \quad k \geq -1$   
 $\implies -1 \leq k \leq 1$

$2(2k+1) + 2j = 2 \implies j = -2k \quad k \leq 1$

*فقط سه توان است که این شرط را برآورده می کند.*

k	-1	0	1	
x	1	2	3	1
j	2	0	-2	0

2.3.2

$$r^n \equiv 1 \pmod{n} \quad (r^n)^n \equiv 1^n \pmod{n} \rightarrow r^{n^2} \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^{n-1} \equiv r \pmod{n} \quad (\text{الف - 1})$$

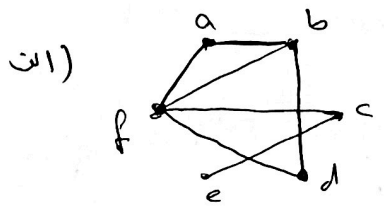
افترض  $r \equiv 1 \pmod{n}$  بمسألة

$$r^2 \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow 4 \times r^2 + r^2 + r^2 \equiv 4r^2 + r^2 + r^2 \equiv 6r^2 \equiv 2 \pmod{n} \rightarrow \text{دعنا}$$

$$r^2 \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^2 \equiv (-1) \pmod{n} \rightarrow r^4 \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^4 \equiv -1 \pmod{n} \rightarrow r^8 \equiv 1 \pmod{n}$$

$$r^4 \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^8 \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^8 \equiv (-1) \pmod{n} \rightarrow r^{16} \equiv 1 \pmod{n} \rightarrow r^{16} \equiv -1 \pmod{n}$$

$$r^8 - r^8 \equiv 1 - 1 \equiv 0$$



$\delta = 1, \Delta = 4$

$N_G(b) = \{a, d, e\}$

abfa / bfbdb

$q_G = 5$  1d - v < n كيفية

$q_{K_5} = \binom{5}{2} = 10$

$$\underbrace{d, d, \dots, d}_{\omega, x} + \underbrace{r, r, \dots, r}_{\omega, y} \quad \begin{cases} x+y=14 \\ \omega x + r y = 24 = 4 \times 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=14 \\ \omega x + r y = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -r x - r y = -14r \\ \omega x + r y = 24 \end{cases}$$

$$r x = 14 \rightarrow x = 7 \rightarrow y = 7$$

$r p = r q \rightarrow r p = r q$  (الف - 11)

$q = p + 4 \rightarrow r q = r p + 4$  [p=7], [q=11]

